

Bài I. (1,5 điểm)

1. Một cuộc điều tra về thời gian một nhóm học sinh làm một bài kiểm tra trắc nghiệm cho kết quả như sau:

Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)
Tần số	1	5	9	5

Cho biết có bao nhiêu học sinh tham gia điều tra và lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho kết quả điều tra.

2. Một toà nhà chung cư có 30 tầng, các tầng được đánh số lần lượt từ 1 đến 30. Bạn Bình vào thang máy ở tầng 1, bấm chọn ngẫu nhiên số của một tầng để đi lên. Tính xác suất của biến cố A : “Bình đi lên tầng có số là một số nguyên tố”.

Bài II. (1,5 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.
- Tìm tất cả giá trị của x để $A - B < 0$.

Bài III. (2,5 điểm)

1. Một công ty cần giao những kiện hàng đến địa điểm cách công ty 42km. Công ty này đã thuê một đơn vị vận tải chở số hàng này đi giao. Cho biết bảng giá vận tải như hình bên. Hãy tính số tiền công ty phải trả khi thuê một xe 1,4 tấn để vận chuyển hàng.
2. Theo kế hoạch, một đội sản xuất dự định làm 75 sản phẩm trong một số ngày. Trên thực tế, do cải tiến về cách tổ chức nên mỗi ngày đội làm được nhiều hơn 5 sản phẩm so với kế hoạch. Vì vậy đội đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày và làm được thêm 5 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày đội sản xuất phải làm bao nhiêu sản phẩm?

Loại Xe	4 km đầu tiên (đồng)	Km thứ 5 đến km thứ 40 (đồng/km)	Từ km thứ 40 trở đi (đồng/km)
Xe 500 kg	300.000 đ	18.000 đ	12.000 đ
Xe 750 kg	400.000 đ	19.000 đ	13.000 đ
Xe 1 tấn	600.000 đ	22.000 đ	16.000 đ
Xe 1,4 tấn	700.000 đ	23.000 đ	17.000 đ

3. Cho phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải

phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{9x_1 + 1} + \sqrt{11x_2 + 6} - 10$.

Bài 4. (4,0 điểm)

- Bạn An đi mua một cây lăn sơn có dạng một khối trụ với bán kính đáy là 5 cm và chiều cao là 23 cm. Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 1000 vòng thì cây sơn tường có thể bị hỏng. Hỏi bạn An cần mua ít nhất mấy cây lăn sơn tường biết diện tích tường cần sơn là 3100 cm^2 (cho $\pi = 3,14$).
- Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC < CB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho $\angle COD$ vuông. Gọi E là giao điểm của AD và BC , F là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của EF .
 - Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp.
 - Chứng minh: $FC.FA = FD.FB$ và IC là tiếp tuyến của (O) .
 - Khi điểm C thay đổi thoả mãn điều kiện bài toán thì điểm E di chuyển trên một đường tròn cố định, hãy xác định tâm và tính bán kính của đường tròn đó theo R .

Bài 5. (0,5 điểm)

Trên một khu vườn hình vuông ABCD có diện tích là 100m^2 , người ta xác định phần diện tích trồng hoa như sau: Lấy một điểm H trên đường chéo AC, dựng hình chiếu của H trên AB và BC lần lượt là M và N. Phần diện tích trồng hoa là tam giác DMN. Hỏi điểm H nằm vị trí nào trên AC thì diện tích trồng hoa sẽ là nhỏ nhất. Và diện tích đó bằng bao nhiêu?

HẾT

Học sinh được sử dụng máy tính cầm tay để làm bài.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Ý	Đáp án	Điểm										
1 1,5 điểm	1.	Một cuộc điều tra về thời gian một nhóm học sinh làm một bài kiểm tra trắc nghiệm cho kết quả như sau:	0,75										
		<table border="1"> <tr> <td>Thời gian (phút)</td> <td>[0;5)</td> <td>[5;10)</td> <td>[10;15)</td> <td>[15;20)</td> </tr> <tr> <td>Tần số</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>9</td> <td>5</td> </tr> </table>		Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	Tần số	1	5	9	5
		Thời gian (phút)		[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)						
Tần số	1	5	9	5									
Cho biết có bao nhiêu học sinh tham gia điều tra và lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho kết quả điều tra.													
		Có tất cả: $1 + 5 + 9 + 5 = 20$ học sinh tham gia	0,25										
		Bảng tần số tương đối ghép nhóm cho kết quả trên là:	0,5										
		<table border="1"> <tr> <td>Thời gian (phút)</td> <td>[0;5)</td> <td>[5;10)</td> <td>[10;15)</td> <td>[15;20)</td> </tr> <tr> <td>Tần số tương đối</td> <td>5%</td> <td>25%</td> <td>45%</td> <td>25%</td> </tr> </table>		Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	Tần số tương đối	5%	25%	45%	25%
Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)									
Tần số tương đối	5%	25%	45%	25%									

	2.	Một toà nhà chung cư có 30 tầng, các tầng được đánh số lần lượt từ 1 đến 30. Bạn Bình vào thang máy ở tầng 1, bấm chọn ngẫu nhiên số của một tầng để đi lên. Tính xác suất của biến cố A: “Bình đi lên tầng có số là một số nguyên tố”.	0,75
		Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{2; 3; \dots; 29; 30\}$. Ω có 29 phần tử.	0,25
		Có 10 kết quả thuận lợi cho biến cố A là 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29.	0,25
		Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{10}{29}$.	0,25
2 1,5 điểm	a.	Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.	0,5
		Thay $x = 16$ (tmdk) vào biểu thức A, ta có	0,25
		$A = \frac{16}{\sqrt{16} - 3} = \frac{16}{4 - 3} = 16$ Vậy với $x = 16$ thì $A = 16$.	0,25
	b.	Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$	0,5
		$B = \frac{2x - 3}{x - 3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2x - 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}$	0,25
		$B = \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$	0,25
	c.	Tìm tất cả giá trị của x để $A - B < 0$.	
		$A - B < 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} < 0 \Rightarrow \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 3} < 0$	0,25
		Ta có: $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$ Do đó: $\begin{cases} \sqrt{x} - 3 < 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 3 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện ta có: $0 < x < 9$ và $x \neq 1$ Vậy với $0 < x < 9$ và $x \neq 1$ thì $A - B < 0$.	0,25
3 2,5 điểm	1.	Một công ty cần giao những kiện hàng đến địa điểm cách công ty 42km. Công ty này đã thuê một đơn vị vận tải chở số hàng này đi giao. Cho biết bảng giá vận tải như hình bên. Hãy tính số tiền công ty phải trả khi thuê một xe 1,4 tấn để vận chuyển hàng.	0,75

	Số tiền công ty phải trả cho 4 km đầu tiên là: 700 000 (đồng)	
	Số tiền công ty phải trả từ km 5 đến km 40 là: $23000 \cdot 36 = 828\ 000$ (đồng)	0,25
	Số tiền công ty phải trả cho km thứ 41 và 42 là $2 \cdot 17\ 000 = 34\ 000$ (đồng)	0,25
	Tổng số tiền công ty phải trả là $700\ 000 + 828\ 000 + 34\ 000 = 1\ 562\ 000$ (đồng)	0,25
2.	Theo kế hoạch, một đội sản xuất dự định làm 75 sản phẩm trong một số ngày. Trên thực tế, do cải tiến về cách tổ chức nên mỗi ngày đội làm được nhiều hơn 5 sản phẩm so với kế hoạch. Vì vậy đội đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày và làm được thêm 5 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày đội sản xuất phải làm bao nhiêu sản phẩm?	1,0
	Gọi số sản phẩm mà đội phải làm theo kế hoạch trong một ngày là x (sản phẩm) $x \in \bullet^*, x < 75$)	0,25
	Số sản phẩm đội làm theo kế hoạch là 75 sản phẩm	0,25
	Thời gian đội hoàn thành theo kế hoạch là $\frac{75}{x}$ ngày.	0,25
	Thực tế, mỗi ngày đội hoàn thành được $x + 5$ sản phẩm. Thực tế số sản phẩm đội hoàn thành được là $75 + 5 = 80$ (sản phẩm) Thực tế, thời gian hoàn thành là $\frac{80}{x}$ ngày.	0,25
	Thực tế, đội hoàn thành trước 1 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình: $\frac{80}{x+5} + 1 = \frac{75}{x}$ $\frac{80+x+5}{x+5} = \frac{75}{x}$ $x^2 + 80x + 5x = 75x + 375$ $x^2 + 10x - 375 = 0$ $(x-15)(x+25) = 0$ Trường hợp 1: $x = 15$ (thỏa mãn) Trường hợp 2: $x = -25$ (loại) Vậy theo kế hoạch mỗi ngày đội phải hoàn thành 15 sản phẩm.	0,25
3.	Cho phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{9x_1 + 1} + \sqrt{11x_2 + 6} - 10$.	0,75
	Do phương trình có hai nghiệm nên theo định lí Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 > 0$	0,25
	Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình nên ta có:	0,25

		$x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 + 4x_1 + 4 = 9x_1 + 1 \Rightarrow (x_1 + 2)^2 = 9x_1 + 1$ $x_2^2 - 5x_2 + 3 = 0 \Rightarrow x_2^2 + 6x_2 + 9 = 11x_2 + 6 \Rightarrow (x_2 + 3)^2 = 11x_2 + 6$	
		<p>Khi đó, ta có:</p> $A = \sqrt{(x_1 + 2)^2} + \sqrt{(x_2 + 3)^2} - 10$ $A = x_1 + 2 + x_2 + 3 - 10$ $A = x_1 + 2 + x_2 + 3 - 10 (x_1, x_2 > 0)$ $A = x_1 + x_2 - 5$ $A = 5 - 5 = 0$ <p>Vậy giá trị của biểu thức A bằng 0.</p>	0,25
4 4,0 điểm	1.	Bạn Toán đi mua một cây lăn sơn tường có dạng một khối trụ với bán kính đáy là 5 cm và chiều cao là 23 cm. Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 1000 vòng thì cây sơn tường có thể bị hỏng. Hỏi bạn Toán cần mua ít nhất mấy cây lăn sơn tường biết diện tích tường mà bố bạn Toán cần sơn là 3100 cm^2 (Cho $\pi = 3,14$)	1,0
		Diện tích tường được sơn khi lăn cây lăn sơn một vòng bằng diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính 5 cm và chiều cao 23 cm.	0,25
		Diện tích xung quanh của hình trụ bằng: $S_{xq} = 2\pi rh = 2.5.23.\pi = 230\pi \text{ (cm}^2\text{)}$	0,25
		Diện tích mỗi cây sơn có thể sơn được là $1000.S_{xq} = 230000\pi \text{ (cm}^2\text{)}$	0,25
		Vì $3100 < 230000 \pi$ nên số cây lăn sơn tối thiểu cần phải mua là 1 cây.	0,25
		2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC < CB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AD và BC , F là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của EF .	3,0
	a. Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp	1,0	
	Giả sử I là trung điểm của EF Xét (O) có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $BC \perp AF$	0,5	

	Nên $\triangle BCF$ hay $\triangle ECF$ vuông tại C, có CI là đường trung tuyến nên $CI = IE = IF = \frac{EF}{2}$	
	$\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AD \perp BF$ Nên $\triangle ADF$ hay $\triangle EDF$ vuông tại C, có DI là đường trung tuyến nên $DI = IE = IF = \frac{EF}{2}$ Khi đó $CI = DI = IE = IF$ suy ra tứ giác FCED nội tiếp đường tròn tâm I đường kính EF	0,5
b.	Chứng minh: $FC.FA = FD.FB$ và IC là tiếp tuyến của (O)	1,5
	Tam giác vuông FDA đồng dạng với tam giác vuông FCB (gg) $\frac{FA}{FB} = \frac{FD}{FC}$ (2 cặp cạnh tương ứng)	0,25
	$FC.FA = FD.FB$ (đpcm)	0,25
	Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCED nên $CI = IF$ khi đó $\triangle ICF$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{ICF}$ (1)	0,25
	Xét $\triangle OAC$ cân tại O nên $\widehat{AOC} = \widehat{OCA}$ (2)	0,25
	Xét $\triangle ABF$ có BC, AD là hai đường cao cắt nhau tại E. Nên E là trực tâm của $\triangle ABF$ Nên $EF \perp AB \Rightarrow \widehat{F_1} + \widehat{AOC} = 90^\circ$ (3)	0,25
	Từ (1); (2); (3) nên $\widehat{ICF} + \widehat{OCA} = 90^\circ$ Do đó $\widehat{OCI} = 90^\circ$ hay $OC \perp CI$ Vậy CI là tiếp tuyến của đường tròn (O)	0,25
c.	Khi điểm C thay đổi thỏa mãn điều kiện bài toán thì điểm E di chuyển trên một đường tròn cố định, hãy xác định tâm và tính bán kính của đường tròn đó theo R.	0,5
	Ta có $\left. \begin{array}{l} \widehat{O_1} + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 180^\circ \\ \vartheta_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ nên } \vartheta_1 + \vartheta_3 = 90^\circ$ Xét (O) ta có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \widehat{O_1} \\ \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \vartheta_3 \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ Xét $\triangle AEB$ ta có $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 45^\circ$ nên $\widehat{AEB} = 135^\circ$ Qua A kẻ $Ax \perp AE$. Qua B kẻ $By \perp BE$. $By \cap Ax = K$ Xét tứ giác $EAKB$ ta có $\left. \begin{array}{l} \widehat{KAE} = 90^\circ (Ax \perp AE) \\ \widehat{KBE} = 90^\circ (By \perp BE) \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{KAE} + \widehat{KBE} = 180^\circ$	0,25

	<p>Mà hai góc nằm tại hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $EAKB$ nội tiếp. $\widehat{AKB} + \widehat{AEB} = 180^\circ$ nên $\widehat{AKB} = 45^\circ$ Gọi H là trung điểm của EK. nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác</p>	
	<p>Xét (H) : $\widehat{AKB} = \frac{1}{2} \widehat{AHB} \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ$. Xét $\triangle AHB$ ($\widehat{AHB} = 90^\circ$) có : $HA = HB$ (bán kính đường tròn tâm H) nên $\triangle AHB$ vuông cân tại H. Mà AB không đổi nên H cố định. Áp dụng định lí Pytago vào $\triangle AHB$ ta có: $HA^2 + HB^2 = AB^2$ $2HA^2 = 4R^2$ $HA^2 = 2R^2$ $HA = \sqrt{2}R$ Vậy khi C thay đổi E chạy trên đường tròn (H; $\sqrt{2}R$) cố định.</p>	0,25
5 0,5 điểm	<p>Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 100 cm^2. Gọi H là một điểm bất kì nằm trên đường chéo AC. Kẻ HM vuông góc với AB tại M, HN vuông góc với BC tại N. Khi điểm H di chuyển trên cạnh AC thì diện tích nhỏ nhất của tam giác DMN bằng bao nhiêu?</p>	0,5
	<p>Ta có $ABCD$ có diện tích bằng 100 cm^2 nên $AB = BC = CD = CA = 10(\text{cm})$ và $S_{ABC} = 50 (\text{cm}^2)$ $S_{DMN} = S_{DHM} + S_{DHN} + S_{MHN}$ $= S_{AHM} + S_{CHN} + S_{MHN}$ $= S_{AMNC}$ $= S_{ABC} - S_{BMN}$ Do S_{ABC} cố định nên để S_{DMN} nhỏ nhất thì S_{BMN} lớn nhất</p>	0,25
	<p>Ta có $BMHN$ là hình chữ nhật nên $BN = MH$ AMN là tam giác vuông cân nên $MH = MA \Rightarrow BN = MA$ Ta có $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b$ Ta có $S_{BMN} = \frac{1}{2} BM \cdot BN \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(BM + BN)^2}{4} = \frac{(BM + MA)^2}{8} = \frac{AB^2}{8} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$ Dấu “=” xảy ra khi $BM = BN \Rightarrow BMHN$ là hình vuông hay H là trung điểm AC Khi đó, $S_{DMN} = S_{ABC} - S_{BMN} = 50 - \frac{25}{2} = \frac{75}{2} (\text{cm}^2)$ Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác DMN bằng $\frac{75}{2} \text{ cm}^2$ khi H là trung điểm AC</p>	0,25

