

ĐA
DIỄN



TỔ
TÍCH
KHOI
ĐA
DIỄN

Hình
thức
không
gian

NỘI DUNG	TRANG
Bài 1&2. Đa diện, đa diện lồi, đa diện đều	1
Dạng 1. Nhận diện hình (khối) đa diện, đa diện lồi	3
Dạng 2. Tìm số đỉnh, số cạnh, số mặt của một hình đa diện	5
Dạng 3. Tâm đối xứng, trục đối xứng, mặt đối xứng, lắp ghép đa diện	6
Bài tập trắc nghiệm	9
Đáp án bài tập trắc nghiệm	14
Bài 3. Thể tích khối đa diện	15
Dạng 1. Tìm thể tích khối chóp	20
Bài toán 1. Tìm thể tích khối chóp bằng các phép tính đơn giản	21
Bài toán 2. Tìm thể tích khối chóp thông qua góc	24
Bài toán 3. Tỷ số thể tích khối chóp	31
Dạng 2. Thể tích khối lăng trụ	38
Bài toán 1. Tìm thể tích khối lăng trụ bằng phép tính đơn giản	38
Bài toán 2. Tìm thể tích khối lăng trụ thông qua góc	41
Bài toán 3. Tỷ số thể tích khối lăng trụ	46
Bài toán 4. Lăng trụ ẩn	51
Dạng 3. Max-Min thể tích	53
Bài toán 1. Điều kiện về cạnh trong hình chóp	54
Bài toán 2. Điều kiện về cạnh trong lăng trụ	57
Bài toán 3. Điều kiện về góc	59
Bài toán 4. Bài toán tối ưu	62
Bài tập trắc nghiệm	66
Đáp án bài tập trắc nghiệm	101
Bài 4. Khoảng cách trong không gian	102
Dạng 1. Khoảng cách điểm đến mặt phẳng	102
Bài toán 1. Sử dụng công thức thể tích để tìm khoảng cách	103
Bài toán 2. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng chứa đường cao hình chóp	105
Bài toán 3. Khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt bên	107
Bài toán 4. Khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt bên của hình chóp	111
Dạng 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	115
Dạng 3. Các khoảng cách đối với lăng trụ	120
Dạng 4. Thể tích khối đa diện liên quan khoảng cách	125
Bài tập trắc nghiệm	129
Đáp án Bài tập trắc nghiệm	141

CHƯƠNG I

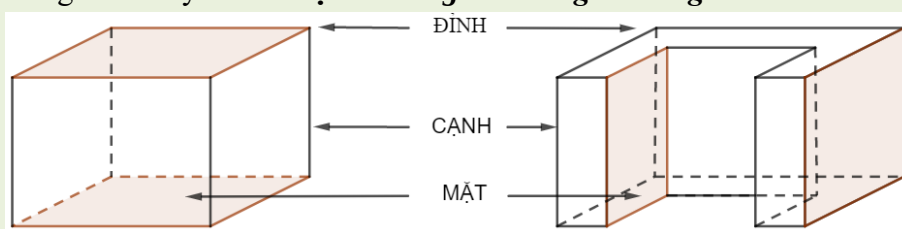
ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

§1-2. ĐA DIỆN, ĐA DIỆN LỖI, ĐA DIỆN ĐỀU

I – HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN:

1. Hình đa diện: Là hình được tạo bởi một số hữu hạn đa giác thỏa mãn hai tính chất sau:

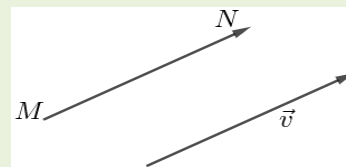
- Hai đa giác phân biệt hoặc là *không có điểm chung*, hoặc *chỉ có một điểm chung*, hoặc *có một cạnh chung*.
- Mỗi cạnh của đa giác bất kỳ luôn là *cạnh chung của đúng hai đa giác*.



2. Khối đa diện: Là phần không gian được giới hạn bởi hình đa diện cộng với hình đa diện đó.

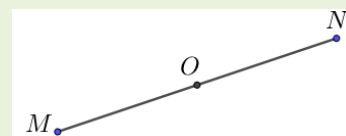
3. Các phép dời hình đã học, hai hình bằng nhau:

a) Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$: Phép biến hình biến điểm M thành điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.



b) Phép đối xứng qua tâm O :

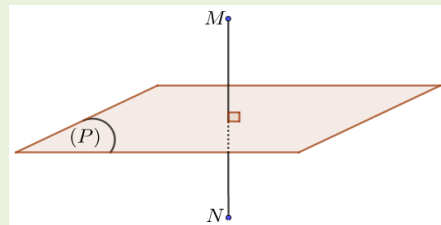
- Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm N sao cho O là trung điểm MN .
- Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O



được gọi là **tâm đối xứng** của (H) .

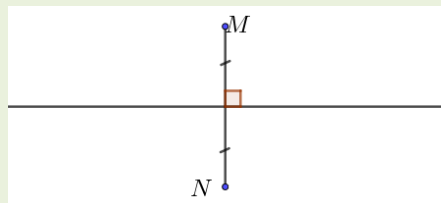
c) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) :

- Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm N sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN .
- Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là **mặt phẳng đối xứng** của hình (H) .



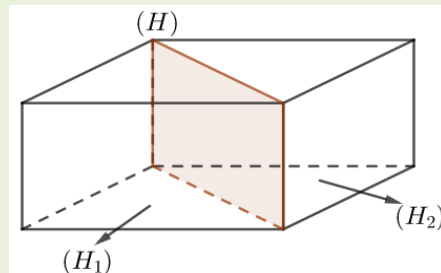
d) Phép đối xứng qua đường thẳng d :

- Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm N sao cho d là đường trung trực của đoạn MN .
- Nếu phép đối xứng qua đường thẳng d biến hình (H) thành chính nó thì d được gọi là **trục đối xứng** của hình (H) .



e) Hai hình bằng nhau: Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

4. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện: Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1) , (H_2) sao cho (H_1) , (H_2) **không có chung điểm trong** nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) , (H_2) ; hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) , (H_2) thành khối đa diện (H) .



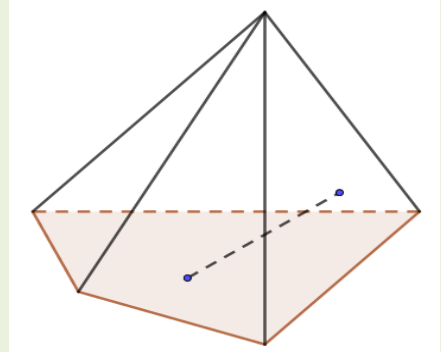
II – KHỐI ĐA DIỆN LỖI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Khối (hình) đa diện lồi: Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu **đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của (H) luôn thuộc về (H)** . Hình đa diện giới hạn khối (H) được gọi là **hình đa diện lồi**.

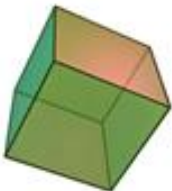
2. Khối đa diện đều: Khối đa diện đều là khối đa diện lồi thỏa mãn hai tính chất sau:

- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều có p cạnh.
- Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Khối đa diện đều như trên được gọi là khối đa diện đều loại $\{p, q\}$.



Năm khối đa diện đều

Tứ diện đều	Khối lập phương	Khối bát diện đều	Khối mười hai mặt đều	Khối hai mươi mặt đều
				

☞ Chỉ có năm loại khối đa diện đều được tóm tắt trong bảng sau:

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3;3}	Tứ diện đều	4	6	4
{4;3}	Lập phương	8	12	6
{3;4}	Bát diện đều	6	12	8
{5;3}	Mười hai mặt đều	20	30	12
{3;5}	Hai mươi mặt đều	12	30	20

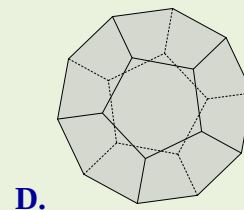
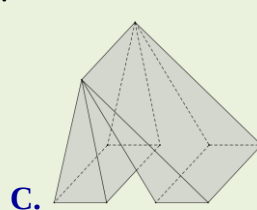
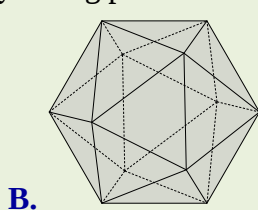
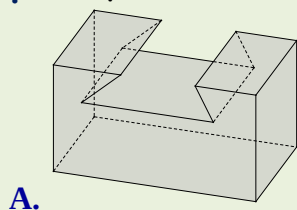
Mối liên hệ: **Số đỉnh – số cạnh + số mặt = 2.**

DẠNG 1. NHẬN DIỆN HÌNH (KHỐI) ĐA DIỆN, ĐA DIỆN LỖI

- Muốn biết một hình (một khối) có phải là đa diện hay không, ta nắm kỹ hai tiêu chuẩn đa diện (**mục 1-lý thuyết**). Đa số các trường hợp một hình (một khối) không phải đa diện thì nó vi phạm tiêu chuẩn thứ hai: **mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác**.
- Phân biệt đa diện lồi, đa diện lõm:** Ta xét hình có **nguy cơ cao** (hình dáng khúc khuỷu chẳng giống ai), chọn hai điểm phân biệt để nối thành đoạn thẳng, nếu nhận ra **nhiều điểm thuộc đoạn thẳng nằm ngoài đa diện** thì đa diện đó là **đa diện lõm**.

VÍ DỤ MINH HỌA

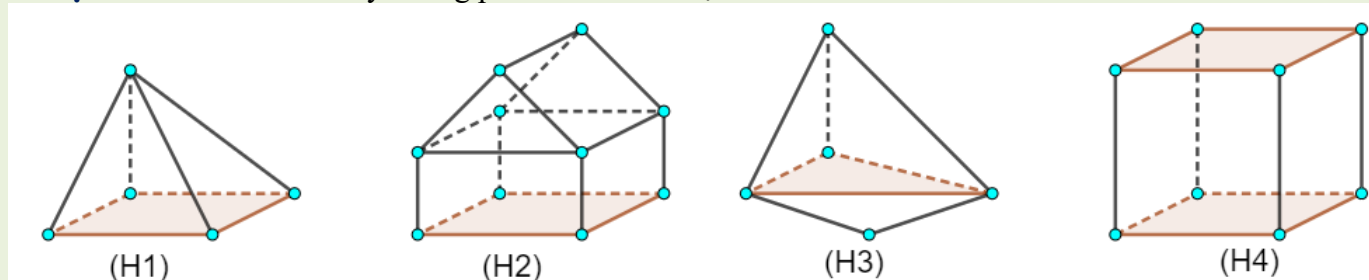
VÍ DỤ 1. Vật thể nào dưới đây không phải là khối đa diện?



Lời giải:

- Ta thấy chỉ có hai hình ở **câu A và C** là có đáng đáp khúc khuỷu, đáng nghi ngại (hai hình còn lại chính là các đa diện đều đã học).
- Xét hình ở đáp án A:** Ta thấy nó thỏa mãn cả hai tiêu chuẩn hình (khối) đa diện.
- Xét hình ở đáp án C:** Quan sát cạnh cao nhất trên hình, ta phát hiện nó là **cạnh chung của 4 đa giác** (vi phạm **tiêu chuẩn 2 của định nghĩa đa diện** (xem lại mục 1-lý thuyết)). **Chọn** → **C**

VÍ DỤ 2. Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?



A. Hình 4.

B. Hình 1.

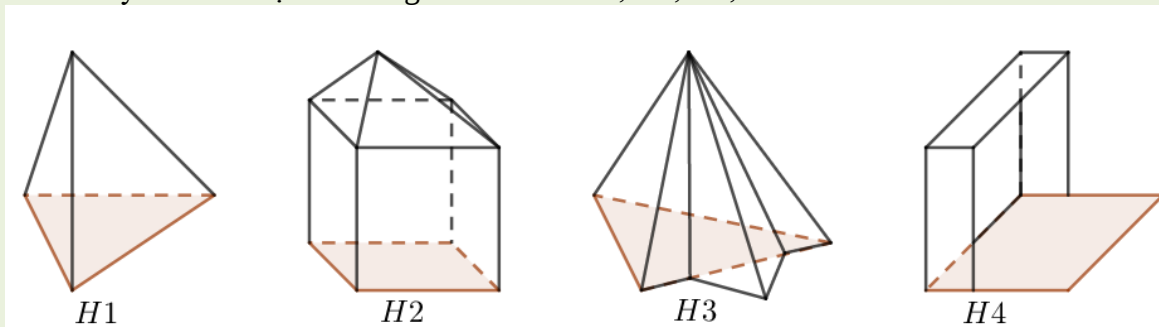
C. Hình 2.

D. Hình 3.

Lời giải:

- Ta thấy chỉ có **hình 2 và hình 3** là đáng nghi ngại (hai hình còn lại chính là các đa diện đã học).
- Kiểm lại bằng định nghĩa, ta thấy **hình 2** hoàn toàn **thỏa mãn cả hai tiêu chuẩn**; riêng **hình 3** đã vi phạm tiêu chuẩn 2, có hai cạnh chĩa ra phía trước rất vô duyên, mỗi cạnh ấy **không phải là cạnh chung của hai đa giác**. **Chọn** → **D**

VÍ DỤ 3. Có mấy hình đa diện lồi trong số các hình H1, H2, H3, H4?



A. 1.

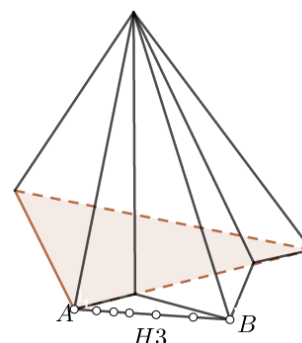
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

- Hình H1** là tứ diện đã quen thuộc, nó là đa diện lồi; **hình H2** cũng thỏa mãn tính chất đa diện lồi.
- Hình H4 không phải là hình đa diện** do cạnh ngoài cùng bên phải **không phải là cạnh chung của hai đa giác**. Vậy nó **không thể là đa diện lồi**.

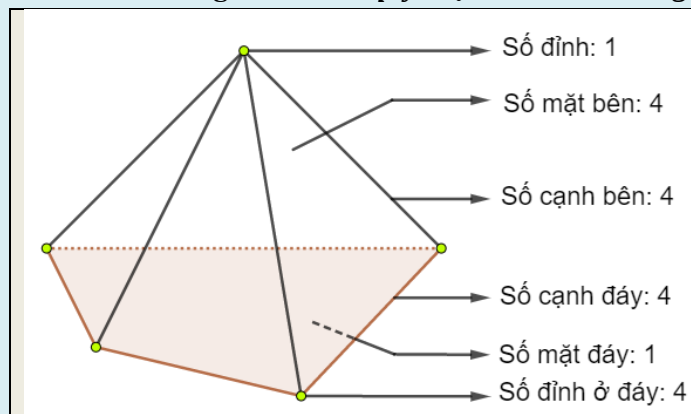


- Hình H3 là đa diện nhưng **không phải đa diện lồi**. Lý do: Nối đoạn thẳng giữa hai điểm A, B như hình vẽ, ta thấy có **nhiều điểm thuộc đoạn thẳng này đã nằm ngoài đa diện**.

Chọn → **B**

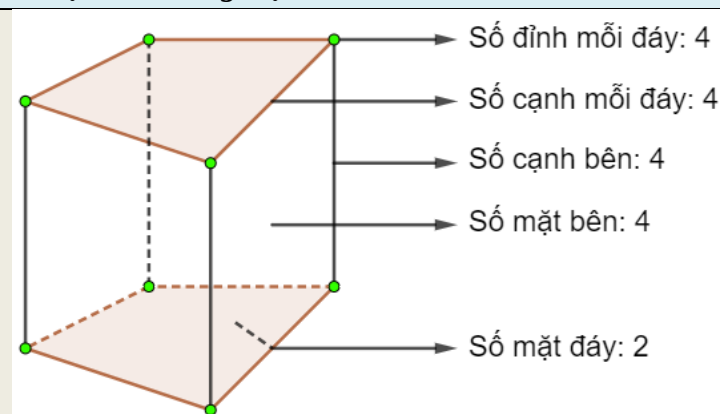
DẠNG 2. TÌM SỐ ĐỈNH, SỐ CẠNH, SỐ MẶT CỦA MỘT HÌNH ĐA DIỆN

- Gặp hình cho sẵn, học sinh chịu khó đếm số đỉnh, số cạnh, số mặt của hình.
- Nếu đề bài nói đến **mối liên hệ giữa cạnh, đỉnh, mặt** của hình chóp, lăng trụ... học sinh nên **vẽ một, hai hình đơn giản để tìm quy luật** cho mình, đồng thời **loại trừ những mệnh đề mâu thuẫn** với hình vẽ.



Đối với hình chóp, ta có:

- Số đỉnh ở đáy = Số cạnh đáy = Số cạnh bên = Số mặt bên.
- Tổng số đỉnh = Số đỉnh của đáy + 1.
- Tổng số cạnh = 2.Số cạnh đáy = 2.Số cạnh bên.
- Tổng số mặt = Số mặt bên + 1.



Đối với hình lăng trụ, ta có:

- Số đỉnh mỗi đáy = Số cạnh mỗi đáy = Số cạnh bên = Số mặt bên.
- Tổng số đỉnh = 2.Số đỉnh mỗi đáy.
- Tổng số cạnh = 3.Số cạnh đáy.
- Tổng số mặt = Số mặt bên + 2.

- Học sinh nhớ: **loại, số đỉnh, số cạnh, số mặt của đa diện đều**.

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3;3}	Tứ diện đều	4	6	4
{4;3}	Lập phương	8	12	6
{3;4}	Bát diện đều	6	12	8
{5;3}	Mười hai mặt đều	20	30	12
{3;5}	Hai mươi mặt đều	12	30	20
Mối liên hệ: Số đỉnh – số cạnh + số mặt = 2.				

- Trong 5 loại đa diện đều trên, khi đề bài nói đến **tứ diện đều, lập phương, bát diện đều** thì học sinh nên **vẽ hình ra và đếm** số đỉnh, số cạnh, số mặt theo yêu cầu. Riêng hai khối còn lại là **khối mười hai mặt đều** và **khối hai mươi mặt đều** thì ta **học thuộc các thông số** từ bảng trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 4. Một hình chóp có đáy là đa giác lồi 2020 đỉnh, hỏi hình chóp này có bao nhiêu cạnh?

- A. 4040. B. 4041. C. 2021. D. 2020.

Lời giải:

- Đa giác đáy có 2 020 đỉnh tương ứng với 2 020 cạnh đáy, suy ra số cạnh bên là 2 020.
- Tổng số cạnh hình chóp: $2\,020 + 2\,020 = 4\,040$ (cạnh). **Chọn** → **A**

VÍ DỤ 5. Một hình chóp có $4n$ cạnh ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$) thì hình chóp này có bao nhiêu đỉnh?

- A. $4n$. B. $n+1$. C. $2n+1$. D. $2n$.

Lời giải:

- Số cạnh hình chóp bằng $4n$ nên số cạnh đáy là $2n$, suy ra số đỉnh đa giác đáy bằng $2n$.
- Mỗi hình chóp sẽ có một đỉnh nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đáy, vậy tổng số đỉnh của hình chóp là $2n+1$. **Chọn** → **C**

VÍ DỤ 6. Một hình lăng trụ có số mặt bằng 12 thì hình này có bao nhiêu đỉnh?

- A. 24. B. 10. C. 12. D. 20.

Lời giải:

- Số mặt bên của lăng trụ là $12 - 2 = 10$ (mặt). Số cạnh bên của lăng trụ cũng bằng 10 (bằng số mặt bên), suy ra số đỉnh mỗi đáy của lăng trụ bằng 10.
- Số đỉnh của lăng trụ bằng tổng số đỉnh của hai đáy: $10 + 10 = 20$ (đỉnh). **Chọn** → **D**

VÍ DỤ 7. Khối hai mươi mặt đều có số đỉnh là x , số cạnh là y , số mặt là z . Tính $x + y + z$.

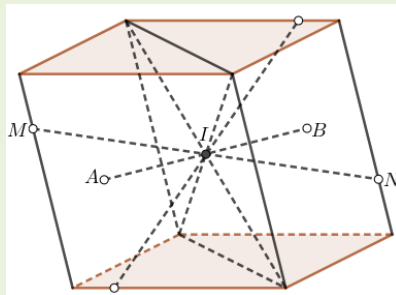
- A. 56. B. 40. C. 26. D. 62.

Lời giải:

- Ta có $x=12, y=30, z=20 \Rightarrow x+y+z=62$. **Chọn** → **D**

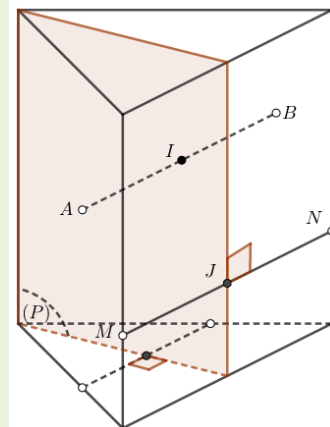
📁 DẠNG 3. TÂM ĐỐI XỨNG, TRỤC ĐỐI XỨNG, MẶT ĐỐI XỨNG VÀ LẮP GHÉP KHỐI ĐA DIỆN

- **Xét điểm I là tâm đối xứng của hình (H) :** Khi ta vẽ đường thẳng bất kỳ qua I và đường thẳng này cắt hình (H) tại hai điểm A, B thì $IA = IB$. Nếu có một đường thẳng ngoại lệ như trên thì ta nói điểm đang xét không phải tâm đối xứng của hình (H) . Điểm I trong hình bên có được tính chất trên, ta có thể tìm nhiều cặp điểm thỏa mãn:
 $IA = IB, IM = IN \dots$ Không tìm được trường hợp ngoại lệ. **Vậy hình hộp sẽ có tâm đối xứng là điểm I như hình vẽ.**



- **Mặt phẳng đối xứng của một hình** luôn chia hình đó thành hai hình giống nhau. Nếu ta vẽ một đường thẳng bất kỳ vuông góc với mặt phẳng này tại I và cắt hình (H) tại hai điểm A, B thì ta luôn có $IA = IB$. Nếu có một đường thẳng ngoại lệ như thế thì mặt phẳng tương ứng không phải là mặt phẳng đối xứng của hình (H).

Xét hình lăng trụ tam giác đều (H) như hình vẽ. Ta thấy mặt phẳng (P) là **mặt phẳng đối xứng của hình (H)**. Nếu ta vẽ bất kỳ đường thẳng nào vuông góc với (P) và cắt hình (H) tại hai điểm thì hai điểm này sẽ đối xứng qua (P), theo hình vẽ ta thấy $IA = IB, JM = JN...$



- Ngoài hai nội dung là **tâm đối xứng** và **mặt phẳng đối xứng**, học sinh cần xem thêm **trục đối xứng** cũng như **các phép dời hình còn lại** (đã được ôn ở **mục I.3 phần lý thuyết** nêu trên).

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 8. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

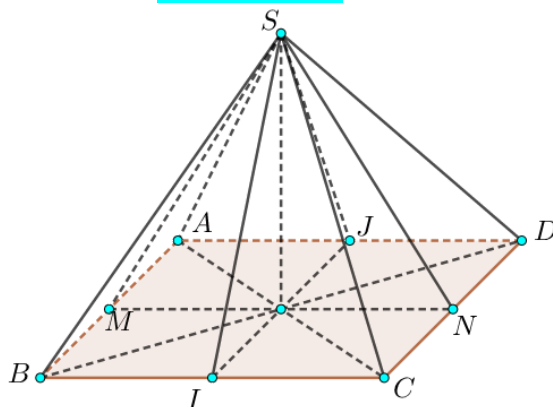
Lời giải:

Có hai kiểu mặt phẳng đối xứng của hình chóp tứ giác đều:

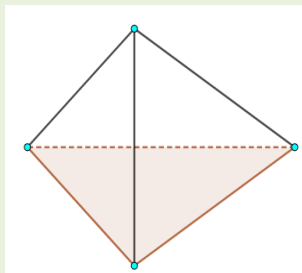
- **Kiểu 1:** Mặt phẳng được xác định bởi đỉnh S và hai đỉnh đối diện của đáy: **có 2 mặt** gồm: (SAC), (SBD).
- **Kiểu 2:** Mặt phẳng được xác định bởi đỉnh S và hai trung điểm của hai cạnh đáy đối diện: **có 2 mặt** gồm: (SMN) và (SIJ). Xem hình.

Vậy có 4 mặt phẳng đối xứng cần tìm.

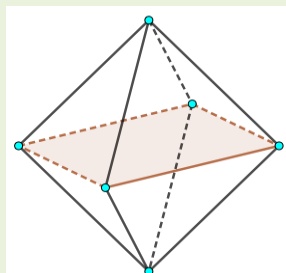
Chọn → C



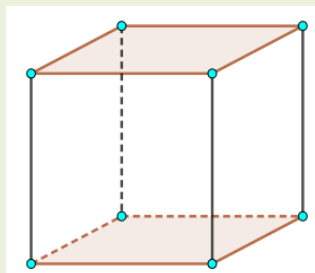
VÍ DỤ 9. Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?



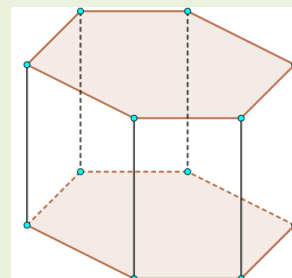
A. Tứ diện đều.



B. Bát diện đều.



C. Hình lập phương.



D. Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải:

- Ta hình dung bát diện đều chính là hai hình chóp tứ giác đều úp đáy vào nhau (đáy là hình vuông), tâm của hình vuông này chính là tâm đối xứng của hình bát diện đều (có thể kiểm tra tính chất).
- Xét hình lập phương, một mặt chéo bất kỳ của nó sẽ là hình chữ nhật, tâm của hình chữ nhật ấy chính là tâm đối xứng của hình lập phương (có thể kiểm tra lại tính chất).
- Xét hình lăng trụ lục giác đều: Chọn mặt phẳng chứa hai cạnh bên đối diện nhau, thiết diện tạo bởi mặt phẳng ấy với hình lăng trụ sẽ là hình chữ nhật, tâm của hình chữ nhật này là tâm đối xứng của hình lăng trụ lục giác đều (có thể kiểm tra lại tính chất).
- Vậy chỉ có hình tứ diện đều là không có tâm đối xứng. Dựa vào định nghĩa đã học về tâm đối xứng, ta có thể kiểm chứng điều này.

Chọn → **A**

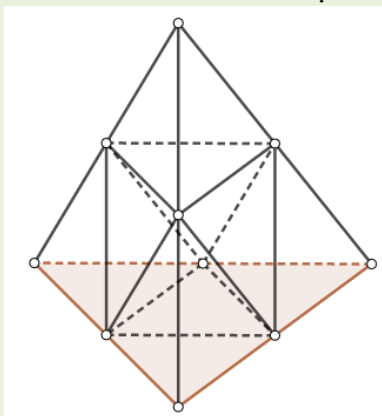
VÍ DỤ 10. Từ một tứ diện ban đầu, ta nối tất cả trung điểm các cạnh của tứ diện này lại. Khi đó tứ diện ấy được phân chia thành:

A. Năm tứ diện.

B. Bốn tứ diện.

C. Một bát diện và bốn tứ diện.

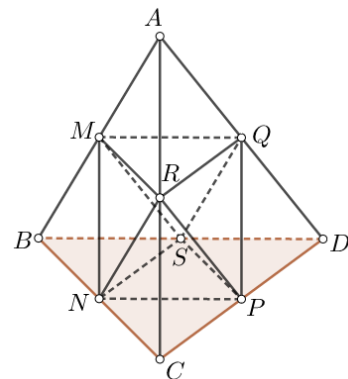
D. Một hình chóp và bốn tứ diện.



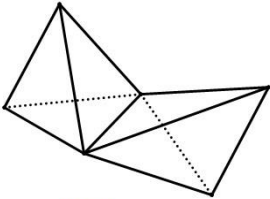
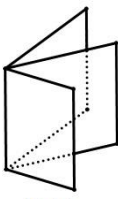
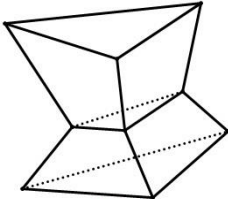
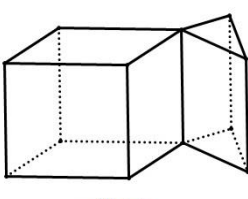
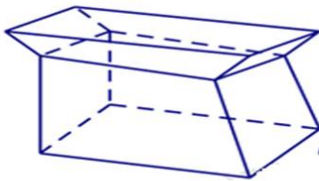
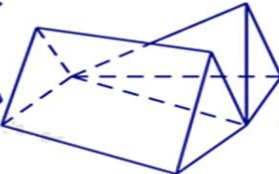
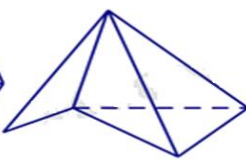
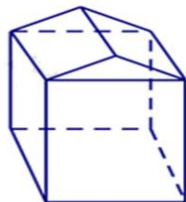
Lời giải:

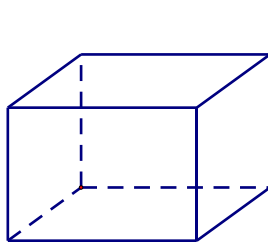
- Gọi tên các đỉnh và các trung điểm như hình vẽ.

- Ta nhận thấy tứ diện ban đầu được chia làm: **Một hình bát diện** là $SMNPQR$ và **bốn tứ diện** gồm $AMRQ$, $BMNS$, $CNPR$, $DPQS$. Chọn → C

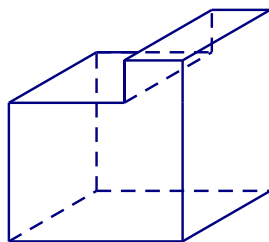


BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

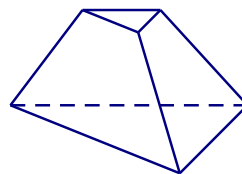
- Câu 1.** Mỗi cạnh của hình đa diện là cạnh chung của đúng
A. năm mặt. **B.** ba mặt. **C.** bốn mặt. **D.** hai mặt.
- Câu 2.** Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?




A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.
- Câu 3.** Khối bát diện đều là khối đa diện đều loại nào?
A. $\{4;3\}$. **B.** $\{3;3\}$. **C.** $\{3;4\}$. **D.** $\{3;5\}$.
- Câu 4.** Cho một hình đa diện. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?
A. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt. **B.** Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.
C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt. **D.** Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.
- Câu 5.** Số hình đa diện lồi trong các hình dưới đây là




A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 6.** Mỗi hình sau gồm một số hữu hạn đa giác phẳng, tìm hình không là hình đa diện.



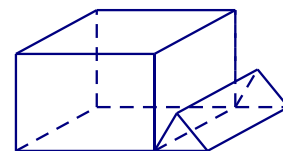
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 4.

B. Hình 3.

C. Hình 2.

D. Hình 1.

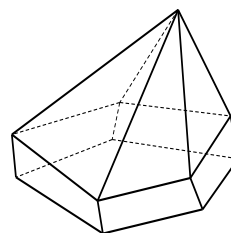
Câu 7. Hình đa diện trong hình vẽ có bao nhiêu mặt?

A. 12.

B. 10.

C. 6.

D. 11.

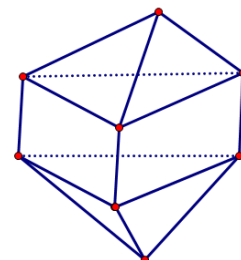
**Câu 8.** Tìm số mặt của hình đa diện ở hình vẽ bên?

A. 11.

B. 10.

C. 12.

D. 9.

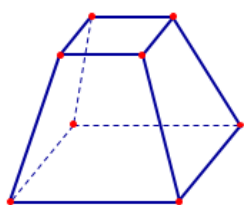
**Câu 9.** Cho khối chóp có đáy là một thập giác. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Số mặt bên của khối chóp là 10.

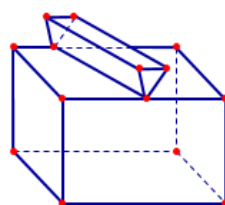
B. Khối chóp có số cạnh lớn hơn số đỉnh.

C. Khối chóp có số mặt nhỏ hơn số đỉnh.

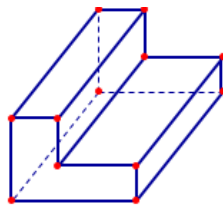
D. Số đỉnh của khối chóp là 11.

Câu 10. Cho các khối hình sau:

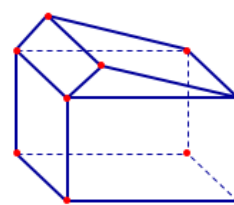
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 11. Hình chóp có 50 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

A. 26.

B. 21.

C. 25.

D. 49.

Câu 12. Hình bát diện đều có bao nhiêu cạnh?

A. 16.

B. 12.

C. 10.

D. 14.

Câu 13. Hình chóp có 22 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

A. 11 mặt.

B. 12 mặt.

C. 10 mặt.

D. 19 mặt.

Câu 14. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 15. Cho khối đa diện đều. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

- A. Số đỉnh của khối lập phương bằng 8. B. Số mặt của khối tứ diện đều bằng 4.
C. Khối bát diện đều là loại $\{4;3\}$. D. Số cạnh của khối bát diện đều bằng 12.

Câu 16. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

- A. Số đỉnh của một hình chóp luôn là một số chẵn.
B. Số mặt của một hình lăng trụ luôn là một số chẵn.
C. Số cạnh của một hình chóp luôn là một số chẵn.
D. Số cạnh của một hình lăng trụ luôn là một số chẵn.

Câu 17. Một hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

- A. 33. B. 31. C. 30. D. 22.

Câu 18. Mỗi đỉnh của hình đa diện thuộc ít nhất bao nhiêu mặt?

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 19. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là

- A. Khối chóp tứ giác đều. B. Khối bát diện đều.
C. Khối tứ diện đều. D. Khối lập phương.

Câu 20. Mỗi hình đa diện có ít nhất

- A. 3 cạnh. B. 6 cạnh. C. 5 cạnh. D. 4 cạnh.

Câu 21. Cho khối chóp có đáy là đa giác lồi n cạnh. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào **đúng**?

- A. Số mặt và số đỉnh bằng nhau. B. Số đỉnh của khối chóp bằng $2n+1$.
C. Số mặt của khối chóp bằng $2n$. D. Số cạnh của khối chóp bằng $n+1$.

Câu 22. Cho một hình chóp có số đỉnh là 2018, số cạnh của hình chóp đó là

- A. 2019. B. 1009. C. 4036. D. 4034.

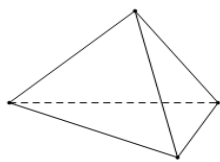
Câu 23. Cho khối chóp có đáy là một thập giác. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Số mặt bên của khối chóp là 10. B. Khối chóp có số cạnh lớn hơn số đỉnh.
C. Khối chóp có số mặt nhỏ hơn số đỉnh. D. Số đỉnh của khối chóp là 11.

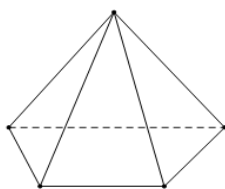
Câu 24. Khối bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 9.

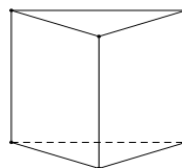
Câu 25. Trong các hình dưới đây hình nào không phải đa diện lồi?



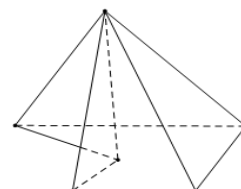
Hình I



Hình II



Hình III



Hình IV

- A. Hình (III). B. Hình (I). C. Hình (II). D. Hình (IV).

Câu 26. Số mặt phẳng đối xứng của hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông là:

- A. 4. B. 5. C. 1. D. 3.

Câu 27. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

- A. 3000. B. 3001. C. 3005. D. 3007.

Câu 28. Số đỉnh của hình mười hai mặt đều là

- A. 12. B. 30. C. 20. D. 16.

Câu 29. Hình bát diện đều kí hiệu là

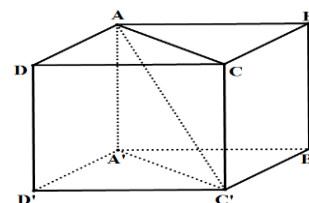
- A. $\{3;5\}$. B. $\{5;3\}$. C. $\{3;4\}$. D. $\{4;3\}$.

Câu 30. Hình chóp có 2020 cạnh thì có bao nhiêu đỉnh?

- A. 1010. B. 1011 C. 2021. D. 2020.

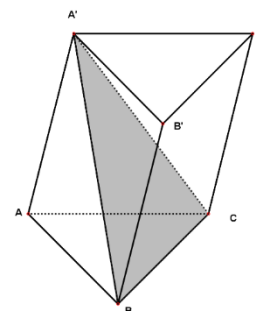
Câu 31. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (ACC') chia khối lập phương trên thành những khối đa diện nào?

- A. Hai khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ và $BCD.B'C'D'$.
 B. Hai khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ và $ACD.A'C'D'$.
 C. Hai khối chóp tam giác $C'.ABC$ và $C'.ACD$.
 D. Hai khối chóp tứ giác $C'.ABCD$ và $C'.ABB'A'$.



Câu 32. Mặt phẳng $(A'BC)$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối chóp.

- A. $A'.ABC$ và $A'.BCC'B'$.
 B. $AA'B'C'$ và $A'.BCC'B'$.
 C. $AA'BC$ và $A'.BCC'B'$.
 D. $AA'B'C'$ và $A'.BCC'B'$.



Câu 33. Mặt phẳng nào sau đây chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối lăng trụ

- A. $(A'BC')$. B. (ABC') . C. $(AB'C)$. D. $(A'BD)$.

Câu 34. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 5. B. 6. C. 3. D. 4.

Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Ảnh của đoạn thẳng AB qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{CC'}$ là:

- A. đoạn thẳng $C'D'$. B. đoạn thẳng DD'
 C. đoạn thẳng CD . D. đoạn thẳng $A'B'$.

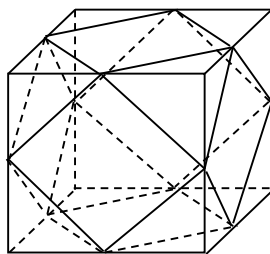
Câu 36. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng

- A. 2. B. 3. C. 6. D. 4.

Câu 37. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Câu 38. Người ta nối trung điểm các cạnh của một hình hộp chữ nhật rồi cắt bỏ các hình chóp tam giác ở các góc của hình hộp như hình vẽ sau.



Hình còn lại là một đa diện có số đỉnh và số cạnh là:

- A. 12 đỉnh, 24 cạnh. B. 10 đỉnh, 24 cạnh. C. 12 đỉnh, 20 cạnh. D. 10 đỉnh, 48 cạnh.

Câu 39. (Đề Thi THPTQG năm 2017 Mã đề 110) Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

- A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
B. Hai khối chóp tam giác.
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
D. Hai khối chóp tứ giác.

Câu 40. Gọi m là số mặt đối xứng của hình lập phương, n là số mặt đối xứng của hình bát diện đều. Khi đó

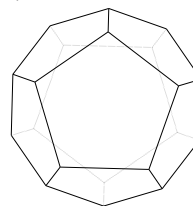
- A. Không thể so sánh. B. $m > n$. C. $m < n$. D. $m = n$.

Câu 41. Gọi d là số đỉnh và m là số mặt của khối đa diện đều loại $\{3; 4\}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

- A. $d = 6, m = 8$. B. $d = 8, m = 6$. C. $d = 4, m = 6$. D. $d = 6, m = 4$.

Câu 42. Khối mười hai mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

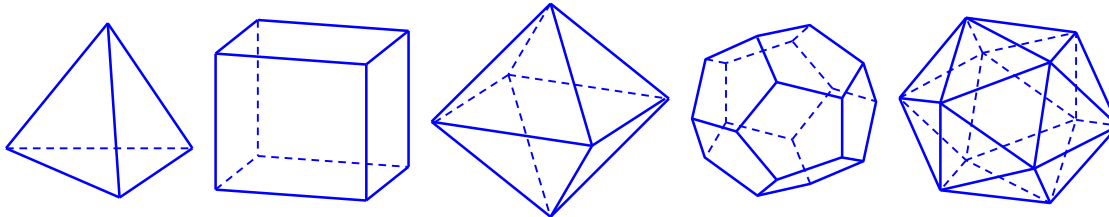
- A. 12.
B. 16.
C. 20.
D. 24.



Câu 43. Một hình hộp đứng đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 44. Trong không gian chỉ có 5 loại khối đa diện đều như hình vẽ sau



Khối tứ diện đều Khối lập phương Bát diện đều Hình 12 mặt đều Hình 20 mặt đều
Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Mọi khối đa diện đều có số mặt là những số chia hết cho 4.
B. Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh.
C. Khối tứ diện đều và khối bát diện đều có 1 tâm đối xứng.

D. Khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều có cùng số đỉnh.

Câu 45. Hình đa diện đều 12 mặt thuộc loại $\{p, q\}$. Tính $p - q$.

A. -2. B. 1. C. 2. D. -1.

Câu 46. Khối lập phương là khối đa diện đều loại:

A. $\{5;3\}$. B. $\{3;4\}$. C. $\{4;3\}$. D. $\{3;5\}$.

Câu 47. Cho khối chóp $S.ABCD$, hỏi hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành mấy khối chóp?

A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 48. Cho một hình đa diện H . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Mỗi đỉnh của H là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.
B. Mỗi cạnh của H là cạnh chung của ít nhất ba mặt.
C. Mỗi mặt của H có ít nhất ba cạnh.
D. Mỗi đỉnh của H là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Câu 49. Khối đa diện nào được cho dưới đây là khối đa diện đều ?

A. Khối chóp tam giác đều. B. Khối lăng trụ đều.
C. Khối chóp tứ giác đều D. Khối lập phương.

Câu 50. Tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 51. Một hình hộp chữ nhật mà không phải hình lập phương thì có số trục đối xứng là:

A. Có đúng 4 trục đối xứng. B. Có đúng 6 trục đối xứng.
C. Có đúng 3 trục đối xứng. D. Có đúng 5 trục đối xứng.

Câu 52. Biết rằng một hình đa diện H có 6 mặt là 6 tam giác đều. Hãy chỉ ra mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Không tồn tại hình H nào có mặt phẳng đối xứng.
B. Có tồn tại một hình H có đúng 4 mặt đối xứng.
C. Không tồn tại hình H nào có đúng 5 đỉnh.
D. Có tồn tại một hình H có hai tâm đối xứng phân biệt.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1D	2D	3C	4A	5B	6A	7D	8D	9C	10B
11A	12B	13B	14C	15C	16C	17A	18D	19D	20B
21A	22D	23C	24D	25D	26B	27A	28C	29C	30B
31B	32C	33B	34D	35D	36D	37B	38A	39A	40D
41A	42C	43C	44B	45C	46C	47A	48B	49D	50D
51C	52B								

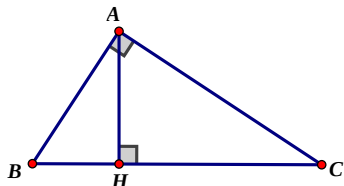
CHƯƠNG I

ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

§3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A – MỘT SỐ HÌNH PHẪNG CƠ BẢN:

1. Tam giác vuông:



$$\text{Pitago} \quad AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

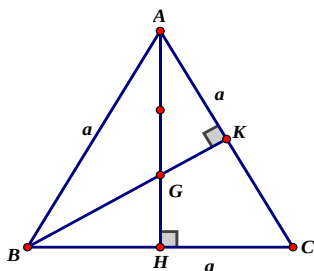
$$AH^2 = BH \cdot CH$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \quad (\text{đối/huyền}) \quad \cos B = \frac{AB}{BC} \quad (\text{kề/huyền}) \quad \tan B = \frac{AC}{AB} \quad (\text{đối/kề}) \quad \cot B = \frac{AB}{AC} \quad (\text{kề/đối})$$

2. Tam giác đều:



Giả sử tam giác ABC đều có cạnh a ; trọng tâm G ; các đường cao (trùng với trung tuyến) gồm AH , BK .

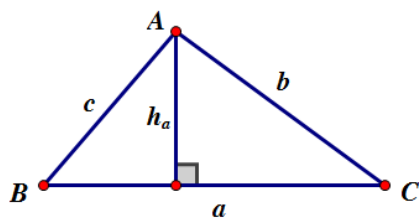
$$\text{Đường cao: } AH = BK = \frac{(\text{cạnh}) \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AG = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad GH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Diện tích: } S_{\triangle ABC} = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

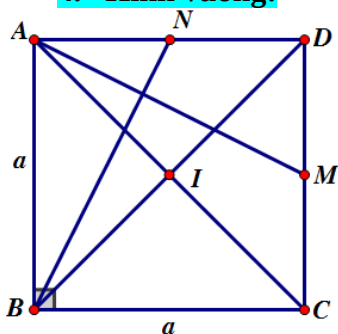
3. Tam giác thường:

Giả sử tam giác ABC có $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$; các đường cao h_a , h_b , h_c lần lượt ứng với cạnh a , b , c . Ký hiệu R , r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp Δ .



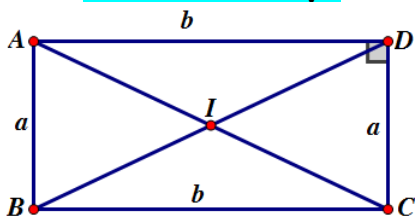
- Định lí Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
- Định lí Cô-sin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$;
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

▪ Diện tích: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_a \cdot a = \frac{1}{2} h_b \cdot b = \frac{1}{2} h_c \cdot c$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$;
 $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R} = pr$; $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi).
Công thức Hê-Rông

4. Hình vuông:


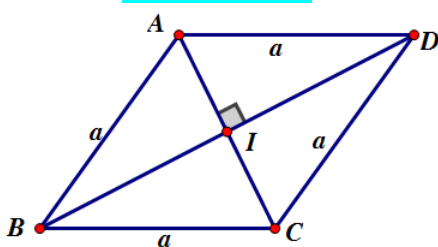
Cho hình vuông ABCD có cạnh a ; hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của CD, AD ; I là tâm hình vuông.

- Đường chéo: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD = (\text{cạnh}) \times \sqrt{2} = a\sqrt{2} \end{cases}$
 $IA = IB = IC = ID = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông.
- Diện tích: $S_{ABCD} = (\text{cạnh})^2 = a^2$; chu vi: $p = 4a$.
- Vì $\triangle ABN = \triangle ADM$, ta chứng minh được: $AM \perp BN$.

5. Hình chữ nhật:


Cho hình chữ nhật ABCD tâm I có $AB = a, AD = b$.

- Đường chéo: $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 $IA = IB = IC = ID = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$ nên I là tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D .
- Diện tích: $S_{ABCD} = a \cdot b$; chu vi: $p = 2(a + b)$.

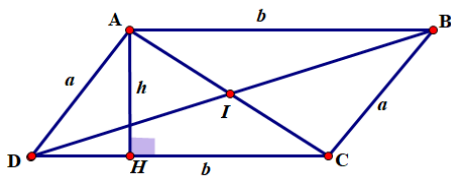
6. Hình thoi:


Cho hình thoi ABCD có tâm I , cạnh bằng a .

- Đường chéo: $AC \perp BD$; $AC = 2AI = 2AB \cdot \sin \widehat{ABI} = 2a \cdot \sin \widehat{ABI}$.
 - Diện tích: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin A = a^2 \sin A = a^2 \sin B$.
- Đặc biệt:** Nếu hình thoi có góc $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^\circ$ ($\widehat{A} = \widehat{C} = 120^\circ$) thì ta chia hình thoi ra làm hai tam giác đều: $\triangle ABC = \triangle ACD$; $AC = a$ và
- $$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

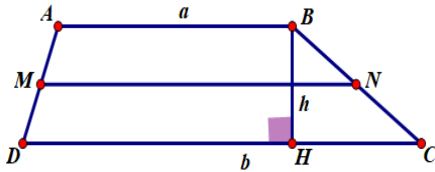
7. Hình bình hành:

Cho hình bình hành tâm I cạnh là a, b , đường cao $AH = h$.



- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, và chúng định ra trên hình bình hành bốn tam giác có diện tích bằng nhau (hai tam giác đối đỉnh thì bằng nhau).
- Diện tích: $S_{ABCD} = AB.AH = b.h$; $S_{ABCD} = AB.AD \sin A = ab \sin A$.

8. Hình thang:

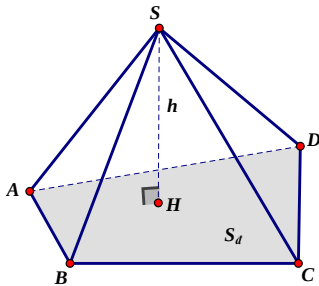


Cho hình thang ABCD với $AB \parallel CD$ và đường cao $BH = h$, đường trung bình MN (tức M là trung điểm AD, N là trung điểm BC).

- $MN \parallel AB \parallel CD$ và $MN = \frac{AB + CD}{2}$.
- Diện tích: $S_{ABCD} = \frac{(AB + CD).BH}{2} = \frac{(a + b)h}{2}$
Diện tích hình thang = (đáy lớn cộng đáy bé) nhân đường cao chia hai.

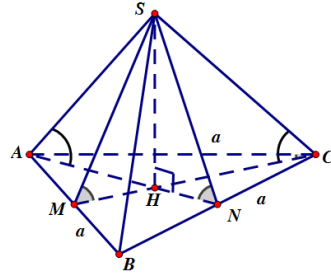
B – THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:

9. Hình chóp:



$$V = \frac{1}{3}h.S_d$$

9.1. Hình chóp tam giác đều



- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là tam giác đều cạnh a.
- $SH \perp (ABC)$ với H là trọng tâm (cũng là trực tâm) ΔABC .

$$\begin{cases} S_d = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ SH = h \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} V = \frac{1}{3}h.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

☆ Góc giữa cạnh bên và mặt

$$\begin{aligned} \text{đáy: } (\widehat{SA, (ABC)}) &= \widehat{SAH} \\ &= (\widehat{SC, (ABC)}) = \widehat{SCH}. \end{aligned}$$

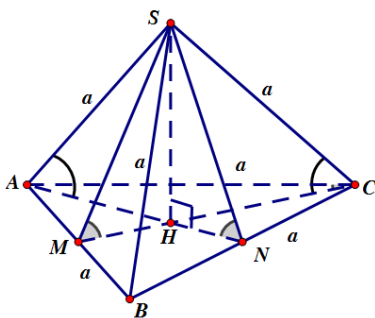
☆ Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

$$\begin{aligned} (\widehat{(SAB), (ABC)}) &= \widehat{SMH} \\ &= (\widehat{(SBC), (ABC)}) = \widehat{SNH}. \end{aligned}$$

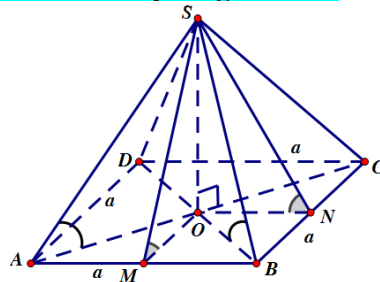
9.2. Tứ diện đều:

- Đây cũng là hình chóp tam giác đều, đặc biệt là cạnh bên bằng cạnh đáy. Thể tích:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



9.3. Hình chóp tứ giác đều:



- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là hình vuông cạnh a.
- $SO \perp (ABCD)$ với O là tâm hình vuông ABCD.

$$\begin{cases} S_d = a^2 \\ SO = h \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} V = \frac{1}{3}h.a^2$$

☆ Góc giữa cạnh bên và mặt

$$\begin{aligned} \text{đáy: } (\widehat{SA, (ABCD)}) &= \widehat{SAO} \\ &= (\widehat{SB, (ABCD)}) = \widehat{SBO}. \end{aligned}$$

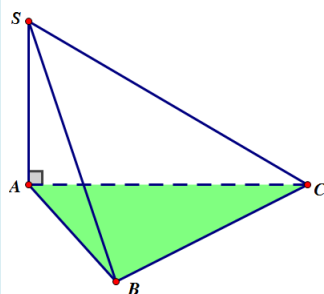
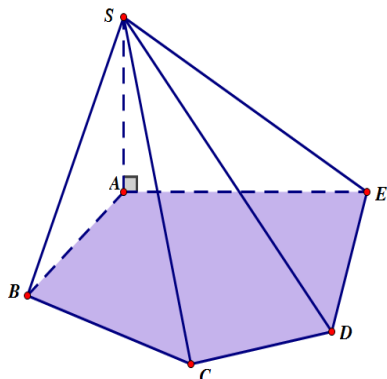
☆ Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

$$\begin{aligned} (\widehat{(SAB), (ABCD)}) &= \widehat{SMO} \\ &= (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = \widehat{SNO}. \end{aligned}$$

Đáy là tam giác

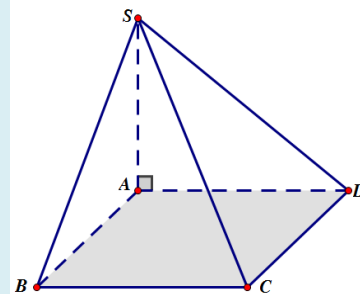
Đáy là tứ giác đặc biệt

9.4. Hình chóp có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.



- $\begin{cases} h = SA \\ S_d = S_{\triangle ABC} \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC}$
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

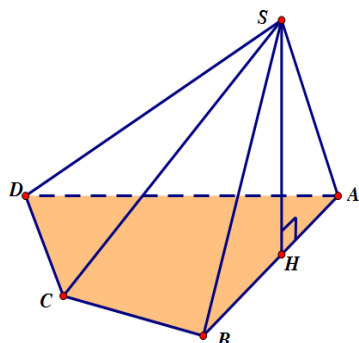
$$\begin{cases} (\widehat{SB, (ABC)}) = \widehat{SBA} \\ (\widehat{SC, (ABC)}) = \widehat{SCA} \end{cases}$$



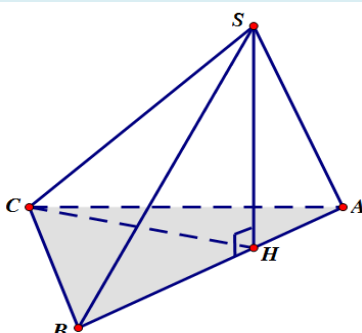
- $\begin{cases} h = SA \\ S_d = S_{ABCD} \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$$\begin{cases} (\widehat{SB, (ABCD)}) = \widehat{SBA} \\ (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCA} \end{cases}$$

9.5. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy.



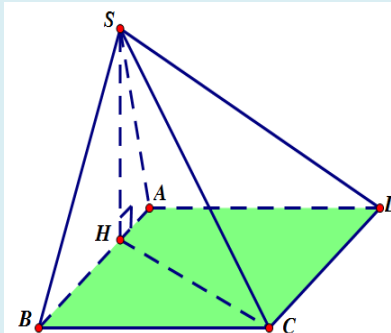
Đáy là tam giác



- Đường cao $h = SH$ cũng là đường cao của $\triangle SAB$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$$\begin{cases} (\widehat{SA, (ABC)}) = \widehat{SAH} \\ (\widehat{SC, (ABC)}) = \widehat{SCH} \end{cases}$$

Đáy là tứ giác đặc biệt



- Đường cao $h = SH$ cũng là đường cao của $\triangle SAB$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$$\begin{cases} (\widehat{SA, (ABCD)}) = \widehat{SAH} \\ (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCH} \end{cases}$$

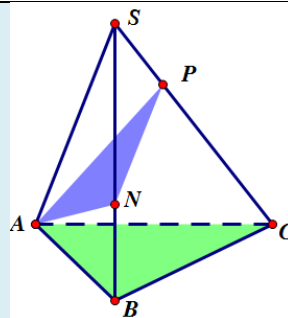
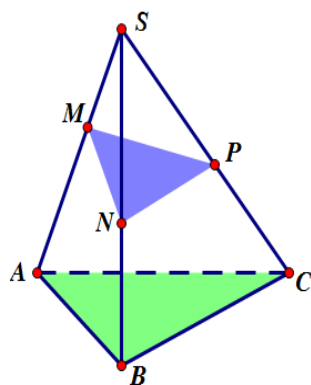
C – TỈ SỐ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Đặc biệt: $M \equiv A$

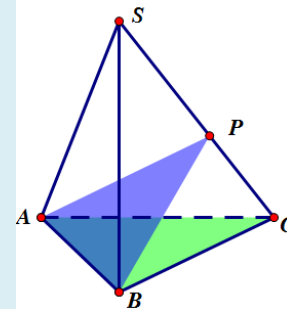
Đặc biệt $M \equiv A, N \equiv B$

Cho hình chóp có đáy là tam giác ABC . Các điểm M, N, P nằm trên cạnh SA, SB, SC . Ta có:

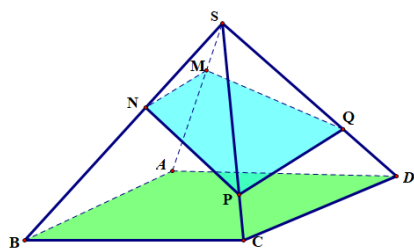
$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$$



$$\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$$



$$\frac{V_{S.ABP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SP}{SC}$$



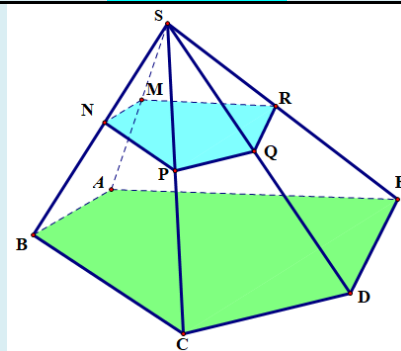
$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyz + xyt + xzt + yzt}{4}$$

Hình chóp có đáy là hình bình hành với
 $\frac{SM}{SA} = x, \frac{SN}{SB} = y,$
 $\frac{SP}{SC} = z, \frac{SQ}{SD} = t.$
Khi đó:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$$

Hình chóp có đáy là đa giác bất kỳ. Chẳng hạn: $(MNPQR) \parallel (ABCDE)$
và tỉ số: $x = \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$
 $= \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{SR}{SE}$
Khi đó:

$$\frac{V_{S.MNPQR}}{V_{S.ABCDE}} = x^3$$

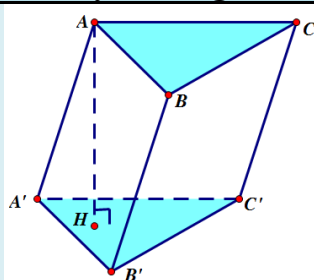


D – THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ:

1. Hình lăng trụ thường:

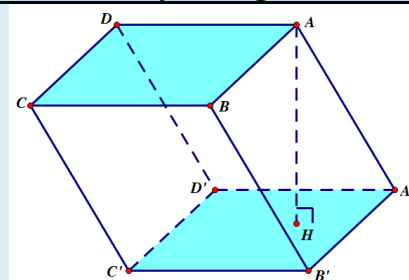
- Hai đáy là hai hình giống nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Các cạnh bên song song và bằng nhau. Các mặt bên là các hình bình hành.
- Thể tích: $V = h \cdot S_d$.

Đáy là tam giác



$$V = AH \cdot S_{\triangle ABC} = AH \cdot S_{\triangle A'B'C'}$$

Đáy là tứ giác

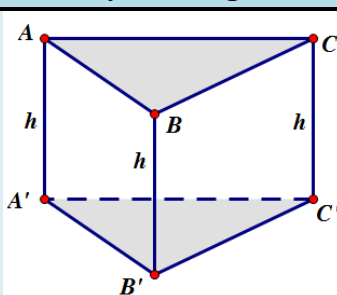


$$V = AH \cdot S_{ABCD} = AH \cdot S_{A'B'C'D'}$$

2. Hình lăng trụ đứng:

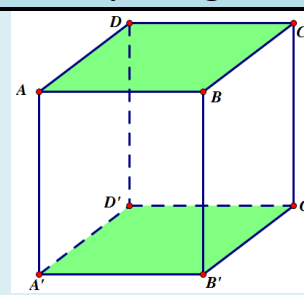
- Các cạnh bên cùng vuông góc với hai mặt đáy nên mỗi cạnh bên cũng là đường cao của lăng trụ.
- Lăng trụ tam giác đều:** Là lăng trụ đứng và có hai đáy là hai tam giác đều bằng nhau.

Đáy là tam giác

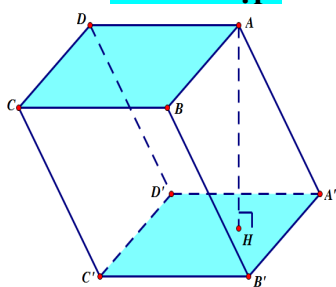


- Thể tích: $V = h \cdot S_d$ với $h = AA' = BB' = CC'$.

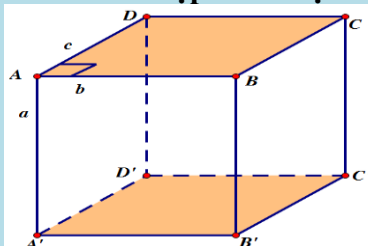
Đáy là tứ giác



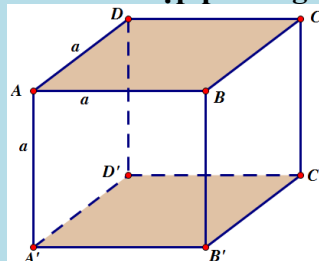
- Thể tích: $V = h \cdot S_d$ với $h = AA' = BB' = CC' = DD'$.

3. Hình hộp:

- Là lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.
- Thể tích: $V = h.S_d$.

3.1 Hình hộp chữ nhật:

- Là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- $V = abc$ với a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

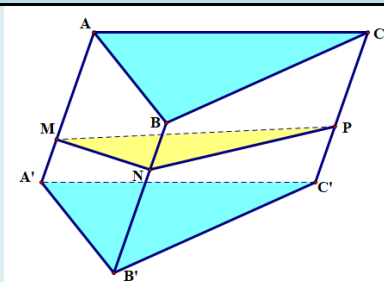
3.2. Hình lập phương:

- Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.
- $V = a^3$ với a là cạnh của hình lập phương.

4. Tỷ số thể tích đối với lăng trụ:

Lăng trụ có đáy tam giác

$$x = \frac{AM}{AA'}, y = \frac{BN}{BB'}, z = \frac{CP}{CC'}$$

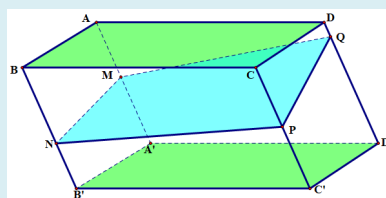


Ta có: $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{x+y+z}{3}$

Lăng trụ đáy là hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông

(Lăng trụ này chính là hình hộp thường hoặc hình hộp chữ nhật, hình lập phương)

$$x = \frac{AM}{AA'}, y = \frac{BN}{BB'}, z = \frac{CP}{CC'}, t = \frac{DQ}{DD'}$$



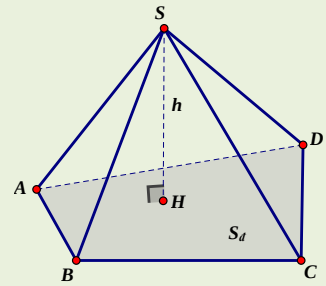
Ta có: $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x+y+z+t}{4}$ và $x+z = y+t$

DẠNG 1. TÌM THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

☞ Thể tích khối chóp với đường cao h và diện tích đa giác đáy S_d là: $V = \frac{1}{3}h.S_d$.

Lưu ý:

- Nếu hình chóp có **cạnh bên vuông góc với đáy** thì **cạnh bên** đó chính là đường cao của hình chóp.
- Nếu hình chóp có **mặt bên vuông góc với mặt đáy** thì **đường cao của tam giác (tương ứng mặt bên) kẻ từ đỉnh hình chóp** cũng chính là đường cao của hình chóp đó.
- **Hình chóp đều** có đường cao **nối từ đỉnh đến tâm đường tròn ngoại tiếp** đa giác đáy.


Bài toán 1. Tìm thể tích khối chóp bằng các phép tính đơn giản
Phương pháp:

- Sử dụng **định lý Pi-ta-go** để tìm độ dài đường cao hoặc các đoạn thẳng trong đa giác đáy.
- Sử dụng các **hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc tam giác thường**, các **công thức diện tích đã học**.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

C. $V = \sqrt{2}a^3$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải:

- Diện tích đáy: $S_{ABCD} = a^2$.

- Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **Chọn** **D**

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O . Biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$ và $SO \perp ABCD$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải:

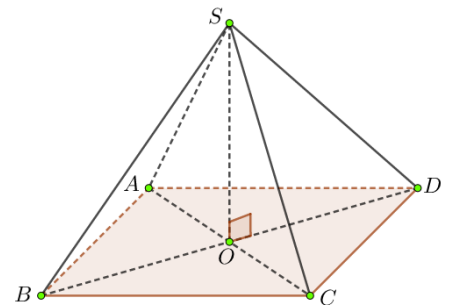
- Diện tích đáy: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB.AD = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

- Xét tam giác ABC vuông tại B có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = a.$$

Xét tam giác SOA vuông tại O có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$



- Thể tích của hình chóp là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}$. **Chọn** D

VÍ DỤ 3. Tính thể tích của khối tứ diện đều có tất cả các cạnh đều bằng a .

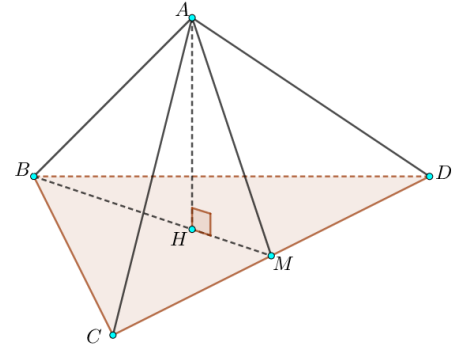
- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

- Gọi M là trung điểm BC , H là trọng tâm tam giác BCD suy ra AH là đường cao hình chóp $A.BCD$.
- Ta có: $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BH = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



- Vậy thể tích tứ diện là $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH \cdot S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **Chọn** A

Đúc kết: Thể tích khối tứ diện đều: $V = \frac{(cạnh)^3\sqrt{2}}{12}$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

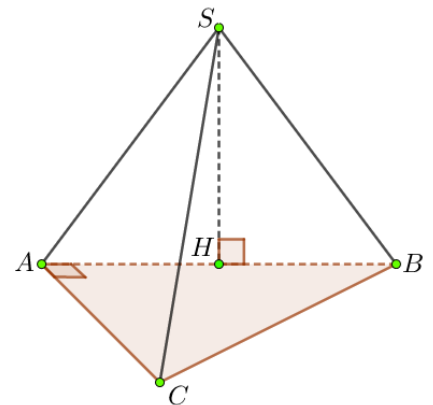
Lời giải:

- Gọi H là trung điểm của cạnh AB . Do ΔSAB đều nên $SH \perp AB$. Hơn nữa (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABC) nên $SH \perp (ABC)$. Do đó: SH là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

- ΔABC vuông tại A , ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$; $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
(do tam giác SAB đều cạnh a).



- Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **Chọn** C

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{8}$.

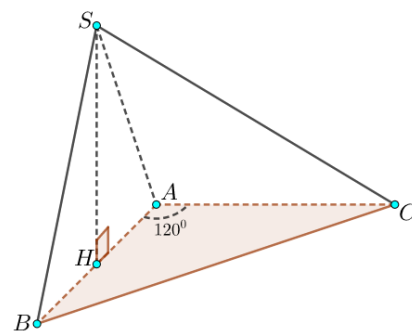
B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải:

- Gọi H là trung điểm đoạn AB . Do tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABC)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a).
- Diện tích đáy: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$. **Chọn** A



VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng $2a$, các cạnh đáy là $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3}{8}$.

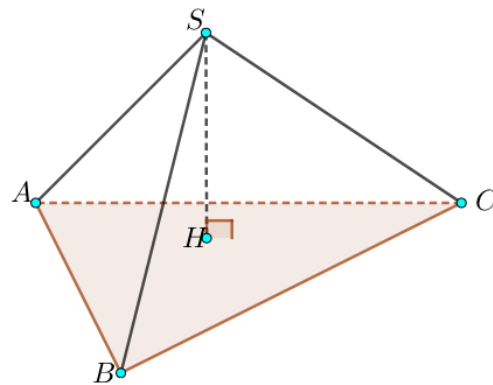
B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải:

- Tam giác ABC có nửa chu vi: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{a + a\sqrt{2} + a\sqrt{5}}{2}$
- Theo công thức Hê-rông, ta có:
- $$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-a\sqrt{2})(p-a\sqrt{5})} = \frac{a^2}{2}.$$
- Thể tích khối chóp: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{3}$. **Chọn** D



Mẹo nhỏ: Khi sử dụng công thức Hê-rông, ta có thể sử dụng MTBT hỗ trợ theo các bước sau:

Bước 1: Nhấn $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}) : 2$ $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ SHIFT $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ STO $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ A (Tức lưu p vào biến A).

Bước 2: Nhấn $\sqrt{A(A-1)(A-\sqrt{2})(A-\sqrt{5})}$ $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ =. Kết quả hiển thị là $\frac{1}{2}$. Ta hiểu rằng diện tích tam giác bằng $\frac{a^2}{2}$. Lưu ý rằng khi gọi biến A, ta nhấn lệnh ALPHA $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ A.

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BAD = 60^\circ$, $SA = SB = SC = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

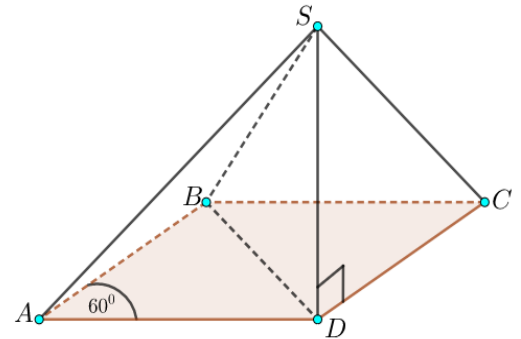
B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải:

- Xét tam giác ABD cân tại A có $BAD = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều, suy ra $DA = DB$ tức là $DA = DB = DC$. Vậy D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp($ABCD$). Vì $SA = SB = SC$ nên các tam giác SHA , SHB , SHC bằng nhau (theo trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông). Suy ra $HA = HB = HC$, hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Do đó H trùng với D .
- Như vậy hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ và chiều cao SD .



$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; \quad SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

- Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}$. **Chọn D**

Đúc kết: Với hình thoi có một góc 60° (hoặc 120°), ta có thể chia hình thoi ra làm **hai tam giác đều bằng nhau** có cạnh bằng với cạnh hình thoi đó.

Bài toán 2. Tìm thể tích khối chóp thông qua góc

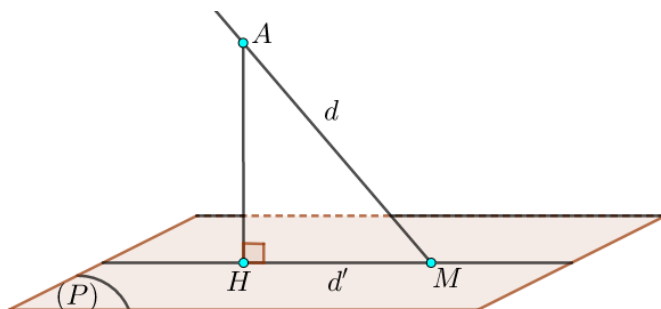
Lý thuyết và Phương pháp:

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Xét đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) như hình vẽ. Ta tìm góc giữa d và (P) theo các bước sau:

- Tìm M là giao điểm của d và (P) .
- Lấy A thuộc d và A khác M . Tìm hình chiếu vuông góc H của A trên (P) .
- Đường thẳng d' qua hai điểm M, H chính là hình chiếu của d trên (P) .

Khi đó: $(d, (P)) = (d, d') = \angle AMH$.



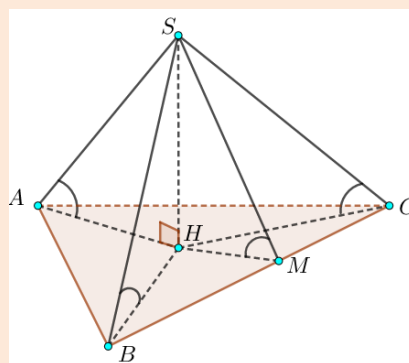
☞ **Trong thực chiến**, học sinh thường gặp **góc giữa cạnh bên và mặt đáy**. Khi đã biết được chân đường cao H của hình chóp, việc xác định góc được thực hiện theo thói quen (xem hình):

$$(SA, (ABC)) = SAH;$$

$$(SB, (ABC)) = SBH;$$

$$(SC, (ABC)) = SCH;$$

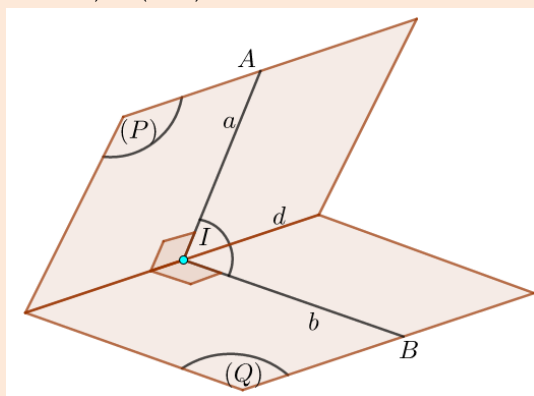
$$(SM, (ABC)) = SMH.$$



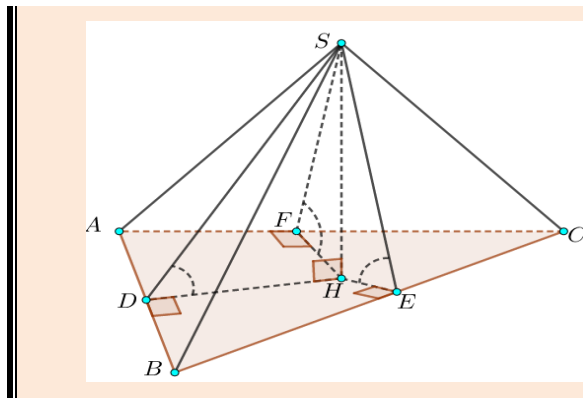
2. Góc giữa hai mặt phẳng:

Xét hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q) , ta làm các bước sau để xác định góc giữa chúng:

- Tìm giao tuyến d của (P) và (Q) .
- Tìm đường thẳng a vuông góc d tại I trong mặt phẳng (P) . Tìm đường thẳng b vuông góc d tại I trong mặt phẳng (Q) .
- Góc cần tìm: $((P), (Q)) = (a, b) = AIB$.



☞ **Trong thực chiến**, học sinh thường gặp **góc giữa mặt bên và mặt đáy**. Khi đã biết chân đường cao H của hình chóp, việc xác định góc này cũng được thực hiện theo thói quen (xem hình):



$$((SAB), (ABC)) = SDH ;$$

$$((SBC), (ABC)) = SEH ;$$

$$((SAC), (ABC)) = SFH .$$

VÍ DỤ 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A. $V = 9a^3$.

B. $V = 2a^3$.

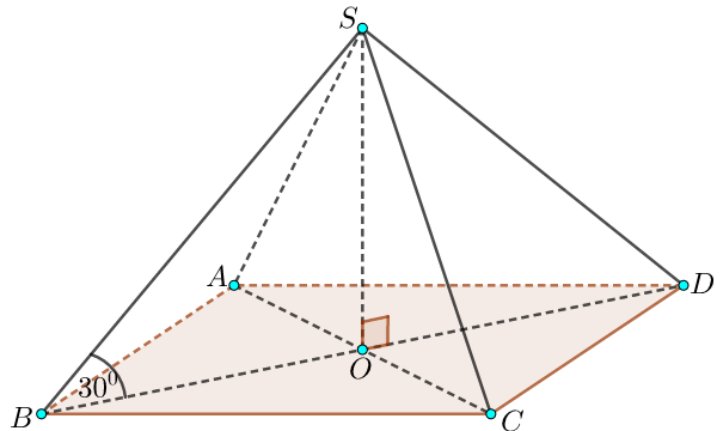
C. $V = a^3$

D. $V = 3a^3$.

Lời giải:

- Ta có: $AB = BC = CD = AD = a\sqrt{6}$;
 $BD = 2\sqrt{3}a \Rightarrow OB = \frac{BD}{2} = a\sqrt{3}$.
- Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 3a^2$.
- Vì góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30°
 $\Rightarrow SBO = 30^\circ$. Ta có $SO = OB \cdot \tan SBO = a$.
- Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là:
 $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 3a^2 = a^3$.

Chọn ☒ **C**



VÍ DỤ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA tạo với đáy một góc 60° và $SA = a\sqrt{3}$, đáy là tứ giác có hai đường chéo vuông góc, $AC = BD = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp theo a .

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $V = 3a^3$.

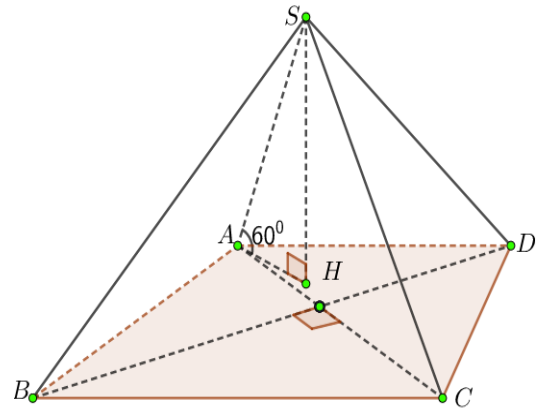
C. $V = a^3$.

D. $V = \frac{3a^3}{2}$.

Lời giải:

- Diện tích đáy: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2a^2$.
- Dựng $SH \perp (ABCD)$. Ta có: AH là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Suy ra góc giữa SA và đáy là $\angle SAH = 60^\circ$
 $\Rightarrow SH = SA \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.
- Vậy thể tích khối chóp là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot 2a^2 = a^3$.

Chọn $\rightarrow$ **C**



VÍ DỤ 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = AC = a\sqrt{2}$ và SB tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải:

- Gọi H là trung điểm BC , do $\triangle ABC$ vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$. Mặt khác ta có $SA = SB = SC$, do đó

$$SH \perp (ABC) \Rightarrow \angle(SB, (ABC)) = \angle SBH = 60^\circ.$$

- Xét tam giác vuông ABC có:

$$BC = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2} = 2a \Rightarrow BH = a.$$

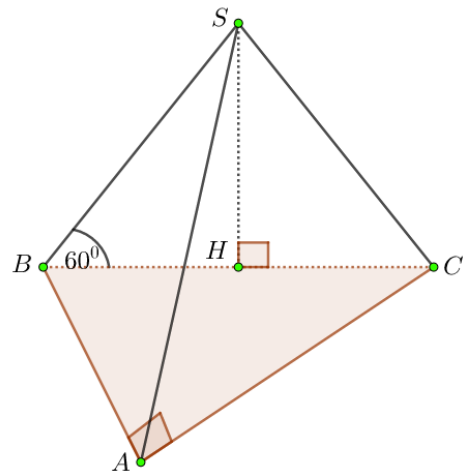
- Xét tam giác vuông SBH có: $SH = BH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\text{Diện tích đáy: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = a^2.$$

- Vậy thể tích của khối chóp là:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn $\rightarrow$ **B**



VÍ DỤ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy, SB tạo với mặt phẳng (SAD) góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

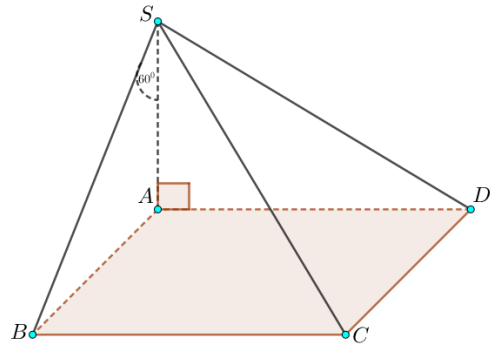
Lời giải:

- Hình chiếu của SB lên (SAD) là SA nên

$$(SB, (SAD)) = (SB, SA) = BSA = 60^\circ.$$

- Ta có: $\tan BSA = \frac{AB}{SA} \Rightarrow SA = \frac{AB}{\tan BSA} = \frac{a}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$
- Vậy thể tích khối chóp đã cho:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}. \quad \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{C}$$



VÍ DỤ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $a^3\sqrt{3}.$ B. $\frac{a^3}{3}.$ C. $\frac{a^3}{2}.$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$

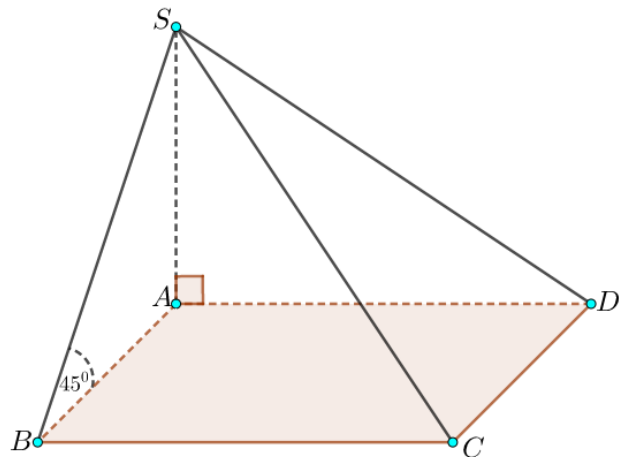
Lời giải:

- Diện tích đáy: $S_{ABCD} = a^2.$
- Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB;$

$$\begin{cases} BC = (SBC) \cap (ABCD) \\ AB \perp BC \text{ trong } (ABCD) \\ SB \perp BC \text{ trong } (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (SB, AB) = SBA = 45^\circ.$$
- Xét tam giác SAB vuông tại A có:
 $SA = AB \cdot \tan 45^\circ = a.$

- Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$ $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{B}$



VÍ DỤ 13. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $BAC = 120^\circ$, $SA \perp (ABC)$, góc giữa (SBC) và (ABC) là 60° .

- A. $\frac{\sqrt{7}a^3}{14}.$ B. $\frac{3\sqrt{21}a^3}{14}.$ C. $\frac{\sqrt{21}a^3}{14}.$ D. $\frac{\sqrt{7}a^3}{7}.$

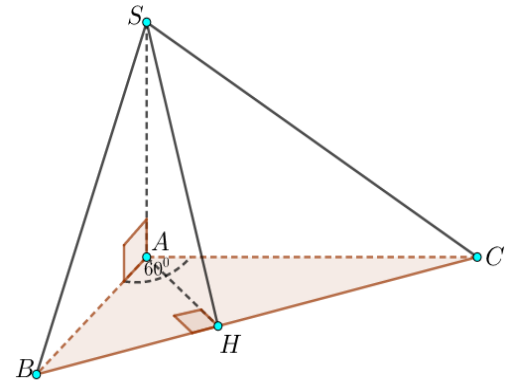
Lời giải:

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC .

- Ta có: $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$. Do đó:

$$\begin{cases} BC = (SBC) \cap (ABC) \\ AH \perp BC \text{ trong } (ABC) \Rightarrow ((SBC), (ABC)) \\ SH \perp BC \text{ trong } (SBC) \end{cases}$$

$$= (AH, SH) = SHA = 60^\circ.$$



- Xét tam giác ABC có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$;

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin BAC = \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}; \text{ mặt khác } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

- Xét tam giác SAH vuông tại A có: $SA = AH \cdot \tan SHA = \frac{a\sqrt{21}}{7} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{7}}{7}$.

$$\text{Do đó: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{21}}{14}.$$

Chọn ☒ **C**

VÍ DỤ 14. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , $AB = a$, $BAD = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$, mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải:

- Ta có $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $BAD = 60^\circ$ nên các tam giác ABD , BCD đều cạnh a .

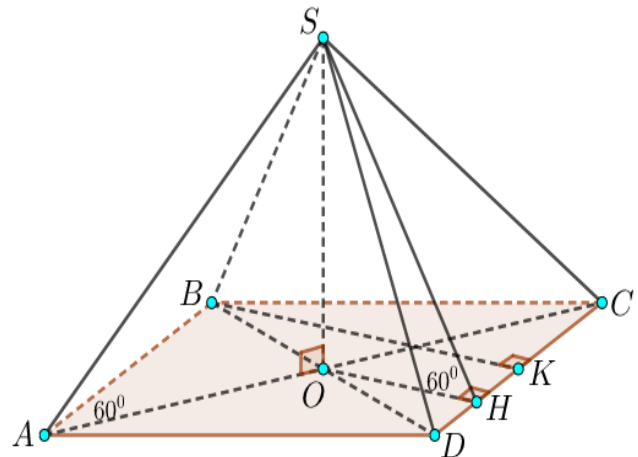
- Gọi BK là đường cao của tam giác BCD , ta có

$$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- Gọi H là hình chiếu của O lên CD .

- Ta có: $\begin{cases} CD \perp OH \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow CD \perp SH$

$$\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (OH, SH) = SHO = 60^\circ.$$



▪ Ta có: $SO = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{BK}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$; $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

▪ Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn** A

VÍ DỤ 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , $AB = BC = 1$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{1}{6}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

D. $V = \frac{1}{3}$.

Lời giải:

▪ Gọi M là trung điểm của $AC \Rightarrow BM \perp AC$. Ta có: $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow BM \perp SC$.

▪ Kê $BH \perp SC$ tại H . Ta có: $\begin{cases} SC \perp BM \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow SC \perp MH$.

Vậy góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (SBC) là góc $BHM = 60^\circ$ (tam giác BMH vuông tại M)

▪ Từ giả thiết suy ra $AC = \sqrt{2}$, $BM = CM = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Xét tam giác

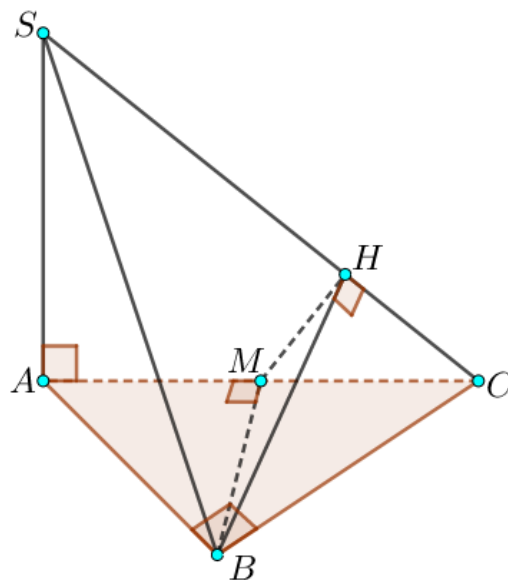
BMH vuông tại M : $\tan BHM = \frac{BM}{MH} \Rightarrow MH = \frac{BM}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

$CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{6}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

▪ Xét hai tam giác đồng dạng $\triangle CAS$, $\triangle CHM$ (tam giác vuông có chung góc nhọn C), do đó:

$\frac{SA}{MH} = \frac{AC}{CH} \Rightarrow SA = \frac{MH \cdot AC}{CH} = 1$. Thể tích khối chóp:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{6}$. **Chọn** B



VÍ DỤ 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng đáy thuộc miền trong của tam giác ABC , mặt bên (SAB) tạo với đáy góc 45° và diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. Tìm thể tích khối chóp trên.

A. $\frac{a^3}{12}$.

B. $V = \frac{a^3}{16}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{14}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải:

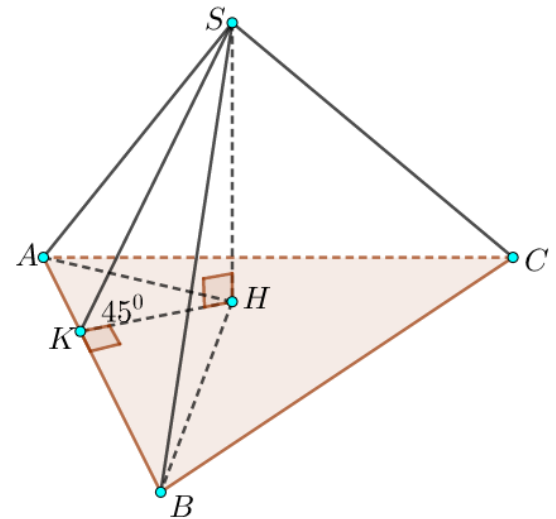
- Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) và K là hình chiếu của H trên cạnh AB . Khi đó $AB \perp (SHK)$ nên góc tạo bởi hai mặt phẳng $(SAB), (ABC)$ là $SKH = 45^\circ$.

Ta có: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SK \cdot AB \Rightarrow SK = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \frac{2 \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SKH vuông cân tại H nên $SH = \frac{SK}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$.

- Diện tích đáy: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy thể tích khối chóp là:

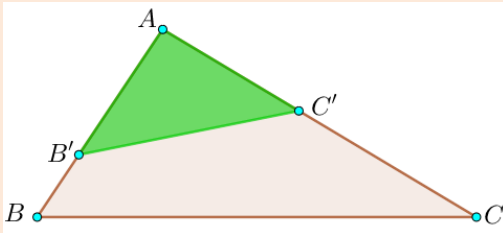
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}. \quad \text{Chọn } \boxed{D}$$



Đúc kết: Gọi S là diện tích của đa giác (H) và S' là diện tích hình chiếu của (H) trên mặt phẳng (P) , góc tạo bởi (P) và mặt phẳng chứa đa giác (H) là φ , khi đó: $S' = S \cdot \cos \varphi$.

Bài toán 3. Tỷ số thể tích khối chóp

1. Tỷ số diện tích:



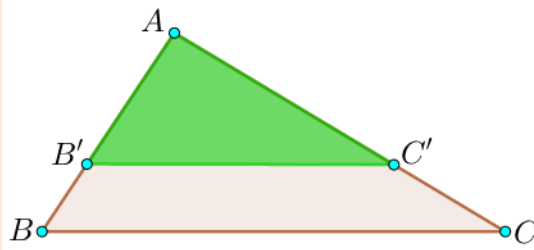
Xét tam giác ABC với B', C' là các điểm lần lượt thuộc cạnh AB, AC , ta có:

$$\frac{S_{\Delta B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}$$

Nếu hai tam giác ABC, MNP đồng dạng theo tỷ số

k (tức là $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k$) thì $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = k^2$.

2. Định lý Ta-lét:



Xét tam giác ABC và $B'C' \parallel BC$, ta có:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

và $\frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'}, \frac{BA}{CA} = \frac{CA}{BA}$.

Ngược lại, nếu ta có $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ thì suy ra được $B'C' \parallel BC$.

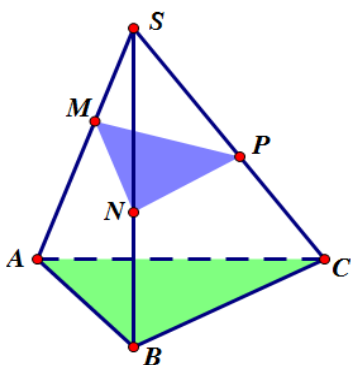
Mở rộng, cho $B'C' \parallel BC$, gọi h, h' lần lượt là các đường cao của tam giác $AB'C', ABC$, ta

có: $\frac{h'}{h} = \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$ và $\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} = k^2$.

3. Khối chóp có đáy tam giác:

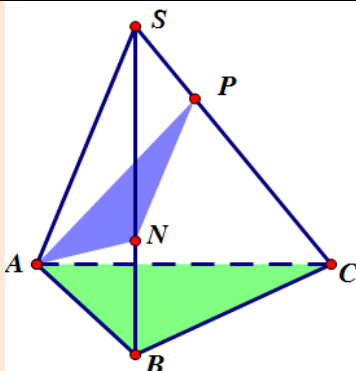
Tổng quát:

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$$



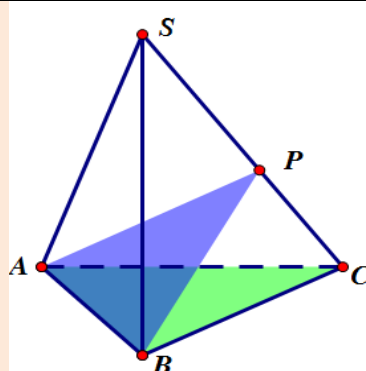
Đặc biệt: $M \equiv A$

$$\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$$

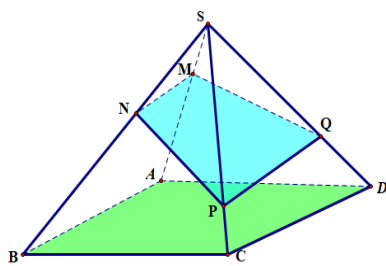


Đặc biệt: $M \equiv A, N \equiv B$

$$\frac{V_{S.ABP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SP}{SC}$$



4. Khối chóp có đáy là hình bình hành (hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông):

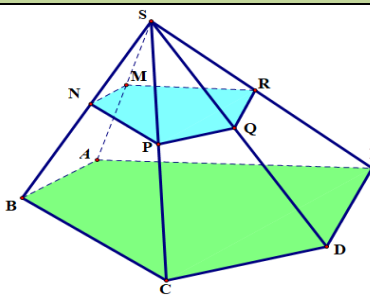


Hình chóp có đáy là hình bình hành với $\frac{SM}{SA} = x, \frac{SN}{SB} = y,$

$\frac{SP}{SC} = z, \frac{SQ}{SD} = t$. (Nên nhớ: M, N, P, Q đồng phẳng).

Khi đó: $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyz + xyt + xzt + yzt}{4}$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$.

5. Đáy là đa giác bất kỳ:



Xét hình chóp có đáy là đa giác bất kỳ (xem hình minh họa).

Giả sử: $(MNPQR) \parallel (ABCDE)$ và tỉ số

$k = \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{SR}{SE}$. Khi đó: $\frac{V_{S.MNPQR}}{V_{S.ABCDE}} = k^3$.

VÍ DỤ 17. Khi tăng cả ba cạnh đáy của một khối chóp có đáy là tam giác đều lên hai lần còn đường cao của khối chóp giữ nguyên thì thể tích của khối chóp tăng bao nhiêu lần?

A. 4.

B. 2.

C. 8.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

	Lúc đầu	Sau đó
Cạnh đáy	a	$2a$
Diện tích đáy	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$
Chiều cao	h	h
Thể tích	$V = \frac{1}{3}h \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{ha^2\sqrt{3}}{12}$	$V' = \frac{1}{3}ha^2\sqrt{3} = \frac{ha^2\sqrt{3}}{3}$

- Ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{ha^2\sqrt{3}}{3} : \frac{ha^2\sqrt{3}}{12} = 4$. Vậy thể tích khối chóp tăng lên 4 lần. **Chọn** → **A**

VÍ DỤ 18. Khi tăng độ dài đường cao của một hình chóp đáy tam giác lên 2 lần và giảm mỗi cạnh đáy của nó xuống 2 lần thì thể tích khối chóp sau đó tăng hay giảm bao nhiêu lần so với ban đầu?

- A.** tăng 4 lần. **B.** tăng 2 lần. **C.** giảm 2 lần. **D.** không đổi.

Lời giải:

	Lúc đầu	Sau đó
Cạnh I	a	$\frac{a}{2}$
Cạnh II	b	$\frac{b}{2}$
Góc xen giữa hai cạnh I và II	φ	φ
Diện tích đáy	$\frac{1}{2}ab\sin\varphi$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \sin\varphi = \frac{ab}{8}\sin\varphi$
Chiều cao	h	$2h$
Thể tích	$V = \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}ab\sin\varphi = \frac{hab\sin\varphi}{6}$	$V' = \frac{1}{3}2h \cdot \frac{ab}{8}\sin\varphi = \frac{hab\sin\varphi}{12}$

- Ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{hab\sin\varphi}{12} : \frac{hab\sin\varphi}{6} = \frac{1}{2}$. Do đó thể tích khối chóp đã giảm 2 lần sau khi thay đổi kích thước theo đề bài. **Chọn** → **C**

VÍ DỤ 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích là V biết M, N, P lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC sao cho $SM = MA, SN = 2NB, SC = 3SP$. Gọi V' là thể tích của $S.MNP$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $V' = \frac{V}{6}$. **B.** $V' = \frac{V}{12}$. **C.** $V' = \frac{V}{9}$. **D.** $V' = \frac{V}{3}$.

Lời giải:

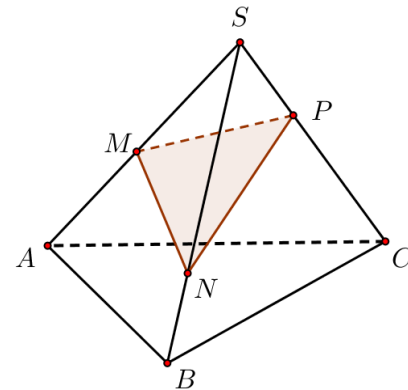
- Ta có: $SM = MA \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$;

$$SN = 2NB \Leftrightarrow SN = 2(SB - SN) \Leftrightarrow 3SN = 2SB \Leftrightarrow \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3};$$

$$SC = 3SP \Leftrightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}.$$

▪ Vì vậy: $\frac{V'}{V} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ suy ra $V' = \frac{V}{9}$.

Chọn → **C**



VÍ DỤ 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC . Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{8}$.

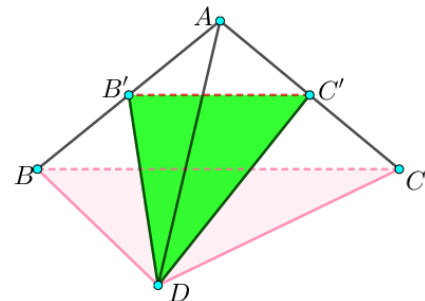
C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

▪ Ta có: $\frac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AD}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Chọn → **D**



VÍ DỤ 21. Cho khối chóp $S.ABCD$, các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{1}{16}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

☺ Cách giải 1: Tự luận.

- Hình chóp $S.ABD$ có M, N, Q lần lượt là trung điểm của

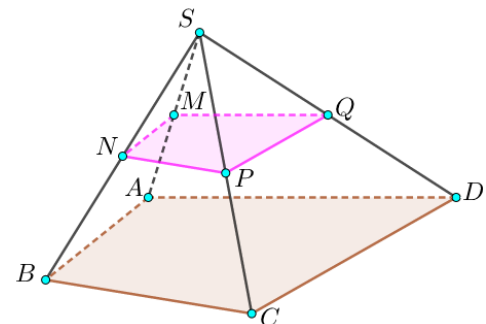
SA, SB, SD nên: $\frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

- Hình chóp $S.BCD$ có N, P, Q lần lượt là trung điểm của

SB, SC, SD nên: $\frac{V_{S.NPQ}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

▪ Do đó: $\frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}} = \frac{V_{S.NPQ}}{V_{S.BCD}} = \frac{V_{S.MNQ} + V_{S.NPQ}}{V_{S.ABD} + V_{S.BCD}} = \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$.

Chọn → **B**



☺ Cách giải 2: Trắc nghiệm.

- Ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

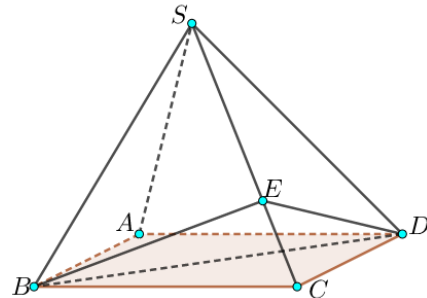
VÍ DỤ 22. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SEBD$.

- A. $V = \frac{1}{6}$. B. $V = \frac{1}{3}$. C. $V = \frac{1}{12}$. D. $V = \frac{2}{3}$.

Lời giải:

- $V_{S.BCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}$ (do $S_{ABCD} = 2S_{BCD}$).
- $\frac{V_{S.BED}}{V_{S.BCD}} = \frac{SE}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.BED} = \frac{2}{3}V_{S.BCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Chọn $\rightarrow$ **B**



VÍ DỤ 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là 60° . Gọi M, N là trung điểm của SB, SC . Tính thể tích khối $S.ADNM$?

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải:

- Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp SO; \begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = SOA = 60^\circ$.

$$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SA = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

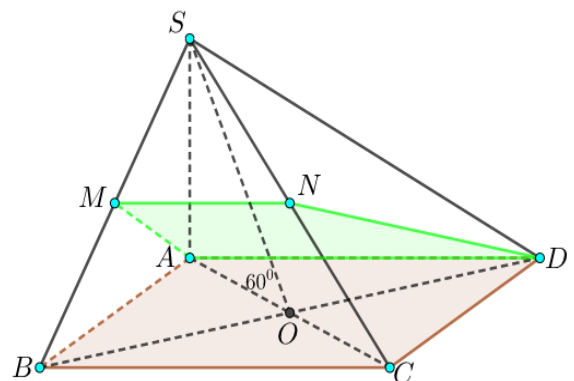
- $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$.
- Đặt $x = \frac{SA}{SA} = 1, y = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}, z = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}, t = \frac{SD}{SD} = 1$,

$$\text{khí đó: } \frac{V_{S.AMND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyz + xyt + xzt + yzt}{4}$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.AMND} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}a^3 = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}.$$

Chọn $\rightarrow$ **A**



VÍ DỤ 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và $ASB = BSC = CSA = 60^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, b, c .

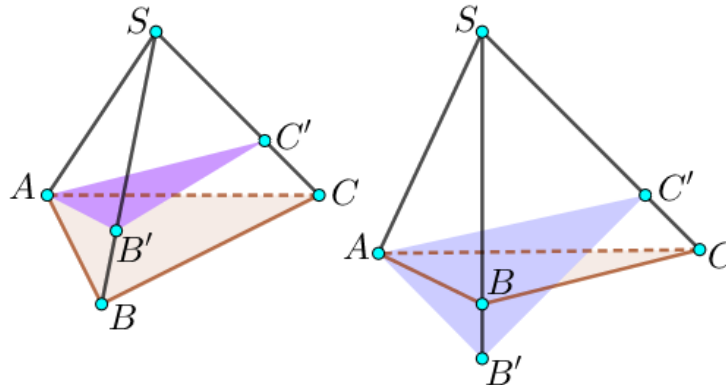
A. $\frac{\sqrt{2}}{12abc}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{12}abc$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}abc$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4abc}$.

Lời giải:



- Trên SB, SC lần lượt lấy B', C' sao cho $SB' = SC' = a$.

Khi đó $SAB'C'$ là tứ diện đều cạnh a , do đó: $V_{SAB'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

$$\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{a^2}{bc} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{V_{SAB'C'}}{\frac{a^2}{bc}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^2}{bc}} = \frac{abc\sqrt{2}}{12}.$$

Chọn $\rightarrow$ **B**

VÍ DỤ 25. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , mặt phẳng (P) chứa cạnh CD và đi qua trung điểm E của AG , (P) cắt AB tại N . Gọi thể tích của hai tứ diện $ACDN$ và tứ diện

$BCDN$ lần lượt là V_1 và V_2 . Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{4}$.

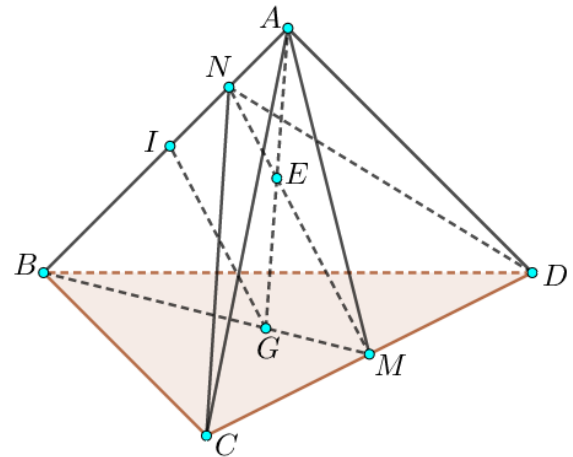
Lời giải:

- Gọi M là trung điểm CD . Kẻ ME cắt AB tại N (trong mặt phẳng (ABM)), N cũng là giao điểm của AB với $mp(P)$.
- Kẻ $GI \parallel MN$, với $I \in AB$. Khi đó ta có $AN = IN$ (do NE là đường trung bình $\triangle AGI$) (1).

Bên cạnh đó: $\frac{BI}{IN} = \frac{BG}{GM} = 2 \Rightarrow BI = 2IN$ (2). Từ (1)

và (2) suy ra $BN = 3AN$.

- Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{AN}{BN} = \frac{1}{3}$. **Chọn** A



VÍ DỤ 26. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12. Gọi A' là điểm trên đường thẳng d đi qua điểm C và song song với AB sao cho A, A' cùng phía so với mặt phẳng (BCD) . Gọi V là thể tích phần chung của hai khối tứ diện $ABCD$ và $A'BCD$. Tính thể tích V , biết $AB = 3A'C$.

- A.** $V = 6$. **B.** $V = 2$ **C.** $V = 3$. **D.** $V = 4$.

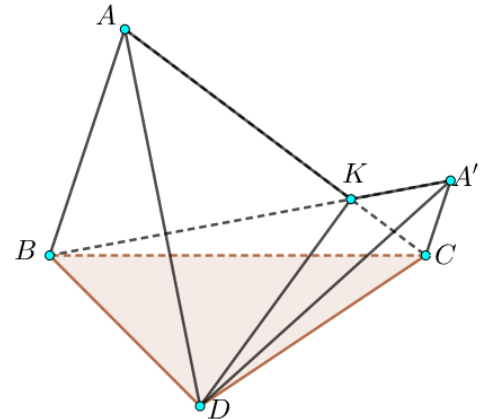
Lời giải:

- Gọi K là giao điểm của $A'B$ với AC trong (ABC) . Khi đó phần chung của hai khối tứ diện $ABCD$ và $A'BCD$ là tứ diện $KBCD$.
- Do $AB \parallel A'C$ nên

$$\frac{AK}{CK} = \frac{AB}{A'C} = 3 \Rightarrow AK = 3CK \Rightarrow AC - CK = 3CK \Rightarrow AC = 4CK.$$

- Do đó: $\frac{V_{KBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{CK}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow V = V_{KBCD} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$.

Chọn C



VÍ DỤ 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích V . Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SB, SC và G là trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích V_1 của khối chóp $G.APQ$ theo V .

- A.** $V_1 = \frac{1}{8}V$. **B.** $V_1 = \frac{1}{12}V$. **C.** $V_1 = \frac{1}{6}V$. **D.** $V_1 = \frac{3}{8}V$.

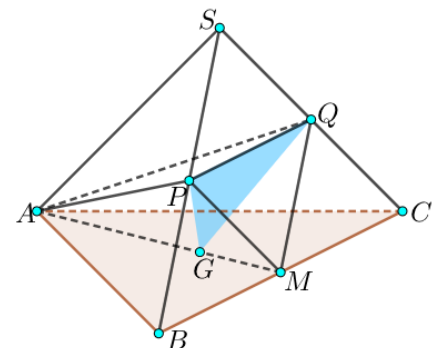
Lời giải:

- Gọi M là trung điểm BC , suy ra

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{4}S_{\triangle SBC} \Rightarrow V_{A.MPQ} = \frac{1}{4}V_{A.SBC} = \frac{1}{4}V_{S.ABC} = \frac{V}{4}.$$

- Ta có: $\frac{V_{A.GPQ}}{V_{A.MPQ}} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_1 = V_{A.GPQ} = \frac{2}{3}V_{A.MPQ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{V}{4} = \frac{V}{6}$.

Chọn C



DẠNG 2. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

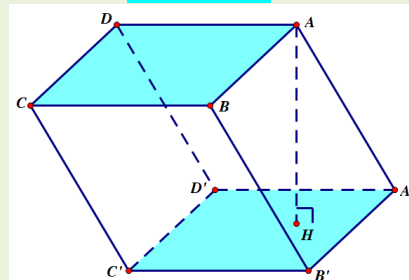
☞ Thể tích khối lăng trụ với đường cao h và diện tích đa giác đáy S_d là: $V = h \cdot S_d$.

☞ Thể tích khối hộp chữ nhật có ba cạnh a, b, c là $V = abc$.

☞ Thể tích khối lập phương có cạnh a là $V = a^3$.

☞ Lưu ý:

- Đối với *lăng trụ đứng* thì *chiều cao cũng chính là cạnh bên* của lăng trụ đó.
- *Lăng trụ đều* là *lăng trụ đứng*, có *đáy là đa giác đều* (tam giác đều, hình vuông v.v...).
- *Lăng trụ tam giác đều* là *lăng trụ đứng*, có hai *đáy là các tam giác đều* bằng nhau.
- *Lăng trụ tứ giác đều* là *lăng trụ đứng*, có hai *đáy là các hình vuông* bằng nhau.



Bài toán 1. Tìm thể tích khối lăng trụ bằng phép tính đơn giản

VÍ DỤ 28. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy và cạnh bên cùng bằng a . Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

A. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

▪ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên đường cao cũng là cạnh bên, ta có: $h = AA' = a$.

▪ Đáy lăng trụ là tam giác đều nên có diện tích: $S_d = S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

▪ Thể tích khối lăng trụ: $V_{ABC.A'B'C'} = h \cdot S_d = a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$. Chọn $\rightarrow$ D

VÍ DỤ 29. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $AB = 3\text{cm}$, $BC' = 3\sqrt{2}\text{cm}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $\frac{27}{4}\text{cm}^3$.

B. 27cm^3 .

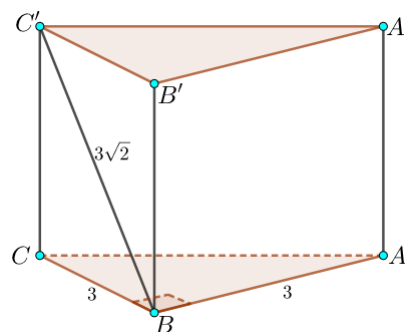
C. $\frac{27}{2}\text{cm}^3$.

D. $\frac{27}{8}\text{cm}^3$.

Lời giải:

- Xét tam giác vuông BCC' có $CC' = \sqrt{BC'^2 - BC^2} = \sqrt{18 - 9} = 3\text{cm}$.
- Diện tích đáy lăng trụ: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} \text{cm}^2$.
- Thể tích khối lăng trụ là: $V = CC' \cdot S_{\Delta ABC} = 3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2} \text{cm}^3$.

Chọn → **C**



VÍ DỤ 30. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AD' = 2a\sqrt{2}$.

A. $V = a^3$.

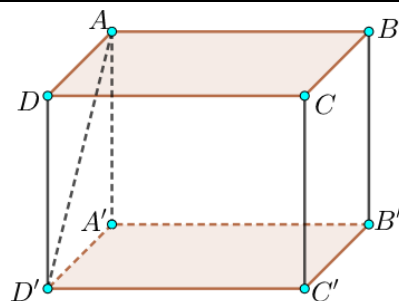
B. $V = 8a^3$.

C. $V = 2\sqrt{2}a^3$.

D. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

Lời giải:

- Gọi cạnh của hình lập phương là x ($x > 0$). Ta có:
 $AD' = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$.
- Theo đề: $AD' = 2a\sqrt{2} = x\sqrt{2} \Rightarrow x = 2a$. Thể tích khối lập phương là
 $V = (2a)^3 = 8a^3$. Chọn → **B**



VÍ DỤ 31. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = AA' = a$ và $AC = a\sqrt{5}$.

A. $V = a^3\sqrt{5}$.

B. $V = \frac{2a^3}{3}$.

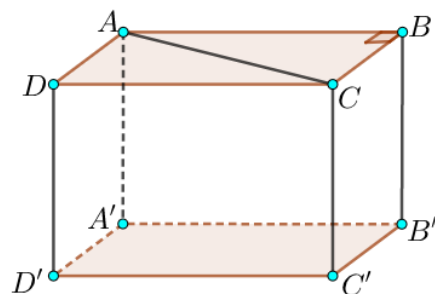
C. $V = a^3$.

D. $V = 2a^3$.

Lời giải:

- Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a = AD$.
- Thể tích khối hộp chữ nhật là $V = AB \cdot AD \cdot AA' = a \cdot 2a \cdot a = 2a^3$.

Chọn → **D**



VÍ DỤ 32. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với các cạnh đáy là $AB = a$, $AC = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$. Diện tích hình bình hành $ABB'A'$ bằng $a^2\sqrt{3}$ và mặt bên $(ABB'A')$ vuông góc với mặt đáy. Tìm thể tích lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{7}}{2}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{7}}{8}$.

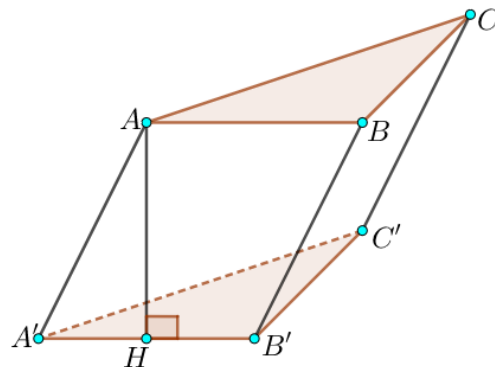
C. $V = \frac{a^3\sqrt{21}}{3}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{21}}{4}$.

Lời giải:

- Vẽ đường cao AH của hình bình hành $ABB'A'$, vì mặt bên $ABB'A'$ vuông góc với mặt đáy nên AH cũng là đường cao của lăng trụ đã cho.
- Ta có $S_{ABB'A'} = AH \cdot AB \Rightarrow AH = \frac{S_{ABB'A'}}{AB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a} = a\sqrt{3}$.
- Đặt $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3a + a\sqrt{2}}{2}$. Theo công thức Hê-rông:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}.$$
- Thể tích khối lăng trụ: $V = AH \cdot S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{7}}{4} = \frac{a^3\sqrt{21}}{4}$.


Chọn → **D**

VÍ DỤ 33. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=1$, $AC=2$; cạnh bên $AA'=\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{21}}{12}$.

B. $V = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

C. $V = \frac{\sqrt{21}}{4}$.

D. $V = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

Lời giải:

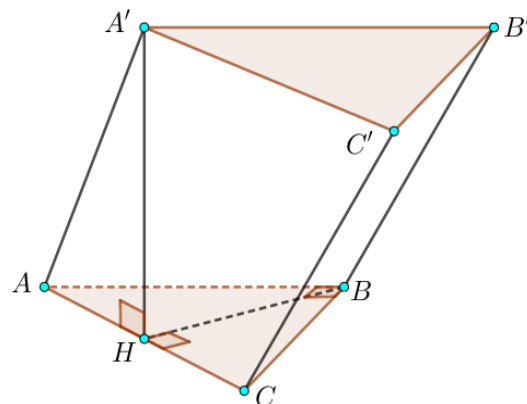
- Trong tam giác ABC , kẻ đường cao BH , ta có $A'H \perp (ABC)$.
- Xét tam giác ABC vuông tại B , ta có:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bên cạnh đó: $AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{1}{2}.$

- Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H ,
 $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

- Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'H \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{4}$.

Chọn → **C**


VÍ DỤ 34. Các đường chéo của các mặt một hình hộp chữ nhật bằng $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật đó.

A. $V = 2$.

B. $V = 6$.

C. $V = 5\sqrt{26}$.

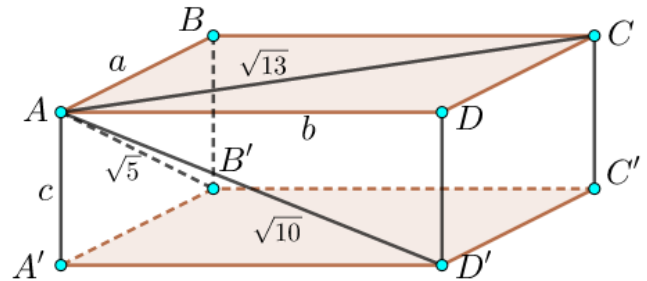
D. $V = \frac{5\sqrt{26}}{3}$.

Lời giải:

- Giả sử hình hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ), có $AB' = \sqrt{5}$, $AD' = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{13}$.

- Đặt $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Ta có

$$\begin{cases} AB'^2 = a^2 + c^2 = 5 \\ AD'^2 = b^2 + c^2 = 10 \\ AC^2 = a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$
- Thể tích V của khối hộp chữ nhật đã cho là:
 $V = abc = 2.3.1 = 6$. **Chọn** B



Bài toán 2. Tìm thể tích khối lăng trụ thông qua góc

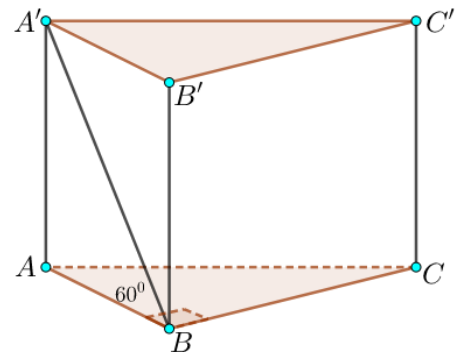
VÍ DỤ 35. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , góc tạo bởi $A'B$ và đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $3a^3$.

Lời giải:

- Ta có: AB là hình chiếu của $A'B$ trên mặt phẳng (ABC) .
 Khi đó: $(A'B, (ABC)) = (A'B, AB) = A'BA = 60^\circ$. Vì vậy:
 $AA' = AB \cdot \tan A'BA = a\sqrt{3}$.
- Diện tích đáy lăng trụ: $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$.

Chọn A



VÍ DỤ 36. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hình chiếu A' lên $mp(ABCD)$ là trung điểm H của AB , $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, góc $ABC = 60^\circ$, BB' tạo với đáy một góc 30° . Tính thể tích hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. $2a^3$. D. a^3 .

Lời giải :

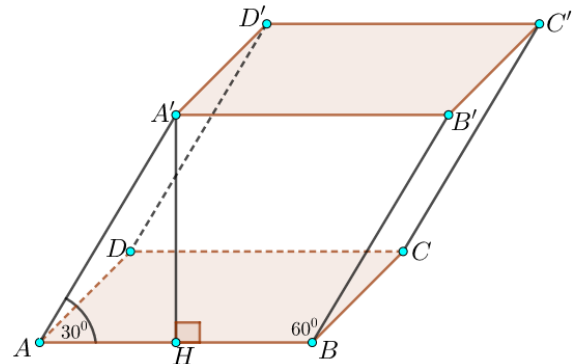
- Ta có: $(BB', (ABCD)) = (AA', (ABCD)) = A'AH = 30^\circ$ (AH là hình chiếu của AA' trên $mp(ABCD)$).
- Suy ra: $A'H = AH \cdot \tan 30^\circ = a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

- Diện tích đáy lăng trụ (hình thoi):

$$S_{ABCD} = (2a)^2 \cdot \sin 60^\circ = 4a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a^2 \sqrt{3}.$$

- Vậy: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = 2a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2a^3.$

Chọn → **A**



VÍ DỤ 37. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Biết rằng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A.** $2a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $3a^3\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

- Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AC'$ là hình chiếu của BC' trên $(ACC'A')$. Do đó:

$$(\angle BC', (ACC'A')) = (\angle BC', AC') = \angle AC'B = 30^\circ.$$

- Xét tam giác ABC' vuông tại A có:

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = a\sqrt{3}.$$

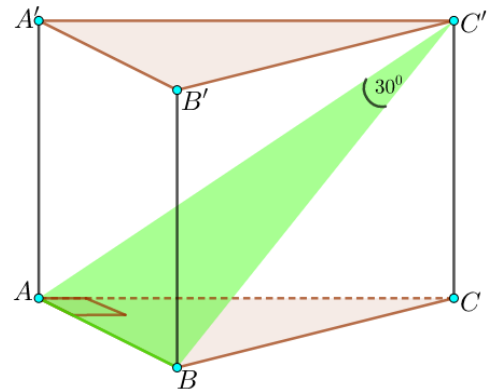
- Xét tam giác $AA'C'$ vuông tại A' có:

$$AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

- Diện tích đáy lăng trụ: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}.$

- Thể tích lăng trụ: $V = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$

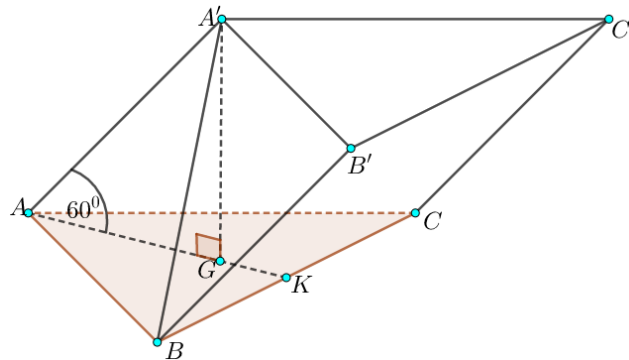
Chọn → **D**



VÍ DỤ 38. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC . Biết góc giữa cạnh bên với mặt đáy là 60° , hãy tính thể tích khối đa diện $ABCA'C'$.

- A.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải:



- Gọi h là chiều cao của lăng trụ đã cho.

Ta có: $V_{ABCA'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{B.A'B'C'} = h.S_{\Delta A'B'C'} - \frac{1}{3}h.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{2}{3}h.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

- Vì ABC là tam giác đều cạnh a nên: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

- Theo giả thiết: $A'AG = 60^\circ \Rightarrow A'G = AG \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = [a]$.

- Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = A'G.S_{\Delta ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Do đó: $V_{ABCA'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn $\rightarrow$ **C**

VÍ DỤ 39. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{3a^3}{\sqrt{6}}$.

Lời giải:

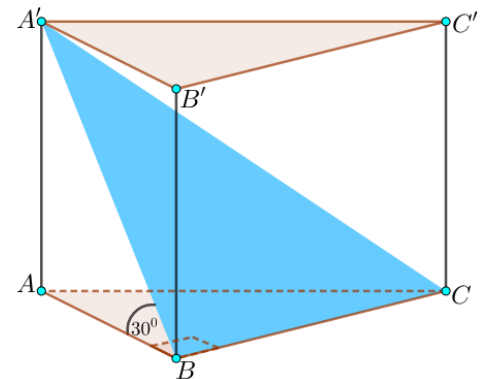
- Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'B$.

- Do đó: $\begin{cases} BC = (A'BC) \cap (ABC) \\ AB \perp BC \text{ (trong } (ABC)) \\ A'B \perp BC \text{ (trong } (A'BC)) \end{cases}$

$$\Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = (A'B, AB) = A'BA = 30^\circ.$$

$$A'A = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

- Diện tích đáy lăng trụ: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.



- Vậy thể tích khối lăng trụ : $V = A'A.S_{\triangle ABC} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **Chọn** **B**

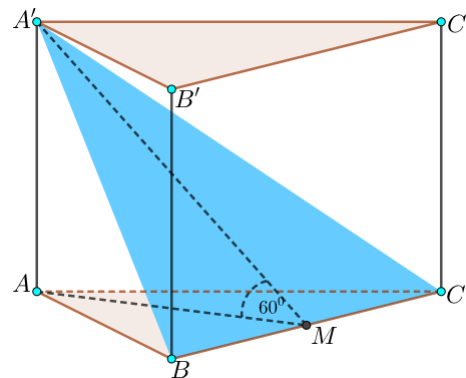
VÍ DỤ 40. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A.** $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $3a^3\sqrt{3}$. **D.** $2a^3$.

Lời giải:

- Gọi M trung điểm BC . Tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên
- $$AM = \frac{(2a) \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; S_{\triangle ABC} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$
- Khi đó $AM \perp BC$, ta chứng minh được $A'M \perp BC$ nên góc tạo bởi $(A'BC)$ và (ABC) là góc $A'MA = 60^\circ$. Do đó:
- $$AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a.$$
- Thể tích lăng trụ: $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 3a \cdot a^2\sqrt{3} = 3a^3\sqrt{3}$.

Chọn **C**



VÍ DỤ 41. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $BC = 2a$ và góc $ABC = 60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có góc $B'BC$ nhọn và mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt phẳng (ABC) góc 45° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A.** $V = \frac{6a^3\sqrt{7}}{7}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{7}}{7}$. **C.** $V = \frac{3a^3\sqrt{7}}{7}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{7}}{21}$.

Nhận xét: Sau khi dựng được hình như bên dưới, ta thấy tam giác vuông $B'HI$ chỉ có góc $B'IH = 45^\circ$, nhiều đây không thể tìm được đường cao $B'H$ của lăng trụ. Xét tam giác BHI vuông tại I , ta cũng chỉ có được $B = 60^\circ$, không đủ điều kiện để tìm bất kỳ cạnh nào. Xét tam giác vuông $BB'H$ cũng chỉ có dữ kiện $BB' = 2a = BC$ (cạnh hình thoi). Qua đây, ta thấy mỗi tam giác vuông trong hình đều có những **dữ kiện nửa vời**, vì vậy muốn giải quyết dạng toán này, học sinh cần **xét cùng lúc nhiều tam giác rồi liên hệ các dữ kiện rời rạc thành một phương trình duy nhất** để tìm cạnh (góc) như mong muốn.

Lời giải:

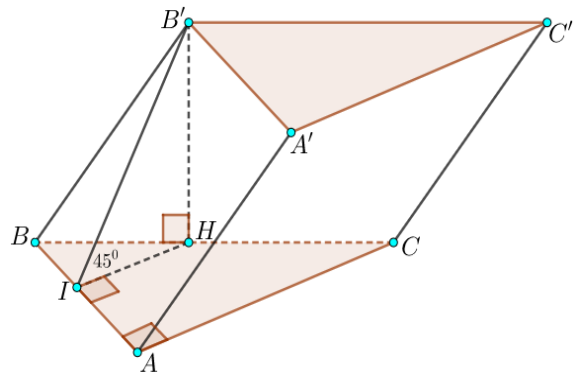
- Xét tam giác vuông ABC ta có $BC = 2a$,

$$ABC = 60^\circ, \text{ suy ra } AC = BC \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3},$$

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = a. \text{ Diện tích đáy lăng trụ:}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

- Gọi H là chân đường cao kẻ từ B' đến BC , do đó $B'H \perp (ABC)$, gọi I là hình chiếu của H trên cạnh AB , ta được: $((ABB'A'), (ABC)) = HIB' = 45^\circ$. Do đó tam giác $B'HI$ vuông cân tại H .



- Gọi $h = B'H$ là chiều cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ suy ra $IH = h$; $BH = \frac{IH}{\sin 60^\circ} = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.
- Xét tam giác HBB' vuông tại H có: $BH^2 + B'H^2 = BB'^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2 = (2a)^2 \Leftrightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} a$.
- Suy ra $V = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{7} a^3$. **Chọn $\boxed{C}$**

VÍ DỤ 42. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , $CB = \sqrt{2}a$. Biết rằng góc giữa $B'C$ và AC' bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2\sqrt{2}a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** a^3 .

Lời giải:

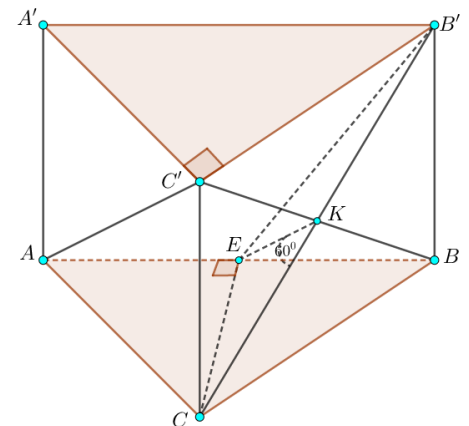
- Gọi E là trung điểm đoạn AB thì $CE \perp AB$ tại E (vì $\triangle ACB$ vuông cân tại C).
Hơn nữa $CE \perp BB'$ nên $CE \perp EB'$ suy ra $\triangle CEB'$ vuông tại E .
- Gọi $K = C'B \cap B'C'$ thì EK là đường trung bình của $\triangle ABC'$ suy ra $EK \parallel AC'$.

Khi đó: góc giữa AC' với CB' là góc giữa EK với CB' , do đó $EKC = 60^\circ$.

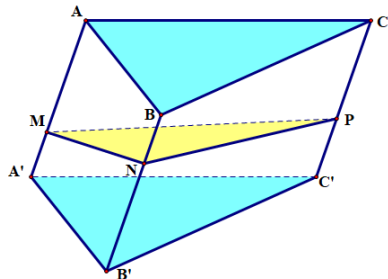
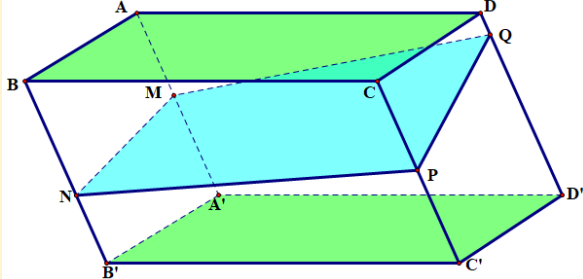
Xét tam giác $EB'C$ vuông tại E có đường trung tuyến EK nên $KE = KC$, hơn nữa $EKC = 60^\circ$ nên $\triangle EKC$ đều.

- $CE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CB \cdot \sqrt{2} = a$; $EC = EK = KC = \frac{1}{2} CB' = a \Rightarrow CB' = 2a$
- $BB' = \sqrt{B'C^2 - CB^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$

Vậy: $V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{2} \cdot a^2 = a^3\sqrt{2}$. **Chọn $\boxed{C}$**



Bài toán 3. Tỷ số thể tích khối lăng trụ

TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP:			
Lăng trụ có đáy tam giác		Lăng trụ đáy là hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông (Lăng trụ này chính là hình hộp thường hoặc hình hộp chữ nhật, hình lập phương).	
$x = \frac{AM}{AA'}, y = \frac{BN}{BB'}, z = \frac{CP}{CC'}$		$x = \frac{AM}{AA'}, y = \frac{BN}{BB'}, z = \frac{CP}{CC'}, t = \frac{DQ}{DD'}$	
			
Ta có: $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{x+y+z}{3}$		Ta có: $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x+y+z+t}{4}$ và $x+z = y+t$	
Lưu ý: Ngoài những tỉ số thể tích được nêu trên, chắc chắn các em học sinh cần vận dụng thêm các phép <i>lắp ghép đa diện (cộng – trừ thể tích đa diện)</i> để giải quyết các loại toán này.			

VÍ DỤ 43. Khi tăng độ dài tất cả các cạnh của một khối hộp chữ nhật lên gấp 3 thì thể tích khối hộp tương ứng sẽ:

- A. tăng 6 lần. B. tăng 18 lần. C. tăng 9 lần. D. tăng 27 lần.

Lời giải:

	Lúc đầu	Sau đó
Chiều dài	a	$3a$
Chiều rộng	b	$3b$
Chiều cao	c	$3c$
Thể tích	$V = abc$	$V' = 27abc$

- Ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{27abc}{abc} = 27$. Do đó thể tích hình hộp chữ nhật tăng 27 lần nếu mỗi cạnh của nó tăng 3 lần.

Chọn → **D**

VÍ DỤ 44. Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V khi đó thể tích khối chóp tứ giác $ABCC'B'$ bằng

- A. $\frac{2}{3}V$. B. $\frac{1}{2}V$. C. $\frac{1}{3}V$. D. $\frac{3}{4}V$.

Lời giải:

☺ Cách giải 1: Tự luận.

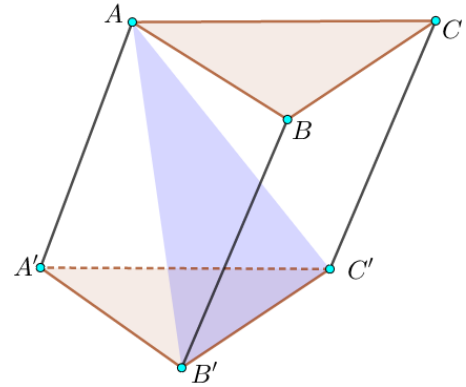
- Thể tích lăng trụ: $V = h.S_{\Delta A'B'C'}$ với $h = d(A, (A'B'C'))$. Thể tích khối chóp: $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}h.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3}V$.
- Do đó: $V_{A.BCB'C'} = V - V_{A.A'B'C'} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$. **Chọn** A

☺ Cách giải 2: Trắc nghiệm.

- Xét hai khối đa diện $\underbrace{ABC.AB'C'}_{ABC'B'C'}$ với $ABC.A'B'C'$, ta đặt

$$x = \frac{AA'}{AA'} = 0, y = \frac{BB'}{BB'} = 1, z = \frac{CC'}{CC'} = 1.$$

- Khi đó: $\frac{V_{ABC.AB'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{x+y+z}{3} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{ABC.AB'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V$. Tức là: $V_{ABC'B'C'} = \frac{2}{3}V$.



VÍ DỤ 45. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CC' và BB' . Tính tỉ số $\frac{V_{ABCMN}}{V_{ABC.A'B'C'}}$.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

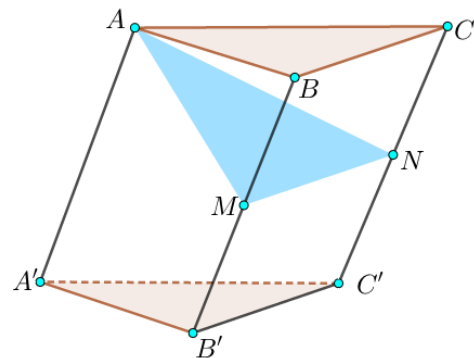
Lời giải :

- Xét hai đa diện là $\underbrace{ABC.AMN}_{ABCMN}$ với $ABC.A'B'C'$. Ta đặt:

$$x = \frac{AA'}{AA'} = 0, y = \frac{BM}{BB'} = \frac{1}{2}, z = \frac{CN}{CC'} = \frac{1}{2}.$$

- Ta có: $\frac{V_{ABC.AMN}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{x+y+z}{3} = \frac{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3}$.

Tức là $\frac{V_{ABCMN}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}$. **Chọn** B



VÍ DỤ 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của CC' . Mặt phẳng (ABM) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh C và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải:

☺ Cách giải 1: Tự luận.

▪ Ta có $V_1 = V_{M.ABC} = \frac{1}{3} d(M; (ABC)) \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(C'; (ABC)) \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} V_{ABC.A'B'C'}$.
 Do $CM = \frac{1}{2} CC'$

▪ Khi đó: $V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1 = V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{6} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5}{6} V_{ABC.A'B'C'}$.

▪ Từ đó ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6} V_{ABC.A'B'C'}}{\frac{5}{6} V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{5}$. **Chọn $\rightarrow$ A**

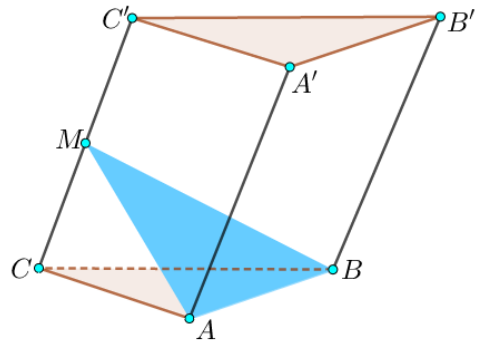
☺ **Cách giải 2: Trắc nghiệm.**

▪ Xét hai đa diện gồm $\underbrace{ABC.ABM}_{ABCM}$ và $ABC.A'B'C'$. Đặt

$$x = \frac{AA'}{AA'} = 0, y = \frac{BB'}{BB'} = 0, z = \frac{CM}{CC'} = \frac{1}{2}.$$

▪ Ta có: $\frac{V_{ABC.ABM}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{ABC.ABM} = \frac{1}{6} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{6} V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra: $V_2 = \frac{5}{6} V_{ABC.A'B'C'}$. Vì vậy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$.



VÍ DỤ 47. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt trung điểm AA', CC' . V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.

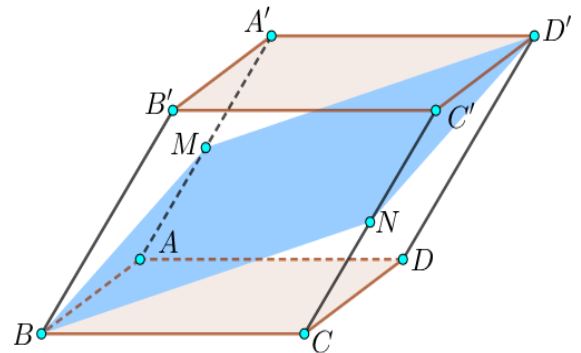
Lời giải:

▪ Gọi V là thể tích khối hộp đã cho. Đặt
 $x = \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, y = \frac{BB'}{BB'} = 0, z = \frac{CN}{CC'} = \frac{1}{2}, t = \frac{DD'}{DD'} = 1$.

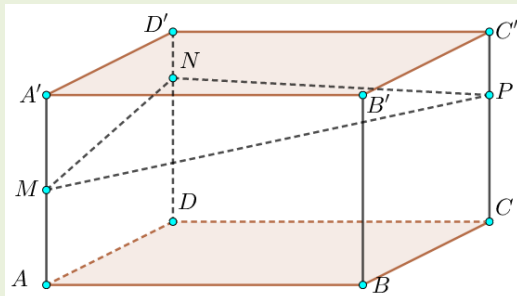
▪ Khi đó: $\frac{V_1}{V} = \frac{x+y+z+t}{4} = \frac{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{2} V$.

Do đó $V_2 = V - V_1 = V - \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} V$.

▪ Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{2} V}{\frac{1}{2} V} = 1$. **Chọn $\rightarrow$ C**



VÍ DỤ 48. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$; $DN = 3ND'$; $CP = 2PC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{7385}{18}$.

B. $\frac{5275}{12}$.

C. $\frac{8440}{9}$.

D. $\frac{5275}{6}$.

Lời giải:

- Giả sử (MNP) cắt BB' tại Q . Đặt

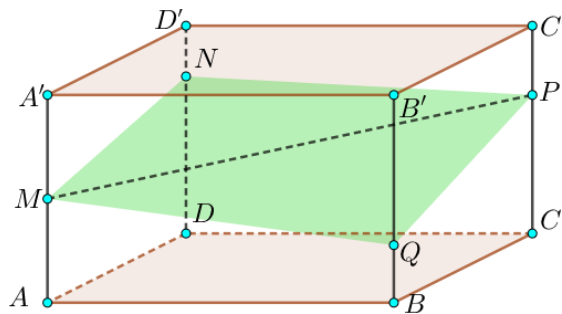
$$x = \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, y = \frac{DN}{DD'} = \frac{3}{4},$$

$$z = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}, t = \frac{BQ}{BB'} = x + z - y = \frac{5}{12}.$$

- Ta có: $\frac{V_{ABCD.MQPN}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12}}{4} = \frac{7}{12}$

$$\Rightarrow V_{ABCD.MQPN} = \frac{7}{12} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Do đó: $V_{A'B'C'D'.MQPN} = \frac{5}{12} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{5}{12} \cdot 2110 = \frac{5275}{6}$. **Chọn D**



VÍ DỤ 49. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN = \frac{2}{3}BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P và đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng

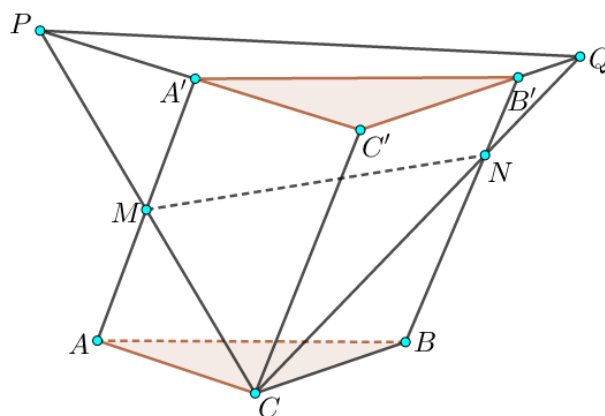
A. $\frac{5}{9}$.

B. $\frac{13}{18}$.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{7}{9}$.

Lời giải:



- Do $B'N \parallel C'C$ nên: $\frac{QB'}{QC'} = \frac{B'N}{C'C} = \frac{B'N}{B'B} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{QC'}{B'C'} = \frac{3}{2}$.

Tương tự, ta có $A'M \parallel CC' \Rightarrow \frac{PA'}{PC'} = \frac{MA'}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PC'}{A'C'} = 2$. Do vậy:

$$\frac{S_{\Delta PQC'}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{PC'}{A'C'} \cdot \frac{QC'}{B'C'} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow S_{\Delta PQC'} = 3S_{\Delta A'B'C'}.$$

- Đặt $h = d(C; (A'B'C'))$. Ta có: $V_{C.C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\Delta C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot 3S_{\Delta A'B'C'} = h \cdot S_{\Delta A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} = \boxed{2}$.

- Đặt $x = \frac{A'M}{A'A} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{B'N}{B'B} = \frac{1}{3}$, $z = \frac{C'C}{C'C} = 1$. Khi đó:

$$\frac{V_{A'B'C'.MNC}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{x+y+z}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1}{3} = \frac{11}{18} \Rightarrow V_{A'B'C'.MNC} = \frac{11}{18} \cdot V_{A'B'C'.ABC} = \frac{11}{18} \cdot 2 = \boxed{\frac{11}{9}}.$$

- Vậy: $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{A'B'C'.MNC} = 2 - \frac{11}{9} = \boxed{\frac{7}{9}}$. **Chọn $\boxed{D}$**

Bài toán 4. Lăng trụ ẩn

- **Lăng trụ ẩn** là một khái niệm hoàn toàn mới, dùng để xếp loại những bài toán tứ diện (hình chóp) mà muốn giải quyết chúng, ta phải **vẽ thêm hình để đưa về lăng trụ** và sử dụng các công thức, tính chất của lăng trụ để giải.
- Ý tưởng **“lăng trụ ẩn”** thường xuất hiện trong những câu hỏi vận dụng cao, những bài toán khó trong các đề thi học sinh giỏi trên cả nước.

VÍ DỤ 50. Cho tứ diện $ABCD$ biết rằng $AB = 2$, $CD = 2\sqrt{3}$, $ABC = BAD = BCD = 90^\circ$ và góc giữa hai đường thẳng AD , BC bằng 30° . Tìm thể tích khối tứ diện trên.

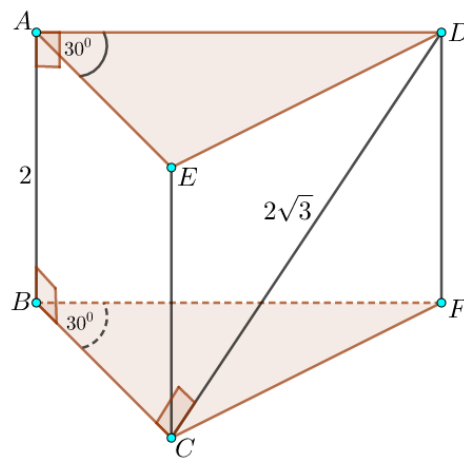
- A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $3\sqrt{3}$.

Bình luận:

- Đề bài đã cho những **dữ kiện tương đối rời rạc** mà nếu không vẽ thêm hình, ta khó lòng liên kết chúng lại.
- Trong bài có $ABC = BAD = 90^\circ$ tức AB là **đường vuông góc chung của hai đường chéo nhau AD và BC** . Vì vậy ta có ý tưởng xây dựng **lăng trụ đứng** với AB là đường cao (cạnh bên) của nó. Hơn nữa, việc dựng lăng trụ sẽ giúp ta xác định góc giữa hai đường chéo nhau khá dễ dàng (trong bài là góc giữa AD và BC).

Lời giải:

- Xét lăng trụ đứng $AED.BCF$ như hình. Ta có:
 $AE \parallel BC \Rightarrow (AD, BC) = (AD, AE) = DAE = 30^\circ = CBF$.
- Do tam giác CDF vuông tại F nên ta có:
 $CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{12 - 4} = 2\sqrt{2}$.
- Ta có: $\begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp EC \end{cases} \Rightarrow BC \perp CF$. Do đó: $BC = \frac{CF}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{6}$.
 $S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} BC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{3}$. Do đó:
 $V_{AED.BCF} = AB \cdot S_{\triangle BCF} = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.
- Ta dễ dàng có được $V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{AED.BCF} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. **Chọn $\boxed{A}$**



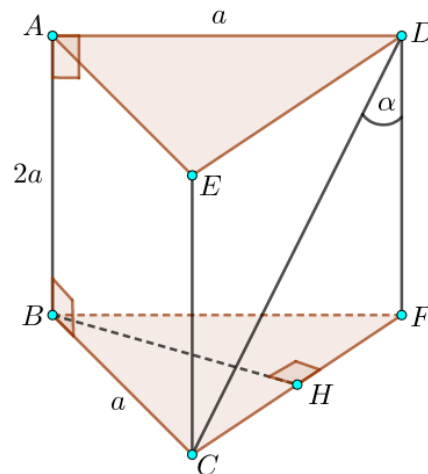
VÍ DỤ 51. Cho tứ diện $ABCD$ có AB là đoạn vuông góc chung của BC và AD ,

$AB = 2a$, $AD = BC = a$ và $(AB, CD) = \alpha$. Tìm thể tích của khối tứ diện trên theo a , α .

- A. $a^3 \cdot \tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$. B. $2a^3 \cdot \tan^3 \alpha$.
 C. $2a^3 \cdot \tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$. D. $a^3 \cdot \tan^3 \alpha$.

Lời giải:

- Xét lăng trụ đứng $AED.BCF$ như hình. Vì $DF \parallel AB \Rightarrow (AB, CD) = (DF, CD) = CDF = \alpha$.
Xét tam giác CDF vuông tại F có $CF = DF \cdot \tan \alpha = 2a \cdot \tan \alpha$.
- Trong tam giác BCF cân tại B , kẻ đường cao BH (H cũng là trung điểm CF).
Ta có: $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \tan^2 \alpha}$.
Do đó:
$$S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} BH \cdot CF = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \tan^2 \alpha} \cdot 2a \cdot \tan \alpha = a^2 \cdot \tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}.$$
- Thể tích lăng trụ: $V_{AED.BCF} = AB \cdot S_{\triangle BCF} = 2a^3 \cdot \tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$.

Chọn C

VÍ DỤ 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) , với $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CD và vuông góc với $(ABCD)$, trên (P) lấy điểm M bất kỳ. Tìm thể tích khối chóp $M.SAB$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

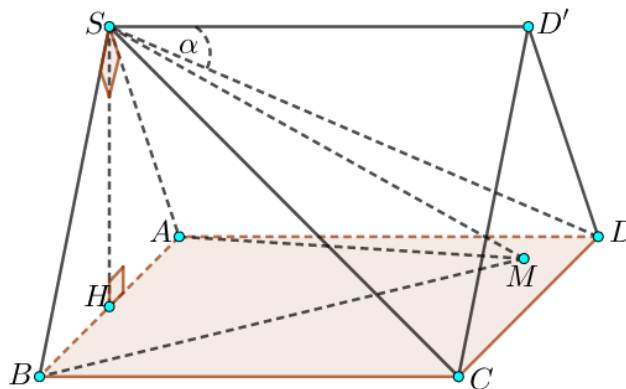
B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

- Vẽ đường cao SH trong tam giác SAB , vì (SAB) vuông góc $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
- Gọi D' là đỉnh cuối cùng của lăng trụ $SAB.D'DC$ (D' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SADD'$).
- Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$;
 $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow DD' \perp (SBC)$.
Do đó, góc giữa SD và (SBC) là
 $\alpha = \angle DSD' = \angle SDA$ (cặp góc so le trong).



- Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA$, do đó $SA = AD \cdot \tan \alpha = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$,
 $SB = \sqrt{AB^2 - SA^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$, $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.
- Vì $(D'DC) \parallel (SAB) \Rightarrow d(M, (SAB)) = d(C, (SAB)) = CB = 2a$.

$$\text{Vậy } V_{M.SAB} = \frac{1}{3} \cdot d(M, (SAB)) \cdot S_{\Delta SAB} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}. \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{B}$$

DẠNG 3. MAX-MIN THỂ TÍCH

PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

- **Bước 1:** Chọn biến thích hợp x ($y, z, t, \dots$) là góc, cạnh nào đó trong bài toán.
- **Bước 2:** Lập hàm số thể tích cần tìm dựa vào biến số đã gọi.
- **Bước 3:** Khảo sát hàm số hoặc dùng bất đẳng thức để tìm Max-Min cho hàm số tương ứng.

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG GẶP:

1) Bất đẳng thức Cauchy (AM-GM):

- $\forall a, b \geq 0$, thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
 - $\forall a, b, c \geq 0$, thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
 - $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thì $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.
- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

✎ Nhận xét:

- Nếu hai số dương thay đổi mà **tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất** khi và chỉ khi **hai số đó bằng nhau**.
- Nếu hai số dương thay đổi mà **tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất** khi và chỉ khi **hai số đó bằng nhau**.

☞ Một số dẫn xuất phổ biến từ bất đẳng thức gốc:

Cho các số a, b, c không âm, ta có:

- $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ và $abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
- $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

2) Bất đẳng thức BunhiaCopski:

- Với hai cặp số thực $(a; b)$ và $(x; y)$, ta có: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ hay $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

- Với hai bộ số thực $(a; b; c)$, $(x; y; z)$, ta có: $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ hay $|ax + by + cz| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ với $x, y, z \neq 0$.

Bài toán 1. Điều kiện về cạnh trong hình chóp

VÍ DỤ 53. Cho hình chóp có đáy là hình bình hành, một cạnh đáy bằng $4a$ và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho.

A. $\frac{8a^3}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3$.

C. $8a^3$.

D. $2\sqrt{6}a^3$.

Lời giải:

- Vì $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S , có O là trung điểm AC , do đó $SO \perp AC$. Lý luận tương tự, ta có $SO \perp BD$. Do đó $SO \perp (ABCD)$.

- Dễ thấy các tam giác SAO , SBO , SCO , SDO là những tam giác vuông bằng nhau

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = \sqrt{6a^2 - SO^2}$. Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

- Giả sử $AB = 4a$. Đặt $SO = x$ ($0 < x < a\sqrt{6}$),

$$AC = 2OC = 2\sqrt{6a^2 - x^2}$$

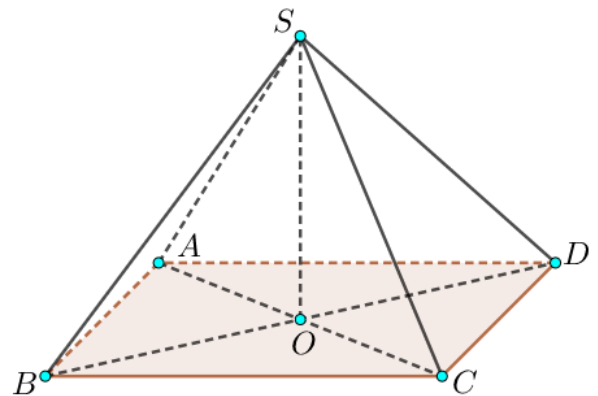
$$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{24a^2 - 4x^2 - 16a^2} = 2\sqrt{2a^2 - x^2} \Rightarrow S_{ABCD} = 8a\sqrt{2a^2 - x^2}.$$

- Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{8a}{3}x\sqrt{2a^2 - x^2}$.

Áp dụng: $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \end{cases}$, ta có: $x\sqrt{2a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 2a^2 - x^2}{2} = a^2$, do đó:

$$V_{S.ABCD} = \frac{8a}{3}x\sqrt{2a^2 - x^2} \leq \frac{8a}{3} \cdot \frac{x^2 + 2a^2 - x^2}{2} = \frac{8a^3}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x^2 = 2a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = a.$$

- Vậy $(V_{S.ABCD})_{\max} = \frac{8a^3}{3}$, khi đó $x = a$. **Chọn** A



VÍ DỤ 54. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ thay đổi, tất cả các cạnh còn lại có độ dài a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD trong trường hợp thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bình luận:

- Sau khi lý luận để kẻ được đường cao AH trong tứ diện (xem hình). Ta thấy AH phụ thuộc $AB = x$, còn diện tích đáy BCD thì không đổi (vì tam giác BCD đều cạnh bằng a).
- Thể tích: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH \cdot S_{\triangle BCD}$ chỉ còn phụ thuộc AH , vì vậy ta chỉ cần tập trung vào tam giác ABF để xử lý.

Lời giải:

- Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Dễ thấy các tam giác ACD , BCD đều cạnh a , do đó $AF = BF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp BF \\ CD \perp AF \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABF) \Rightarrow CD \perp EF$ (1). Tam giác ABF cân tại F có FE là trung tuyến nên

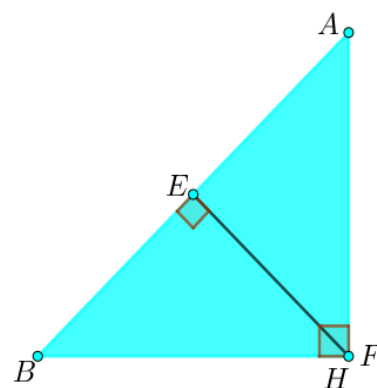
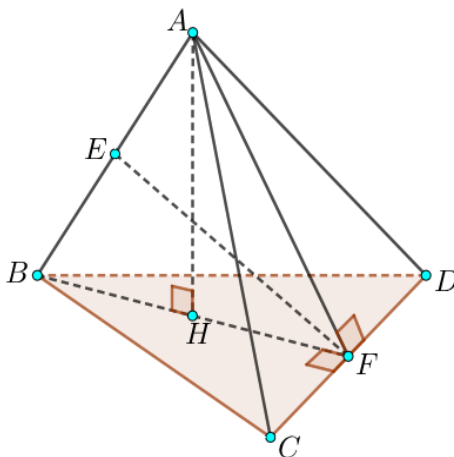
$FE \perp AB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra EF là đoạn vuông góc chung của AB , CD , tức là

$$d(AB, CD) = EF.$$

- Trong mp(ABF), dựng $AH \perp BF$. Do $\begin{cases} AH \perp BF \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

- Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH \cdot S_{\triangle BCD}$ mà $S_{\triangle BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ không đổi nên

V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất. Do $AH \perp FH$ nên $AH \leq AF$. Vậy V_{ABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv F \Leftrightarrow AF \perp BF$.



- Khi đó khoảng cách giữa AB và CD là $EF = \frac{AF \cdot BF}{\sqrt{AF^2 + BF^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **Chọn B**

VÍ DỤ 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, $BC = y$ (x, y là các số dương thay đổi); $AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng:

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

D. $4\sqrt{3}$.

Bình luận:

- Bài này khác bài bên trên ở chỗ diện tích đáy không cố định (trong bài trước đáy là tam giác đều cạnh a nên diện tích không đổi). Vì vậy mà ta không thể chỉ tập trung xử lý mỗi đường cao để xét GTLN của thể tích.
- Việc không tìm thấy một tam giác nào cố định diện tích khiến ta nghĩ đến phương pháp **lập hàm nhiều ẩn** (hai ẩn x, y), sau đó có thể **tìm đạo hàm riêng hoặc sử dụng bất đẳng thức**.

Lời giải:

- Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và BC .
- Do $AB = SB = 1$ nên $BE \perp SA$

$$\Rightarrow BE = \sqrt{SB^2 - SE^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \text{ điều kiện } 0 < x < 2.$$

Tương tự ta có $CE \perp SA$ và $CE = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Do đó:

$$BE = CE \Rightarrow EF \perp BC; EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}};$$

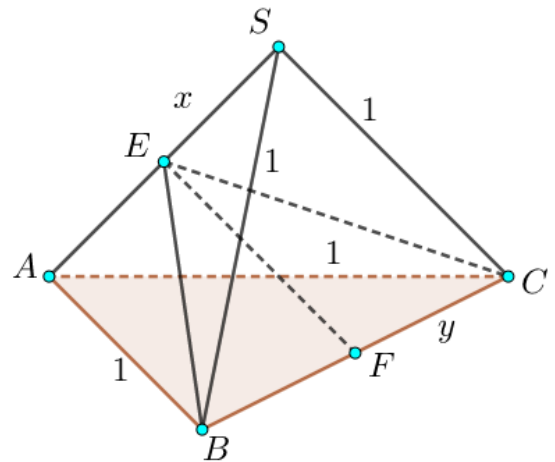
$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} EF \cdot BC = \frac{1}{2} y \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}.$$

- Do $\begin{cases} BE \perp SA \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BCE)$. Ta có: $V_{S.ABC} = 2V_{S.EBC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot SE \cdot S_{\triangle EBC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}.$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{x^2}{4} \cdot \frac{y^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)} \leq \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \quad (\text{Áp dụng } a.b.c \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3).$$

- Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0; 2)$. Vậy $x + y = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

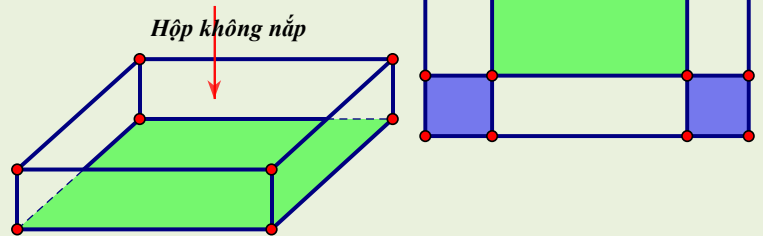
Chọn $\rightarrow$ **C**



Bài toán 2. Điều kiện về cạnh trong lăng trụ

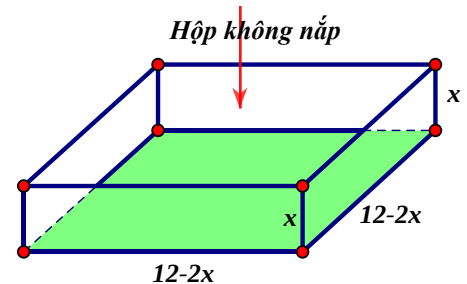
VÍ DỤ 56. (Đề Minh họa lần 1, năm 2017– Bộ GD&ĐT) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

- A. $x = 6$. B. $x = 3$.
 C. $x = 2$. D. $x = 4$.



Lời giải:

- Ta nhận thấy cạnh hình vuông nhỏ (màu đậm): x (cm) chính là chiều cao của hình hộp được tạo thành. Sau khi cắt bỏ đi các hình vuông nhỏ cạnh x thì đáy bây giờ là một hình vuông có cạnh $12 - 2x$ (cm).
- Thể tích khối hộp chữ nhật là hàm số: $V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x$ với $0 < x < 6$. Lúc này ta có hai cách giải để tìm điều kiện của x cho thể tích V bé nhất.



☺ **Cách giải 1: (Khảo sát hàm số).**

- $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$. Đạo hàm: $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 & (\text{loại}) \\ x = 2 & (\text{nhận}) \end{cases}$.
- Bảng biến thiên:

x		0		2		6	
$V'(x)$			+	0	-		
V				128			

- Dựa vào bảng biến thiên, ta có kết luận:
 Thể tích khối hộp lớn nhất khi và chỉ khi $x = 2$ (cm).

Chọn → **C**

☺ **Cách giải 2: (Dùng bất đẳng thức).**

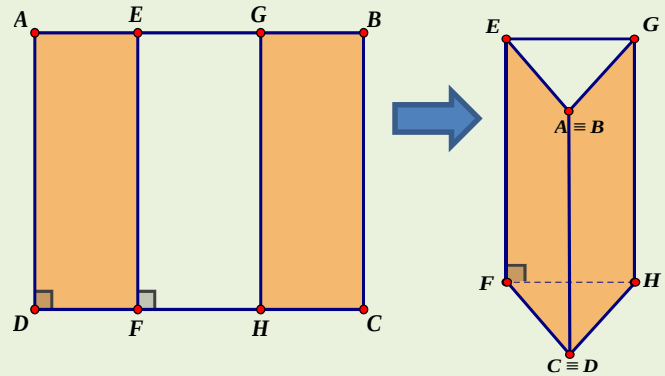
- $V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x = 4(6 - x)^2 x = 2(6 - x)(6 - x) \cdot 2x$.

- Áp dụng $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \end{cases}$, ta có: $(6 - x) \cdot (6 - x) \cdot 2x \leq \left(\frac{6 - x + 6 - x + 2x}{3} \right)^3 = 4^3 = 64$.

- $V(x) = 2(6-x)(6-x).2x \leq 128$. Do đó thể tích khối hộp lớn nhất bằng 128 cm^3 , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $6-x = 2x \Leftrightarrow x = 2$.

VÍ DỤ 57. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 (cm). Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Biết rằng $AE = BG$. Tìm giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

- A. $x = 5$ (cm). B. $x = 9$ (cm).
C. $x = 8$ (cm). D. $x = 10$ (cm).



Lời giải:

- Gọi p là nửa chu vi tam giác DHF . Ta có: $DF = CH = x$, $FH = 30 - 2x \Rightarrow p = 15$.
- Thể tích khối lăng trụ như hình vẽ là: $V = EF \cdot S_{\triangle FDH} = 30 \underbrace{\sqrt{15(15-x)(15-x)(15-30+2x)}}_{\text{Hê-Rông}}$

$$= 30\sqrt{15(15-x)^2(2x-15)}.$$

- Xét hàm số $f(x) = (15-x)^2(2x-15)$, $x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$.

$$f'(x) = -2(15-x)(2x-15) + 2(15-x)^2 = -2(15-x)(3x-30); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 15 \text{ (loại)} \end{cases}$$

- Bảng biến thiên:

x	$\frac{15}{2}$	10	15
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	125	0

- Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $\underset{\left(\frac{15}{2}; 15\right)}{\text{Max}} f(x) = 125$ khi $x = 10$.
- Do đó thể tích khối lăng trụ như hình vẽ lớn nhất: $V_{\max} = 30 \cdot \sqrt{15 \cdot 125} = 750\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$

Khi đó: $x = 10$ (cm).

Chọn $\rightarrow$ D

VÍ DỤ 58. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° . Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $V_{\max} = \frac{1}{2}$.

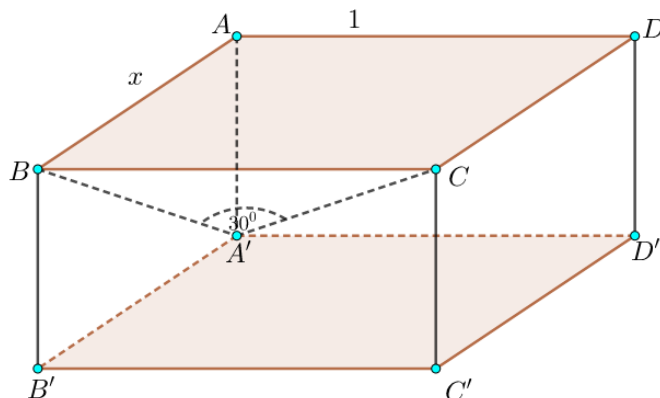
D. $V_{\max} = \frac{3}{2}$.

Lời giải:

- $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow B$ là hình chiếu của C trên $(ABB'A') \Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng góc $BA'C = 30^\circ$.
- Xét $\triangle BA'C$ vuông tại B có:
 $\tan 30^\circ = \frac{BC}{A'B} \Rightarrow A'B = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$.
- Xét $\triangle AA'B$ vuông tại A có:

$$AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{3 - x^2}, \text{ suy ra } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot AB \cdot AD = x\sqrt{3 - x^2}.$$

- Áp dụng $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \end{cases}$, ta có: $V = x\sqrt{3 - x^2} \leq \frac{x^2 + 3 - x^2}{2} = \frac{3}{2}$, $0 < x < \sqrt{3}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{3 - x^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn $\rightarrow$ D**


Bài toán 3. Điều kiện về góc

VÍ DỤ 59. Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa (SBC) và (ABC) , giá trị $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

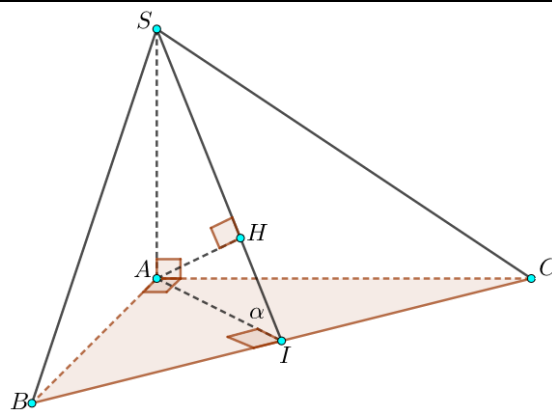
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải:

- Gọi I là trung điểm của BC . Ta có:
 $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI);$
 Kẻ AH vuông góc SI tại H . Ta có:
 $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = 3.$



- Ta xác định được $\left((SBC), (ABC)\right) = SIA = \alpha$. Xét tam giác AHI vuông tại H có: $AI = \frac{AH}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \alpha}$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên: $BC = 2AI = \frac{6}{\sin \alpha}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A có: $SI = \frac{AI}{\cos \alpha} = \frac{3}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

- Thể tích khối chóp: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot SI \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{6}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$.

$V_{S.ABC}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin^2 \alpha \cos \alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

- Xét hàm số $y = \sin^2 \alpha \cos \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = -\cos^3 \alpha + \cos \alpha$.

Đặt $t = \cos \alpha$ ($0 < t < 1$). Khi đó $y = -t^3 + t$ ($0 < t < 1$) với $y' = -3t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$+\infty$
y'		+	0	-	
y					

- Ta thấy hàm số này đạt giá trị lớn nhất khi $t = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn $\boxed{C}$**

VÍ DỤ 60. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $S_{ABC'} = \sqrt{3}$, mặt phẳng (ABC') tạo với mặt phẳng đáy góc α . Tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ lớn nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải:

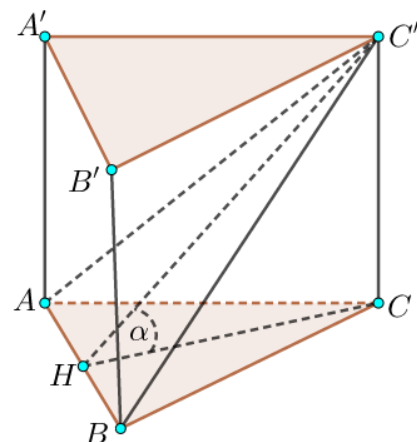
- Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó $AB \perp (HCC') \Rightarrow$ Góc giữa (ABC') và (ABC) là $\angle CHC' = \alpha$.

- Vì ΔABC là hình chiếu của $\Delta ABC'$ trên mp(ABC) nên:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABC'} \cdot \cos \alpha = \sqrt{3} \cdot \cos \alpha.$$

Đặt $AB = x \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$ (diện tích tam giác đều cạnh x). Do đó:

$$\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \cdot \cos \alpha \Rightarrow x = 2\sqrt{\cos \alpha}.$$



Tam giác đều ABC có đường cao $CH = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3 \cos \alpha}$.

Xét tam giác CHC' vuông tại C có: $CC' = CH \cdot \tan \alpha = \sqrt{3 \cos \alpha} \cdot \tan \alpha$.

- Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = \sqrt{3 \cos \alpha} \cdot \tan \alpha \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \alpha = 3 \sin \alpha \cdot \sqrt{\cos \alpha} = 3 \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha}$.

Ta thấy $V_{ABC.A'B'C'}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow y = (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $t = \cos \alpha, (0 < t < 1)$, ta có $y = (1 - t^2)t = -t^3 + t, t \in (0; 1); y' = -3t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$+\infty$
y'		+	0	-	
y					

- Vậy $V_{ABC.A'B'C'}$ đạt lớn nhất khi và chỉ khi $t = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

VÍ DỤ 61. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chu vi tam giác SAC bằng 8. Trong trường hợp thể tích của hình chóp $S.ABCD$ lớn nhất, hãy tính cosin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

- Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, đặt $SO = x$ và $OA = OC = y < 2$ (do $AC = 2y < 4$, cạnh nhỏ hơn nửa chu vi trong tam giác bất kỳ) $\Rightarrow SA = \sqrt{x^2 + y^2}$. Chu

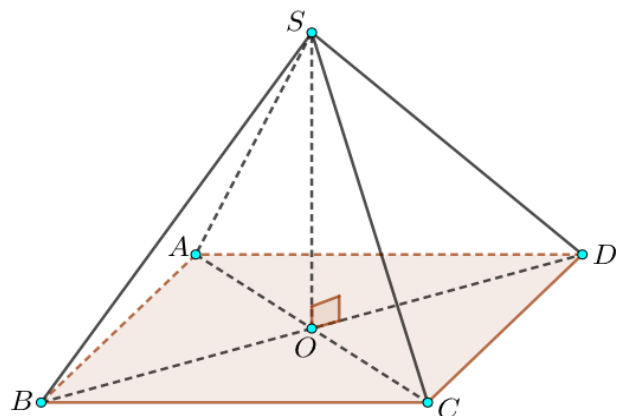
vi tam giác SAC bằng:

$$P = 2SA + AC = 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2y = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + y = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - y \quad > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (4 - y)^2 \Leftrightarrow y = \frac{16 - x^2}{8} \quad (x < 4).$$

- Vì $AC = 2y$ nên $AB = y\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 2y^2$.



Thể tích của khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$

$$= \frac{1}{3} x \cdot 2y^2 = \frac{2}{3} \cdot xy^2 = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \left(\frac{16-x^2}{8} \right)^2 = \frac{1}{96} (x^5 - 32x^3 + 256x).$$

▪ Ta có $V' = \frac{1}{96} (5x^4 - 96x^2 + 256) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 = \frac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (l)} \\ x = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ (n)} \end{cases} \text{ (do } 0 < x < 4).$

▪ Vậy $V_{\max}$ khi $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ và $y = \frac{8}{5}$. Khi đó: $\cos(SA, (ABCD)) = \cos SAO = \frac{OA}{SA} = \frac{\frac{8}{5}}{\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2}} = \frac{2}{3}.$

Bài toán 4. Bài toán tối ưu

VÍ DỤ 62. Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 dm^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?
A. 1,08 triệu đồng. **B.** 0,91 triệu đồng. **C.** 1,68 triệu đồng. **D.** 0,54 triệu đồng.

Lời giải:

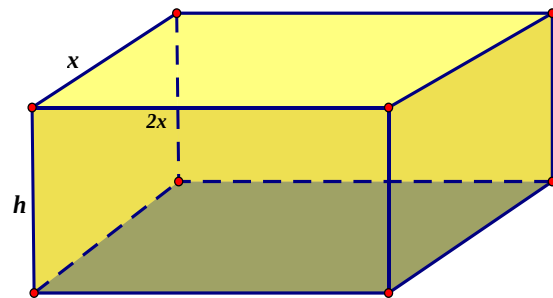
- Gọi x chiều rộng của đáy bể ($x > 0$). Khi đó chiều dài của bể là $2x$.

- Thể tích của bể: $V = 288 \text{ dm}^3 = 0,288 \text{ m}^3$, mà

$$V = x \cdot 2x \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{2x^2} = \frac{0,288}{2x^2} = \frac{0,144}{x^2}.$$

- Phần xây dựng của bể (trừ mặt trên của bể) có diện tích:

$$S = 2 \cdot hx + 2 \cdot h \cdot 2x + x \cdot 2x = 6hx + 2x^2 = 6 \cdot \frac{0,144}{x^2} \cdot x + 2x^2 = \frac{0,864}{x} + 2x^2.$$



😊 Cách giải 1: Áp dụng

$$\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \end{cases}, \text{ có: } S = \frac{0,432}{x} + \frac{0,432}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{0,432}{x} \cdot \frac{0,432}{x} \cdot 2x^2} = \frac{54}{25}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{0,432}{x} = \frac{0,432}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^3 = 0,432 \Leftrightarrow x = 0,6 \text{ m}$ (thỏa mãn).

- Vậy $S_{\min} = \frac{54}{25} \text{ m}^2 \Rightarrow$ Chi phí thấp nhất phải trả: $\frac{54}{25} \cdot 500\,000 = 1\,080\,000 \text{ đồng}.$

Chọn **A**

😊 Cách giải 2: Xét hàm số $S(x) = \frac{0,864}{x} + 2x^2, x > 0.$

- Đạo hàm: $y' = -\frac{0,864}{x^2} + 4x = \frac{4x^3 - 0,864}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 0,864 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ m}$.

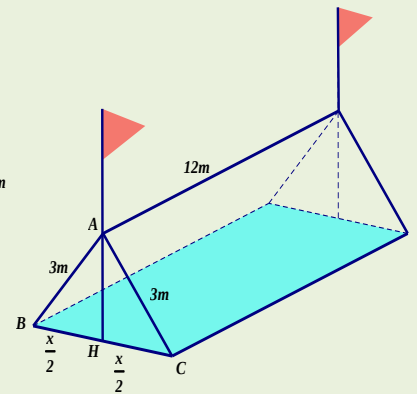
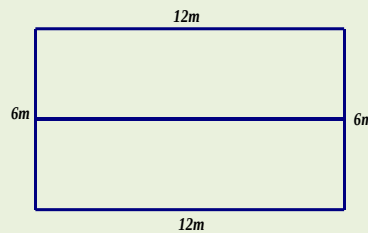
- Bảng biến thiên:

x		0	0,6	$+\infty$	
$S'(x)$			-	0	+
$S(x)$		$+\infty$		$\frac{54}{25}$	$+\infty$

- Vậy $S_{\min} = \frac{54}{25} \text{ m}^2 \Rightarrow$ Chi phí thấp nhất phải trả: $\frac{54}{25} \cdot 500\,000 = 1\,080\,000$ đồng.

VÍ DỤ 63. Từ một tấm bạt hình chữ nhật có kích thước $12\text{m} \times 6\text{m}$ như hình vẽ. Một nhóm học sinh trong quá trình đi dã ngoại đã gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm 2 cạnh là chi rộng của tấm bạt sao cho 2 mép chiều dài của tấm bạt sát đất và cách nhau $x \text{ (m)}$ (như hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.

- A. $x = 4$. B. $x = 3\sqrt{3}$.
C. $x = 3$. D. $x = 3\sqrt{2}$.



Lời giải:

- Phần không gian trong lều được tính bởi công thức thể tích hình lăng trụ đứng. Ta có: $V = h \cdot S_d = 12 \cdot S_d$. Như vậy để thể tích lớn nhất khi diện tích tam giác đáy ABC là lớn nhất.
- Trong tam giác đáy ABC , vẽ đường cao AH . Ta có $AH = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$.

$$\text{Do đó diện tích: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4} x \sqrt{36 - x^2}.$$

😊 Cách giải 1 (Dùng hàm số):

- Xét hàm $S(x) = \frac{1}{4} x \sqrt{36 - x^2}$ với $x \in (0; 6)$; $S'(x) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{36 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{\sqrt{36 - x^2}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{36 - x^2 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$.
 $S'(x) = 0 \Leftrightarrow 36 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	0	$3\sqrt{2}$	6
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$		$\frac{9}{2}$	

- Vậy với $x = 3\sqrt{2}$ (m) thì thể tích lều là lớn nhất.

😊 Cách giải 2 (Dùng bất đẳng thức):

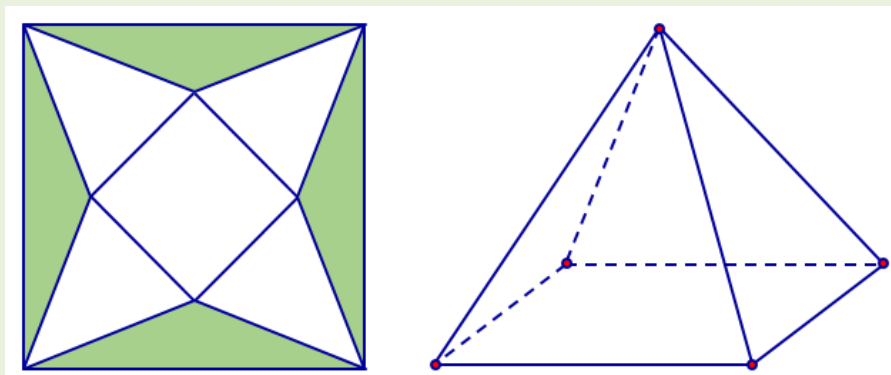
- Theo bất đẳng thức quen thuộc là $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \end{cases}$, ta có:

$$x\sqrt{36-x^2} \leq \frac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 18 \Rightarrow S(x) = \frac{1}{4}x\sqrt{36-x^2} \leq \frac{1}{4} \cdot 18 = \frac{9}{2}.$$

- Vậy diện tích tam giác đáy ABC lớn nhất bằng $\frac{9}{2}$, khi đó dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{36-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 36-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}. \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{B}$$

VÍ DỤ 64. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1(m) như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gấp thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m), sao cho bốn đỉnh của hình vuông gấp lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



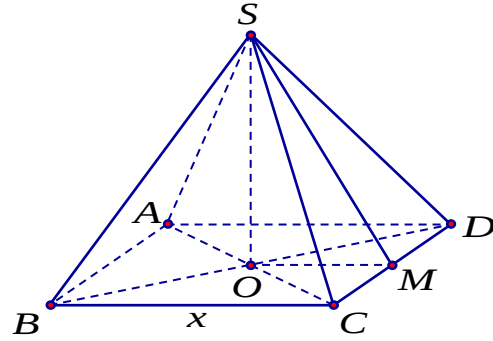
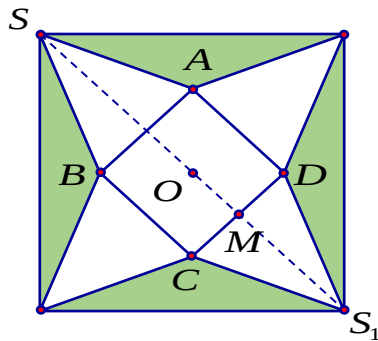
A. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

B. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải:



- Gán các điểm S, S_1, O, A, B, C, D, M như hình vẽ, ta có: $SS_1 = \sqrt{2} \Rightarrow S_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $OM = \frac{x}{2}$
 $\Rightarrow S_1M = S_1O - OM = \frac{\sqrt{2} - x}{2}$, ($0 < x < \sqrt{2}$).

Khi gấp tấm nhôm thành hình chóp $S.ABCD$ thì $\begin{cases} S_1 \equiv S \\ SM = S_1M = \frac{\sqrt{2} - x}{2} \end{cases}$

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{2}x}}{2}, \text{ (điều kiện } 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{)}.$$

- Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{2 - 2\sqrt{2}x} = \frac{1}{6} \sqrt{2x^4 - 2\sqrt{2}x^5}$.
- Ta thấy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi $f(x) = 2x^4 - 2\sqrt{2}x^5$, ($0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$) đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có } f'(x) = 8x^3 - 10\sqrt{2}x^4 = 2x^3(4 - 5\sqrt{2}x); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (l)} \\ x = \frac{2\sqrt{2}}{5} \text{ (n)} \end{cases}.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$\frac{128}{3125}$		

- Vậy: $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. Chọn $\boxed{C}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Bài tập Mức độ 1

- Câu 1.** Cho khối chóp có thể tích bằng 32cm^3 và diện tích đáy bằng 16cm^2 . Chiều cao của khối chóp đó là
 A. 4cm . B. 6cm . C. 3cm . D. 2cm .
- Câu 2.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là
 A. $V = a^3$. B. $V = 3a^3$. C. $V = \frac{1}{3}a^3$. D. $V = 2a^3$.
- Câu 3.** Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $AB = a$, $BC = 2a$, chiều cao $SA = a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp là
 A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $2a^3\sqrt{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $V = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2$, $AD = 4$. Cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ). Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng
 A. $V = 16$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = \frac{8}{3}$. D. $V = 8$.
- Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với mặt đáy. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng
 A. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $V = 1$. C. $V = \frac{1}{3}$. D. $V = 2$.
- Câu 6.** Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{a^3}{6}$ và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2}{2}$. Tính chiều cao h kẻ từ S của khối chóp $S.ABC$.
 A. $h = a$. B. $h = \frac{a}{3}$. C. $h = 3a$. D. $h = \frac{2a}{3}$.
- Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của khối chóp $S.ABC$.
 A. $h = 12\sqrt{3}a$. B. $h = 6\sqrt{3}a$. C. $h = 4\sqrt{3}a$. D. $h = 2\sqrt{3}a$.

- Câu 8.** Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của khối chóp đã cho.
- A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $h = a\sqrt{3}$. C. $h = 2a\sqrt{3}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 9.** Cho khối chóp tứ giác đều có thể tích bằng 16cm^3 và cạnh đáy bằng 4cm , chiều cao của khối chóp đó bằng:
- A. 3cm . B. 4cm . C. $2\sqrt{3}\text{cm}$. D. $3\sqrt{2}\text{cm}$.
- Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Tính chiều cao h của khối chóp.
- A. $h = 3a\sqrt{5}$. B. $h = a\sqrt{5}$. C. $h = 2a\sqrt{5}$. D. $h = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 11.** Thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng 3 .
- A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. D. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.
- Câu 12.** Cho $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
- A. $V = \frac{3a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:
- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3}{4}$.
- Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là
- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{3a^3}{8}$. D. $\frac{a^3}{4}$.
- Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng.
- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $2a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 16.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $a^3\sqrt{6}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao hình chóp là $a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SB = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. Một khối chóp có diện tích đáy bằng $3\sqrt{2}$ và thể tích bằng $\sqrt{50}$. Tính chiều cao của khối chóp đó.

A. 10. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{10}{3}$. D. 5.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$ cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 21. Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. abc . B. $\frac{abc}{3}$. C. $\frac{abc}{6}$. D. $\frac{abc}{2}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B , biết $SA = AC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{2}{3}a^3$. B. $\frac{1}{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. D. $\frac{4}{3}a^3$.

Câu 23. Một hình chóp có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2 và có chiều cao bằng 4. Tính thể tích hình chóp đó.

A. 4. B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 2.

Câu 24. Cho một hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$, thể tích của khối chóp là V . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V = \frac{2}{3}a^3$. B. $V = 2a^3$. C. $V = \frac{1}{3}a^3$. D. $V = a^3$.

Câu 25. Khối chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và có thể tích bằng $\frac{2}{3}$. Tính cạnh của khối chóp.

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

Bài tập Mức độ 2

Câu 26. Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết $AB = a$, $SA = a$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. a^3 .

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O . Biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$ và $SO \perp (ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x . Diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Khi đó thể tích khối chóp bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}x^3$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}x^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}x^3$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}x^3$.

Câu 29. Cho khối tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a$; $AC = 2a$; $AD = 3a$. Các điểm M, N, P thứ tự thuộc các cạnh AB, AC, AD sao cho $AM = 2MB, AN = 2NC, AP = PD$. Tính thể tích khối tứ diện $AMNP$.

A. $\frac{2a^3}{9}$.

B. $\frac{2a^3}{3}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3}{9}$.

Câu 30. Khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, SBC là tam giác đều cạnh a , tam giác ABC vuông tại A . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{32}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{36}a^3$.

Câu 31. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32. Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 45° . Thể tích của khối chóp đó là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

B. $2a^3\sqrt{2}$.

C. $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 33. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$, $SC = a\sqrt{3}$ và SC hợp với đáy một góc 30° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{7}}{4}$.

B. $\frac{9a^3}{32}$.

C. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Biết rằng $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $2a^3\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 35. Cho khối chóp đều $S.ABCDEF$ có đáy $ABCDEF$ là lục giác đều cạnh $a\sqrt{3}$ và cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp đều $S.ABCDEF$.

A. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $V = \frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $V = \frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 36. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Biết $ASC = 90^\circ$, tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 37. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và SB tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 9a^3$.

B. $V = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V = \frac{9a^3}{2}$.

D. $V = 3a^3$.

Câu 38. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy là hình vuông cạnh a , $SB = a\sqrt{5}$

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{2a^3}{3}$.

C. $2a^3$.

D. $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$.

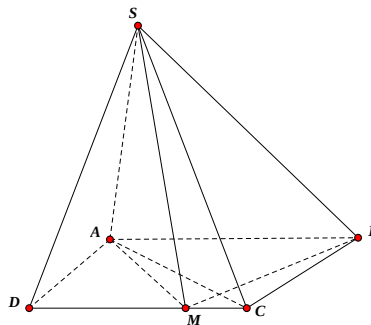
Câu 39. Khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V . Lấy điểm M trên cạnh CD , tính theo V thể tích khối chóp $S.ABM$ biết $ABCD$ là hình bình hành.

A. $\frac{V}{2}$.

B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{2V}{3}$.

D. $\frac{V}{6}$.



- Câu 40.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- A. $V = 2a^3$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.
- Câu 41.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a .
- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.
- Câu 42.** Cho khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích khối tứ diện đã cho bằng
- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.
- Câu 43.** Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy góc 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{a^3}{8}$. B. $\frac{a^3}{24}$. C. $\frac{a^3}{12}$. D. $\frac{a^3}{4}$.
- Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .
- A. $2a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$. D. $a^3\sqrt{3}$.
- Câu 45.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với mặt đáy góc 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $a^3\sqrt{3}$.
- Câu 46.** Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính thể tích khối tứ diện $OABC$.
- A. abc . B. $\frac{abc}{2}$. C. $\frac{abc}{3}$. D. $\frac{abc}{6}$.
- Câu 47.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, cạnh bên SA vuông góc đáy. Biết $SA = a\sqrt{7}$ và mặt (SDC) tạo đáy góc 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $3a^3$. C. $a^3\sqrt{6}$. D. a^3 .
- Câu 48.** Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Khi đó thể tích của tứ diện $OABC$ là
- A. $\frac{a^3}{12}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

- Câu 49.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = a$, $SA = CD = 3a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- A. $6a^3$. B. $2a^3$. C. $\frac{1}{6}a^3$. D. $\frac{1}{3}a^3$.
- Câu 50.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là
- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 51.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là
- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.
- Câu 52.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B , $SA = AC = 2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là
- A. $V_{S.ABC} = \frac{4a^3}{3}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{3}$. C. $V_{S.ABC} = 2a^3$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}$.
- Câu 53.** Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng chứa mặt đáy, cạnh $SC = 2a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 54.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , có $AB = a$, $AD = 2a$, $BC = a$. Biết rằng $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCD$ theo a .
- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.
- Câu 55.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- A. $V = 2a^3$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.
- Câu 56.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $ABCD$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

$$\text{A. } V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{B. } V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{C. } V = 2a^3\sqrt{15}.$$

$$\text{D. } V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\angle ABC = 60^\circ$, $SB = a\sqrt{2}$. Hai mặt bên SAD và SAB cùng vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

$$\text{A. } S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{B. } SC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{C. } (SAC) \perp (SBD).$$

$$\text{D. } V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

$$\text{A. } \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{B. } \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{C. } \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{D. } 2a^3\sqrt{3}.$$

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng 16 cm^2 và diện tích một mặt bên bằng $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Thể tích của khối chóp là

$$\text{A. } \frac{32\sqrt{11}}{3} \text{ cm}^3.$$

$$\text{B. } 4 \text{ cm}^3.$$

$$\text{C. } \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3.$$

$$\text{D. } \frac{32\sqrt{13}}{3} \text{ cm}^3.$$

Câu 60. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

$$\text{A. } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{B. } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{C. } V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

$$\text{D. } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Câu 61. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

$$\text{A. } V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}.$$

$$\text{B. } V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$

$$\text{C. } V = \frac{2a^3}{3}.$$

$$\text{D. } V = \sqrt{2}a^3.$$

- Câu 62.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $AB = 3a$, $AD = 4a$. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng
- A. $20a^3\sqrt{3}$. B. $10a^3\sqrt{3}$. C. $40a^3\sqrt{3}$. D. $30a^3\sqrt{3}$.
- Câu 63.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC . Tính thể tích khối tứ diện $SGCD$.
- A. $\frac{\sqrt{2}}{36}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{36}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{18}$.
- Câu 64.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , diện tích đáy bằng $10m^2$ và cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = 3m$. Thể tích khối chóp $S.OAD$ bằng
- A. $5m^3$. B. $3m^3$. C. $\frac{10}{3}m^3$. D. $\frac{5}{2}m^3$.
- Câu 65.** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , các mặt bên tạo với mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp đó.
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 66.** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = a$, $AC = 2a$ và $BAC = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 67.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, mặt bên (SAC) là tam giác đều và $(SAC) \perp (ABC)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{10}a^3}{3}$. C. $a^3\sqrt{10}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 68.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB có diện tích $a^2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối tứ diện $SABD$.
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 69. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 12a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 21a^3$. B. $V = \frac{21}{4}a^3$. C. $V = 56a^3$. D. $V = 7a^3$.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 3a$; các cạnh bên $SA = SB = SC = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 71. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Biết rằng thể tích của khối $S.ABC$ bằng $\sqrt{3}a^3$. Tính độ dài cạnh đáy của khối chóp $S.ABC$.

- A. $3\sqrt{3}a$. B. $2\sqrt{3}a$. C. $2a$. D. $2\sqrt{2}a$.

Câu 72. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy, thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{2}{3}a^3$. Tính theo a cạnh của hình vuông $ABCD$.

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $2a$. D. a .

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SCD) .

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 74. Cho hình chóp tam giác đều, có tất cả các cạnh bằng a . Tính cotang của góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy của hình chóp?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Bài tập Mức độ 3

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc với $(ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy $(ABCD)$ góc α với $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 76. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = 2a$, $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a biết góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

A. $6\sqrt{6}a^3$ B. $2\sqrt{6}a^3$ C. $6\sqrt{3}a^3$ D. $2\sqrt{3}a^3$

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; $SA = 2a$; tam giác SBC có diện tích bằng $6\sqrt{2}a^2$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Tính góc φ biết thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = 4a^3$.

A. $\varphi = 45^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$.

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2a$, $SB = 3a$, $SC = 4a$ và $ASB = BSC = 60^\circ$, $ASC = 90^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$. B. $V = 2a^3\sqrt{2}$. C. $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = a^3\sqrt{2}$.

Câu 79. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = SB = \sqrt{2}a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng a . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 80. Xét khối tứ diện $ABCD$, $AB = x$, các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$. B. $x = 2\sqrt{2}$. C. $x = \sqrt{14}$. D. $x = 3\sqrt{2}$.

Câu 81. Một viên đá có hình dạng là khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng a . Người ta cắt khối đá đó bởi mặt phẳng song song với đáy của khối chóp để chia khối đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích của thiết diện khối đá bị cắt bởi mặt phẳng nói trên. (Cho biết tổng thể tích của hai khối đá sau bằng thể tích của khối đá ban đầu).

A. $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. C. $\frac{a^2}{4}$. D. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$

- Câu 82.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.
- A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. B. $\frac{3\sqrt{310}}{20}$. C. $\frac{\sqrt{310}}{20}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.
- Câu 83.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$ còn tất cả các cạnh khác có độ dài bằng 2. Tính thể tích V lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.
- A. $V = 1$ B. $V = \frac{1}{2}$. C. $V = 3$. D. $V = 2$.
- Câu 84.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, có thể tích bằng 24 cm^3 . Gọi E là trung điểm SC . Một mặt phẳng chứa AE cắt các cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMEN$.
- A. 9 cm^3 . B. 8 cm^3 . C. 6 cm^3 . D. 7 cm^3 .

II – TỈ SỐ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

- Câu 85.** Khi tăng cả ba cạnh đáy của một khối chóp có đáy là tam giác đều lên hai lần còn đường cao của khối chóp giữ nguyên thì thể tích của khối chóp tăng bao nhiêu lần?
- A. 4. B. 2. C. 8. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 86.** Cho khối chóp tam giác đều. Nếu tăng cạnh đáy lên hai lần và giảm chiều cao đi bốn lần thì thể tích của khối chóp đó sẽ:
- A. Không thay đổi. B. Tăng lên hai lần. C. Giảm đi ba lần. D. Giảm đi hai lần.
- Câu 87.** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V và điểm E trên cạnh AB sao cho $AE = 3EB$. Tính thể tích khối tứ diện $EBCD$ theo V .
- A. $\frac{V}{4}$. B. $\frac{V}{2}$. C. $\frac{V}{3}$. D. $\frac{V}{5}$.
- Câu 88.** Cho khối tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a$; $AC = 2a$; $AD = 3a$. Các điểm M, N, P thứ tự thuộc các cạnh AB, AC, AD sao cho $AM = 2MB, AN = 2NC, AP = PD$. Tính thể tích khối tứ diện $AMNP$.
- A. $\frac{2a^3}{9}$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. a^3 . D. $\frac{a^3}{9}$.

- Câu 89.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Biết rằng $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$.
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $2a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.
- Câu 90.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M là trung điểm cạnh BB' , điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích khối chóp $ABCNM$ theo V .
- A. $V_{A.BCNM} = \frac{7V}{12}$. B. $V_{A.BCNM} = \frac{7V}{18}$. C. $V_{A.BCNM} = \frac{5V}{18}$. D. $V_{A.BCNM} = \frac{V}{3}$.
- Câu 91.** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 12a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.
- A. $V = 21a^3$. B. $V = \frac{21}{4}a^3$. C. $V = 56a^3$. D. $V = 7a^3$.
- Câu 92.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC . Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$.
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 93.** Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M là trung điểm của SB và N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SN = 2NC$. Tính tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$.
- A. $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{3}$. B. $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{2}{3}$. C. $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = 2$. D. $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}$.
- Câu 94.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CC' và BB' . Tính tỉ số $\frac{V_{ABCMN}}{V_{ABC.A'B'C'}}$.
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 95.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SA, SC, SD . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích của khối chóp $S.IJKH$ là 1.
- A. 16. B. 8. C. 2. D. 4.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$ trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{SA}{SM} = 2, \frac{SB}{SN} = 3, \frac{SC}{SP} = 4$. Biết thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng 1. Hỏi thể tích của khối đa diện $MNPABC$ bằng bao nhiêu ?

- A. $\frac{5}{24}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{24}$. D. $\frac{23}{24}$.

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh SB và SD sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = k$. Tìm giá trị của k để thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\frac{1}{8}$.

- A. $k = \frac{1}{8}$. B. $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $k = \frac{1}{4}$. D. $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 98. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích là V biết M, N, P lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC sao cho $SM = MA, SN = 2NB, SC = 3SP$. Gọi V' là thể tích của $S.MNP$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $V' = \frac{V}{6}$. B. $V' = \frac{V}{12}$. C. $V' = \frac{V}{9}$. D. $V' = \frac{V}{3}$.

Câu 99. Cho khối chóp $SABC$ có thể tích bằng $5a^3$. Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $SM = 3MB, SN = 4NC$ (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích V của khối chóp $AMNCB$.

- A. $V = \frac{3}{5}a^3$. B. $V = \frac{3}{4}a^3$. C. $V = a^3$. D. $V = 2a^3$.

Câu 100. Cho khối tứ diện có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh tứ diện đã cho. Tính tỷ số $\frac{V'}{V}$.

- A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. B. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$. C. $\frac{V'}{V} = \frac{3}{8}$. D. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 1. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SEBD$.

- A. $V = \frac{1}{3}$. B. $V = \frac{2}{3}$. C. $V = \frac{1}{6}$. D. $V = \frac{1}{12}$.

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và $ASB = BSC = CSA = 60^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, b, c .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{12abc}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{12}abc$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}abc$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4abc}$.

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M và N theo thứ tự là trung điểm của SA , SB . Tỷ số thể tích $\frac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}}$.

- A. $\frac{5}{8}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 104. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$; $SA = SB = SC = 2a$, M là trung điểm của cạnh SA ; N là giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MBC) . Gọi V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.BCNM$, Tỷ số $\frac{V_1}{V}$ là?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 105. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC . Tỷ số thể tích của khối chóp $S.AMN$ và $S.ABC$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 106. Cho khối chóp $S.ABC$. Gọi M là điểm trên đoạn SB sao cho $3SM = MB$, N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN = 2NC$. Tỷ số thể tích khối chóp $M.ABN$ và $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 107. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên tạo với đáy góc 60° . Gọi M là trung điểm SC . Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD , cắt SB tại E và cắt SD tại F . Tính thể tích khối chóp $S.AEMF$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

- Câu 108.** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $ASB = BSC = CSA = 30^\circ$. Mặt phẳng (α) qua A và cắt hai cạnh SB, SC tại B', C' sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tính $k = \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}$.
- A. $k = 2 - \sqrt{2}$. B. $k = 4 - 2\sqrt{3}$. C. $k = \frac{1}{4}$. D. $k = 2(2 - \sqrt{2})$.

III – THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Bài tập Mức độ 1

- Câu 109.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại B có $AB = a, BC = 2a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là
- A. $2a^3$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. $\frac{4a^3}{3}$. D. $4a^3$.
- Câu 110.** Tính thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước là 2, 3, 4.
- A. 24. B. 9. C. 12. D. 20.
- Câu 111.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $AB = 3\text{cm}$, $BC' = 3\sqrt{2}\text{cm}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là:
- A. $\frac{27}{4}(\text{cm}^3)$. B. $27(\text{cm}^3)$. C. $\frac{27}{2}(\text{cm}^3)$. D. $\frac{27}{8}(\text{cm}^3)$.
- Câu 112.** Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao $3h$ là
- A. $V = 3Bh$. B. $V = Bh$. C. $V = 2Bh$. D. $V = \frac{1}{3}Bh$.
- Câu 113.** Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng
- A. $8a$. B. $8a^3$. C. a^3 . D. $6a^3$.
- Câu 114.** Cho khối hộp có chiều cao h và diện tích đáy B . Khi đó thể tích V khối hộp là
- A. $V = B^2.h$. B. $V = \frac{1}{3}.B.h$. C. $V = \frac{1}{2}.B.h$. D. $V = B.h$.
- Câu 115.** Tính thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 8 và chiều cao bằng 3.
- A. $V = 24$. B. $V = 8$. C. $V = 192$. D. $V = 64$.
- Câu 116.** Cho khối lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 5, đáy là hình vuông có cạnh bằng 4. Thể tích khối lăng trụ đã cho là
- A. 100. B. 80. C. 64. D. 20.
- Câu 117.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy ABC bằng S và chiều cao bằng h . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2Sh$. B. $\frac{1}{3}Sh$. C. $\frac{2}{3}Sh$. D. Sh .

Câu 118. Thể tích của khối hình hộp chữ nhật có các cạnh lần lượt là a ; $2a$; $3a$ bằng

A. $6a^3$. B. $3a^3$. C. a^3 . D. $2a^3$.

Câu 119. Một khối lăng trụ có chiều cao bằng $2a$ và diện tích đáy bằng $2a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $V = 4a^3$. B. $V = \frac{4a^2}{3}$. C. $V = \frac{4a^3}{3}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 120. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $a = 5\text{cm}$; $b = 6\text{cm}$; $c = 4\text{cm}$. Thể tích của khối hộp này là

A. 40cm^3 . B. 120cm^3 . C. 60cm^3 . D. 20cm^3 .

Câu 121. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ bằng bao nhiêu?

A. a^3 . B. $a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $2a^3\sqrt{3}$.

Câu 122. Thể tích khối lập phương có cạnh $a\sqrt{2}$ bằng

A. $2\sqrt{2}a^3$. B. a^3 . C. $3\sqrt{2}a$. D. $2a^3$.

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với mặt đáy. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $V = 1$. C. $V = \frac{1}{3}$. D. $V = 2$.

Câu 124. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AD' = 2a\sqrt{2}$.

A. $V = a^3$. B. $V = 8a^3$. C. $V = 2\sqrt{2}a^3$. D. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

Câu 125. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $h = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{3a^3}{4}$. B. $V = 3a^3$. C. $V = \frac{3a^3}{2}$. D. $V = \frac{3a^3}{12}$.

Câu 126. Cho một hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng a . Tính thể tích khối chóp $A'.ABC$.

A. $2a^3$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 127. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là a , $2a$, $a\sqrt{5}$. Thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. B. $V = 2a^3\sqrt{5}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. D. $V = a^3\sqrt{5}$.

Câu 128. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $3a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 129. Một khối lăng trụ thể tích V , diện tích đáy S . Tính chiều cao h của khối lăng trụ đó.

- A. $h = \frac{V}{6S}$. B. $h = \frac{V}{3S}$. C. $h = \frac{V}{S}$. D. $h = \frac{3V}{S}$.

Câu 130. Một khối lăng trụ có thể tích V và diện tích đáy bằng S , chiều cao của lăng trụ đó bằng

- A. $\frac{S}{V}$. B. $\frac{3V}{S}$. C. $\frac{S}{3V}$. D. $\frac{V}{S}$.

Câu 131. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập Mức độ 2

Câu 132. Khối lập phương có độ dài đường chéo bằng d thì thể tích của khối lập phương là

- A. $V = \sqrt{3}d^3$. B. $V = 3d^3$. C. $V = d^3$. D. $V = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 133. Khối lập phương có tổng diện tích các mặt là 48cm^2 . Thể tích khối lập phương đó bằng

- A. 24cm^3 . B. $32\sqrt{2}\text{cm}^3$. C. 18cm^3 . D. $16\sqrt{2}\text{cm}^3$.

Câu 134. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{2}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 135. Cho hình lập phương có thể tích bằng $2\sqrt{2}a^3$. Hãy tính diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

- A. $6a^2$. B. $12a^2$. C. $8a^2$. D. $4a^2$.

Câu 136. Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a khi đó thể tích của khối chóp $D.ABC'D'$ bằng

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 137. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$; $AD = 2a$; $AA' = 3a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $BA'C'D'$

- A. $V = 6a^3$. B. $V = 2a^3$. C. $V = a^3$. D. $V = 3a^3$.

Câu 138. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A = a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Câu 139. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 140. Tính thể tích V của khối lăng trụ có đáy là một lục giác đều cạnh a và chiều cao của khối lăng trụ $4a$.

A. $V = 24a^3\sqrt{3}$. B. $V = 12a^3\sqrt{3}$. C. $V = 6a^3\sqrt{3}$. D. $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 141. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bằng a , diện tích mặt bên $ABB'A'$ bằng $2a^2$. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 142. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, biết $AA' = 4a$, $AC = 2a$, $BD = a$. Thể tích V của khối lăng trụ là

A. $V = 8a^3$. B. $V = 2a^3$. C. $V = \frac{8}{3}a^3$. D. $V = 4a^3$.

Câu 143. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$ (tham khảo hình vẽ). Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

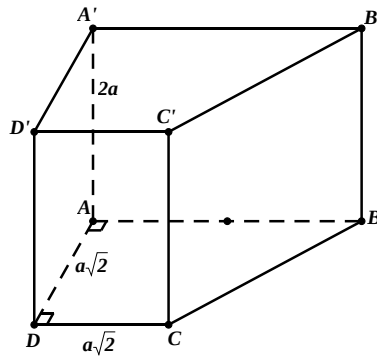
A. $V = a^3\sqrt{2}$. B. $V = 2a^3\sqrt{2}$. C. $V = a^3\sqrt{10}$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 144. Cho hình hộp đứng có cạnh bên độ dài $3a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc 60° . Khi đó thể tích khối hộp là

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 145. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thang vuông tại A và D , có $AB = 2CD$, $AD = CD = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng.

A. $12a^3$. B. $6a^3$. C. $2a^3$. D. $4a^3$.



- Câu 146.** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích các mặt $ABCD$, $ABB'A'$, $ADD'A'$ lần lượt bằng 24 cm^2 , 18 cm^2 , 12 cm^2 . Thể tích khối chóp $B'.ABD$ bằng
- A. 36 cm^3 . B. 72 cm^3 . C. 12 cm^3 . D. 24 cm^3 .
- Câu 147.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC . Thể tích của khối lăng trụ đã cho là
- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $3a^3\sqrt{2}$. D. $2a^3\sqrt{6}$.
- Câu 148.** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh $AC' = 2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng
- A. $4a^3$. B. $3a^3$. C. $2a^3$. D. a^3 .
- Câu 149.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a .
- A. $V = a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. D. $V = a^3$.
- Câu 150.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $BAC = 120^\circ$, biết $C'A$ hợp với đáy một góc 45° . Thể tích của khối lăng trụ là
- A. $2a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $a^3\sqrt{3}$.
- Câu 151.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $ABC = 30^\circ$, BC' hợp với mặt bên $(ACC'A')$ một góc 30° , thể tích của khối lăng trụ là V . Khi đó $\frac{V}{a^3\sqrt{6}}$ bằng

- A. 1. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 152. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 153. Khối hộp có sáu mặt đều là hình thoi cạnh a , các góc nhọn của các mặt đều bằng 60° có thể tích là

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 154. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Góc tạo bởi cạnh bên $A'A$ với đáy bằng 45° (hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{\sqrt{6}}{24}$. B. $V = 1$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{8}$. D. $V = 3$.

Câu 155. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{3a^3}{\sqrt{6}}$.

Câu 156. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông cạnh $2a$.

- A. $2a^3$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. a^3 . D. $a^3\sqrt{2}$.

Câu 157. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân ABC với $AB = AC = a$, góc $BAC = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 30° . Tính thể tích V của lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{8}$. D. $V = \frac{a^3}{4}$.

Câu 158. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $ACB = 60^\circ$, $AC' = 3a$. Thể tích khối lăng trụ đó là :

- A. $\frac{4\sqrt{6}a^3}{3}$. B. $\sqrt{6}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 159. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $3a^3$. Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Tính thể tích của khối chóp $O'.ABCD$.

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{3a^3}{2}$. D. $\frac{3a^3}{4}$.

Câu 160. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm $AD, D'C', B'C'$. Tính thể tích khối tứ diện $QBMN$.

- A. $\frac{V}{4}$. B. $\frac{8V}{3}$. C. $\frac{3V}{8}$. D. $\frac{V}{8}$.

Câu 161. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BAC = 60^\circ$ và thể tích bằng $\sqrt{3}a^3$. Tính chiều cao h của hình hộp đã cho.

- A. $h = 3a$. B. $h = a$. C. $h = 2a$. D. $h = 4a$.

Câu 162. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết thể tích khối chóp $A'.BDD'B'$ là $\frac{8}{3}\text{dm}^3$. Độ dài cạnh của hình lập phương đó là

- A. 8dm. B. 4dm. C. 3dm. D. 2dm.

Câu 163. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12 (đơn vị thể tích). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, DC, AA' . Tính thể tích khối chóp $P.BMN$.

- A. $V_{P.BMN} = \frac{3}{2}$. B. $V_{P.BMN} = 3$. C. $V_{P.BMN} = \frac{3}{4}$. D. $V_{P.BMN} = 2$.

Bài tập Mức độ 3

Câu 164. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 165. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên (ABB_1A_1) bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

- A. 12. B. 18. C. 24. D. 9.

Câu 166. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(ACC'A')$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

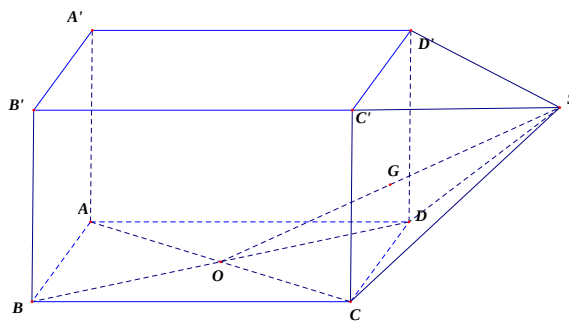
- A. $\frac{3a^3}{16}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3}{16}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 167. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BB' và DD' sao cho $BE = 2EB', DF = 2FD'$. Tính thể tích khối tứ diện $ACEF$.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 168. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = 1, AD = 2$. Gọi S là điểm đối xứng của tâm O của hình chữ nhật $ABCD$ qua trọng tâm G của tam giác $DD'C$. Tính thể tích khối đa diện $ABCD.A'B'C'D'S$.

- A. $\frac{11}{12}$. B. $\frac{7}{3}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{3}{2}$.



Câu 169. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và AB' vuông góc với BC' . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

C. $V = a^3\sqrt{6}$.

D. $V = \frac{7a^3}{8}$.

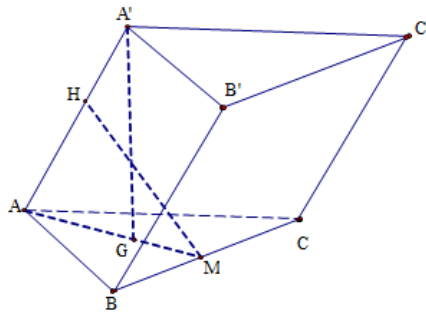
Câu 170. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa BC và AA' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $B'.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Câu 171. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) , với $\varphi < 45^\circ$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $4a^3$.

B. $\frac{8a^3}{3}$.

C. $\frac{4a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

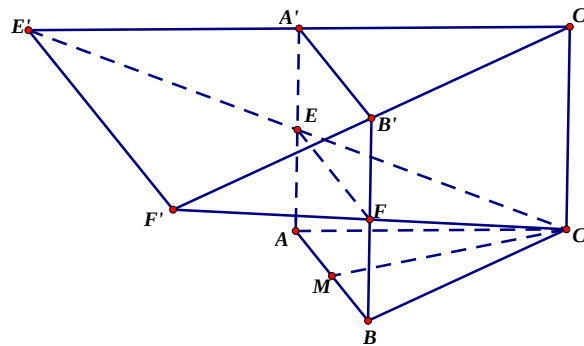
Câu 172. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E, F lần lượt là trung điểm AA' và BB' ; đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E' , đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F' . Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

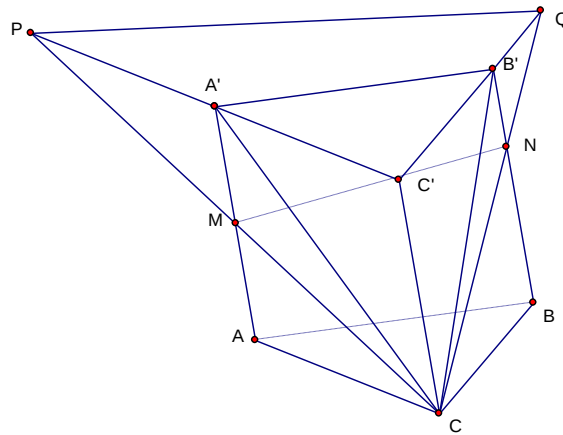
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.



- Câu 173.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN = \frac{2}{3}BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P và đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng
- A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{13}{18}$. C. $\frac{7}{18}$. D. $\frac{7}{9}$.


IV – TỈ SỐ THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

- Câu 174.** Nếu cạnh của hình lập phương tăng lên gấp 2 lần thì thể tích của khối lập phương đó sẽ tăng lên bao nhiêu lần?
- A. 6. B. 4. C. 9. D. 8.
- Câu 175.** Biết hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Nếu tăng mỗi cạnh của hình hộp lên gấp hai lần thì thể tích khối hộp mới là:
- A. $16V$. B. $4V$. C. $2V$. D. $8V$.
- Câu 176.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M là trung điểm cạnh BB' , điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích khối chóp $A.BCNM$ theo V .
- A. $V_{A.BCNM} = \frac{7V}{12}$. B. $V_{A.BCNM} = \frac{7V}{18}$. C. $V_{A.BCNM} = \frac{5V}{18}$. D. $V_{A.BCNM} = \frac{V}{3}$.
- Câu 177.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CC' và BB' . Tính tỉ số $\frac{V_{ABCMN}}{V_{ABC.A'B'C'}}$.
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

- Câu 178.** Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V khi đó thể tích khối chóp tứ giác $ABCC'B'$ bằng

A. $\frac{2}{3}V$.

B. $\frac{1}{2}V$.

C. $\frac{1}{3}V$.

D. $\frac{3}{4}V$.

Câu 179. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của CC' . Mặt phẳng (ABM) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh C và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Câu 180. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt trung điểm AA', CC' . V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 2.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 181. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{3V}{4}$.

B. $\frac{2V}{3}$.

C. $\frac{V}{2}$.

D. $\frac{V}{4}$.

Câu 182. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_2 là thể tích của khối tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây đúng.

A. $V = 3V_1$.

B. $V = 4V_1$.

C. $V = 6V_1$.

D. $V = 2V_1$.

Câu 183. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{3V}{4}$.

B. $\frac{2V}{3}$.

C. $\frac{V}{2}$.

D. $\frac{V}{4}$.

Câu 184. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V , M là điểm tùy ý trên cạnh CC' . Thể tích khối $M.ABB'A'$ là

A. $\frac{2V}{3}$.

B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{V}{2}$.

D. $\frac{V}{6}$.

Câu 185. Gọi V là thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V' là thể tích khối tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào dưới đây là đúng?

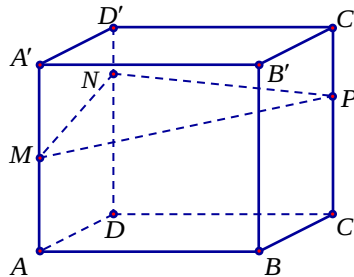
A. $V = 4V'$.

B. $V = 8V'$.

C. $V = 6V'$.

D. $V = 2V'$.

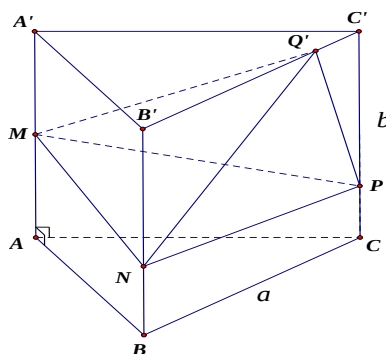
Câu 186. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$; $DN = 3ND'$; $CP = 2PC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



- A. $\frac{7385}{18}$. B. $\frac{5275}{12}$. C. $\frac{8440}{9}$. D. $\frac{5275}{6}$.

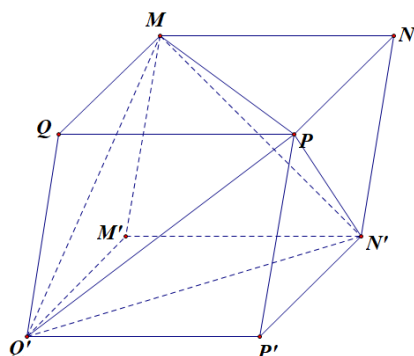
Câu 187. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $AA', BB', CC', B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}$, $\frac{C'Q}{B'C'} = \frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{30}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{45}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{22}{45}$.



Câu 188. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CC' và BB' . Đường thẳng $A'E$ cắt đường thẳng AC tại K , đường thẳng $A'F$ cắt đường thẳng AB tại H . Tính tỉ số thể tích khối đa diện lồi $BFHCEK$ và khối chóp $A'ABC$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. 1.



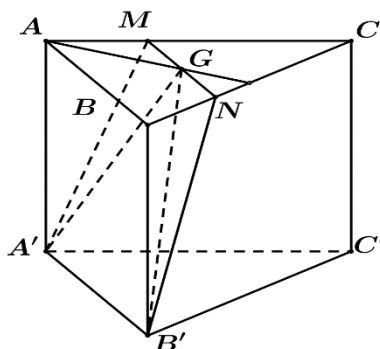
Câu 191. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Một mặt phẳng (α) qua đường thẳng $A'B'$ và trọng tâm tam giác ABC , chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh C và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{17}{10}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{8}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{10}{17}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{19}$.



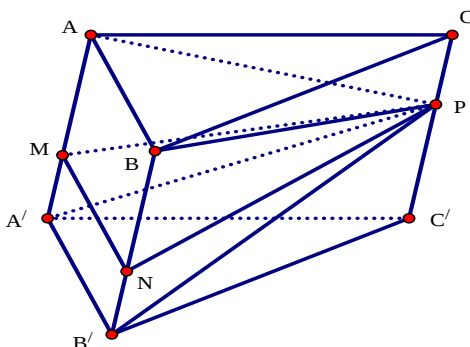
Câu 192. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên AA' , BB' lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{A'M}{AM} = \frac{BN}{B'N} = k$ ($0 < k < 1$). P là điểm bất kì trên cạnh CC' . Tỉ số thể của khối chóp $P.ABNM$ và thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{k}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. k .

D. $\frac{2}{3(k+1)}$.



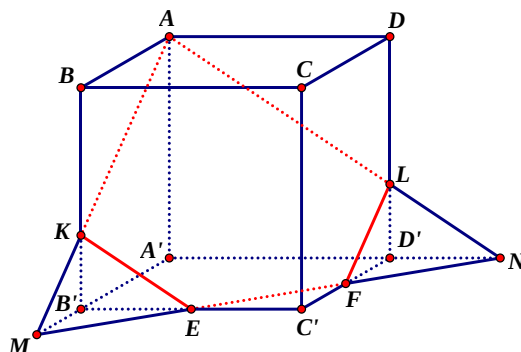
Câu 193. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm E, F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích của khối chứa điểm A' , V_2 là thể tích khối chứa điểm C' . Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{25}{47}$.

B. 1.

C. $\frac{8}{17}$.

D. $\frac{17}{25}$.



V – CỰC TRỊ HÌNH HỌC & BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 194. Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể)?

A. 90 triệu đồng.

B. 168 triệu đồng.

C. 54 triệu đồng.

D. 108 triệu đồng.

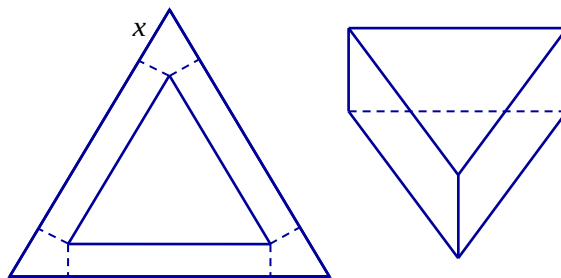
Câu 195. Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{256}{3} \text{ m}^3$, đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^3 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?

- A. 48 triệu đồng. B. 47 triệu đồng. C. 96 triệu đồng. D. 46 triệu đồng.

Câu 196. Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Người ta cưa viên đá đó theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

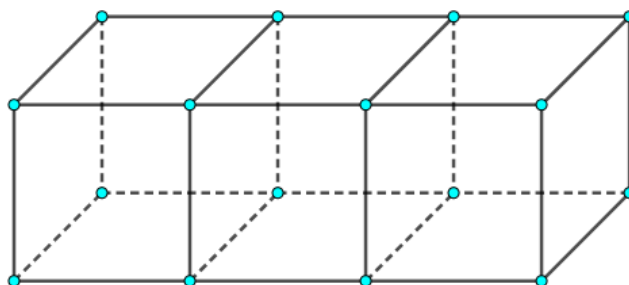
- A. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. B. $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. D. $\frac{\sqrt[3]{2}}{4} a^2$.

Câu 197. Cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dài x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



- A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a}{5}$. D. $\frac{a}{6}$.

Câu 198. Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152 m^2 và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).

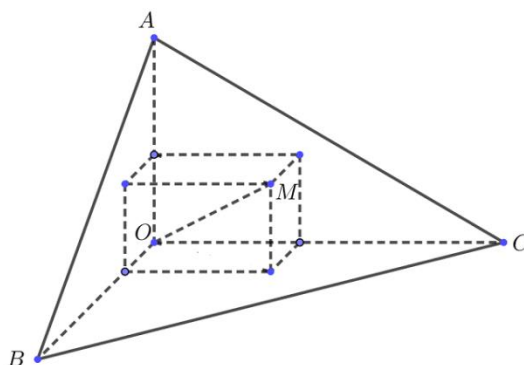


- A. $16\text{ m} \times 24\text{ m}$. B. $8\text{ m} \times 48\text{ m}$. C. $12\text{ m} \times 32\text{ m}$. D. $24\text{ m} \times 32\text{ m}$.

Câu 199. Một người cần làm một hình lăng trụ tam giác đều từ tấm nhựa phẳng để có thể tích là $6\sqrt{3}\text{ cm}^3$. Để ít hao tổn vật liệu nhất thì cần tính độ dài các cạnh của khối lăng trụ tam giác đều này bằng bao nhiêu?

- A. Cạnh đáy bằng $2\sqrt{6}\text{ cm}$ và cạnh bên bằng 1 cm .
 B. Cạnh đáy bằng $2\sqrt{3}\text{ cm}$ và cạnh bên bằng 2 cm .
 C. Cạnh đáy bằng $2\sqrt{2}\text{ cm}$ và cạnh bên bằng 3 cm .
 D. Cạnh đáy bằng $4\sqrt{3}\text{ cm}$ và cạnh bên bằng $\frac{1}{2}\text{ cm}$.

Câu 200. Có một khối gỗ dạng hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = 3\text{ cm}$, $OB = 6\text{ cm}$, $OC = 12\text{ cm}$. Trên mặt (ABC) người ta đánh dấu một điểm M sau đó người ta cắt gọt khối gỗ để thu được một hình hộp chữ nhật có OM là một đường chéo đồng thời hình hộp có 3 mặt nằm trên 3 mặt của tứ diện (xem hình vẽ).

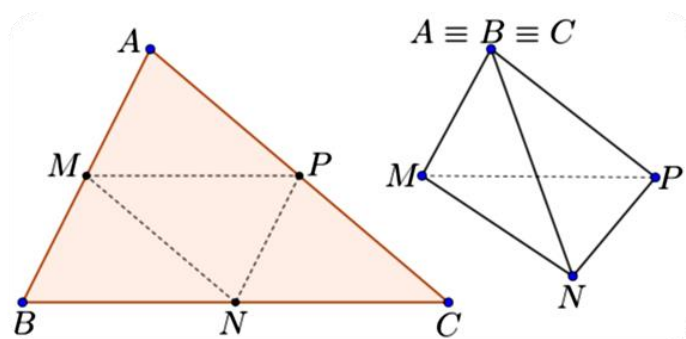


Thể tích lớn nhất của khối gỗ hình hộp chữ nhật bằng

- A. 8 cm^3 . B. 24 cm^3 . C. 12 cm^3 . D. 36 cm^3 .

Câu 201. Cho một mảnh giấy có hình dạng là tam giác nhọn ABC có $AB = 10\text{ cm}$, $BC = 16\text{ cm}$, $AC = 14\text{ cm}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Người ta gấp mảnh giấy theo các đường

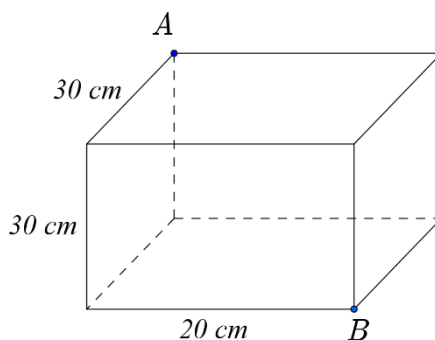
MN, NP, PM sau đó dán trùng các cặp cạnh AM và BM ; BN và CN ; CP và AP (các điểm A, B, C trùng nhau) để tạo thành một tứ diện (xem hình vẽ).



Thể tích của khối tứ diện nêu trên là

- A. $\frac{20\sqrt{11}}{3} \text{ cm}^3$. B. $\frac{10\sqrt{11}}{3} \text{ cm}^3$. C. $\frac{280}{3} \text{ cm}^3$. D. $\frac{160\sqrt{11}}{3} \text{ cm}^3$.

Câu 202. Một khối gỗ hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng và chiều cao lần lượt là $30(\text{cm})$; $20(\text{cm})$ và $30(\text{cm})$ (như hình vẽ)



Một con kiến xuất phát từ điểm A muốn tới điểm B thì quãng đường ngắn nhất nó phải đi dài bao nhiêu cm ?

- A. $10\sqrt{34}(\text{cm})$. B. $30+10\sqrt{14}(\text{cm})$. C. $10\sqrt{22}(\text{cm})$. D. $20+30\sqrt{2}(\text{cm})$.

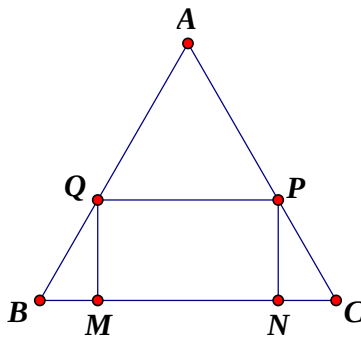
Câu 203. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ tâm O của đáy đến (SCD) bằng $2a$, a là hằng số dương. Đặt $AB = x$. Giá trị của x để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất là

- A. $a\sqrt{3}$. B. $2a\sqrt{6}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{6}$.

Câu 204. Khối chóp có đáy là hình bình hành, một cạnh đáy bằng $4a$ và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích của khối chóp đó có giá trị lớn nhất là?

- A. $\frac{8a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3$. C. $8a^3$. D. $2\sqrt{6}a^3$.

Câu 205. Cho tam giác đều $\triangle ABC$ có cạnh bằng a . Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ có đỉnh M, N nằm trên cạnh BC , hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác (tham khảo hình vẽ). Hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất là



- A. $\frac{a^2}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Câu 206. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° . Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $V_{\max} = \frac{1}{2}$. D. $V_{\max} = \frac{3}{2}$.

Câu 207. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chu vi tam giác SAC bằng 8. Trong trường hợp thể tích của hình chóp $S.ABCD$ lớn nhất, hãy tính cosin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{4}$.

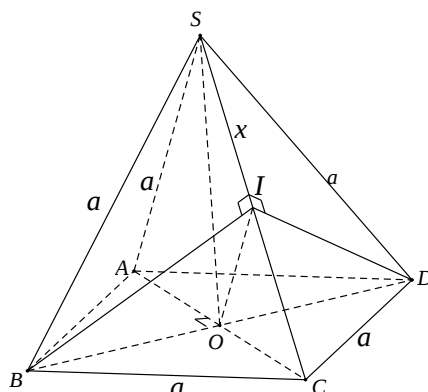
Câu 208. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x$ ($0 < x < a\sqrt{3}$), các cạnh còn lại đều bằng a . Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{m}}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m + 2n = 10$.

B. $m^2 - n = 30$.

C. $2n^2 - 3m < 15$.

D. $4m - n^2 = -20$.



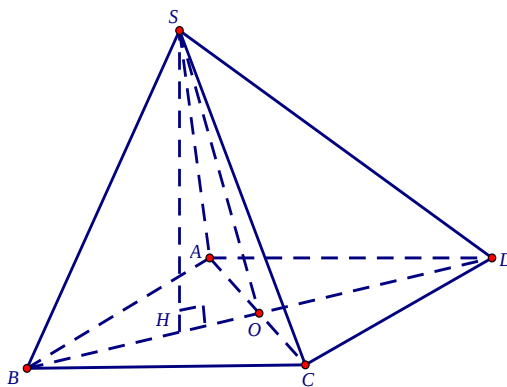
Câu 209. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , $SA = SB = SC = a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , H là hình chiếu của S lên mp($ABCD$), $H \in BO$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{8}$.

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{3a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.



Câu 210. Cho tam giác ABC đều cạnh a , gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Trên d lấy điểm S và đặt $AS = x$, ($x > 0$). Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Biết HK cắt d tại điểm S' . Khi SS' ngắn nhất thì khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1B	2A	3C	4B	5B	6A	7A	8B	9A	10A
11D	12B	13C	14D	15D	16B	17A	18B	19D	20D
21C	22A	23B	24A	25A	26B	27D	28D	29A	30B
31B	32C	33B	34B	35B	36C	37D	38B	39A	40C
41A	42D	43B	44C	45B	46D	47D	48B	49B	50D

51B	52B	53D	54D	55C	56B	57C	58D	59A	60B
61B	62A	63A	64D	65C	66C	67D	68A	69A	70B
71B	72D	73A	74C	75A	76B	77A	78B	79D	80D
81D	82C	83D	84B	85A	86A	87A	88A	89B	90B
91A	92D	93A	94B	95B	96D	97B	98C	99D	100D

101A	102B	103B	104B	105D	106C	107D	108B	109A	110A
111C	112A	113B	114D	115A	116B	117D	118A	119A	120B
121D	122A	123B	124B	125A	126C	127B	128D	129C	130D
131B	132D	133D	134B	135B	136C	137C	138B	139C	140C
141A	142D	143B	144D	145B	146C	147A	148A	149C	150D

151A	152B	153B	154D	155B	156A	157B	158B	159A	160D
161C	162D	163C	164C	165A	166A	167B	168B	169B	170A
171C	172A	173D	174D	175D	176B	177B	178A	179A	180C
181B	182C	183B	184A	185C	186D	187B	188C	189B	190A
191B	192D	193A	194D	195A	196C	197D	198A	199B	200A

201A	202A	203B	204A	205D	206D	207A	208A	209D	210A
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

CHƯƠNG I

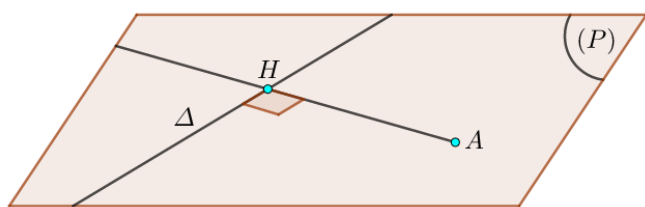
ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

§4. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG

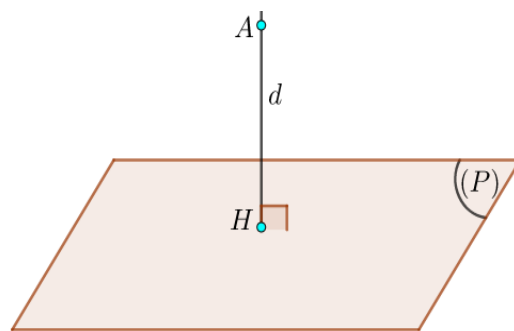
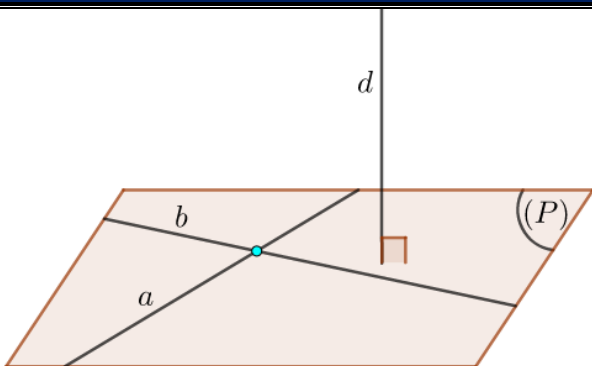
TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Khoảng cách điểm đến đường thẳng:



Xét mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và điểm A . Vẽ một đường thẳng qua A , đồng thời cắt và vuông góc với Δ tại H . Khi đó khoảng cách từ A đến Δ là: $d(A, \Delta) = AH$.

2. Khoảng cách điểm đến mặt phẳng:

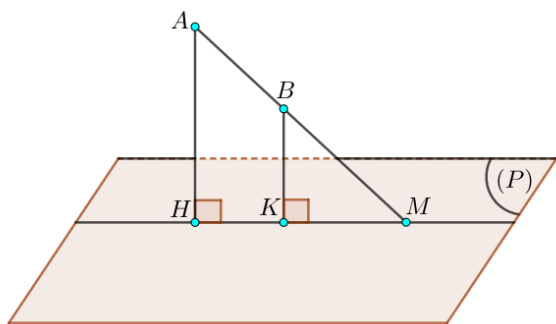


a) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \cap b \text{ trong } (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$$

b) Khoảng cách điểm đến mặt phẳng:

Từ điểm A nằm ngoài $mp(P)$, kẻ đường thẳng vuông góc với (P) tại H . Khi đó khoảng cách từ A đến (P) là: $d(A, (P)) = AH$.

3. Tỷ số khoảng cách:


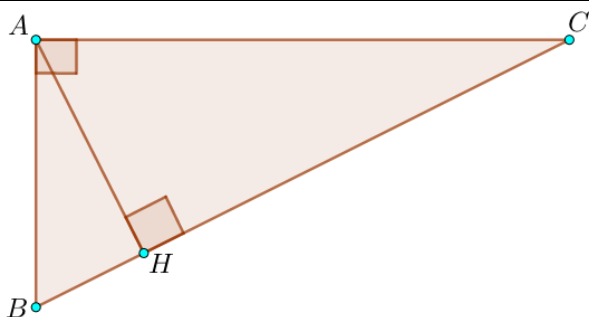
Nếu $\begin{cases} AB \cap (P) = M \\ AM = k \cdot BM \end{cases}$ thì $d(A, (P)) = k \cdot d(B, (P))$.

Chứng minh:

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên $mp(P)$. Ta nhận thấy rằng hai tam giác AHM, BKM đồng dạng, do đó:

$$\frac{AH}{BK} = \frac{AM}{BM} = k \Rightarrow AH = k \cdot BK \text{ tức là}$$

$$d(A, (P)) = k \cdot d(B, (P)).$$

4. Chìa khóa tìm khoảng cách:


Xét tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2}$$

$$AH^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2} \Leftrightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} \quad (*)$$

Công thức (*) chính là **chìa khóa tính toán quan trọng nhất** đối với bài toán **khoảng cách trong không gian**.

Bài toán 1. Sử dụng công thức thể tích để tìm khoảng cách

Phương pháp: Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}h.S_d \Leftrightarrow h = \frac{3V}{S_d}$.

VÍ DỤ 1. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích $V = 32\text{cm}^3$; $\triangle BCD$ vuông cân có cạnh huyền $CD = 4\sqrt{2}\text{cm}$. Khoảng cách từ A đến (BCD) bằng:

A. 8cm.

B. 4cm.

C. 9cm.

D. 12cm.

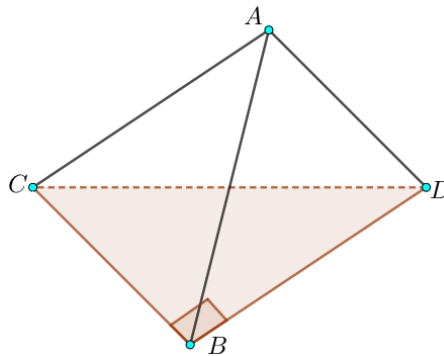
Lời giải:

- Do tam giác BCD vuông cân tại B nên

$$BC = BD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 4\text{cm} \Rightarrow S_{\triangle BCD} = 8\text{cm}^2.$$

- Gọi h_A là khoảng cách từ A đến (BCD) ,

$$\text{ta có } h_A = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot 32}{8} = 12(\text{cm}). \quad \text{Chọn } \boxed{D}$$



VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Thể tích khối chóp bằng $4a^3$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mặt bên (SBC) của hình chóp biết rằng tam giác SBC cân tại S và $SB = a$, $BSC = 45^\circ$.

A. $6\sqrt{2}a$.

B. $6a$.

C. $3\sqrt{2}a$.

D. $3a$.

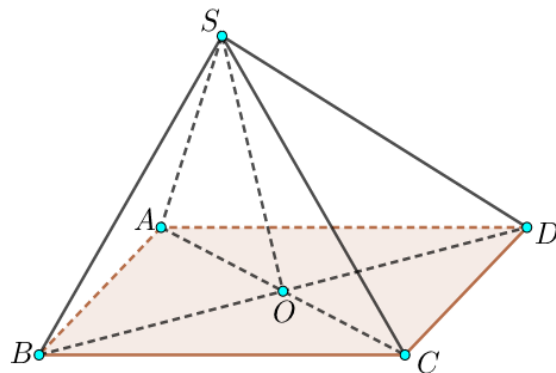
Lời giải:

- Ta có: $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} \Rightarrow V_{S.OBC} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{1}{4} 4a^3 = a^3$.

$$\text{Xét tam giác } SBC \text{ có: } S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin BSC = \frac{\sqrt{2}}{4} a^2.$$

- Khi đó: $d(O, (SBC)) = \frac{3V_{S.OBC}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{3 \cdot a^3}{\frac{\sqrt{2}}{4} a^2} = 6\sqrt{2}a$.

Chọn $\boxed{A}$



VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A góc $ABC = 30^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

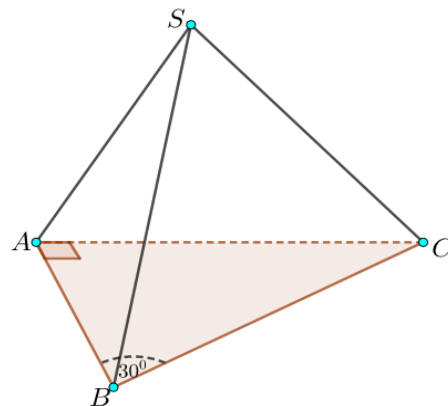
Lời giải:

- Tam giác vuông ABC có $AC = BC \cdot \sin ABC = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$;

$$AB = BC \cdot \cos ABC = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ AB = (SAB) \cap (ABC) \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp SA. \\ AC \perp AB \end{cases}$

- Tam giác vuông SAC có



$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- Xét tam giác SAB , đặt $p = \frac{SA + SB + AB}{2} = \frac{a\sqrt{3} + a}{2}$; khi đó

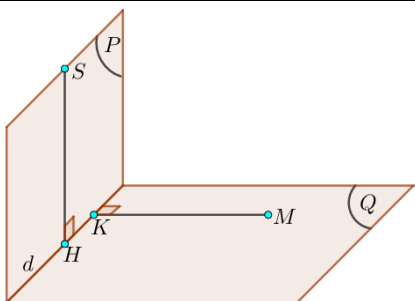
$$S_{\Delta SAB} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$$

- Ta có: $V_{S.ABC} = V_{C.SAB} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot S_{\Delta SAB} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$; $S_{\Delta SBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

- Gọi h là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) , suy ra $h = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{24}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **Chọn $\rightarrow$ D**

Bài toán 2. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng chứa đường cao hình chóp

Bài toán: Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) chứa đường cao SH của hình chóp.



Xét mặt phẳng (Q) chứa điểm M và vuông góc với (P) .

- **Bước 1:** Tìm giao tuyến d giữa (P) và (Q) .
- **Bước 2:** Trong mp (Q) , dựng $MK \perp d$ tại K .
- **Bước 3:** Lý luận: $\begin{cases} MK \perp d \\ MK \perp SH \end{cases} \Rightarrow MK \perp (P)$. Vậy $d(M, (P)) = MK$.
- **Bước 4:** Tính MK .

Ghi nhớ:

- Trong phương pháp trên, **mặt phẳng (Q) thường là mặt phẳng đáy** của hình chóp.
- Nếu điểm M **không nằm trong mặt phẳng đáy**, ta liên hệ bằng **tỉ số khoảng cách để hoán đổi điểm M thành một điểm khác nằm trong mặt phẳng đáy** mà có thể áp dụng phương pháp trên.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và tam giác SAB đều cạnh $2a$.

Biết tam giác ABC vuông tại C và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ C đến (SAB) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

- Gọi H là trung điểm AB suy ra $SH \perp AB$ (do tam giác SAB đều). Ngoài ra $(SAB) \perp (ABC)$ cho nên $SH \perp (ABC)$.

- Kẻ đường cao CK của tam giác ABC . Ta có:

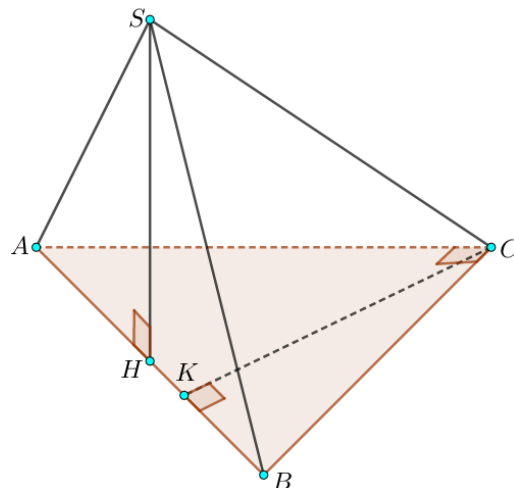
$$\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow d(C, (SAB)) = CK.$$

- Xét tam giác ABC vuông tại C có:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a;$$

$$CK = \frac{CACB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- Vậy $d(C, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn** $\rightarrow$ **A**



VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp(SAC).

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải:

- Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BO \perp AC$ (1).

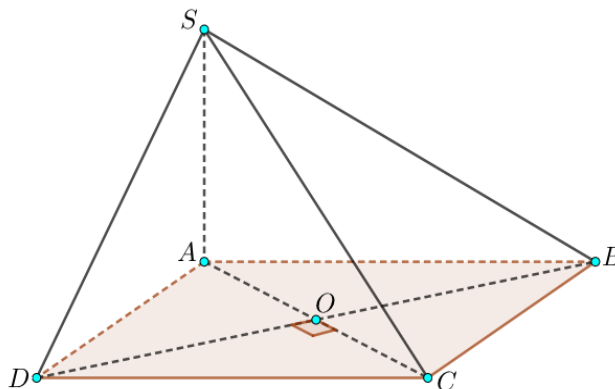
Ta lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$ (2). Từ (1)

và (2) $\Rightarrow BO \perp (SAC)$. Do đó $d(B, (SAC)) = BO$.

- Xét hình vuông $ABCD$ có đường chéo

$$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy}$$

$$d(B, (SAC)) = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ **Chọn** } \rightarrow \text{ **B**}$$



VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với diện tích đáy bằng $6a^2$, hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng đáy trùng với điểm H thuộc cạnh AD với $AH = 2DH$. Biết $SH = a$ và diện tích tam giác SAD bằng a^2 . Tính theo a khoảng cách từ trung điểm M của đoạn SB đến mp(SAD).

A. $2a$.

B. a .

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{3a}{2}$.

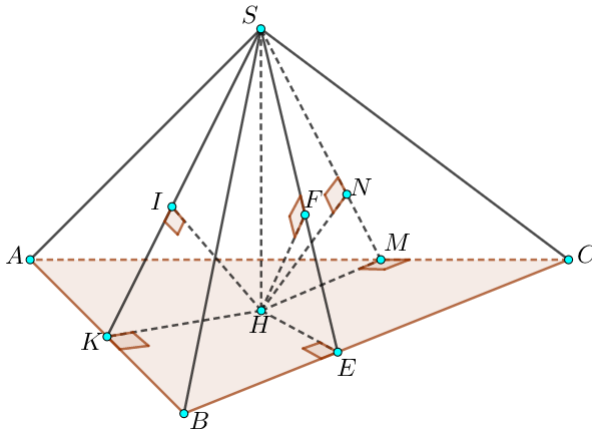
Lời giải:

- Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow d(B, (SAD)) = AB$.

-
- The diagram shows a tetrahedron $S-ABC$. A plane is drawn through points S , A , and M . This plane intersects edge BC at point D and edge AC at point H . The line segment SD is perpendicular to BC , and the line segment AH is perpendicular to BC . The intersection of SD and AH is labeled M .

<https://www.facebook.com/tuhoctoancapba/>

Bằng kinh nghiệm đã học, ta có các khoảng cách sau:



$$d(H, (SAB)) = HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}};$$

$$d(H, (SBC)) = HF = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}};$$

$$d(H, (SAC)) = HN = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}}.$$

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a\sqrt{3}$, $ABC = 30^\circ$. Góc giữa SC và mặt phẳng ABC bằng 60° . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}.$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}.$

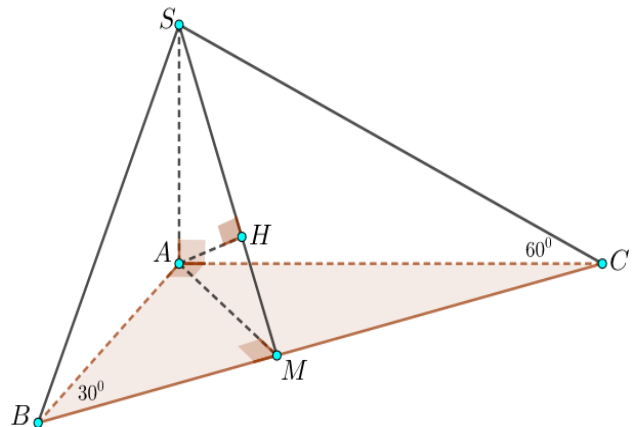
C. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}.$

D. $\frac{3a}{\sqrt{5}}.$

Lời giải:

- Trong mp(ABC), dựng $AM \perp BC$ tại M , trong mp(SAM), dựng $AH \perp SM$ tại H .
- Ta có: $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow AH \perp BC$,
hơn nữa $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}}.$$



- Xét ΔSAC vuông tại A có: $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a$. Xét ΔAMC vuông tại M có
 $AM = AC \cdot \sin ACB = a\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{2}$ (do $ABC = 30^\circ$).

- Xét tam giác SAM vuông tại A có: $AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{3a \cdot \frac{3a}{2}}{\sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$

Chọn $\rightarrow$ D

VÍ DỤ 8. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình chữ nhật với $PQ = 3a\sqrt{2}$, SM vuông góc với mặt phẳng đáy, $SM = 3a$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SNP) bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $2a\sqrt{6}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{6}$.

Nhận xét: Theo quy tắc dựng hình đã học, sau khi nhận biết NP là giao tuyến giữa (SNP) với mặt phẳng đáy, ta sẽ dựng đường thẳng qua M và vuông góc với NP . Tuy nhiên đường này vốn đã có sẵn (là MN), vì vậy ta chỉ cần thực hiện bước dựng hình còn lại: dựng MH vuông góc SN tại H . Khoảng cách cần tìm chính là đoạn MH .

Lời giải:

- Do $MNPQ$ là hình chữ nhật nên $MN = PQ = 3a\sqrt{2}$.
- Gọi H là hình chiếu của M trên SN . Ta có:

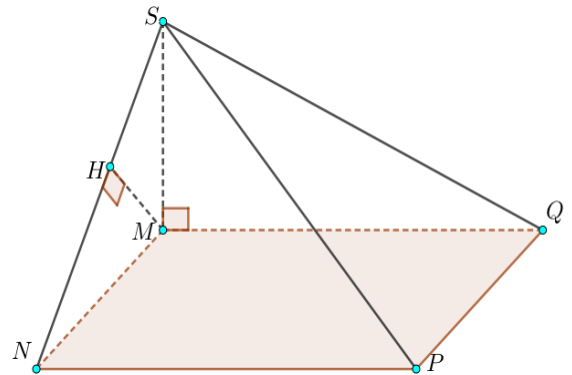
$$\begin{cases} NP \perp MN \\ NP \perp SM \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SMN) \text{ mà } MH \subset (SMN) \Rightarrow NP \perp MH.$$

Do vậy:

$$\begin{cases} MH \perp NP \\ MH \perp SN \end{cases} \Rightarrow MH \perp (SNP) \Rightarrow d(M, (SNP)) = MH.$$
- Trong tam giác vuông SMN có

$$MH = \frac{SM \cdot MN}{\sqrt{SM^2 + MN^2}} = \frac{3a \cdot 3a\sqrt{2}}{\sqrt{9a^2 + 18a^2}} = a\sqrt{6}.$$

Chọn $\rightarrow$ **D**



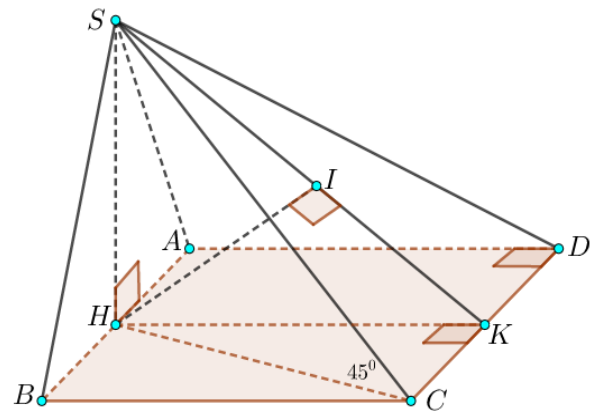
VÍ DỤ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật: $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB , SC tạo với đáy góc 45° . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) là:

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải :

- Ta có: $(SC, (ABCD)) = \angle SCH = 45^\circ \Rightarrow \triangle SHC$ vuông cân tại H

$$\Rightarrow SH = CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$
- Nhận thấy CD là giao tuyến của (SCD) và mặt đáy, ta dựng HK vuông góc CD tại K , dựng HI vuông góc SK tại I . Dễ thấy HK là đường trung bình của hình chữ nhật $ABCD$ nên $HK = AD = a$.
- Ta có: $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HI$, hơn



nữa $SK \perp HI \Rightarrow HI \perp (SCD)$.

Ta có: $d(H, (SCD)) = HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **Chọn** A

VÍ DỤ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D , $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải:

☺ **Cách giải 1: Tự luận.**

- Gọi E là trung điểm AB . Ta có: $\begin{cases} AE \parallel CD \\ AE = CD = a \end{cases} \Rightarrow AECD$ là hình bình hành, hơn nữa $\begin{cases} EAD = 90^\circ \\ AE = AD \end{cases}$, do

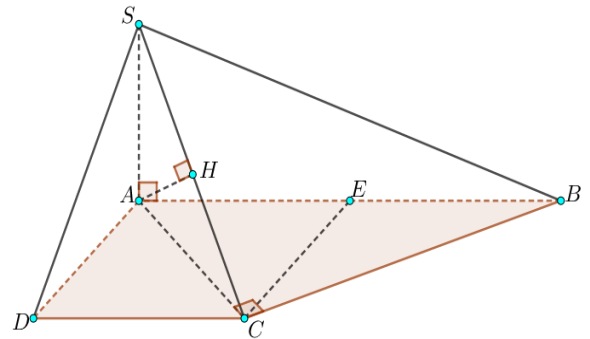
đó $AECD$ là hình vuông cạnh a . Suy ra $AC = a\sqrt{2}$.

- Xét tam giác ABC có $EC = EA = EB = a$ suy ra tam giác ABC vuông tại C .
 ▪ Nhận thấy BC là giao tuyến giữa (SBC) và mặt phẳng đáy và $AC \perp BC$, ta chỉ cần kẻ $AH \perp SC$ tại H (trong (SAC)). Từ đây sẽ chứng minh $AH \perp (SBC)$.

- Thật vậy: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AH$,

hơn nữa $SC \perp AH$ nên $AH \perp (SBC)$.

Do đó: $d(A, (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn** A

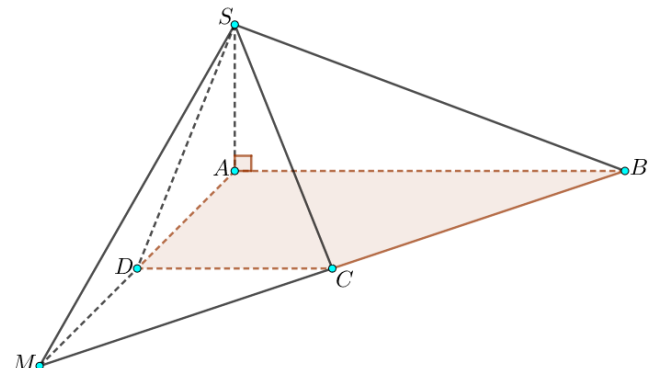


🔗 **Ghi nhớ:** Nếu tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và h là khoảng cách từ

chân đường cao O đến mp(ABC) thì: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (*).

☺ **Cách giải 2: Trắc nghiệm.**

- Trong mp($ABCD$), gọi $M = AD \cap BC$.
 Xét $\triangle MAB$ có $CD \parallel AB$ $\frac{MD}{MA} = \frac{CD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$
 Suy ra D là trung điểm AM , nên $AM = 2AD = 2a$.
 ▪ Xét tứ diện $SABM$ có ba cạnh SA, AB, AM đôi một vuông góc. Theo công thức (*) ở trên, gọi
 $h = d(A, (SBM))$, ta có: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2}$



$$= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

VÍ DỤ 11. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O ; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) . Biết khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ lần lượt là $1; 2; \sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD) .

A. $d = \sqrt{\frac{19}{20}}$.

B. $d = \sqrt{\frac{20}{19}}$.

C. $d = \sqrt{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

- Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$.

- Trong mặt phẳng (SAC) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SA, SC lần lượt tại A', C' .

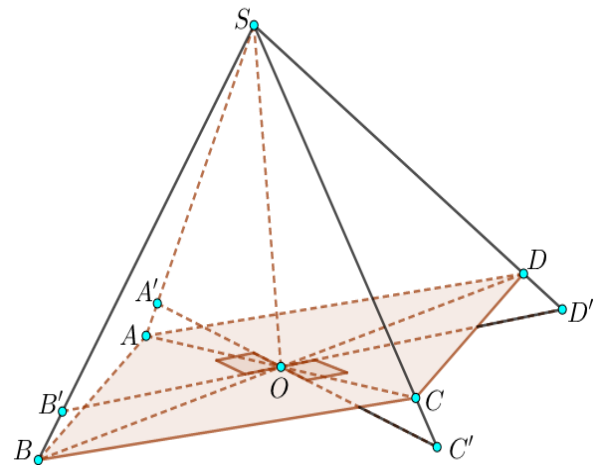
Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SB, SD lần lượt tại B', D' .

- Do $(SAC) \perp (SBD), (SAC) \cap (SBD) = SO, A'C' \perp SO$ nên $A'C' \perp (SBD) \Rightarrow A'C' \perp B'D'$.
- Khi đó tứ diện $OSA'B'$ có OS, OA', OB' đôi một vuông góc nên ta có: $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2}$ (1)

Tương tự: $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2}$ (2); $\frac{1}{u^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2}$ (3); $\frac{1}{v^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2}$ (4)

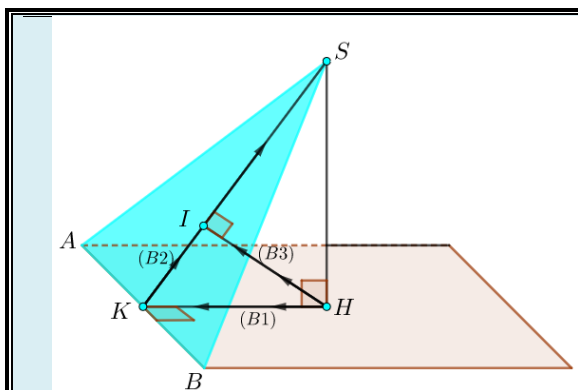
- Từ (1), (2), (3), (4) ta có $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{v^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{20}{19}}$.

Chọn **B**



Bài toán 4. Khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt bên hình chóp

Bài toán: Tính khoảng cách từ điểm M (không phải chân đường cao) đến mặt bên (SAB) của hình chóp



- **Bước 1:** Tìm khoảng cách từ chân đường cao H đến mặt bên của hình chóp (theo bài toán 3- bài toán góc).
- **Bước 2:** Sử dụng *quan hệ song song* hoặc *tỉ số khoảng cách* như sau:

- Nếu $\begin{cases} a \parallel (P) \\ M, H \in a \end{cases}$ thì $d(M, (P)) = d(H, (P))$.
- Nếu $\begin{cases} MH \cap (P) = N \\ MN = k.HN \end{cases}$ thì $d(M, (P)) = k.d(H, (P))$.

(Xem phần lý thuyết – mục 3).

☞ **Nhận xét:** Đến đây, ta thấy *bài toán 3 (bài toán góc)* quan trọng như thế nào, nó chính là *chìa khóa mở ra hầu hết các bài toán khoảng cách khác* trong không gian. Nếu học sinh vận dụng tốt các kỹ năng được nêu trong *Bài toán 3 và Bài toán 4* thì khoảng cách sẽ không còn là đề tài khó chịu của các em nữa.

VÍ DỤ 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. a .

C. $a\sqrt{3}$.

D. $2a$.

Lời giải:

- Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.
- Do $\begin{cases} OA \cap (SCD) = C \\ AC = 2OC \end{cases} \Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$.
- Trong $(ABCD)$, kẻ $OK \perp CD$ tại K (K cũng là trung điểm CD); trong (SOK) , kẻ $OH \perp SK$ tại H (1).

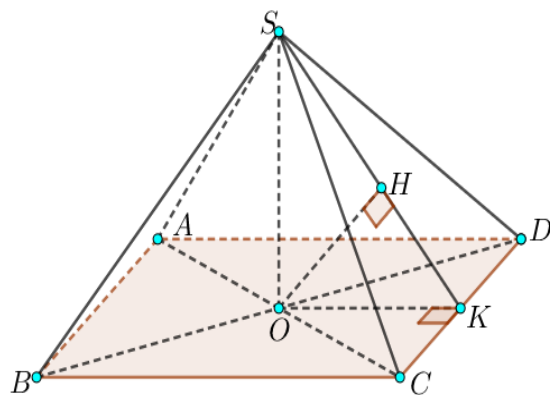
Ta có: $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp OK \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOK) \Rightarrow OH \perp CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SCD)$

$$\Rightarrow d(O, (SCD)) = OH. \text{ Do vậy } d(A, (SCD)) = 2OH = 2 \cdot \frac{SO \cdot OK}{\sqrt{SO^2 + OK^2}} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = a\sqrt{3}.$$

Nhớ rằng: $OK = \frac{BC}{2} = a$ (vì OK là đường trung bình tam giác BCD).

Chọn → **C**



VÍ DỤ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. a .

Lời giải:

- Gọi H là trung điểm AB suy ra $SH \perp AB$ (do tam giác ABC đều), ngoài ra (SAB) vuông góc mặt đáy nên

$$SH \perp (ABCD), SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

- Trong $(ABCD)$, kẻ HK vuông góc BD tại K ; trong (SHK) kẻ HI vuông góc SK tại I .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp SH \\ BD \perp HK \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHK) \text{ mà } HI \subset (SHK) \text{ nên}$$

$$HI \perp BD; \text{ hơn nữa } HI \perp SK, \text{ do đó } HI \perp (SBD).$$

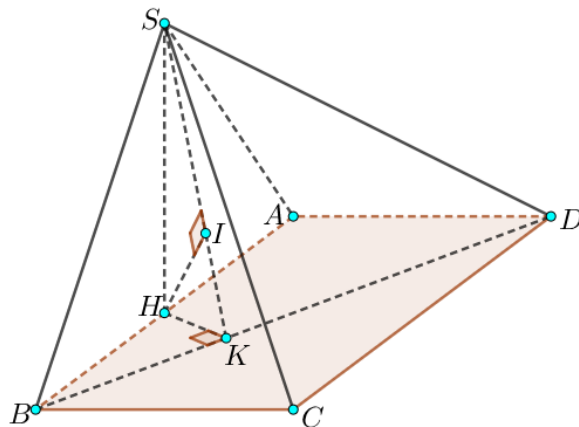
- Ta có:

$$\begin{cases} AH \cap (SBD) = B \\ AB = 2HB \end{cases} \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2HI = 2 \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}}.$$

- Xét hai tam giác đồng dạng là BKH và BAD (hai tam giác vuông có chung góc B), ta có:

$$\frac{BH}{BD} = \frac{HK}{AD} \Rightarrow HK = \frac{BH \cdot AD}{BD} = \frac{BH \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do đó: } d(A, (SBD)) = 2 \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = 2 \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{5}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn **B**

VÍ DỤ 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc $BAC = 30^\circ$, $SA = a$ và $BA = BC = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}}{7}a$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

C. $\frac{2\sqrt{21}}{7}a$.

D. $\frac{\sqrt{21}}{14}a$.

Lời giải:

- Xét tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên $ABCD$ là hình bình hành, ngoài ra $BA = BC = a$, vì vậy $ABCD$ là hình thoi cạnh a .

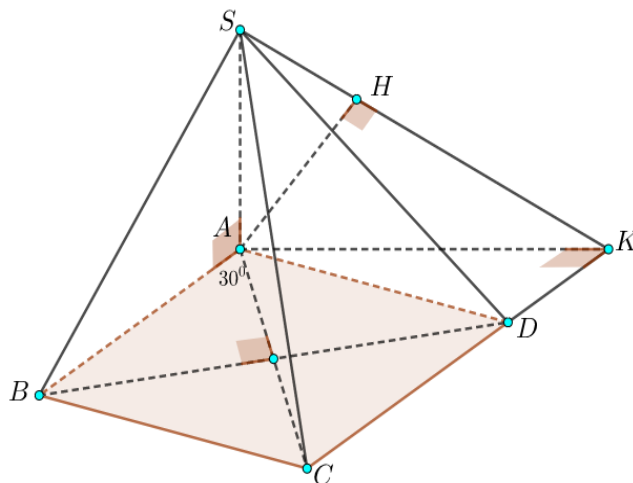
- Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$, do đó:

$$d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)).$$

- Trong mp($ABCD$), kẻ $AK \perp CD$ tại K , trong mp(SAK), kẻ $AH \perp SK$ tại H (1).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp AK \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAK) \Rightarrow AH \perp CD \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$.



Vậy $\boxed{d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH}$.

- Do $\triangle ABC$ cân tại B có $BAC = 30^\circ = BCA \Rightarrow ABC = 120^\circ \Rightarrow ADC = 120^\circ \Rightarrow ADK = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông ADK , ta có: $AK = AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông SAK có: $AH = \frac{SA \cdot AK}{\sqrt{SA^2 + AK^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **Chọn $\boxed{A}$**

VÍ DỤ 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại C và D , $ABC = 30^\circ$. Biết $AC = a$, $CD = \frac{a}{2}$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $a\sqrt{6}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

- Trong $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của AB và CD ; H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SD, BC .

Ta có: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = CK$,

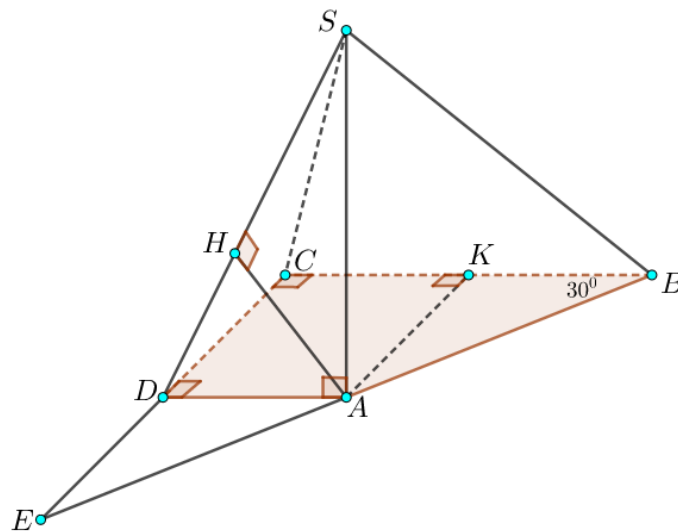
$KB = \frac{AK}{\tan ABC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ với $AK = CD = \frac{a}{2}$;

$BC = BK + KC = a\sqrt{3}$.

- Xét $\triangle EBC$ có: $AD \parallel BC$ và $BC = 2AD \Rightarrow AD$ là đường trung bình của $\triangle EBC$, do đó A là trung điểm của cạnh EB .

- Vì $\begin{cases} AB \cap (SCD) = E \\ BE = 2AE \end{cases} \Rightarrow \boxed{d(B, (SCD)) = 2d(A, (SCD))}$.

- Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$;

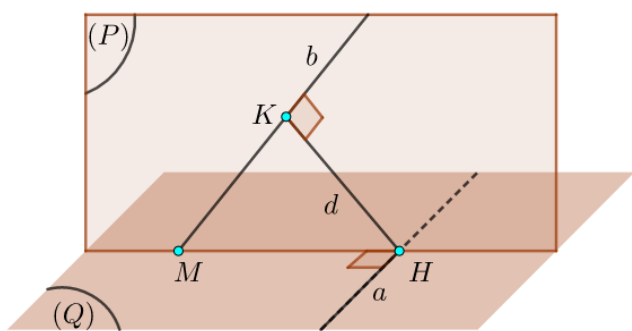


$$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

▪ Vậy $d(B, (SCD)) = 2AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. **Chọn** B

DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc nhau



Đường vuông góc chung: Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau, một đường thẳng d được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b nếu nó thỏa mãn cùng lúc các yếu tố:

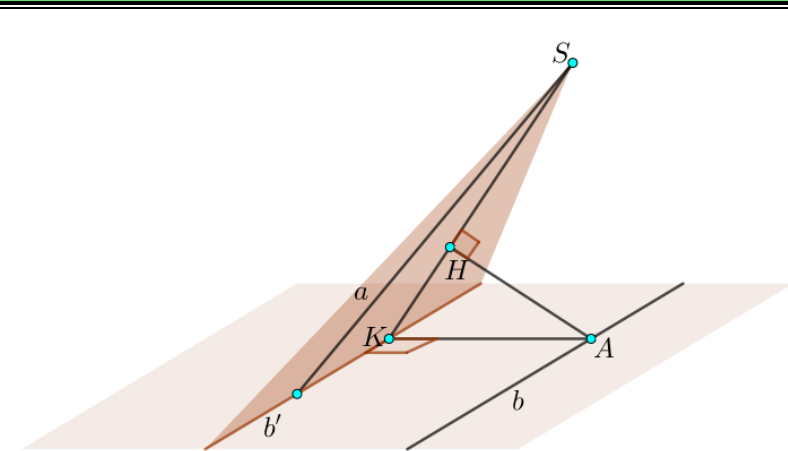
- d vuông góc với cả a và b .
- d cắt cả hai đường thẳng a và b .

Đoạn thẳng nối hai giao điểm của d với a, b được gọi là **đoạn vuông góc chung** của hai đường thẳng a, b ; đoạn này là duy nhất và đường thẳng d cũng là duy nhất.

☞ Xét hai đường thẳng a, b chéo nhau và vuông góc nhau, ta tìm đoạn vuông góc chung như sau:

- Chọn mp(Q) chứa a và (Q) cắt b tại M.
- Trong mp(Q), kẻ MH vuông góc a tại H.
- Xét mp(P) chứa b và MH, ta kẻ HK vuông góc b tại K. Khi đó HK chính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a và b . Vì vậy đoạn HK cũng là **khoảng cách giữa hai đường thẳng** này.

2. Khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau bất kỳ



Xét hai đường thẳng a, b chéo nhau.

Bước 1: Vẽ đường thẳng $b' \parallel b$ và b' cắt a .

Bước 2: Chọn điểm A đặc biệt thuộc b (thường là **chân đường cao** của hình chóp hoặc có thể **liên hệ tỉ số khoảng cách với chân đường cao** hình chóp). **Lý luận khoảng cách:**

$$d(b, a) = d(b, mp(a, b')) = d(A, mp(a, b')).$$

Bước 3: Tính khoảng cách từ A đến $mp(a, b')$ bằng phương pháp từ **Bài toán 3, Bài toán 4**.

VÍ DỤ 16. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

- Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Các tam giác ACD, BCD đều và có trung tuyến AF, BF nên

$$\begin{cases} CD \perp AF \\ CD \perp BF \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABF) \Rightarrow \underbrace{CD \perp EF}_{(1)} \subset (ABF).$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\underbrace{AB \perp EF}_{(2)}$

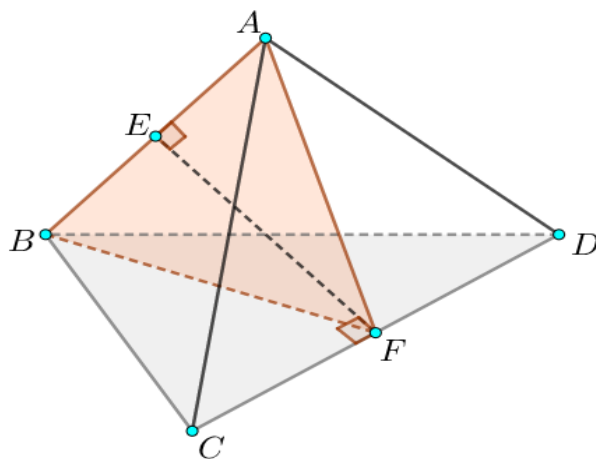
Từ (1) và (2) suy ra EF là đoạn vuông góc chung của

AB, CD . Do đó $d(AB, CD) = EF$.

- Ta có: $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = BF$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a).

Xét tam giác BEF vuông tại E có: $EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn **B**



VÍ DỤ 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. a .

B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $a\sqrt{2}$.

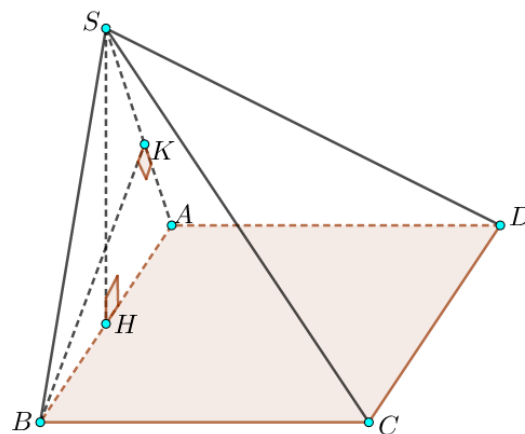
Lời giải:

- Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \Rightarrow BC \perp (SAB) \end{cases}$ (1).

- Trong mặt phẳng (SAB) , dựng $BK \perp SA$ tại K (2).

Từ (1), (2) suy ra: BK là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

- Vậy $d(SA, BC) = BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn** **C**



VÍ DỤ 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$ và đường chéo $BD = 2a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết góc tạo bởi SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tìm khoảng cách giữa hai

đường thẳng BD, SC .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

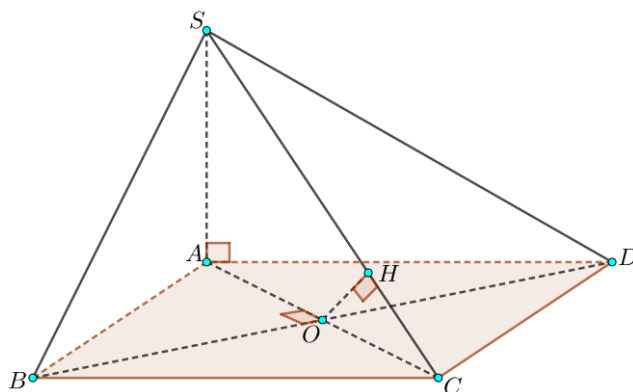
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

- Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$, ta có $OB = a\sqrt{3}$. Xét tam giác OAB vuông tại O có
 $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a \Rightarrow AC = 2a$.
 Góc tạo bởi SC và mặt đáy là $\angle SCA = 45^\circ$, do đó tam giác SAC vuông cân tại A nên $SA = AC = 2a$.
- Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ (1). Trong mp(SAC), kẻ OH vuông góc SC tại H (2).
- Từ (1) và (2) suy ra OH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD, SC . Do đó $d(BD, SC) = OH$.



- Xét hai tam giác đồng dạng CAS, CHO , ta có: $\frac{OC}{SC} = \frac{OH}{SA}$

$$\Rightarrow OH = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{SA \cdot OC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + 4a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn A

VÍ DỤ 19. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a, OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

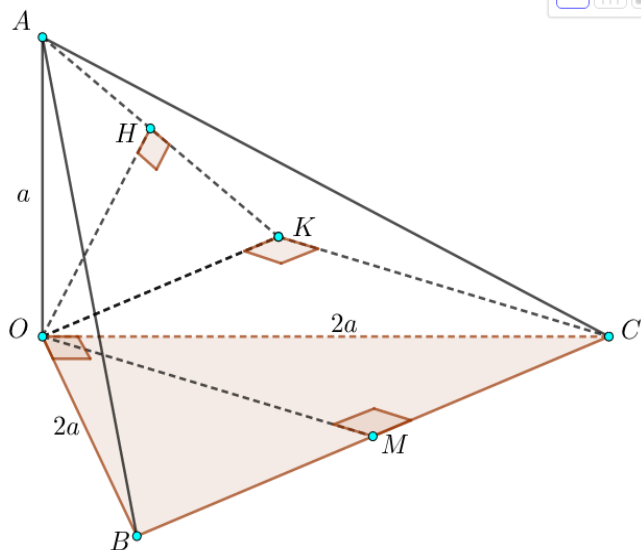
B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

C. a .

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải:

- Ta có được $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$. Tam giác OBC vuông cân tại O nên $\begin{cases} OM \perp BC \\ OM = CM \end{cases}$ (1).
- Vẽ hình bình hành $OMCK$, do (1) nên $OMCK$ là hình vuông (tức là $OK \perp CK$).
- Do $OM \parallel CK \Rightarrow OM \parallel (ACK)$
 $\Rightarrow d(OM, AC) = d(OM, (ACK)) = d(O, (ACK))$.
- Vẽ đường cao OH của tam giác OAK (1). Ta sẽ chứng minh $OH \perp (ACK)$. Thật vậy:



$$\begin{cases} CK \perp OK \\ CK \perp OA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SOK) \Rightarrow CK \perp OH \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (ACK)$, do đó: $d(O, (SCK)) = OH = \frac{OK \cdot OA}{\sqrt{OK^2 + OA^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

(với $OK = MC = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$). **Chọn** D

VÍ DỤ 20. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy bằng $2a$, SA tạo với đáy một góc 30° . Tính theo a khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và CD .

A. $d = \frac{2\sqrt{10}a}{5}$. **B.** $d = \frac{3\sqrt{14}a}{5}$. **C.** $d = \frac{4\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $d = \frac{2\sqrt{15}a}{5}$.

Lời giải:

- Trong mp($ABCD$), gọi $O = AC \cap BD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$. Ta có:

$$OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

- Vì SA tạo với đáy một góc 30° nên $\angle SAO = 30^\circ$.

$$\text{Do đó: } SO = AO \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

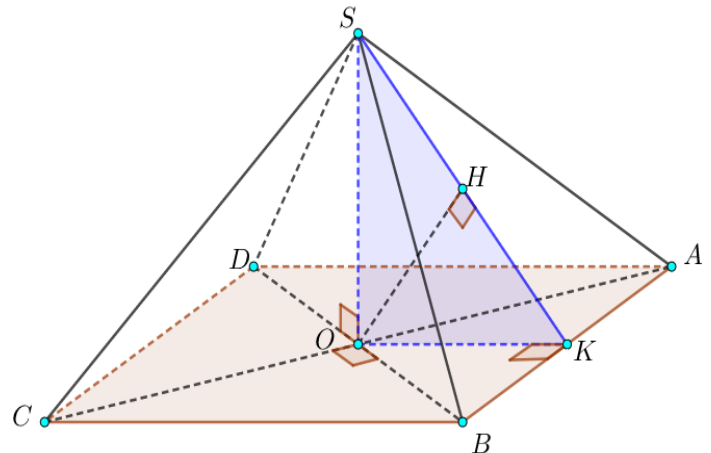
- Ta có $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 2d(O, (SAB))$ (với $CA = 2OA$).

- Vẽ đường cao OK của tam giác OAB và đường cao OH của tam giác SOK .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp OK \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOK) \Rightarrow AB \perp OH. \text{ Vì } \begin{cases} AB \perp OH \\ SK \perp OH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB)$$

$$\Rightarrow d(O, (SAB)) = OH = \frac{SO \cdot OK}{\sqrt{SO^2 + OK^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot a}{\sqrt{\frac{6a^2}{9} + a^2}} = \frac{a\sqrt{10}}{5} \quad (\text{với } OK = \frac{BC}{2} = a).$$

- Vậy $d = 2OH = \frac{2\sqrt{10}a}{5}$. **Chọn** A



VÍ DỤ 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 4a$, $SA \perp (ABCD)$, cạnh SC tạo với đáy một góc 60° . Gọi M là trung điểm của BC , N là điểm nằm trên cạnh AD sao cho $DN = a$. Khoảng cách giữa MN và SB là

A. $\frac{2a\sqrt{95}}{19}$

B. $\frac{8a}{\sqrt{19}}$

C. $\frac{2a\sqrt{285}}{19}$

D. $\frac{a\sqrt{285}}{19}$

Lời giải:

- Ta có: $AC = \sqrt{4a^2 + 16a^2} = 2\sqrt{5}a$. Góc tạo bởi SC và mặt đáy là $\angle SCA = 60^\circ$, do đó $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{5}a \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{15}a$.

- Gọi E là điểm thuộc cạnh AD sao cho $EN = BM = 2a$, $AE = a$. Do đó EBMN là hình bình hành.

Ta có $MN \parallel BE \Rightarrow MN \parallel (SBE)$

$$\Rightarrow d(MN, SB) = d(MN, (SBE)) = d(N, (SBE))$$

$$= d(N, (SBE)) = \boxed{2d(A, (SBE)) = 2d} \text{ với}$$

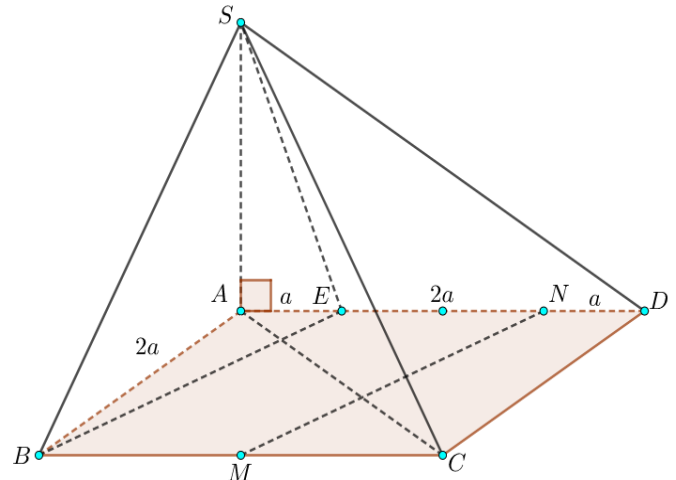
$$d(A, (SBE)) = d.$$

- Vì tứ diện SABE có ba cạnh SA, AB, AE đôi một

$$\text{vuông góc nên } \frac{1}{d^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2}$$

$$= \frac{1}{60a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{19}{15a^2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{285}}{19}a.$$

- Vậy $d(MN, SB) = 2d = \frac{2\sqrt{285}}{19}a$. **Chọn C**



VÍ DỤ 22. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AB, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° . Gọi G là trọng tâm $\triangle SBC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$

B. $\frac{a\sqrt{14}}{8}$

C. $\frac{a\sqrt{77}}{22}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

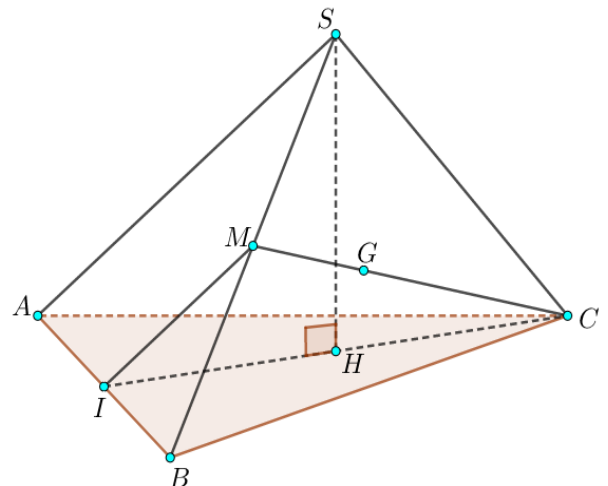
Lời giải:

- Gọi M là trung điểm SB, ta có IM là đường trung bình tam giác SAB nên $SA \parallel MI$, do đó $SA \parallel (CMI) \supset CG$ suy ra $d(SA, CG) = d(SA, (CMI)) = d(A, (CMI)) = d(B, (CMI))$ (do $IA = IB$).

- Ta có: $\boxed{CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{4},$

$$AH = \sqrt{IA^2 + IH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

- Góc tạo bởi SA và mặt đáy là



$$SAH = 45^\circ \Rightarrow SH = AH \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

$$\blacksquare V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{21}}{48}.$$

$$\blacksquare \text{Để thấy } \Delta SHA = \Delta SHB \Rightarrow SB = SA = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{14}}{4} \text{ (cạnh huyền của tam giác vuông cân).}$$

$$\blacksquare IM \text{ là đường trung bình } \Delta SAB \Rightarrow IM = \frac{1}{2} SA = \frac{a\sqrt{14}}{8}.$$

$$\blacksquare CH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{16} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\blacksquare \text{Tam giác } SBC \text{ có trung tuyến } CM = \sqrt{\frac{2SC^2 + 2BC^2 - SB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{38}}{8}.$$

$$\blacksquare \text{Tam giác } ICM \text{ có ba cạnh } CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CM = \frac{a\sqrt{38}}{8}, IM = \frac{a\sqrt{14}}{8} \Rightarrow \underbrace{S_{\Delta ICM} = \frac{\sqrt{33}}{32} a^2}_{\text{Công thức Hê-Rông}}.$$

$$\blacksquare \text{Xét tỉ số thể tích: } \frac{V_{B.CIM}}{V_{B.CAS}} = \frac{BI}{BA} \cdot \frac{BM}{BS} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{B.CIM} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3\sqrt{21}}{48} = \frac{a^3\sqrt{21}}{192}.$$

$$\text{Do đó } d(SA, CG) = d(B, (CMI)) = \frac{3V_{B.CIM}}{S_{\Delta CIM}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{21}}{192}}{\frac{\sqrt{33}}{32} a^2} = \frac{a\sqrt{77}}{22}. \quad \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{C}$$

DẠNG 3. CÁC KHOẢNG CÁCH ĐỐI VỚI LĂNG TRỤ

☞ PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

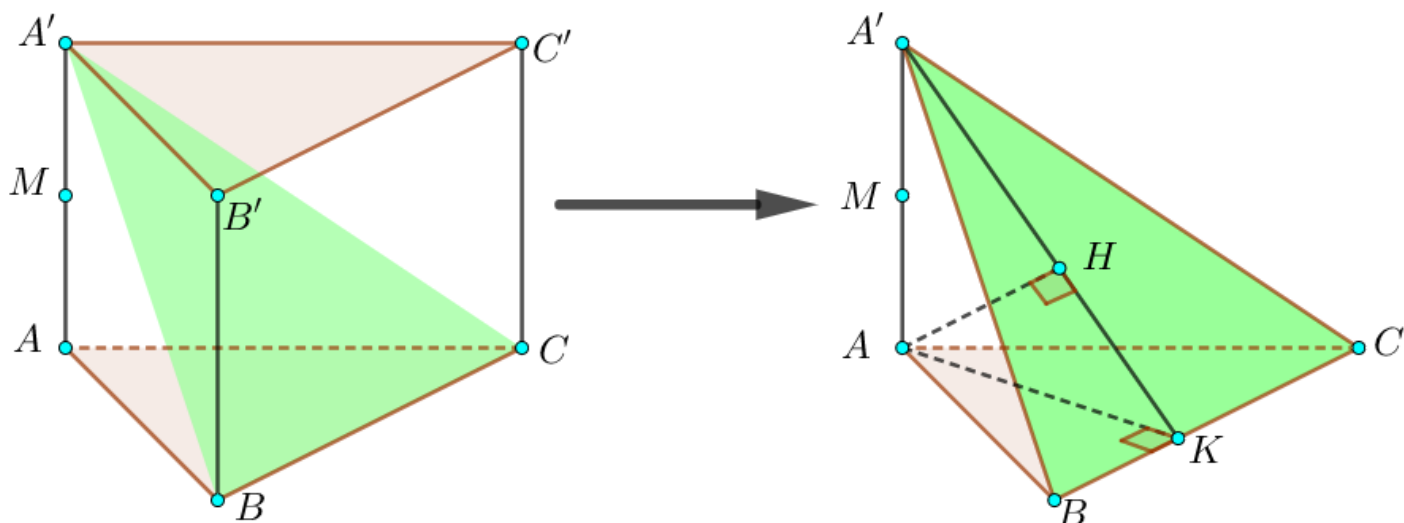
☺ **Cách giải 1:** Nếu các **quan hệ vuông góc** trong lăng trụ là **đễ nhìn thấy** thì ta lý luận và tìm khoảng cách bình thường.

☺ **Cách giải 2:** Nếu việc xác định các quan hệ vuông góc trong lăng trụ trở nên khó khăn, ta làm như sau:

- **Cắt một hình chóp (tứ diện) có chứa điểm và mặt phẳng (hoặc hai đường chéo nhau)** có liên quan đến khoảng cách cần tìm.
- Sử dụng các phương pháp đã học từ **Bài toán 1 đến Bài toán 5**.

☞ **Minh họa cho Phương pháp Cắt hình:**

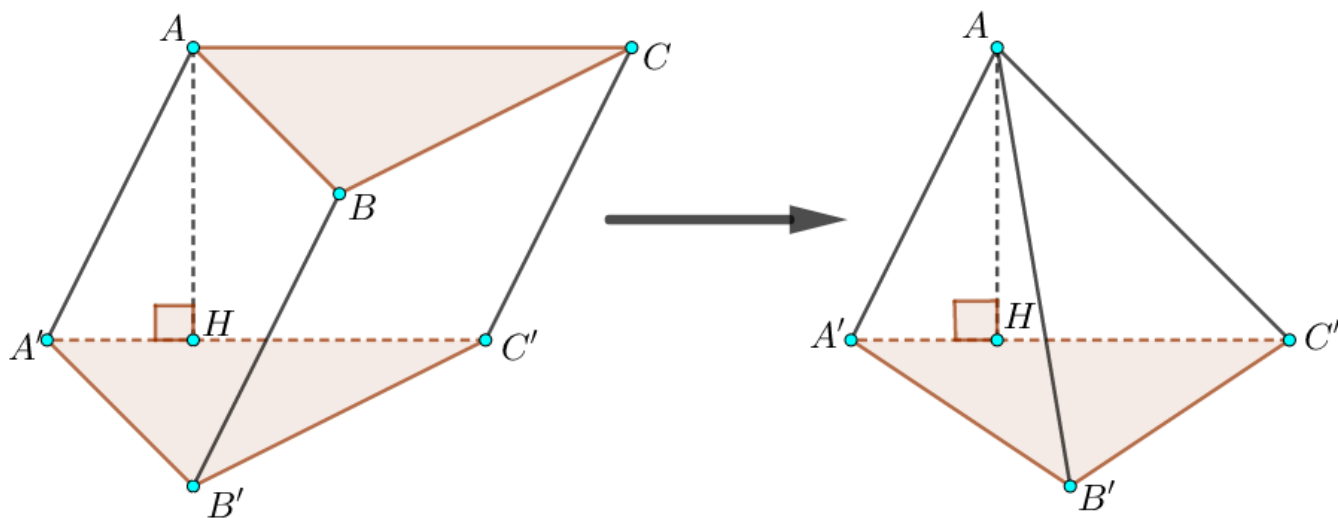
Minh họa số 1:



Trong **Minh họa số 1**, sau khi cắt hình từ lăng trụ đứng ban đầu, ta được một hình chóp quen thuộc có cạnh bên vuông góc với đáy, khi ấy các bài toán khoảng cách sẽ trở nên dễ chịu hơn.

$$d(M, (A'BC)) = \frac{1}{2} d(A, (A'BC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{AA' \cdot AK}{\sqrt{AA'^2 + AK^2}}$$

Minh họa số 2:



Trong **Minh họa số 2**, để tìm khoảng cách hai đường chéo nhau AA' , $B'C'$, ta cắt từ lăng trụ ban đầu ra một hình chóp quen thuộc là $A.A'B'C'$. Tới đây, ta được bài toán khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau trong hình chóp (Xem **Bài toán 5**).

VÍ DỤ 23. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC . Khoảng cách từ A đến (MNP) bằng

A. $\frac{17}{65}$.

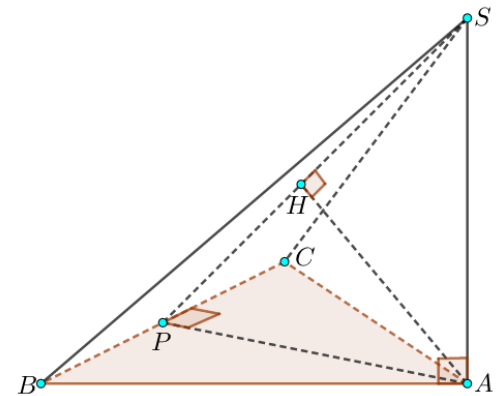
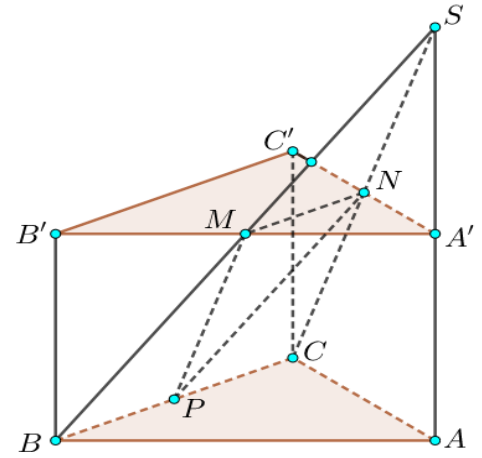
B. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{12}{5}$.

Lời giải:

- Nhận thấy $(MNP) \equiv (BCNM)$. Trong mp($ACC'A'$), kẻ CN cắt AA' tại S . Theo tính chất ba mặt phẳng cắt nhau (gồm $(BCNM)$, $(ABBA')$, $(ACC'A')$) thì ta có ba giao tuyến của chúng đồng quy tại điểm S , tức là BM đi qua S .
- Tam giác SAC có
 $A'N \parallel AC \Rightarrow \frac{SA'}{SA} = \frac{A'N}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow SA' = \frac{1}{2} SA \Rightarrow SA = 2AA' = 4$.
- Ta cắt từ lăng trụ đã cho ra được hình chóp $S.ABC$ quen thuộc.
- Khi đó: $d(A, (MNP)) = d(A, (BCNM)) = d(A, (SBC))$.
- Vẽ đường cao AH của tam giác SAP (1), ta sẽ chứng minh $AH \perp (SBC)$.
- Thật vậy: $\begin{cases} BC \perp AP \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAP) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).
- Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$
 $= \frac{SA \cdot AP}{\sqrt{SA^2 + AP^2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$. (Với $AP = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$,
đường cao của tam giác đều). **Chọn $\rightarrow$ D**



VÍ DỤ 24. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \angle ACB = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a .

A. $a \frac{\sqrt{3}}{7}$.

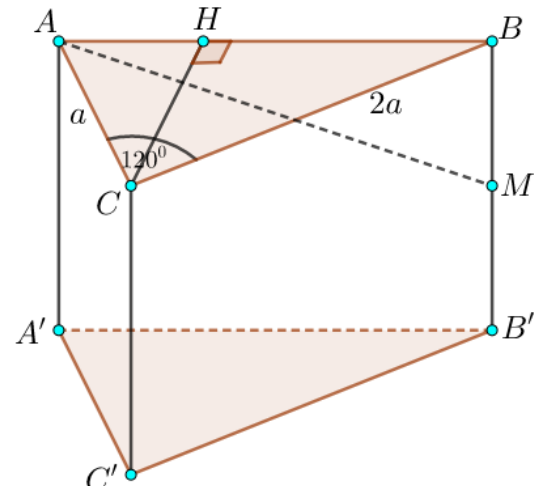
B. $a\sqrt{3}$.

C. $a \frac{\sqrt{7}}{7}$.

D. $a \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Lời giải:

- Ta có: $CC' \parallel BB' \Rightarrow CC' \parallel (ABB'A')$ nên
 $d(CC', AM) = d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A'))$.
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB .
Ta có: $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên
 $CH \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = CH$.
- Xét tam giác ABC có
 $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$.

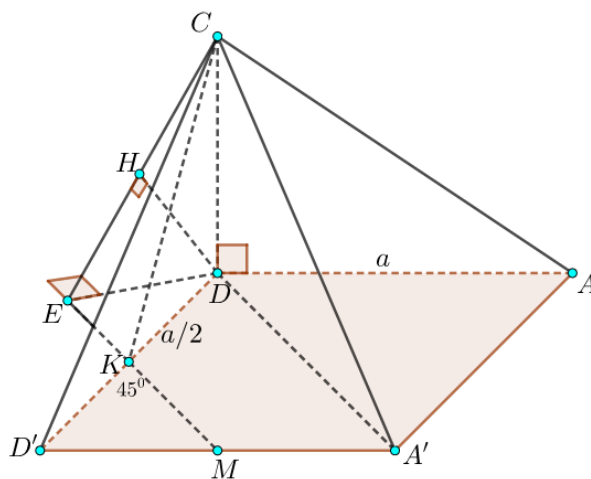
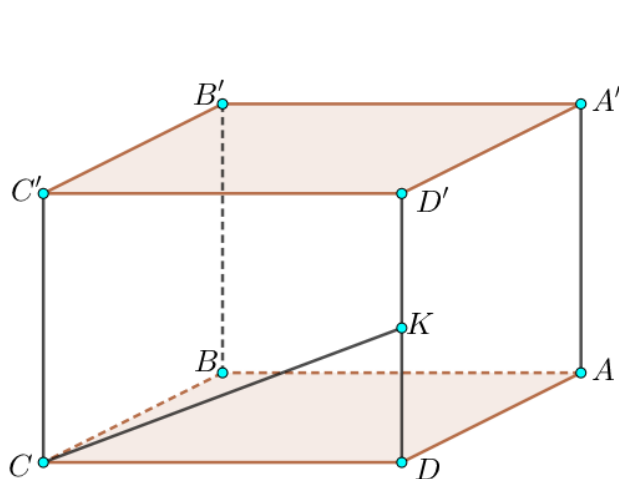


- $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA.CB.\sin C = \frac{1}{2} AB.CH \Rightarrow CH = \frac{CA.CB.\sin 120^\circ}{AB} = \frac{a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{7}} = a\sqrt{\frac{3}{7}}.$
- Vậy $d(AM, CC') = CH = a\sqrt{\frac{3}{7}}.$ **Chọn $\rightarrow$ D**

VÍ DỤ 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK , $A'D$.

A. a .B. $\frac{3a}{8}$.C. $\frac{2a}{5}$.D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải:



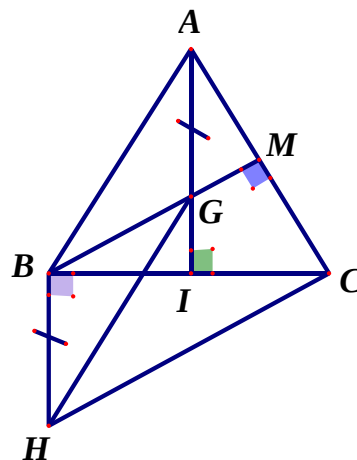
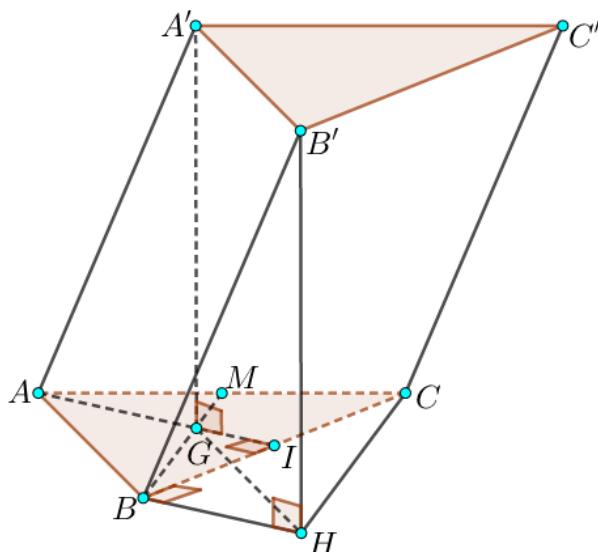
- Từ hình lập phương đã cho, ta chọn ra hình chóp $C.DAA'D'$ với đường cao CD (hình vẽ).
- Gọi M là trung điểm $A'D'$, ta có $KM \parallel A'D$ (tính chất đường trung bình) suy ra $A'D \parallel (CKM)$.
- Do đó: $d(A'D, CK) = d(A'D, (CKM)) = \boxed{d(D, (CKM))}$.
- Trong mặt phẳng đáy, kẻ DE vuông góc KM tại E , kẻ tiếp đường cao DH trong tam giác CDE (1). Ta có $\begin{cases} KM \perp DE \\ KM \perp CD \end{cases} \Rightarrow KM \perp (CDE) \Rightarrow KM \perp DH$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $DH \perp (CEM) \equiv (CKM)$.
- Vậy $\boxed{d(D, (CKM)) = DH}$.
- Vì $KM \parallel A'D \Rightarrow MKD' = 45^\circ = DKE$, suy ra $\triangle DKE$ vuông cân tại E , do đó $DE = \frac{DK}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.
- Tam giác vuông SDE có đường cao $DH = \frac{CD.DE}{\sqrt{CD^2 + DE^2}} = \frac{a.\frac{a}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a}{3}$.

Vậy $d(D, (CKM)) = DH = \frac{a}{3}$. Chọn $\rightarrow$ **D**

VÍ DỤ 26. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng 4. Hình chiếu vuông góc của A' trên $mp(ABC)$ trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Gọi M là trung điểm cạnh AC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải:



- Gọi I là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác đều $ABC \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ta có $A'G \perp (ABC)$. Vẽ hình bình hành $A'B'HG$, ta có $B'H \parallel A'G \Rightarrow B'H \perp (ABC)$.

- Ta có: $AI = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AG = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

- Do $ABHG$ cũng là hình bình hành nên $\begin{cases} BH \parallel AG \\ BH = AG = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$, mà $AG \perp BC \Rightarrow BH \perp BC$.

- Xét tam giác BHC vuông tại B , ta có: $\tan BCH = \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BCH = 30^\circ$.

Do đó: $ACH = ACB + BCH = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ hay $AC \perp HC$ (1). Mặt khác $AC \perp B'H$ (2). Từ (1) và (2) ta có: $AC \perp (B'CH)$, suy ra $\boxed{MC \perp B'C}$ (3)

Ta lại có $\boxed{MC \perp BM}$ (4). Từ (3), (4) $\Rightarrow MC$ là đoạn vuông góc chung của BM và $B'C$.

- Do đó $d(BM, B'C) = MC = 2$. Chọn $\rightarrow$ **A**

DẠNG 4. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN LIÊN QUAN KHOẢNG CÁCH

VÍ DỤ 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích của khối chóp bằng $\frac{4a^3}{3}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải:

- Gọi H là trung điểm của AD , suy ra $SH \perp AD$.

- Ta có:
$$\begin{cases} SH \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

- Vì $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} \Rightarrow SH = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot \frac{4a^3}{3}}{(2a)^2} = \boxed{a}$.

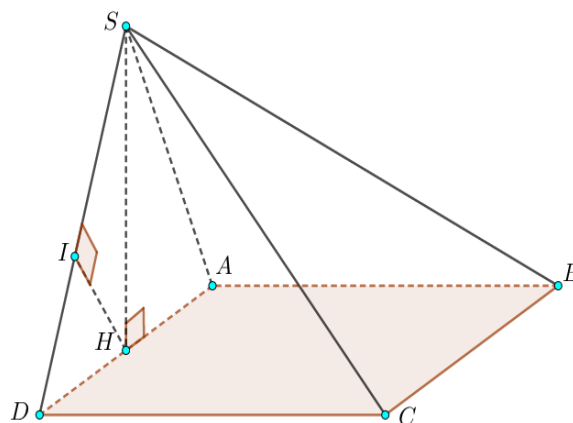
- Vì $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \boxed{2d(H, (SCD))}$.

- Vẽ đường cao HI của tam giác SHD (1). Ta có
$$\begin{cases} CD \perp SH \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp HI \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $HI \perp (SCD)$.

$$\text{Do đó } d(B, (SCD)) = 2d(H, (SCD)) = 2HI = \frac{2SH \cdot HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{2 \cdot a \cdot a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = a\sqrt{2}.$$

Chọn $\rightarrow$ D



VÍ DỤ 28. Cho hình chóp tứ giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{4a}{7}$.

B. $\frac{3a\sqrt{3}}{13}$.

C. $\frac{6a}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

- Hình chóp đã cho là hình chóp tam giác đều. Gọi H là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $SH \perp (ABC)$.
- Gọi E là trung điểm BC , F là hình chiếu của E trên cạnh SA .

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp EF$. Vậy

EF là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

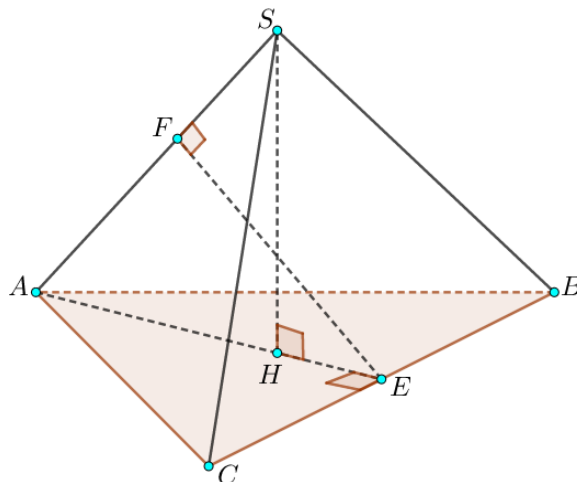
Do vậy $EF = d(SA, BC)$.

▪ Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} \Rightarrow SH = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \boxed{4a};$$

$$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \boxed{\frac{7\sqrt{3}a}{3}}.$$

▪ Xét tam giác SAE có: $S_{\Delta SAE} = \frac{1}{2} SH \cdot AE = \frac{1}{2} EF \cdot SA \Rightarrow EF = \frac{SH \cdot AE}{SA} = \frac{4a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{7\sqrt{3}a}{3}} = \boxed{\frac{6a}{7}}$. **Chọn $\rightarrow$ C**



VÍ DỤ 29. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 6, $A'BC'$ là tam giác đều có cạnh bằng 2. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BC')$ bằng

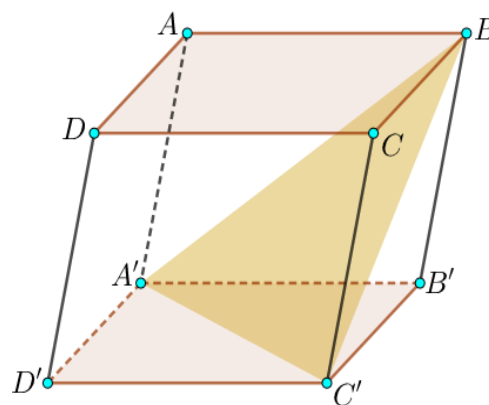
- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải:

- Gọi $h = d(B, (A'B'C'D'))$; khi đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = h \cdot S_{A'B'C'D'} = 6$.
- Xét $V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{6} \cdot 6 = \boxed{1}$.

Ta có: $S_{\Delta A'BC'} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{\sqrt{3}}$.

- Mặt khác: $V_{B.A'B'C'} = V_{B'.A'BC'} = \frac{1}{3} \cdot d(B', (A'BC')) \cdot S_{\Delta A'BC'}$
- $$\Rightarrow d(B', (A'BC')) = \frac{3V_{B'.A'BC'}}{S_{\Delta A'BC'}} = \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \quad \text{Chọn } \rightarrow \text{A}$$



VÍ DỤ 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , $BA = BC = a\sqrt{3}$, góc $SAB = SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{\sqrt{6}}{2} a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3$. C. $V = \sqrt{6} a^3$. D. $V = \frac{3\sqrt{2}}{2} a^3$.

Lời giải:

- Với tam giác ABC vuông cân, ta chọn điểm D sao cho $ABCD$ là hình vuông.

- Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SD$ (1). Tương

tự như vậy, ta có $BC \perp SD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (ABCD)$.

- Ta có:

$$AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(D, (SBC)).$$

- Vẽ đường cao DH của tam giác SDC (1), ta có:

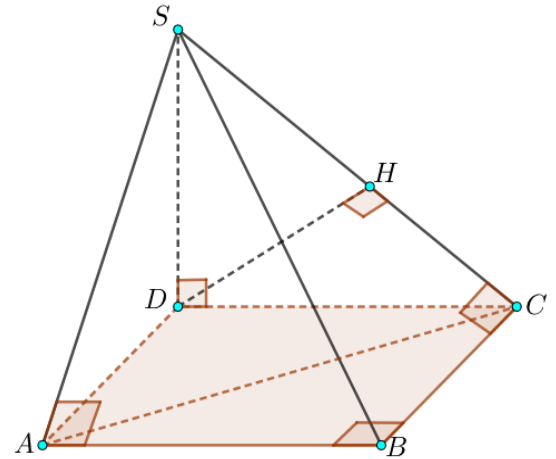
$$\begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp DH$$
 (2).

Từ (1) và (2) suy ra $DH \perp (SBC)$. Do đó $d(D, (SBC)) = DH = a\sqrt{2}$.

- Xét $\triangle SCD$ vuông tại D có:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DC^2} \Rightarrow \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} \Rightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{6a^2} \Rightarrow SD = a\sqrt{6}.$$

- $V_{SABC} = \frac{1}{3} SD \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} a\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} (a\sqrt{3})^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **Chọn $\rightarrow$ A**



VÍ DỤ 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với BC là đáy nhỏ. Biết rằng tam giác SAB đều có cạnh là $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{5}$ và khoảng cách từ D tới mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{2}$ (với H là trung điểm của AB). Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{4a^3}{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

- Gọi E là hình chiếu của D trên CH , ta sẵn có $DE \perp SH$, do vậy $DE \perp (SCH)$

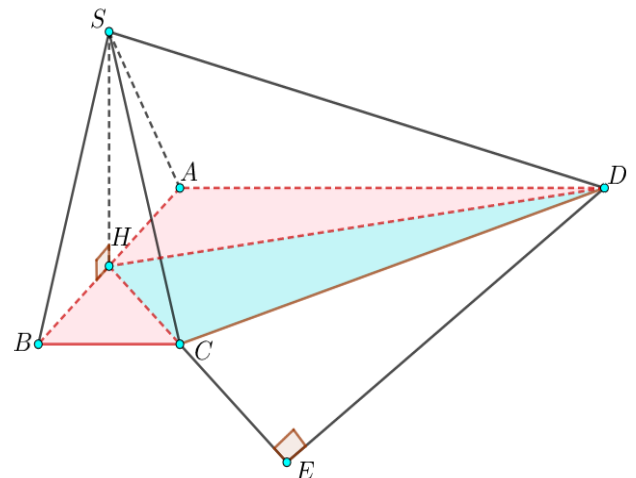
$$\Rightarrow DE = d(D, (SCH)) = 2a\sqrt{2}.$$

- Vì SH là đường cao của tam giác đều SAB nên

$$SH = a\sqrt{3} \text{ và}$$

$$CH = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{5a^2 - 3a^2} = a\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{CH^2 - BH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a.$$



- Ta có: $S_{\Delta DCH} = \frac{1}{2} DE \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a^2$.
- Đặt $AD = x > 0$. Ta có: $S_{ABCD} = \frac{(a+x) \cdot 2a}{2} = ax + a^2$ (1)
- Mặt khác $S_{ABCD} = S_{\Delta BHC} + S_{\Delta CHD} + S_{\Delta AHD} = \frac{1}{2}a^2 + 2a^2 + \frac{1}{2}ax = \frac{5}{2}a^2 + \frac{1}{2}ax$ (2)
- Từ (1) và (2): $\frac{5}{2}a^2 + \frac{1}{2}ax = ax + a^2 \Leftrightarrow x = 3a$. Do đó: $S_{ABCD} = a \cdot 3a + a^2 = 4a^2$.
- Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D**

VÍ DỤ 32. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' bằng 5, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 3 và 4, hình chiếu vuông góc của A lên $mp(A'B'C')$ là trung điểm H của $B'C'$ và $A'H = 5$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

- A. $15\sqrt{3}$. B. $20\sqrt{3}$. C. $10\sqrt{3}$. D. $5\sqrt{3}$.

Lời giải:

- Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $BB', CC' \Rightarrow AE = 3, AF = 4$.

- Ta có:

$$\begin{cases} BB' \perp AE \\ BB' \perp AF \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AEF) \Rightarrow BB' \perp EF$$

$$\Rightarrow EF = d(C, BB') = 5.$$

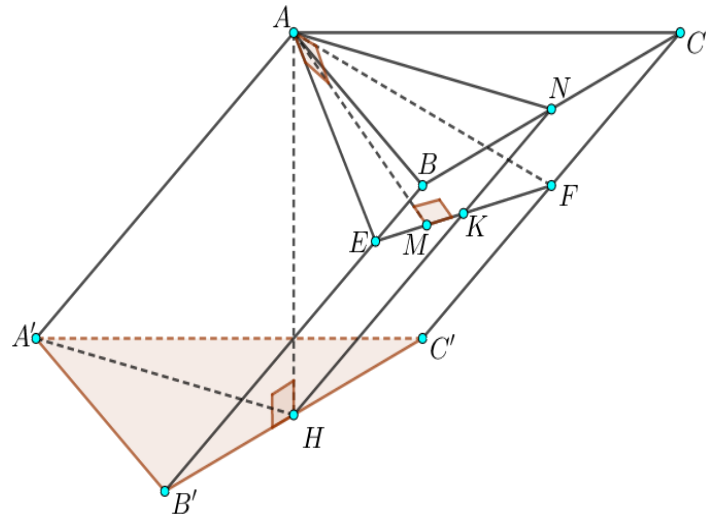
Tam giác AEF có độ dài ba cạnh là 3, 4, 5 nên vuông tại A .

- Gọi N là trung điểm của BC , gọi $K = NH \cap EF \Rightarrow K$ là trung điểm của $EF \Rightarrow AK = \frac{1}{2}EF = \frac{5}{2}$.

Ta có: $NH \parallel BB' \Rightarrow NH \perp (AEF) \Rightarrow NH \perp AK$

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{25}{4}} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{25} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

- Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên $EF \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$. Ta có: $AM = \frac{AE \cdot AF}{EF} = \frac{12}{5}$.
- $AA'^2 = AH^2 + A'H^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow AA' = \frac{10\sqrt{3}}{3} = BB'$.



$$S_{BB'C'C} = d(C, BB') \cdot BB' = \frac{50\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2} V_{A.BCC'B'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot AM \cdot S_{BCC'B'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{50\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}. \quad \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{B}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG TRONG HÌNH CHÓP

Bài tập Mức độ 1

- Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SD = 2a$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.
- A. $a\sqrt{5}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $3a$. D. $a\sqrt{3}$.
- Câu 2.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đáy đều bằng a và các cạnh bên đều bằng $2a$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.
- A. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{7a}{2}$.
- Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?
- A. IB . B. IC . C. IA . D. IO .
- Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SD = 2a$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.
- A. $a\sqrt{5}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $3a$. D. $a\sqrt{3}$.
- Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là
- A. Độ dài đoạn AC .

B. Độ dài đoạn AB .

C. Độ dài đoạn AH trong đó H là hình chiếu vuông góc của A trên SB .

D. Độ dài đoạn AM trong đó M là trung điểm của SC .

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt đáy. Biết $SB = a\sqrt{10}$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $3a$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{19}$. D. $\frac{2a\sqrt{38}}{19}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông cân tại A , $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$, $AB = \sqrt{2}a$. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBC) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = AB = 2a$, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. a . C. $2a$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a .

- A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$. D. $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 30° . Gọi h là khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $h = \frac{a}{2}$. B. $h = 3a$. C. $h = a\sqrt{3}$. D. $h = a$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = OB = OC = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ O đến $mp(ABC)$ là.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $2SA = AC = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{19}$. D. $\frac{2a\sqrt{38}}{19}$.

Câu 16. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O , $SO = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\sqrt{3}a$. D. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SB = 3a$, $AB = 4a$, $BC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{12\sqrt{61}a}{61}$. B. $\frac{3\sqrt{14}a}{14}$. C. $\frac{4a}{5}$. D. $\frac{12\sqrt{29}a}{29}$.

Bài tập Mức độ 2

Câu 19. Cho tứ diện đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $DM = 2MA$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (BCD) .

A. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{4a\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 20. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a , gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt đáy. Biết $SB = a\sqrt{10}$. Gọi I là trung điểm của SD . Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $3a$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng $4a$; Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy trùng với trung điểm H của OA ; góc giữa (SCD) và đáy là 45° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $\sqrt{2}a$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a\sqrt{3}$; gọi M là trung điểm của AC . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
 C. $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. D. $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi M là trung điểm của SD . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{4}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=1$. Gọi M là trung điểm SD . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. 1. B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . $ABC = 30^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .

- A. $h = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$. B. $h = \frac{a\sqrt{39}}{52}$. C. $h = \frac{a\sqrt{39}}{13}$. D. $h = \frac{a\sqrt{39}}{26}$.

- Câu 28.** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $2a$, $ABC = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ trùng với trung điểm I của BO , $SI = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng
- A. $\frac{3a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{4a\sqrt{3}}{5}$.
- Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông có cạnh là $\sqrt{2}$ đơn vị. Tam giác SAD cân tại S , mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)
- A. $h = \frac{4}{3}$. B. $h = \frac{2}{3}$. C. $h = \frac{8}{3}$. D. $h = \frac{3}{4}$.
- Câu 30.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Thể tích khối chóp bằng $4a^3$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mặt bên của hình chóp.
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{3a\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{10}$.
- Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB = ASC = CSB = 60^\circ$, $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$. Tính khoảng cách h từ B đến mp(SAC).
- A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $h = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. C. $h = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$. D. $h = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.
- Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích của khối chóp bằng $\frac{4a^3}{3}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{2}$.
- Câu 33.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S , mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4a^3}{3}$, điểm N là trung điểm cạnh SB . Khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (SCD) bằng
- A. $\frac{2}{3}a$. B. $\frac{4}{3}a$. C. $\frac{8}{3}a$. D. $\frac{3}{4}a$.

II – KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU TRONG HÌNH CHÓP
Bài tập Mức độ 1, 2

- Câu 34.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và CD .
- A. $d = 2a$. B. $d = a\sqrt{3}$. C. $d = a\sqrt{2}$. D. $d = a$.
- Câu 35.** Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình vuông, $MN = 3a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$, biết SM vuông góc với đáy, $SM = 6a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng NP và SQ bằng
- A. $6a$. B. $3a$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $3a\sqrt{2}$.
- Câu 36.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là:
- A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{3}$.
- Câu 37.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3 cm. Gọi M là trung điểm CD . Khoảng cách giữa AC và BM là
- A. $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ cm. B. $\frac{3\sqrt{22}}{11}$ cm. C. $\frac{3\sqrt{2}}{11}$ cm. D. $\frac{\sqrt{2}}{11}$ cm.
- Câu 38.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 39.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $a\sqrt{6}$.
- Câu 40.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng
- A. a . B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.
- Câu 41.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .
- A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{14}$. B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $d = a$.

- Câu 42.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $2a^3$ và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Biết diện tích tam giác SAB bằng a^2 . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .
- A. a . B. $\frac{3a}{2}$. C. $3a$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 43.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB .
- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại A , $AB = a\sqrt{2}$, tam giác SBC đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa AC và SB .
- A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. B. $\frac{2a\sqrt{21}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.
- Câu 45.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy bằng $2a$, SA tạo với đáy một góc 30° . Tính theo a khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và CD .
- A. $d = \frac{2\sqrt{10}a}{5}$. B. $d = \frac{3\sqrt{14}a}{5}$. C. $d = \frac{4\sqrt{5}a}{5}$. D. $d = \frac{2\sqrt{15}a}{5}$.
- Câu 46.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OC = 2a, OA = OB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC .
- A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 47.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 48.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a . Mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S , cạnh bên SC hợp với mặt đáy (ABC) một góc 45° , mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABC) và I là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.
- Câu 49.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng
- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.
- Câu 50.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$ (như hình vẽ). Tính khoảng cách giữa SB và AC .

A. $d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. B. $d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{78}}{3}$.
 C. $d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{87}}{13}$ D. $d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{78}}{13}$.

Câu 52. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$; Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

A. $\frac{a\sqrt{14}}{2\sqrt{15}}$. B. $\frac{2a\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$.

Bài tập Mức độ 3

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là 45° . Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. $\frac{4\sqrt{210}}{45}$. B. $\frac{\sqrt{210}}{5}$. C. $\frac{4\sqrt{210}}{15}$. D. $\frac{2\sqrt{210}}{15}$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh a , góc $BAC = 60^\circ$, tam giác SAB cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc 30° . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và AD .

A. $d = \frac{\sqrt{21}}{14}a$. B. $d = \frac{\sqrt{3}}{5}a$. C. $d = \frac{2\sqrt{3}}{5}a$. D. $d = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Câu 55. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a, OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AB , hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° (tham khảo hình vẽ bên). Gọi G là trọng tâm $\triangle SBC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt{77}}{22}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=13, BC=14, CA=15$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HA=2HC$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Biết $SH=12$ tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và HG .

A. $\frac{336\sqrt{1717}}{1717}$. B. $\frac{336}{1717}$. C. $\frac{84\sqrt{1717}}{1717}$. D. $\frac{336\sqrt{17}}{1717}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $AB=BD=2$, hai đường chéo cắt nhau tại O . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của BO . Gọi G là trọng tâm tam giác ADC . Biết SC tạo với mặt phẳng đáy góc 45° , tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG .

A. $\frac{2\sqrt{2373}}{113}$. B. $\frac{4\sqrt{2373}}{113}$. C. $\frac{6\sqrt{2373}}{113}$. D. $\frac{\sqrt{2373}}{113}$.

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $AB=3a, AD=4a$. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh BC , O là giao điểm của AC và BD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SO bằng

A. $\frac{15a\sqrt{22}}{22}$. B. $\frac{15a\sqrt{22}}{44}$. C. $\frac{15a\sqrt{22}}{77}$. D. $\frac{15a\sqrt{22}}{88}$.

Câu 60. Cho tứ diện $SABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=a, SB=2a, SC=3a$. Gọi I là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AI theo a .

A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa đường thẳng SE và đường thẳng BC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=a, AD=2a$. Mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD . Tính khoảng cách giữa AH và SC biết $AH=a$.

A. $\frac{\sqrt{19}}{19}a$. B. $\frac{2\sqrt{19}a}{19}$. C. $\frac{\sqrt{73}}{73}a$. D. $\frac{2\sqrt{73}}{73}a$.

Câu 63. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, chiều cao bằng $4a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và NP .

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $SAB = 30^\circ$, $SBC = 60^\circ$ và $SCA = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD .

A. $d = 4\sqrt{11}$. B. $d = 2\sqrt{22}$. C. $d = \frac{\sqrt{22}}{2}$. D. $d = \sqrt{22}$.

Câu 65. Cho hình chóp đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $ABCD$ là điểm H trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của đoạn AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{45}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{25}$.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , I là trung điểm của AB , hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm H của CI , góc giữa SA và đáy là 45° . Khoảng cách giữa SA và CI bằng:

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{77}}{22}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Câu 67. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $AB = 1$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và NP .

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{20}$. C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

III – KHOẢNG CÁCH TRONG LĂNG TRỤ

Bài tập Mức độ 1, 2

Câu 68. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khoảng cách giữa AD và BB_1 là độ dài đoạn thẳng?

A. AC_1 . B. BD . C. AB_1 . D. DC .

Câu 69. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD' .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. a . C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

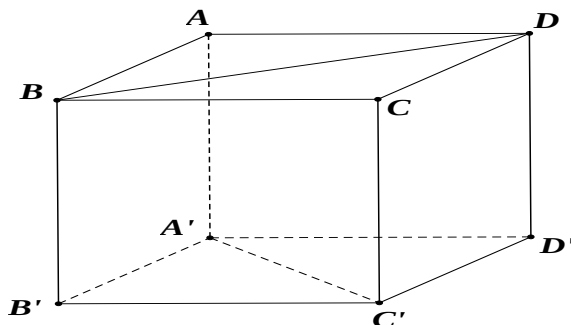
Câu 70. Cho hình hộp chữ nhật $EFGH.E'F'G'H'$ có $EF = 3a$, $EH = 4a$, $EE' = 12a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng EF' và GH' bằng

- A. $12a$. B. $3a$. C. $2a$. D. $4a$.

Câu 71. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD' .

- A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. B. a . C. $\sqrt{2}a$. D. $2a$.

Câu 72. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

- A. a . B. $\sqrt{2}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $\sqrt{3}a$.

Câu 73. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 74. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AA' bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 75. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

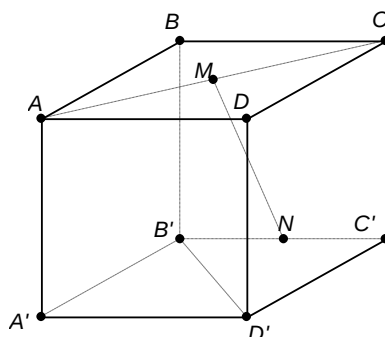
Câu 76. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là ?

- A. $d(AA', BC) = \sqrt{2}a$. B. $d(AA', BC) = 2a$.
C. $d(AA', BC) = a$. D. $d(AA', BC) = \frac{1}{2}a$.

- Câu 77.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \angle ACB = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a .
- A. $a\frac{\sqrt{3}}{7}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $a\frac{\sqrt{7}}{7}$. D. $a\sqrt{\frac{3}{7}}$.
- Câu 78.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông ở A , $AB = 2a$, $AC = a$, $AA' = 4a$. M là điểm thuộc cạnh AA' sao cho $MA' = 3MA$. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau BC và $C'M$.
- A. $d = \frac{6a}{7}$. B. $d = \frac{4a}{7}$. C. $d = \frac{4a}{3}$. D. $d = \frac{8a}{7}$.
- Câu 79.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. C. $a\sqrt{5}$. D. $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$.
- Câu 80.** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 6, $A'BC'$ là tam giác đều có cạnh bằng 2. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BC')$ bằng
- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Bài tập Mức độ 3

- Câu 81.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng a^3 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', CC'$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMN) biết rằng BMN là tam giác đều cạnh $2a$.
- A. $\frac{a}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 82.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\angle BAC = 120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của CC_1, BB_1 . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (A_1BK) bằng
- A. $a\sqrt{15}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.
- Câu 83.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$ (tham khảo hình vẽ bên)



Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ B. $3a$ C. $\frac{a}{3}$ D. $a\sqrt{5}$

Câu 84. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng 4. Hình chiếu vuông góc của A' trên $mp(ABC)$ trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm cạnh AC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 85. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD' . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD .

- A. $\sqrt{3}a$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM:

1D	2A	3D	4D	5C	6B	7B	8B	9D	10D
11D	12C	13B	14C	15C	16C	17B	18A	19C	20C
21B	22A	23C	24B	25B	26B	27C	28D	29A	30A
31B	32D	33A	34D	35B	36C	37B	38B	39C	40C
41C	42B	43B	44D	45A	46A	47D	48D	49B	50B

51D	52D	53B	54D	55D	56C	57A	58B	59D	60D
61D	62A	63A	64D	65A	66C	67B	68D	69B	70D
71B	72A	73A	74D	75B	76B	77D	78D	79D	80A
81C	82B	83C	84A	85D					