

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức: $A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2024}{2025}$

b) Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 - 1 = 15$. Tính giá trị của biểu thức $B = x + y + z$.

c) Cho $a + b + c = 2070$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{90}$

Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Câu 2 (4,0 điểm).

- a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, biết $p + 2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p + 1$ chia hết cho 6.
- b) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $f(-1); f(0); f(1)$ đều chia hết cho 3. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3.
- c) Tìm các số nguyên x, y biết $2xy - x - y = 2$.

Câu 3 (3,0 điểm).

- a) Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho 3 lớp tỉ lệ với 5 : 6 : 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4 : 5 : 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua.
- b) Biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$ ($a, b, c \neq 0$). Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O. Từ O kẻ OF vuông góc với BC, OH vuông góc với AC (F thuộc BC, H thuộc AC). Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI.

- a) Chứng minh tam giác FCH cân ;
- b) Chứng minh $AK = KI$;
- c) Chứng minh 3 điểm B, O, K thẳng hàng.

Câu 5 (2,0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và b (n là số nguyên dương nào đó)

thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $b > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$ và $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{b}\right)$.

— Hết —

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

A. LƯU Ý CHUNG

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm, bài học sinh có thể làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.

- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

B. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM.

Câu 1 (5,0 điểm).

Ý	Nội dung trình bày	Điểm
a	Ta có: $A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2024}{2025}$	0,5
	$= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2024}{2025}$	
	$= \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) : \frac{2024}{2025}$	
	$= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2024}{2025} = 0. \text{ Vậy } A = 0$	
	Từ giả thiết, ta có: $2x^3 - 1 = 15$ $2x^3 = 16$ $x^3 = 8$ $x^3 = 2^3$ Nên $x = 2$.	0,5
	Suy ra: $\frac{18}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$	0,25

b	$\frac{18}{9} = \frac{y-25}{16}$ $y-25=32$ $y=57.$	0,5
	$\frac{18}{9} = \frac{z+9}{25}$ $z+9=50$ $z=41.$	0,5
	Vậy $B = x + y + z = 2 + 57 + 41 = 100.$	0,25
c	Ta có $C = \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 - 3$ $C = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3$	0,5
	$C = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$	0,5
	$C = 2070 \cdot \frac{1}{90} - 3 = 23 - 3 = 20$	0,5

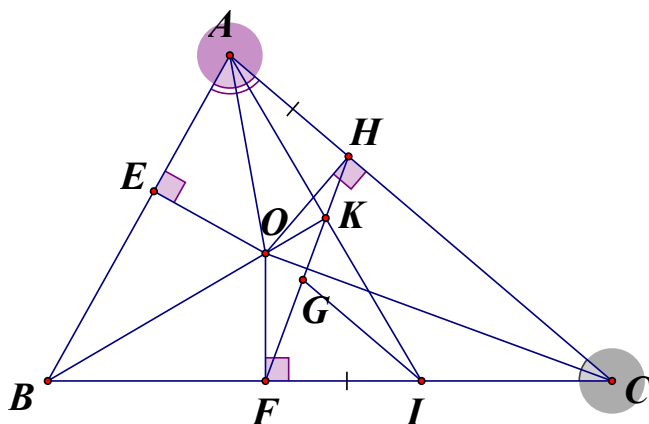
Câu 2 (4,0 điểm).

Ý	Nội dung trình bày	Điểm
a	Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó p + 1 chẵn nên $(p+1) : 2 \quad (1)$	0,5
	Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)	0,25
	Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3$ Suy ra p + 2 không là số nguyên tố nên $p = 3k + 1$ không xảy ra.	0,25
	Do đó $p = 3k + 2$ $p + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3 \quad (2)$	0,25
	Vì $(2;3) = 1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p+1) : 6$	0,25
b	Ta có: $f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c$	0,25
	$+) f(0) : 3 \text{ suy ra } c : 3$ $+) f(1) : 3 \text{ suy ra } a + b + c : 3 \text{ suy ra } a + b : 3 \quad (1)$ $+) f(-1) : 3 \text{ suy ra } a - b + c : 3 \text{ suy ra } a - b : 3 \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) Suy ra $(a+b) + (a-b) : 3$ suy ra $2a : 3$ hay $a : 3$ vì $(2;3) = 1$ nên $b : 3$ Vậy a, b, c đều chia hết cho 3	0,25
c	$2xy - x - y = 2$ $4xy - 2x - 2y = 4$	0,25
	$(2y-1)(2x-1) = 5$	0,25
	Học sinh xét 4 trường hợp tìm ra $(x; y) = \{(1;3); (3;1); (-2;0); (0;-2)\}$	0,25
	Vậy $(x; y) = \{(1;3); (3;1); (-2;0); (0;-2)\}$	0,25

Câu 3 (3,0 điểm).

Ý	Nội dung trình bày	Điểm
a	Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0) Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a, b, c Ta có: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18}$ suy ra $a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$ (1)	0,5
	Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ta có: $\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15}$ suy ra $a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15}$ (2)	0,5
	So sánh (1) và (2) ta có $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc ban đầu Vậy $c' - c = 4$ hay $\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4$ hay $\frac{x}{90} = 4$ suy ra $x = 360$ (t/m) Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.	0,5
b	Từ giả thiết ta có $a, b, c \neq 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{a(bz - cy)}{a^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{c(ay - bx)}{c^2}$	0,5
	Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{a(bz - cy)}{a^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{c(ay - bx)}{c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$	0,5
	Ta có $bz - cy = 0$ nên $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ Tương tự ta có $\frac{z}{c} = \frac{x}{a}; \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Từ đó suy ra: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Vậy $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.	0,5

Câu 4 (6,0 điểm)

Ý	Nội dung trình bày	Điểm
		
	Ta có $\widehat{CHO} = \widehat{CFO} = 90^\circ$ (vì $OH \perp AC$; $OF \perp BC$)	0,5
	Xét $\triangle CHO$ vuông tại H và $\triangle CFO$ vuông tại F có: OC chung; $\widehat{HCO} = \widehat{FCO}$ (vì CO là tia phân giác $\widehat{C}$)	0,5

a	Vậy $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)	0,5
	Do đó: $CH = CF$ (2 cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau) Vậy $\triangle FCH$ cân tại C (tam giác có 2 cạnh bằng nhau)	0,5
b	+ Qua I vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)	0,25
	Ta có $\triangle FCH$ cân tại C (cm trên), suy ra $\widehat{CHF} = \widehat{CFH}$ (2 góc ở đáy của tam giác cân) (1)	0,25
	Mà $\widehat{CHF} = \widehat{FGI}$ (hai góc đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)	0,25
	Từ (1),(2) suy ra $\widehat{CFH} = \widehat{FGI}$ hay $\widehat{IFG} = \widehat{IGF}$	
	Vậy $\triangle IFG$ cân tại I nên $FI = GI$ (hai cạnh bên của tam giác cân)	0,25
	Mặt khác $FI = AH$ Nên $GI = AH$ (cùng bằng FI)	0,25
	Lại có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$ (hai góc so le trong, $IG \parallel AC$) $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (hai góc so le trong, $IG \parallel AC$)	0,25
	Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$ (cm trên) $GI = AH$ (cm trên) $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (cm trên) Vậy $\triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g)	0,25
	Do đó $AK = KI$ (2 cạnh tương ứng của 2 tam giác bằng nhau)	0,25
c	Vẽ $OE \perp AB$ tại E + Xét $\triangle OAE$ vuông tại E và $\triangle OAH$ vuông tại H có : OA chung; $\widehat{OAE} = \widehat{OAH}$ (vì AO là tia phân giác $\widehat{A}$) Vậy $\triangle OAE = \triangle OAH$ (cạnh huyền – góc nhọn) Suy ra $OE = OH$ (2 cạnh tương ứng của 2 tam giác bằng nhau) Lại có $OH = OF$ (vì $\triangle CHO = \triangle CFO$) Do đó $OE = OF$	0,5
	+ Xét $\triangle OBE$ vuông tại E và $\triangle OBF$ vuông tại F có : OB chung; $OE = OF$ (cm trên) Vậy $\triangle OBE = \triangle OBF$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) Suy ra $\widehat{OBE} = \widehat{OBF}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau) Mà tia BO nằm giữa hai tia BE, BF Suy ra BO là tia phân giác của $\widehat{EBF}$ hay BO là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ (*)	0,5
	Ta có $BA = BE + AE$; $BI = BF + FI$; $BE = BF$ (vì $\triangle OBE = \triangle OBF$); $AE = AH$ (vì $\triangle OAE = \triangle OAH$); $AH = FI$ (giả thiết) Do đó $BA = BI$	0,25
	Nối B với K Xét $\triangle BKA$ và $\triangle BKI$ có: $BA = BI$ (cm trên) $KA = KI$ (cm trên) BK là cạnh chung Vậy $\triangle BKA = \triangle BKI$ (c.c.c)	
	Suy ra $\widehat{ABK} = \widehat{IBK}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau) Mà tia BK nằm giữa hai tia BA, BC	0,5

	Do đó BK là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ (* *)	
	Từ (*) và (* *) suy ra tia BK và tia BO trùng nhau Hay B, O, K là 3 điểm thẳng hàng	0,25

Câu 6 (2,0 điểm).

Ý	Nội dung trình bày	Điểm
	Vì $a_1, a_2, \dots, a_n$ và b là các số nguyên dương (n là số nguyên dương nào đó) thỏa mãn $b > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$ Suy ra $b \geq 3$ Ta có $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}$ $1 - \frac{1}{b} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $2\left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq \frac{4}{3} (*)$	0,75
	Lại có: $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$ Suy ra $0 < \frac{1}{a_1} < \frac{1}{a_2} < \dots < \frac{1}{a_n} < 1$	0,25
	Suy ra: $\begin{cases} 0 < 1 - \frac{1}{a_1} < 1 \\ 0 < 1 - \frac{1}{a_2} < 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) < 1 (**) \\ \dots \\ 0 < 1 - \frac{1}{a_n} < 1 \end{cases}$	0,75
	Từ (*) và (**) suy ra điều mâu thuẫn với $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right).$ Vậy ko tồn tại các số nguyên dương thỏa mãn bài ra.	0,25

-----**Hết**-----

Xem thêm: ĐỀ THI GIỮA HK2 TOÁN 7
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-giua-hk2-toan-7>