- HUỲNH THANH PHONG -

TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ HAY VÀ KHÓ

SÓC TRĂNG, 28 - 03 - 2025

LỜI NÓI ĐẦU

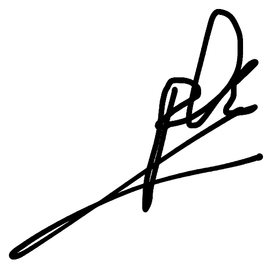
Một trong các chuyên đề quan trọng nhất trong các kì thi HSG, tuyển sinh hay là quá trình học trên lớp thì nó cũng chiếm một vai trò quan trong, đó chính là chuyên đề ***"Phương trình vô tỉ"***. Không quá dễ nhưng cũng không quá khó, cần có sự tỉ mĩ và khéo léo trong các bước giải là cực kì cần thiết, mỗi bài phương trình vô tỉ mang trong đó một ý tưởng khác nhau nhằm rèn luyện tính tư duy logic, kiên nhẫn trong quá trình tìm ra lời giải.

Đây là tài liệu về ***"Tổng hợp các bài toán phương trình hay và khó"*** được em biên soạn và sưu tầm từ các nguồn khác nhau và muốn gửi đến các bạn học sinh tham khảo cũng như là rèn luyện. Đầu tài liệu em nói sơ quát về một số phương pháp cơ bản để giải phương trình vô tỉ, phần sau của tài liệu là các bài toán được biên soạn với lời giải đầy đủ chi tiết và các nhận xét của em về bài toán cũng như đánh giá về hướng giải, ý tưởng.

Những bài toán về các các phương pháp giải đa dạng như: đặt ẩn phụ đưa về hệ, hệ đối xứng loại 1, hệ đối xứng loại 2, đặt ẩn phụ không hoàn toàn, hoàn toàn, liên hợp, đưa về phương trình tích, tổng không âm, đánh giá bất đẳng thức (Cauchy, Bunhiacopxki, ...), đạo hàm (tính đơn điệu, hàm đặc trưng), ...

Cũng là một học sinh chuyên Toán, em xin gửi cho các bạn học sinh cũng như là thầy cô tham khảo "tài liệu" do em biên soạn. Mong nhận được sự ủng hộ và các góp ý của các bạn và thầy cô ạ!

Xin trân trọng cảm ơn!



Một số phương pháp giải phương trình vô tỉ cơ bản

1. Một số phương trình cơ bản:

Dạng 1: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x)^2 \end{cases}$

Dạng 2: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \; hoặc \; g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Dạng 3: $\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)^3$ và $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Dạng 4: $\sqrt{f(x)}.g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \; hoặc \; g(x) = 0 \end{cases}$

Dạng 5: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{A(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ [\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}]^2 = A(x) \end{cases}$

Dạng 6: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)}$ (*)

Nếu: $\mathrm{f(x) + A(x) = g(x) + B(x)}$

Phương trình (*) tương đương:

$$[\sqrt{f(x)} - \sqrt{A(x)}]^2 = [\sqrt{g(x)} - \sqrt{B(x)}]^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{f(x).A(x)} = \sqrt{g(x).B(x)}$$

Nếu: $\mathrm{f(x).A(x) = g(x).B(x)}$

Phương trình (*) tương đương:

$$[\sqrt{f(x)} - \sqrt{A(x)}]^2 = [\sqrt{g(x)} - \sqrt{B(x)}]^2$$
$$\Leftrightarrow f(x) + A(x) = g(x) + B(x)$$

Dạng 7: $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{A(x)}(*)$

$$(*) \Leftrightarrow f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x).g(x)}[\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}] = A(x)(**)$$

Thay $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{A(x)}$ vào (**) ta được:

$$\mathrm{f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x).g(x).A(x)} = A(x)}$$

2. Đưa về phương trình tích và tổng các số không âm

Đưa về phương trình tích:

Phương trình tích có dạng:

$$\mathrm{f(x).g(x)\ldots = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ hoặc } g(x) = 0 \text{ hoặc } \ldots = 0}$$

Một số cách đưa về phương trình tích:

+ Sử dụng biến đổi đẳng thức: sử dụng các phép biến đổi phân tích nhân tử, kết hợp với việc tách nhóm để đưa về phương trình tích đơn giản và biến giải.

+ Nhân lượng liên hợp:

- Ta có thể dự đoán các nghiệm đẹp $\mathrm{x = x_0}$

- Tách, ghép phù hợp sau khi nhân lượng liên hợp để các hạng tử xuất hiện nhân tử chung $x - x_0$.
- Ta đặt nhân tử chung để đưa về phương trình $(x - x_0)g(x) = 0$ thưởng đối với phương pháp nhân lượng liên hợp $g(x)$ thì sẽ vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất, ta có thể dùng phương pháp đánh giá, đạo hàm, ... để chứng mình.

Một số hằng đẳng thức sử dụng để nhân lượng liên hợp:

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ dùng cho biểu thức liên hợp:

$$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} \mp \sqrt{g(x)}}$$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ dùng cho biểu thức liên hợp:

$$\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{g(x)} = \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt[3]{[f(x)]^2} + \sqrt[3]{f(x).g(x)} + \sqrt[3]{[g(x)]^2}}$$

(Lưu ý: $f(x) - g(x) = (x - x_0)h(x)$)

Đưa về tổng các số không âm:

Phương trình tổng không âm có dạng:

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 + \ldots + \ldots = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ và } g(x) = 0 \text{ và} \ldots = 0$$

Ta có thể dùng các biến đổi (hằng đẳng thức) để đưa về dạng như trên. Lưu ý: tổng không âm chỉ được dùng cho lũy thừa chẵn hoặc các số lớn hơn hoặc bằng 0.

3. <u>Phương pháp đặt ẩn phụ cơ bản (hoàn toàn).</u>

Để đặt ẩn phụ ta thực hiện theo các bước:

+ Lựa chọn ẩn phụ phù hợp (có thể đặt 1 hay nhiều ẩn phụ), Chú ý đặt điều kiện của ẩn phụ (nếu có).

+ Sau khi đặt ẩn phụ ta được phương trình theo ẩn phụ đây là một phương trình cơ bản, đơn giản, biết cách giải.

+ Giải phương trình theo ẩn phụ (so với điều kiện nếu có). Sau đó quay lại giải lại với ẩn đã đặt

+ Cuối cùng ta tìm được nghiệm và so với điều kiện (nếu có)

Một số cách đặt ẩn phụ (hoàn toàn) hay gặp:

Dạng 1: $\alpha f(x) + \beta\sqrt{f(x)} + \gamma = 0$

Ta đặt: $t = \sqrt{f(x)} (t \geq 0)$

Phương trình trở thành: $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$

Dạng 2: $\alpha[\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}] + \beta\sqrt{f(x).g(x)} + \gamma = 0$

Ta đặt: $t = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} (t \geq 0)$

Khi đó ta có:

$$\sqrt{f(x).g(x)} = \frac{t^2 - [f(x) + g(x)]}{2}$$

(Trong đó $f(x) + g(x)$ có thể sẽ triệt tiêu ẩn x chỉ còn hằng số để giải dễ dàng)

Dạng 3: $\alpha[f(x)+g(x)]+\beta[\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}]\pm 2\alpha\sqrt{f(x).g(x)}+\gamma=0$
Ta đặt: $t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$
Phương trình trở thành: $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$
Dạng 4:

$$\alpha\sqrt{f(x)}+\frac{\beta}{\sqrt{f(x)}}+\gamma=0$$

Đặt: $t=\sqrt{f(x)}(t>0)$
Phương trình đã cho trở thành:

$$\alpha t+\frac{\beta}{t}+\gamma=0\Leftrightarrow \alpha t^2+\gamma t+\beta=0$$

4. <u>Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn.</u>

Phương trình này có thể đặt ẩn phụ là t tuy nhiên sau khi đặt vẫn còn ẩn x ta được phương trình mới, thường là phương trình bậc 2 cơ bản

Đưa về phương trình theo t hoặc theo x

Ta đưa về dạng phương trình bậc 2 (theo t hoặc x) có các hệ số chưa t hoặc x, tính biệt số Δ để tìm t theo x (hoặc x theo t)

- Một số dạng phương trình hay gặp:

Dạng 1: $ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{f(x)}$
Dạng 2: $ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{f(x)}$
Dạng 3: $ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)\sqrt{f(x)}$
Với các phương trình trên ta đặt: $t=\sqrt{f(x)}$, khi đó phương trình đã cho trở thành 1 trong 2 dạng sau

1) Phương trình bậc 2 ẩn x tham số t:

$$ax^2+bx+c=(mx+n)t\Leftrightarrow ax^2+(b-mt)x+c-nt=0$$

2) Phương trình bậc 2 ẩn t tham số x:

$\alpha t^2-(mx+n)t-\alpha t^2+ax^2+bx+c=0$
$\Leftrightarrow \alpha t^2-(mx+n)t-\alpha f(x)+ax^2+bx+c=0$
$\Leftrightarrow \alpha t^2-(mx+n)t+g(x)=0(*)$
Ta phải chọn hệ số α sao cho biệt thức của phương trình (*) là một bình phương.
$\Delta=(mx+n)^2-4\alpha g(x)=[h(x)]^2$ (ta sẽ chọn α sao cho hệ số của x^2 bằng 0 hoặc một số chính phương)

5. Đưa về hệ phương trình, hệ đối xứng loại 1, hệ đối xứng loại 2.

Phương trình đưa về hệ phương trình đối xứng loại1 :

- <u>Một số dạng của phương trình là đối xứng loại 1 thường gặp :</u>

Các phương trình có thể đưa về dạng đối xứng hoại 1 thường có các thành phần $\sqrt{\beta+x^2},\sqrt{\alpha-x^2}$, Để tổng bình phương là một hằng số.
Dạng 1: $\sqrt{\beta+x^2}+\sqrt{\alpha-x^2}=\gamma$

Ta đặt: $y=\sqrt{\alpha-x^2};t=\sqrt{\beta+x^2}(y,t\geq 0)$

Ta sẽ thu được hệ: $\begin{cases} y+t=\gamma \\ y^2+t^2=\alpha+\beta \end{cases}$

Dạng 2: $\sqrt{\beta+x^2}+\sqrt{\alpha-x^2}=\varphi+\gamma\sqrt{(\beta+x^2)(\alpha-x^2)}$

Ta đặt: $y=\sqrt{\alpha-x^2},t=\sqrt{\beta+x^2}(y,t\geq 0)$

Ta sẽ thu được hệ: $\begin{cases} x^2+t^2=\alpha+\beta \\ y+t=\varphi+\gamma yt \end{cases}$

Dạng 3: $m\sqrt{\alpha x+p}+n\sqrt{q-\alpha x}=\beta$

Đây là phương trình có thể đưa về hệ cơ bản có thể giải bằng phương pháp thế.

Ta đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{\alpha x+p} \\ b=\sqrt{q-\alpha x} \end{cases}(a,b\geq 0)$

Ta sẽ thu được hệ: $\begin{cases} a^2+b^2=p+q \\ ma+nb=\beta \end{cases}$

Dạng 4:

$$\frac{1}{\sqrt{\beta+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha-x^2}}=\gamma$$

Ta đặt: $y=\sqrt{\alpha-x^2},t=\sqrt{\beta+x^2}(y,t>0)$

Ta sẽ thu được hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{t}=\gamma \\ y^2+t^2=\alpha+\beta \end{cases}$$

Dạng 5:

$$\frac{a+bx}{\sqrt{x+\alpha}}+\frac{a-bx}{\sqrt{\beta-x}}=\gamma(*)$$

Ta biến đổi phương trình:

$$(*)\frac{b(x+\alpha)+(a-\alpha b)}{\sqrt{x+a}}+\frac{b(\beta-x)+(a-b\beta)}{\sqrt{\beta-x}}=\gamma$$

Ta đặt: $y=\sqrt{x+\alpha};t=\sqrt{\beta-x}(y,t>0)$

Ta thu được hệ:

$$\begin{cases} y^2+t^2=\alpha+\beta \\ \frac{by^2+a-\alpha b}{y}+\frac{bt^2+a-b\beta}{t}=\gamma \end{cases}$$

CHÚ Ý: Trong phương trình các hệ số của x có thể thay đổi, các dạng trên cũng có khá nhiều biến thể khác nhau tùy vào trường hợp mà phân tích.

- Phương pháp đưa về hệ loại 2

Dạng của phương trình có thể đưa về hệ loại 2 là:

$$ax^2+bx+c=\sqrt{px+q}(*)$$

Ta phân tích phương trình (*) trở thành phương trình có dạng:

$$(\alpha x + \beta)^2 = \gamma\sqrt{px + q} + k$$

Ta sẽ đặt: $\alpha t + \beta = \sqrt{px + q}$

(Trong phương trình dạng này hệ số a thường là một số chính phương và b sẽ được biểu diễn dưới dạng $b = 2m\sqrt{a}$ hoặc γa (γ nguyên) sẽ là một số chính phương và $\gamma b = 2m\sqrt{\gamma a}$).

Ta sẽ thu được hệ sau:

$$\begin{cases} (\alpha x + \beta)^2 = px + q \\ (at + \beta)^2 = pt + q \end{cases}$$

Đề giải hệ này ta trừ 2 phương trình với nhau

- <u>Ngoài ra ta còn có phương tình có thể đưa về hệ gần đối xứng</u>

Hệ này có cách giải tương tự hệ đối xứng loại 2

Phương trình có dạng: $f(x) + \sqrt{g(x)} = 0$

Ta sẽ đặt: $\alpha t + \beta = \sqrt{g(x)}$

Ta sẽ chọn các số α, β sao cho thu được hệ:

$$\begin{cases} (\alpha t + \beta)^2 = g(x) \\ f(x) = -\alpha t - \beta \end{cases}$$

Thông thường ta sẽ tìm α, β sao cho trừ 2 vế của hệ cho nhau sẽ xuất hiện nhân tử $x - t$.

6. <u>Phương pháp đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp</u>

Các dạng phương trình đặt biệt có thể đưa được về dạng:

$$\alpha y^2 + \beta yt + \gamma t^2 = 0$$

Dạng 1: $A(x) + \beta\sqrt{f(x)g(x)} = 0(*)$

Trong đó: $A(x) = \alpha f(x) + \gamma g(x)$

(Ta dùng phương pháp hệ số bất định để tìm được α, γ)

$$(*) \Leftrightarrow \alpha f(x) + \beta\sqrt{f(x).g(x)} + \gamma g(x) = 0$$

Ta sẽ đặt: $y = \sqrt{f(x)}, t = \sqrt{g(x)}$ (thông thường luôn có $f(x)$ hoặc $g(x)$ luôn lớn hơn hoặc bằng 0)

Phương trình trở thành: $\alpha y^2 + \beta yt + \gamma t^2 = 0$

Để giải phương trình này ta sẽ đặt $y = kt$

Dạng 2: $B(x) = \sqrt{m[f(x)]^2 + n[g(x)]^2}(**)$

Trong đó: $B(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

(tương tự trên ta tìm bằng hệ số bất định)

$(**) \Leftrightarrow \alpha f(x) + \beta g(x) = \sqrt{m[f(x)]^2 + n[g(x)]^2}$

Ta đặt: $y = f(x), t = g(x)$

Phương trình trở thành: $\alpha y + \beta t = \sqrt{my^2 + nt^2}$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - m)y^2 + (2\alpha\beta)yt + (\beta^2 - n)t^2 = 0$$

(phương pháp giải phương tự)

7. Phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức

Một số ý tưởng khi đánh giá bằng bất đẳng thức:

1) Ta có phương trình: f(x) = g(x)

Ta đánh giá được: $\begin{cases} f(x) \geq a \\ g(x) \leq a \end{cases}$ (a là hằng số)

Khi đó nghiệm của phương trình chính các x thỏa là: $\begin{cases} f(x) = a \\ gx) = a \end{cases}$

2) Ta có phương trình: f(x) = a (a là hằng số)

Ta đánh giá được: f(x) ≥ a hoặc f(x) ≤ a

Nghiệm của phương trình chính là các x thỏa các bất đẳng thức đã xảy ra

3) Ta có phương trình: f(x) = g(x)

Ta đánh giá được: f(x) ≥ g(x) hoặc f(x) ≤ g(x)

Nghiệm của phương trình là các giá trị x thỏa mãn các bất đẳng thức đã xảy ra

CHÚ Ý: Dấu "=" phải xẩy ra ở tất cả các bất đẳng thức đã sử dụng

Một số bất đẳng thức quen thuộc được sử dụng.

+ Bất đẳng thức Cauchy: Với $x, y, z \geq 0$

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$, Dấu "=" xảy ra $x = y$

$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, Dấu "=" xảy ra $x = y = z$

Dạng tổng quát: $a_1, a_2, \dots, a_n$ không âm ta có:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

+ Với $x, y \in R$ ta có:

$$\begin{cases} xy \leq (\frac{x+y}{2})^2 \\ (x+y)^2 \geq 4xy \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra: $x = y$

+ Bất đẳng thức Bunhiacopxki: Với x,y bất kì ta có:

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

Hay: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Dấu "=" xảy ra:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Dạng tổng quát: a,

Cho hai dãy tùy ý: $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, Ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \dots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \dots + {b_n}^2)$$

Dấu "=" xảy ra:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

+ Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz: Với a, b, c bất kì và x, y, z > 0 ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}\,(1)$$

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\,(2)$$

Dấu "=" xảy ra ở (1),(2) lần lượt là:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y},\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

Dạng tổng quát: Với $a_1,a_2,\ldots,a_n$ bất kì và $b_1,b_2,\ldots,b_2>0$ ta có:

$$\frac{{a_1}^2}{b_1}+\frac{{a_2}^2}{b_2}+\ldots+\frac{{a_n}^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

Dấu "=" xảy ra:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

8. Giải phương trình bằng tính đơn điệu của hàm số

Giải phương trình bằng tính đơn điệu của hàm số dựa trên 2 định lý sau:

ĐỊNH LÝ 1: Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên D thì số nghiệm trên D trên phương trình $f(x)=a$ không nhiều hơn 1 và $\forall u,v\in D: f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$

ĐỊNH LÝ 2: Nếu hàm số f(x) và g(x) đơn điều ngược chiều và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình f $f(x)=g(x)$ không nhiều hơn 1.

- Ta chứng minh các hàm số f(x), g(x) đồng biến hoặc nghịch biến bằng cách xét đạo hàm f(x) và g(x).

$f'(x)>0\Longrightarrow f(x)$ đồng biến

$f'(x)<0\Longrightarrow f(x)$ nghịch biến

Một số dạng biến đổi $f[g(x)]=f[h(x)]$ thường gặp:

Dạng 1: $x^3-b=a\sqrt[3]{ax+b}$ (a,b là tham số với a > 0)

$\Leftrightarrow x^3+ax=ax+b+a\sqrt[3]{ax+b}$

Xét hàm: $f(t)=t^3+at$

Ta có: $f'(t)=3t^2+a>0\Longrightarrow f(x)$ đồng biến

$\Longrightarrow f(x)=f(\sqrt[3]{ax+b})$

Dạng 2: $ax^2+bx+c=n\sqrt{dx+e}$

$\Leftrightarrow m(px+q)^2+n(px+q)=m(ex+d)+n\sqrt{ex+d}(m,n>0)$

Xét hàm: $f(t)=mt+n\sqrt{t}$

Ta có: $f'(t)=m+\frac{n}{2\sqrt{t}}>0\Longrightarrow f(x)$ đồng biến

$\Longrightarrow f[(px+q)^2] = f(ex+d)$

Dạng 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = n\sqrt[3]{ex+f}$

$\Leftrightarrow m(px+q)^3 + n(px+q) = m(ex+f) + n\sqrt[3]{ex+f}(m, n > 0)$

Xét hàm: $f(t) = mt^3 + nt$

Ta có: $f'(x) = 2mt^2 + n > 0 \Longrightarrow f(x)$ đồng biến

$\Longrightarrow f(px+q) = f(\sqrt[3]{ex+f})$

Chú ý: ở dạng 2, 3 ta tìm các hệ số m,n, ... bằng cách đồng nhất hệ số.

CÁC CÔNG THỨC ĐẠO HÀM:

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm các hàm hợp $u = u(x)$
$(c)' = 0$ (c là hằng số)	$(ku)' = k.u'$
$(x)' = 1$	$(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}; (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2} (v \neq 0)$; $(\frac{C}{u})' = -\frac{Cu'}{u'}$
$(kx)' = k$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u.v)' = u'v + v'u$

BÀI TOÁN 1 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $\sqrt{7x-x^2}+6x^2-42x+2=0$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $0 \le x \le 7$, Phương trình trên tương đương:

$\sqrt{x(7-x)}-6x(7-x)+2=0$

Đặt: $t=\sqrt{x(7-x)}$ với $t \ge 0$

Phương trình trở thành: $-6t^2+t+2=0$

Giải phương trình trên ta được:

$t=\frac{2}{3}(N), t=\frac{-1}{2}(L)$

$\Rightarrow \sqrt{x(7-x)}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow -x^2+7x-\frac{2}{3}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{21+\sqrt{417}}{6}(N) \\ x=\frac{21-\sqrt{417}}{6}(N) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có ba nghiệm ....

- **Nhận xét:** Bài toàn khá cơ bản khi ứng dụng phương pháp đặt ẩn phụ để phương trình quy về phương trình bậc 2 cơ bản mà không cần các kĩ năng thêm bớt nâng cao, do đó việc nhìn ra mối quan hệ của biểu thức trong căn và ngoài căn cũng khá dễ dàng để giải quyết bài toán.

BÀI TOÁN 2 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \in [-1;1]$

Ta biến đổi biểu thức như sau:

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2 \Rightarrow (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2=4 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{(1+x)(1-x)}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(1-x)}=1 \Rightarrow 1-x^2=1 \Leftrightarrow x=0(N)$

Vậy phương trình có nghiệm: x=0

- **Nhận xét:** Một bài toán cơ bản ở cấp độ THCS và cách xử lí rất dễ dàng khi bình phương hai vế để triệt tiêu căn và đây cũng là một bài toán rất đẹp việc bình phương khi mất đi ẩn x sau khi thực hiện, và để nhìn thấy hướng giải là vô cùng dễ !.
- **Phương pháp khác:** Ngoài phương pháp bình phương hai vế trên ta có thể dùng phép đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng với phép đặt $a=\sqrt{1+x}, b=\sqrt{1-x}$ từ đó ta được hai phương trình là:

  $a+b=2, a^2+b^2=1+x+1-x=2$ các bạn có thể thử !

BÀI TOÁN 3 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $\sqrt{x^4+1} = 2x^2 - x + 1$

LỜI GIẢI:

Xét $x = 0$ là nghiệm của phương trình
Xét $x \neq 0$ ta có phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = 2(x + \frac{1}{x}) - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} = 2(x + \frac{1}{x}) - 1$$

Đặt: $t = x + \frac{1}{x}$ ta có phương trình:

$$\sqrt{t^2 - 2} = 2t - 1 \Leftrightarrow t^2 - 2 = 4t^2 - 4t + 1 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t \in \emptyset$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x=0

- **Nhận xét:** Đây là một phương trình khá khó cũng như cần một ý tưởng sáng tạo, nhờ vào nhận biết ta quan sát được trong căn và ngoài căn có sự liên kết dựa vào đó chia 2 vế cho x và sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ là hoàn thành bài toán, tuy nhiên sử dụng phương pháp này cần chú ý đến bước xét x = 0 là nghiệm hay không
- **Phương pháp khác:** Nhờ vào phương trình có nghiệm đẹp là x=0 ta cũng hoàn toàn có thể nhẩm nghiệm từ đó sử dụng phương pháp liên hợp cũng khá hợp lí chỉ cần cộng 1 cho 2 vế phương trình là xuất hiện nhân tử chung là x. Nhưng khi sử dụng liên hợp thì bài toán sẽ khá dài và khó nên bạn có thể thử nhé !

BÀI TOÁN 4 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $x^2 + 1 = 2\sqrt{x}$ với $x \in R \setminus (0; 1)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 0$

$$x^2 + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2 = 2\sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 2(\sqrt{x} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (x+1)(x-1) - \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(x+1) - \frac{2}{\sqrt{x}+1}] = 0 \Leftrightarrow x = 1(N)$$

Vì với $x \in R \setminus (0; 1)$ thì:

$$(x+1) - \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 0$$

Sẽ vô nghiệm ta chứng minh như sau:
Với:

$$x \geq 1 \Rightarrow (x+1) - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \geq 1 > 0$$

$$x \leq 0 \Rightarrow (x+1) - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \leq -1 < 0$$

Vậy phương trình có nghiệm là x = 1

- **Nhận xét:** Bài toán khá thú vị và mới lạ, không nên bình phương 2 vế vì bài toán sẽ nâng lên bậc 4 khá khó giải tuy nhiên bài toán có nghiệm khá đẹp là 1 nên ta dễ dàng nhẩm nghiệm và sử dụng phương pháp liên hợp để tìm được nghiệm tuy vậy sau tìm tìm được nghiệm thì việc chứng minh phần còn lại vô nghiệm là khá khó nhờ vào điều kiện của x ở đề ta dễ dàng thực hiện điều đó.

BÀI TOÁN 5 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:
$2(x^2-3x+1)\sqrt{-x^2-4x+5} =- 2x^3+15x^2+29x-9$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \in [-5;1]$

Phương trình đã cho tương đương:

$$(x^2-3x+1)\sqrt{-x^2-4x+5}+(x^2-3x+1)(-2x+9)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+1)(\sqrt{-x^2-4x+5}-2x+9)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+1=0 \\ \sqrt{-x^2-4x+5}=2x-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}(N) \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}(N) \end{array}\right. \\ \sqrt{-x^2-4x+5}=2x-9 \end{array}\right.$$

Ta có:

$$\sqrt{-x^2-4x+5}=2x-9 \Leftrightarrow -x^2-4x+5=(2x-9)^2=4x^2-36x+81$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-32x+76=0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là ....

Nhận xét: Một bài toán có ý tưởng khá quen thuộc khi vế phải có thể phân tích ra được nhân tử x^2-3x+1từ đó ta nhận được phương trình tích như lời giải và kết thúc bài toán, nhưng để phân tích được nhân tử với nghiệm vô tỉ thì khá khó với bài toán này các bạn có thể sử dụng phương pháp “hệ số bất định” để phân tích.

BÀI TOÁN 6 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{2x^2+2x-15}=4x^2+5x-30(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $2x^2 + 2x - 15 \geq 0$

$(*) \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{2x^2+2x-15} = 2(2x^2+2x-15) + x$

Đặt: $\sqrt{2x^2+2x-15} = t \geq 0$

Phương trình đã cho trở thành: $(x+2)t = 2t^2 + x$

$\Leftrightarrow 2t^2 - (x+2)t + x = 0$

$\Delta = (x+2)^2 - 4.2.x = x^2 + 4x + 4 - 8x = (x-2)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{x+2-x+2}{4} = 1 \\ t = \frac{x+2+x-2}{4} = \frac{x}{2} \end{array}\right.$$

Với $t = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 15 = 1 \Rightarrow x^2 + x - 8 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{x}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2x - 15 = \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow 7x^2 + 8x - 60 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-4+2\sqrt{109}}{7} \\ x = \frac{-4-2\sqrt{109}}{7} \end{array}\right.$$

Sau khi thử lại với điều kiện ta thấy có 3 nghiệm thỏa mãn là:

$$x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}; x = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}; x = \frac{-4+2\sqrt{109}}{7}$$

- **Nhận xét:** Bài toán sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn với t bằng với căn thức và biến đổi (thêm bớt) để tính được Δ x hoặc Δ t là một số chính phương điều này không hề đơn giản mà cần biến đổi sao cho hợp lí như bài toán này ta có thể thấy: $4x^2 + 5x - 30 = 2(2x^2 + 2x - 15) + x$ để kết thúc bài toán.

BÀI TOÁN 7 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình:

$$4\sqrt{x} - 1 = \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x+1}$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 0$

Ta biến đổi phương trình như sau:

$$4\sqrt{x} - 1 = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 4}{x+1} - 1 \Leftrightarrow 4\sqrt{x}(x+1) = x^3 + 2x^2 + x + 4$$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}(x+1) = x(x+1)^2 + 4 \Leftrightarrow x(x+1)^2 - 4\sqrt{x}(x+1) + 4 = 0$
$\Leftrightarrow [(x+1)\sqrt{x} - 2]^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x} = 2$
$\Rightarrow (x+1)^2 x = 4 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 1(N)$

Vậy phương trình có nghiệm là x=1

- **Nhận xét:** Bài toán sau khi biến đổi qua nhiều bước thì sẽ trở thành hằng đẳng thức, dễ dàng giải được phương trình và thu được phương trình tích như lời giải ! Bài toán không quá khó và sử dụng ý tưởng cơ bản thông qua một số kĩ thuật thêm bớt và phân tích hạng tử !

BÀI TOÁN 8 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$\frac{x^2-x}{2x^2-3x+1} = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{-x^2+x+1}}\ (*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện của phương trình: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x \ne \frac{1}{2}; x \ne 1$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = \frac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{-x^2+x+1}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} - 1 = \sqrt{x^2-2x+2} - \sqrt{-x^2+x+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+2} + 1 = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{-x^2+x+1}$$

Ta có đánh giá sau:

$$VT = \sqrt{(x-1)^2+1} + 1 \ge \sqrt{1} + 1 = 2$$
$$VP = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{-x^2+x+1} \le \sqrt{2(x^2-x+1-x^2+x+1)} = 2$$

(theo bất đẳng thức bunhiacopxki)

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x^2-x+1 = -x^2+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

- **Nhận xét:** Cần rất nhiều thời gian để biến đổi ra được hướng giải ta thấy khi chuyển vế thì:
  $x^2 - x = (\sqrt{x^2-x+1})^2 - 1, 2x^2 - 3x + 2 = (\sqrt{x^2-2x+3})^2 - (\sqrt{-x^2+x+1})^2$
  Đây chính là kết quả của việc liên hợp từ đó ta sẽ biến đổi thành ra thành biểu thức đơn giải thì nhận thấy rằng VT $\ge$ 2 bằng một bất đẳng thức cơ bản và VP $\le$ 2 bằng cách đánh giá Bunhiacopxki. Kết thúc bài toán khi cả 2 vế đều đạt dấu "=".

BÀI TOÁN 9 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $(8x-4)\sqrt{2x^2+1}=4x^2-1$

LỜI GIẢI:

Đặt: $t=\sqrt{2x^2+1}\geq 0$

Phương trình đã cho trở thành: $(8x-4)t=4x^2-1$

$\Leftrightarrow 8xt-4t=4x^2-1 \Leftrightarrow 4x^2-8xt+4t-1$

$\Delta=(-8t)^2-4.4.(4t-1)=64t^2-64t+16=(8t-4)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{8t+8t-4}{8}=2t-\frac{1}{2} \\ x=\frac{8t-8t+4}{8}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Với:

$x=2t-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=2\sqrt{2x^2+1}-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 16(2x^2+1)=(2x+1)^2$

$\Leftrightarrow 32x^2+16=4x^2+4x+1\Leftrightarrow 28x^2-4x+15=0$(vô nghiệm)

Vậy phương trình có 1 nghiệm là $x=\frac{1}{2}$

- **Nhận xét:** Ý tưởng tương tự bài toán 6 nhưng có phần đơn giản hơn chỉ khác biệt duy nhất là tính delta khác so với bài 6, đây cũng chỉ là một bài cơ bản cho toán đặt ẩn phụ không hoàn toàn !

BÀI TOÁN 10 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=1$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện của phương trình là: $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$

Đặt:

$$\begin{cases} a=\sqrt{5-x^2} \\ b=\sqrt{x^2+3}\end{cases}(a,b\geq 0)$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

Ngoài ra ta còn có phương trình: $a^2+b^2=5-x^2+x^2+3=8$

Từ đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ a^2+b^2=8\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{ab}=1 \\ (a+b)^2-2ab=8\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=ab \\ (a+b)^2-2(a+b)-8=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=ab \\ \left[\begin{array}{l} a+b=-2(L) \\ a+b=4(N) \end{array}\right. \end{cases}$$

Khi đó a,b là nghiệm của pt: $X^2 - 4X + 4 = 0 \rightarrow X = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x^2}=2 \\ \sqrt{x^2+3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Vậy: ...

- **Nhận xét:** Đây là một bài toán đơn giản chỉ cần đặt ẩn phụ như lời giải sẽ xuất hiện hệ phương trình đối xứng loại 1!

BÀI TOÁN 11 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $-x^2 + 11x - 12 = 6\sqrt{x+4}(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq -4$

$(*) \Leftrightarrow x^2 - 11x + 12 = -6\sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 12 + x + 4 + 9 = (x+4) - 6\sqrt{x+4} + 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = (\sqrt{x+4}-3)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 - (\sqrt{x+4}-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 5 + \sqrt{x+4} - 3)(x - 5 - \sqrt{x+4} + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 8 + \sqrt{x+4})(x - 2 - \sqrt{x+4}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4} = 8-x \\ \sqrt{x+4} = x-2 \end{array}\right.$$

$TH1 : \sqrt{x+4} = 8 - x (x \leq 8) \Leftrightarrow x + 4 = x^2 - 16x + 64$

$$\Leftrightarrow x^2 - 17x + 60 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12(L) \\ x = 5(N) \end{array}\right.$$

$TH2 : \sqrt{x+4} = x - 2 (x \geq 2) \Leftrightarrow x + 4 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5(N) \\ x = 0(L) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là x=5

- **Nhận xét:** Đây là một phương trình khá khó cần sự khéo léo để đưa về hiệu của hai bình phương từ đó đưa vế phương trình tích trong đó VP ta có $6\sqrt{x+4}$ cũng dễ dàng nhận thấy được đó là thành phần tích 2ab trong hằng đẳng thức từ đó ta thêm $x + 1$, 9 để được bình phương hoàn chỉnh.

BÀI TOÁN 12 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $8x^2 + x^4 - 3x - 9 + x^2\sqrt{8+x^2} = 0$

LỜI GIẢI:

Xét x = 0 không phải là nghiệm của phương trình

Xét x khác 0:

Phương trình tương đường:

$$\frac{8x^2 + x^4 - 3x - 9 + x^2\sqrt{8+x^2}}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + x^2 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \sqrt{8+x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + x^2 + \sqrt{8+x^2} = \frac{9}{x^2} + \frac{3}{x}$$

Xét hàm: $f(t) = t + \sqrt{t}$

Ta có:

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0$$

$$\Rightarrow f(8+x^2) = f(\frac{9}{x^2})$$

$$\Rightarrow 8 + x^2 = \frac{9}{x^2} \Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+9) = 0$$

$\Rightarrow x = 1$ và $x = -1$

Vậy sau khi thử lại ta thấy x=1 là nghiệm của phương trình

- **Nhận xét:** Đây là một bài toán sử dụng phương pháp hàm đặc trưng (đồng hàm) là một phương pháp khá nâng cao đòi hỏi cần có sự nhận biết để đưa hai vế của phương trình về cùng 1 hàm và việc cuối cùng chỉ cần chứng minh hàm đó đơn điệu là kết thúc.

BÀI TOÁN 13 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình: $4x^2 + 1 = 2x^2\sqrt{4x^2+3}$

LỜI GIẢI:

Đặt: $t = \sqrt{4x^2+3} \geq 0$

Phương trình đã cho trở thành:

$t^2 - 2 = 2x^2 t$ (1)

Mà ta có: $t^2 - 3 = 4x^2$(2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} t^2 - 2 = 2x^2 t \\ t^2 - 3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{t^2-2}{t^2-3} = \frac{t}{2} \Leftrightarrow (t-1)(t^2-t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 (N) \\ t = \frac{1+\sqrt{17}}{2} (N) \\ t = \frac{1-\sqrt{17}}{2} (L) \end{array}\right.$$

Với: $t = 1 \Rightarrow \sqrt{4x^2+3} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 = -2 (L)$

Với: $t = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 4x^2 + 3 = (\dfrac{1+\sqrt{17}}{2})^2 = \dfrac{9+\sqrt{17}}{2}$

$\Rightarrow 4x^2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{8}}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: ....

- **Nhận xét:** Giải quyết phương trình với phương pháp đặt ẩn phụ từ đó ta thu được hệ như lời giải để loại bỏ ẩn x để thu được 1 phương trình chứa t để tìm t thì ta thấy khi chia 2 phương trình vế theo vế thì ẩn x sẽ tiêu biến từ đó ta tìm được t và bài toán kết thúc!

BÀI TOÁN 14 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $9x^3 - 5x^2 + 108 = 14\sqrt{(x^3+7)(2x^3+x^2+5)}$

LỜI GIẢI:

Vì điều kiện khá phức tạp ta sẽ thử lại sau khi giải phương trình !
Phương trình tương đương:

$19(x^3+7) - 5(2x^3+x^2+5) = 14\sqrt{(x^3+7)(2x^3+x^2+5)}$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x^3+7} \\ b = \sqrt{2x^3+x^2+5} \end{cases}$ (với $a, b \geq 0$)

Khi đó phương trình trở thành:

$19a^2 - 5b^2 = -14ab \Leftrightarrow -19a^2 + 14ab + 5b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(19a-5b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 19a = 5b \end{cases}$

TH1: a = b

$\Rightarrow \sqrt{x^3+7} = \sqrt{2x^3+x^2+5} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

TH2: 19a=5b

$\Rightarrow 19\sqrt{x^3+7} = 5\sqrt{2x^3+x^2+5} \Rightarrow 361(x^3+7) = 25(2x^3+x^2+5)$

$\Leftrightarrow 361x^3 + 2527 = 50x^3 + 25x^2 + 125 \Leftrightarrow 311x^3 - 25x^2 + 2402 = 0$

→ Không có x thỏa phương trình đầu

Vậy sau khi thử lại phương trình có nghiệm là x=1

- **Nhận xét:** Đây là một phương trình khá phức tạp tuy nhiên sau khi tách $9x^3 - 5x^2 + 108 = 19(x^3+7) - 5(2x^3+x^2+5)$ thì bài toán sẽ trở nên đơn giải bằng cách đặt ẩn phụ. Để tách được như trên bạn có thể dùng phương pháp "hệ số bất định": $\alpha(x^3+7) + \beta(2x^3+x^2+5) = 9x^3 - 5x^2 + 108$ đồng nhất hệ số ta sẽ tìm được $\alpha = 19, \beta = -5$.

BÀI TOÁN 15 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$3x - 7\sqrt{3-x} + \sqrt{-x^2 - x + 12} - 12\sqrt{x+4} = -12$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện của phương trình: $-4 \le x \le 3$

Ta biến đổi phương trình như sau:

$$3(x+4) - 7\sqrt{3-x} + \sqrt{(3-x)(x+4)} + 21\sqrt{x+4} = 0$$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x+4} \\ b = \sqrt{3-x} \end{cases}$ (với $a, b \ge 0$)

Phương trình trở thành:

$$3a^2 - 7b + ab - 21a = 0 \Leftrightarrow 3a(a-7) + b(a-7) = 0 \Leftrightarrow (a-7)(3a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7 \\ 3a = -b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4} = 7 \\ 3\sqrt{x+4} = -\sqrt{3-x}(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x + 4 = 49 \Leftrightarrow x = 45(L)$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

- **Nhận xét:** Bài toán này có ý tưởng cơ bản không quá phức tạp chỉ cần chuyển vế và phân tích biểu thức trong căn thì sẽ nhận ra mấu chốt của bài toán và giải quyết nó bằng cách đặt cần phụ là kết thúc bài toán!

BÀI TOÁN 16 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $2x^2 + x = \sqrt{6x+3}(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \ge \frac{-1}{2}$

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2 + 2x = 2\sqrt{6x+3} \Leftrightarrow 4x^2 + 2x + (2x+1) = 2x + 1 + 2\sqrt{6x+3}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 2x + 1 + 2\sqrt{6x+3}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 + 2(2x+1) = 3(2x+1) + 2\sqrt{6x+3}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 + 2(2x+1) = (6x+3) + 2\sqrt{6x+3}$$

Xét hàm: $f(t) = t + 2\sqrt{t}$

Ta có:

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{t}} > 0$$

$$\Rightarrow f((2x+1)^2) = f(6x+3)$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 6x + 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 6x + 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(N) \\ x = -\frac{1}{2}(N) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm ....

BÀI TOÁN 17 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $2x^2 - 8 + \sqrt{x^2 + 2x + 9} = \sqrt{2x + 13}(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq \frac{-13}{2}$

$(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 8 + \sqrt{x^2 + 2x + 9} + (4x + 26) = \sqrt{2x + 13} + (4x + 26)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 18 + \sqrt{x^2 + 2x + 9} = 4x + 26 + \sqrt{2x + 13}$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 9) + \sqrt{x^2 + 2x + 9} = 2(2x + 13) + \sqrt{2x + 13}$

Xét hàm: $f(t) = 2t + \sqrt{t}$

Ta có:

$f'(t) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0$

$\Rightarrow f(x^2 + 2x + 9) = f(2x + 13)$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 9 = 2x + 13 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2(N)$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là ....

- **Nhận xét:** Bài toán 16 và 17 sử dụng phương pháp hàm đặc trưng (đồng hàm) để giải tuy vậy để sử dụng ta cần nhìn ra được hướng biến đổi để hai về của phương trình đưa về dạng cùng hàm. Thường chỉ sử dụng các kĩ thuật cơ bản như thêm bớt hạng tử để xuất hiện.

BÀI TOÁN 18 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $(x^2 + 2)\sqrt{2x - 1} = x^2 + 2x$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Phương trình tương đương:

$(x^2 + 2)\sqrt{2x - 1} = (x^2 + 1) + (2x - 1)$

Đặt: $t = \sqrt{2x - 1}$

Phương trình đã cho trở thành:

$(x^2 + 2)t = (x^2 + 1) + t^2 \Leftrightarrow t^2 - (x^2 + 2)t + (x^2 + 1) = 0$

$\Delta = (x^2 + 2)^2 - 4.1.(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 - 4 = x^4$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = x^2 + 1 \end{array}\right.$

Với t = 1:

$\Rightarrow \sqrt{2x - 1} = 1 \Leftrightarrow x = 1(N)$

Với $t = x^2 + 1$:

$\Rightarrow \sqrt{2x-1} = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = x^4 + 2x^2 + 1$
$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 2x + 2 = 0$
Mà: $x^4 + 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2} > 0$
Vậy phương trình có nghiệm là x=1

- **Nhận xét:** Phương trình được giải quyết bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn nhưng đối với bài này cần phải có kĩ năng tách tổng để tính được delta là một bình phương nên ý tưởng khó hơn các bài trước, ta thấy như trên lời giải thì: $x^2 + 2x = (x^2 + 1) + (2x - 1)$ từ đó ta tính được delta.

BÀI TOÁN 19 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình:

$$4\sqrt{\frac{3x-5}{2x+2}} - 7\sqrt{\frac{2x+2}{3x-5}} = -10$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{5}{3}; +\infty)$
Đặt: $t = \sqrt{\frac{3x-5}{2x+2}} \geq 0$
Phương trình đã cho trở thành:
$4t - \frac{7}{t} = -10 \Leftrightarrow 4t^2 - 7 = -12t \Leftrightarrow 4t^2 + 12t - 7 = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(N) \\ t = \frac{-7}{2}(L) \end{array}\right.$
$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{3x-5}{2x+2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x-5}{2x+2} = \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow 12x - 20 = 2x + 2 \Leftrightarrow 10x = 22 \Leftrightarrow x = \frac{11}{10}(L)$
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

- **Nhận xét:** Đây là một dạng toán cơ bản để luyện tập cho phương pháp đặt ẩn phụ, dấu hiệu nhận biết khi ta thấy sự nghịch đảo giữa 2 căn và khi đặt căn này là một ẩn thì sẽ dễ dàng biểu diễn căn kia theo ẩn phụ, từ đó có thể giải ẩn phụ và kết thúc bài toán.

BÀI TOÁN 20 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $9x^2 - 6x - 4 = 3\sqrt{9x+2}(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \ge \frac{-2}{9}$

$(*) \Leftrightarrow (9x^2 - 6x + 1) - 5 = 3\sqrt{9x+2} \Leftrightarrow (3x-1)^2 - 5 = 3\sqrt{9x+2}$

Đặt: $t = \sqrt{9x+2} \ge 0, y = 3x - 1$

Khi phương trình trở thành:

$y^2 - 5 = 3t$ (1)

Ta lại có:

$t^2 = 9x + 2 = 3(3x-1) + 5 = y + 5 \Leftrightarrow t^2 - 5 = 3y$(2)

Lấy (1) - (2) theo vế ta có:

$y^2 - t^2 = 3(t-y) \Leftrightarrow (y-t)(y+t) + 3(y-t) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = t \\ y + t + 3 = 0 \end{array}\right.$

Với $y = t$:

$\Rightarrow 3x - 1 = \sqrt{9x+2}(x \ge \frac{1}{3}) \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 9x + 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 15x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 15x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5+\sqrt{29}}{6} (N) \\ x = \frac{5-\sqrt{29}}{6} (L) \end{array}\right.$

Với $y + t + 3 = 0$:

$3x - 1 + \sqrt{9x+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow -2 - 3x = \sqrt{9x+2}$ (vô nghiệm)

Vì với $x \ge \frac{-2}{9}$ nên $-2 - 3x \le -2 + \frac{2}{3} = \frac{-4}{3} < 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là ....

➢ **Nhận xét:** Bài toán sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 để giải hệ này chỉ cần trừ 2 vế của hệ cho nhau là kết thúc. Tuy việc việc nhìn ra mấu chốt để tách như lời giải thì cần có sự khéo léo và rèn luyện lâu dài.

BÀI TOÁN 21 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = x$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \ge 1$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \sqrt{x-1} \end{cases}$ $(a, b \ge 0)$

Phương trình trở thành: $a + b = x$

Ta lại có: $a^2 - b^2 = 2x - 1 - x + 1 = x$

$\Rightarrow a + b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) - (a+b) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a - b = 1 \end{array}\right.$

TH1: a = -b

$\Rightarrow \sqrt{2x-1} = -\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 0$

Không có x thỏa

TH2: a - b = 1

$\Rightarrow \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2 - 2\sqrt{(2x-1)(x-1)} = 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x-1)(x-1)} = 3x - 3 (x \geq 1) \Leftrightarrow 4(2x-1)(x-1) = 9x^2 - 18x + 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.(N)$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là x=1 và x=5

- **Nhận xét:** Phương trình có khá nhiều cách giải khác nhau ta cũng có thể liên hợp (nhưng việc tìm nghiệm của phần còn lại khá khó khăn) nó cũng là một biến thể của bài toán số 2 nhưng có phần phức tạp hơn nên ta sử dụng cách đặt ẩn phụ.

BÀI TOÁN 22 (Sưu tầm)**:**

Giải phương trình: $\sqrt{5x-3} + \sqrt{3x-4} = \sqrt{2x} + \sqrt{4x+1} (*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: x $\geq \frac{4}{3}$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{5x-3} - \sqrt{4x+1} = \sqrt{2x} - \sqrt{3x-4}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{5x+3} + \sqrt{4x+1}} = \frac{4-x}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x-4}}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{1}{\sqrt{5x-3} + \sqrt{4x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x-4}}\right) = 0$$

Ta thấy: $\frac{1}{\sqrt{5x-3} + \sqrt{4x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x-4}} > 0$

Do đó:

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4(N)$

Vậy phương trình có nghiệm là x=4

- **Nhận xét:** Phương trình khá cơ bản tuy nhiều căn nhưng nghiệm khá dễ nhẩm do đó ta nhẩm được x=4 là nghiệm dùng phương pháp liên hợp là kết thúc!

BÀI TOÁN 23 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình:

$$\sqrt{34x^2 + 17x - 2} = \frac{8x^3 + 12x^2 + 10x + 3}{34x^2 + 17x} (*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $\begin{cases} 34x^2 + 14x - 2 \geq 0 \\ 34x^2 + 14x \neq 0 \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow (34x^2 + 17x)\sqrt{34x^2 + 17x - 2} = 8x^3 + 12x^2 + 10x + 3$

$\Leftrightarrow (34x^2 + 17x - 2 + 2)\sqrt{34x^2 + 17x - 2} = (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) + 2(2x + 1)$

$\Leftrightarrow (34x^2 + 17x - 2)\sqrt{34x^2 + 17x - 2} + 2\sqrt{34x^2 + 17x - 2} = (2x + 1)^3 + 2(2x + 1)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{34x^2 + 17x^2 - 2})^3 + 2\sqrt{34x^2 + 17x - 2} = (2x + 1)^3 + (2x + 1)$

Xét hàm: $f(t) = t^3 + 2t$

Ta có:

$f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$

$\Rightarrow f(\sqrt{34x^2 + 17x - 2}) = f(2x + 1)$

$\Rightarrow \sqrt{34x^2 + 17x - 2} = 2x + 1 \Leftrightarrow 34x^2 + 17x - 2 = 4x^2 + 4x + 1$

$\Leftrightarrow 30x^2 + 13x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{6} \\ x = \frac{-3}{5} \end{array}\right.$

Sau khi thử lại ta thấy $x = \frac{1}{6}$ là nghiệm của phương trình.

- **Nhận xét:** Phương trình sử dụng phương pháp hàm đặc trưng (đồng hàm) khá nâng cao cần phải có kĩ thuật tách hạng tử khá khó. Ta thấy đối với bài toán này việc tách được $8x^3 + 12x^2 + 10x + 3 = (2x + 1)^3 + 2(2x + 1)$ đã là một bước quan trọng của bài toán. Tiếp theo ta chỉ cần làm tương tự với vế còn lại là hoàn tất.

BÀI TOÁN 24 (Sưu tầm)**:**

Giải phương trình: $\sqrt{2 - x^3} = \sqrt[3]{2 - x^2}$

LỜI GIẢI:

Điều kiện của phương trình: $x \leq \sqrt[3]{2}$

Đặt: $t = \sqrt[3]{x^2 - 2}$

Phương trình trở thành: $t = \sqrt{2 - x^3}$

$\Leftrightarrow t^2 + x^3 = 2$

Ta lại có:

$t = \sqrt[3]{2 - x^2} \Leftrightarrow t^3 = 2 - x^2 \Leftrightarrow t^3 + x^2 = 2$

Từ đây là có được hệ phương trình:

$\begin{cases} t^2 + x^3 = 2 \\ t^3 + x^2 = 2 \end{cases}$

Trừ hai vế của hệ phương trình vế theo vế ta có:

$x^3 - t^3 + t^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - t)(x^2 + xt + t^2) - (x - t)(x + t) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2-x-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=t \\ x^2+xt+t^2-x-t=0 \end{array}\right.$$

Với x = t:

$$\Rightarrow x=\sqrt{2-x^3} \Leftrightarrow x^2=2-x^3 \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Với $x^2+xt+t^2=x+t$:

$$\Rightarrow x^2+x\sqrt{2-x^3}+2-x^3=x+\sqrt{2-x^3} \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2-x^3}-x^3+x^2-x+2=0$$

(vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x=1.

- **Nhận xét:** Phương trình khá đơn giản có thể đặt ẩn phụ để đưa về hệ đối xứng loại 2, và ý tưởng này không quá khó nhận thấy thì ta để ý rằng: trong căn 3 sẽ có x bậc 2, trong căn 2 sẽ có x bậc 3 vì thế ta có thể đặt ẩn để đưa về hệ đối xứng.

BÀI TOÁN 25 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình:

$$\frac{2x^2+x-4}{\sqrt{x-2}-1}=\frac{-4x^2-6x+2-4\sqrt{x-2}}{x-3}(*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 2, x \neq 3$

$$(*) \Leftrightarrow (2x^2+x-4)(\sqrt{x-2}+1)=-4x^2-6x+2-4\sqrt{x-2}$$
$$\Leftrightarrow (2x^2+x-4)\sqrt{x-2}+4\sqrt{x-2}=-4x^2-6x+2-(2x^2+x-4)$$
$$\Leftrightarrow (2x^2+x)\sqrt{x-2}=-6x^2-7x-2$$

Ta đặt: $t=\sqrt{2-x} \geq 0$

Phưởng trình trở thành:

$$(2x^2+x)t=-6x^2-7x-2 \Leftrightarrow x^2(2t+6)+x(t+7)+2=0$$
$$\Delta=(t+7)^2-4.(2t+6).2=t^2+14t+49-16t-48=(t-1)^2$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x=\frac{-t-7-t+1}{4t+12}=\frac{-t-3}{2t+6}=\frac{-1}{2}(L) \\ x=\frac{-t-7+t-1}{4t+12}=\frac{-2}{t+3} \end{array}\right.$$

$$x=\frac{-2}{t+3} \Rightarrow x=\frac{-2}{\sqrt{x-2}+3} \Leftrightarrow x(\sqrt{x-2}+3)=-2$$

Ta có đánh giá sau:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2}+3>0 \end{cases} \Rightarrow x(\sqrt{x-2}+3)>0>-2$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

- **Nhận xét:** Tuy phức tạp nhưng sau khi biến đổi bằng liên hợp (nhân $x-3$ cho 2 vế), thì bài toán sẽ quy về phương trình đặt ẩn phụ đơn giản vì đối với bài này ta không cần thêm bớt để tạo ra bình phương mà chỉ cần đặt là sẽ xuất hiện bình phương, do đó đối với bài này mấu chốt nằm ở bước biến đổi.

BÀI TOÁN 26 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $7x^2-10x+14=5\sqrt{x^4+4}$

LỜI GIẢI:

Phương trình trên tương đương:

$$7x^2-10x+14=\sqrt{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2-2x+2)+(x^2+2x+2)=\sqrt{x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x^2-2x+2} \\ b=\sqrt{x^2+2x+2} \end{cases}(a,b\geq 0)$

Phương trình trở thành:

$$6a^2+b^2=5ab\Leftrightarrow(2a-b)(3a-b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a=b\\3a=b\end{array}\right.$$

TH1: 2a=b

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{x^2+2x+2}\Leftrightarrow 4(x^2-2x+2)=x^2+2x+2$$

$$\Rightarrow 3x^2-10x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5+\sqrt{7}}{3}\\x=\frac{5-\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.(N)$$

TH2: 3a=b

$$\Rightarrow 3\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{x^2+2x+2}\Leftrightarrow 9(x^2-2x+2)=x^2+2x+2$$

$$\Rightarrow 8x^2-20x+16=0(VN)$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: ....

- **Nhận xét:** Ý tưởng bài toán khá đơn giản biểu thức trong căn có thể được phân tích thành nhân tử từ đó ta có thể biểu diễn cho biểu thức còn lại, Ta đặt ẩn phụ như lời giải sẽ kết thúc được bài toán.
- **Phương pháp khác:** Dựa theo ý tưởng của bài toán số 3 ta có thể xét x = 0 sau đó là x khác 0 để chia 2 vế cho x^2 rồi đặt ẩn phụ tương tự ý tưởng này cũng khá hay các bạn có thể thử !

BÀI TOÁN 27 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$\frac{x^2+4x}{x-1}=6\sqrt{\frac{x^2-5x+9}{x-1}}(*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x > 1$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{x-1} - 6\sqrt{\frac{x^2+6x+10}{x-1}} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-6x+10}{x-1} + 10 - 6\sqrt{\frac{x^2-6x+10}{x-1}} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x^2-6x+10}{x-1}} + 1\right)^2 - 6\sqrt{\frac{x^2-6x+10}{x-1}} + 1 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x^2-6x+10}{x-1}} + 1 - 3\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-6x+10}{x-1}} + 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+10}{x-1} + 1 = 3^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 = 8(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 14x + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 - \sqrt{31} \\ x = 7 + \sqrt{31} \end{array}\right.(N)$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là ....

- **Nhận xét:** Đây là một phương trình chứa căn tương đối phức tạp, vấn để nằm ở việc xử lí sao cho phân thức ngoài căn có mối liên hệ với phân thức trong căn, nhận thấy 2 phân thức đều có cùng mẫu ta phân tích như sau: $\frac{x^2-5x+9}{x-1} = \frac{x^2-6x+10}{x-1} + 1$, Từ đó ta biểu diễn phân thức bên ngoài như thế có thể sẽ xuất hiện hằng đẳng thức $x^2 - 6x + 9$ vì hệ số trước căn là 6. Kết thúc bài toán.

BÀI TOÁN 28 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $(4-x)\sqrt{x+4} + (x+4)\sqrt{4-x} = 16$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $-4 \le x \le 4$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{4-x} \\ b = \sqrt{x+4} \end{cases} (a, b \ge 0)$

Phương trình trở thành:

$a^2b + ab^2 = 16(1)$

Ta lại có:

$a^2 + b^2 = 4 - x + x + 4 = 8(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a^2b + ab^2 = 16 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab(a+b) \\ (a+b)^2 - 2ab = 8 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} a + b = S \\ ab = P \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} SP = 16 \\ S^2 - 2P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 16 \\ S^3 - 2SP = 8S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 16 \\ S^3 - 8S - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} SP = 16 \\ (S-4)(S^2 + 4S + 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ S = 4 \end{cases}$$

Khi đó a,b là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 4X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \Rightarrow a = b = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x} = 2 \\ \sqrt{x+4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0(N)$$

Vậy phương trình có nghiệm là x=0.

- **Nhận xét:** Nhìn chung phương trình có ý tưởng chính là đặt ẩn phụ khá đơn giải để nhận biết, Dễ dàng tìm được 2 phương trình đưa về hệ đối xứng loại 1 việc còn lại chỉ cần giải hệ trên như lời giải đã trình bày.
- **Phương pháp khác:** Phương trình có thể được biến đối như sau: $\sqrt{(4-x)(x+4)}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+4}) = 16$ sau đó ta đặt: $t = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+4}$, ta thu được: $t^2 = 8 + 2\sqrt{(4-x)(x+4)} \rightarrow \sqrt{(4-x)(x+4)} = \frac{t^2-8}{2}$, Các bạn có thể thử!

BÀI TOÁN 29 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2 - x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x + 4} = 6x - 2x^2 - 4(*)$$

LỜI GIẢI:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(2x^2 - x + 6) - (x^2 + 2x + 4)}{\sqrt{2x^2 - x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} + 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2x^2 - x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} + 2(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{2x^2 - x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} + 2(x-2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} + 2\right) = 0$$

Mà: $\frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} + 2 > 0$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.(N)$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là x=1 và x=2.

- **Nhận xét:** Ta có thể dàng nhẩm được nghiệm của phương trình là x=1 hoặc x=2, từ đó có thể sử dụng phương pháp liên hợp. Đây là một bài tập cơ bản nhất của phương pháp "liên hợp".

BÀI TOÁN 30 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{3x^8+2746x^4+410755}+2}{x^2+6x+18}-2x^2+12x-36=0(*)$$

LỜI GIẢI:

Phương trình (*) tương đương:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(3x^4+565)(x^4+727)}+2}{x^2+6x+18}=2x^2-12x+36$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x^4+565)(x^4+727)}+2=2(x^2+6x+18)(x^2-6x+18)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x^4+565)(x^4+727)}+2=2(x^4+324)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x^4+565)(x^4+727)}=2x^4+626$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^4+565}>0 \\ \sqrt{x^4+727}>0 \end{cases}$$

Từ đó ta có đánh giá sau:

$$VT=\sqrt{(3x^4+565)(x^4+727)} \le \frac{3x^4+565+x^4+727}{2}=2x^4+646=VP$$

(theo BĐT Cauchy)

Dấu "=" xảy ra:

$$3x^4+565=x^4+727 \Leftrightarrow 2x^4-162=0 \Leftrightarrow x^4=81 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là x=3, x=-3.

- **Nhận xét:** Ta thấy biểu thức trong căn bậc 8 cảm thấy khá bối rối vì bậc khá lớn!. Tuy vậy sau khi phân tích được thành tích thì nó đã khá đơn giản ta chỉ cần tiếp tục quy đồng như lời giải đến dấu tương đương thứ 4 ta hoàn toàn có thể $t=x^4$ để tiếp tục nhưng ở đây ta thấy khi dùng bđt Cauchy để đánh giá thì sẽ nhanh và gọn hơn!

BÀI TOÁN 31 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq -2$

Ta biến đổi phương trình trên:

$$x^3 - 3x(x+2) + 2\sqrt{(x+2)^3} = 0$$

Đặt: $t = \sqrt{x+2}$

Phương trình trở thành:

$$x^3 - 3xt^2 + 2t^3 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - t^3) + (3t^3 - 3xt^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2) - 3t^2(x-t) = 0 \Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt - 2t^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)^2(x+2t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ x = -2t \end{array}\right.$$

TH1: x = t

$$\Rightarrow x = \sqrt{x+2}(x \geq 0) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(N) \\ x = -1(L) \end{cases}$$

TH2: x=-2t

$$\Rightarrow x = -2\sqrt{x+2}(x \leq 2) \Leftrightarrow x^2 = 4(x+2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{3}(L) \\ x = 2 - 2\sqrt{3}(N) \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm ....

- **Nhận xét:** Phương trình đặt ẩn phụ không hoàn toàn, có bậc 3 nên ta không sử dụng phương pháp tính delta mà có thể phân tích thành nhân tử. Dấu hiệu nhận biết ta thấy sau khi đặt 3x ra thì biểu thức ở ngoài và trong căn đề có x+2 nên ta đặt như lời giải!
- **Phương pháp khác:** Với một góc nhìn khá ta thấy sau khi đặt 3x ra thì biểu thức trong và ngoài căn đều có x+2 nên ta sẽ chia $\sqrt{(x+2)^3}$ ta sẽ thu được phương trình sau: $(\frac{x}{\sqrt{x+2}})^3 - 3\frac{x}{\sqrt{x+2}} + 2$ từ đó ta có thể đặt ẩn phụ hoàn toàn cho bài toán. Chú ý: xét x=-2 trước khi chia. Các bạn có thể thử phương pháp này!

BÀI TOÁN 32 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $2\sqrt[3]{2x+2} - 24 = -5\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x + 4}$

LỜI GIẢI:

Phương trình trên tương đương:

$$2\sqrt[3]{2x+2} - 4 = -5\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x + 4 + 20}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{2x+2} - 2) = -5(\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x + 4} - 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2x-6)}{\sqrt[3]{(2x+2)^2} + 2\sqrt[3]{2x+2} + 4} + \frac{5(x^3 - 3x^2 + 4x - 12)}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x - 12} + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2x-6)}{\sqrt[3]{(2x+2)^2} + 2\sqrt[3]{2x+2} + 4} + \frac{5(x^2+4)(x-3)}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x + 4} + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{2}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}+2\sqrt[3]{2x+2}+4}+\frac{5(x^2+4)}{\sqrt{x^3-3x^2+4x+4}+4}\right)=0$$

Ta chứng minh:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}+2\sqrt[3]{2x+2}+4}+\frac{5(x^2+4)}{\sqrt{x^3-3x^2+4x+4}+4}=0(*)$$

Vô nghiệm.

Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{2}{(\sqrt[3]{2x+2}+1)^2+3}+\frac{5(x^2+4)}{\sqrt{x^3-3x^2+4x+4}+4}>0$$

Vậy (*) vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x=3 .

- **Nhận xét:** Bài toán sử dụng phương pháp liên hợp ta thấy có thể dễ dàng nhẩm được nghiệm là x=3, từ đó ta sử dụng tính chất liên hợp như lời giải, biểu thức còn lại không khó thấy luôn dương ta chứng minh như lời giải.

BÀI TOÁN 33 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình: $25x^4-10x^2-15+(5x^2-5)\sqrt{3x+1}=0(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện của phương trình: $x\geq -\frac{1}{3}$

$$(*)\Leftrightarrow (25x^4+10x^2+1)+(5x^2+1)\sqrt{3x+1}-4(5x^2+1)-6\sqrt{3x+1}-12=0$$

$$\Leftrightarrow (5x^2+1)^2+(5x^2+1)\sqrt{3x+1}-4(5x^2+1)-6\sqrt{3x+1}-12=0$$

Đặt: $\begin{cases} a=5x^2+1 \\ b=\sqrt{3x+1}\end{cases}(a,b\geq 0)$

Phương trình trở thành:

$$a^2+ab-4a-6b-12=0\Leftrightarrow (a^2+ab+2a)+(-6a-6b-12)=0$$

$$\Leftrightarrow a(a+b+2)-6(a+b+2)=0\Leftrightarrow (a-6)(a+b+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=6(N) \\ a+b+2=0(L)(5x^2+1+\sqrt{3x+1}+2>0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+1=6\Leftrightarrow 5x^2=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(N) \\ x=-1(L)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là x=1.

- **Nhận xét:** Phương trình cần có sự linh hoạt trong các bước tách hạng từ để đặt nhân tử chung, tuy đặt nhiều ẩn như vẫn có thể dễ dàng tìm được nghiệm.

BÀI TOÁN 34 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$\sqrt{13x^2+52x+55}+\sqrt{3x^2+9x+8}=4\sqrt{2x^2+7x+\frac{269}{39}}$$

LỜI GIẢI:

Ta có:

$$VT=\sqrt{13}.\sqrt{x^2+4x+\frac{55}{13}}+\sqrt{3}.\sqrt{x^2+3x+\frac{8}{3}}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$VT\le\sqrt{((\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2)(x^2+4x+\frac{55}{13}+x^2+3x+\frac{8}{3})}$$

$$=4\sqrt{2x^2+7x+\frac{269}{39}}=VP$$

Dấu "=" xảy ra:

$$\sqrt{\frac{x^2+4x+\frac{55}{13}}{13}}=\sqrt{\frac{x^2+3x+\frac{8}{3}}{3}}\Leftrightarrow 3(x^2+4x+\frac{55}{13})=13(x^2+3x+\frac{8}{3})$$

$$\Leftrightarrow 9(13x^2+52x+55)=169(3x^2+9x+8)\Leftrightarrow 390x^2+1053x+857=0$$

(vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

- **Nhận xét:** Phương trình có các căn khá phức tạp, sau khi giải ta nhận thấy phương trình đã cho không có nghiệm nên việc xử lí liên hợp là không khả thi. Khi áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho VT sẽ bằng VP phương trình có nghiệm khi dấu "=" xảy ra.

BÀI TOÁN 35 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình:

$$\frac{11-3x}{\sqrt{3x+1}}+\frac{11+3x}{\sqrt{1-3x}}=22(*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $\frac{-1}{3}<x<\frac{1}{3}$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{10+(1-3x)}{\sqrt{3x+1}}+\frac{10+(3x+1)}{\sqrt{1-3x}}=22$$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{3x+1}\\ b=\sqrt{1-3x}\end{cases}(a,b>0)$

Phương trình trở thành:

$$\frac{10+b^2}{a}+\frac{10+a^2}{b}=22\Leftrightarrow 10b+b^3+10a+a^3=22ab \quad (1)$$

Ta lại có: $a^2 + b^2 = 2(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} 10a + a^3 + 10b + b^3 = 22ab \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a^2+b^2-ab) + 10(a+b) = 22ab \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(2-ab) + 10(a+b) = 22ab \\ (a+b)^2 - 2ab = 2 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} a + b = S \\ ab = P \end{cases} (S, P > 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(2-P) + 10S = 22P \\ S^2 - 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(2 - \frac{S^2-2}{2}) + 10S = 11(S^2-2)(**) \\ \frac{S^2-2}{2} = P \end{cases}$$

$$(**) \Leftrightarrow 4S - S^3 + 2S + 10S^2 = 22S^2 - 44 \Leftrightarrow S^3 + 12S^2 - 6S - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow (S-2)(S^2 + 14S + 22) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 2(N) \\ S = -7 - 3\sqrt{3}(L) \\ S = 7 - 3\sqrt{3}(L) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow S = 2, P = 1$$

Khi đó a,b là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 2X + 1 = 0 \rightarrow X = 1 \rightarrow a = b = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = 1 \\ \sqrt{1-3x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0(N)$$

Vậy phương trình có nghiệm là x=0.

- **Nhận xét:** Nhìn vào phương trình ta nhận thấy rằng ý tưởng chính là đặt ẩn phụ tuy nhiên ta đã tìm 1 hệ đối xứng loại 1 nhưng để giải nó đúng là một điều khá căng thẳng, may thay hệ có thể giải theo phương pháp thế và lại thuận lợi hơn phương trình (**) khi có nghiệm là S=2 có thể dễ dàng nhẩm và chia Hoocner, kết thúc bài toán.

BÀI TOÁN 36 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(2 + 2\sqrt{1-x^2}) = 8$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Đặt: $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} (t \ge 0)$

Ta có:

$$t^2 = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = 1 + x + 1 - x + 2\sqrt{(1+x)(1-x)} = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$$

Khi đó phương trình đã cho ban đầu trở thành:

$$t.t^2 = 8 \Leftrightarrow t^3 = 8 \Leftrightarrow t = 2(N)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 4 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0(N)$$

Vậy phương trình có nghiệm là x=0.

- **Nhận xét:** Đây là một phương trình cơ bản ở cấp độ THCS dựa trên ý tưởng của bài toán số 2 có phần nâng cao hơn. Ý tưởng vẫn vậy đặt ẩn phụ để giải quyết bài toán!.

BÀI TOÁN 37 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $x^3 + x^2 + x = (-x^2 + 2x + 3)\sqrt{-x^2 + x + 2}$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 2$

Ta biến đổi phương trình như sau:

$$x^3 + x(x+1) = (3-x)(x+1)\sqrt{(x+1)(2-x)}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x(x+1) = (3-x)\sqrt{(x+1)^3(2-x)}$$

Xét x =− 1 thay vào phương trình ta thấy không phải là nghiệm

Xét x ≠ 1 ta chia 2 vế của phương trình cho $\sqrt{(x+1)^3}$ ta được:

$$\frac{x^3}{\sqrt{(x+1)^3}} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (3-x)\sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{\sqrt{(x+1)^3}} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{x}{\sqrt{x+1}})^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{2-x})^3 + \sqrt{2-x}$$

Xét hàm: $f(x) = t^3 + t$

Ta có: $f'(x) = 3t^2 + 1 > 0$

$$\Rightarrow f(\frac{x}{\sqrt{x+1}}) = f(\sqrt{2-x}) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(x+1)} = x(x \geq 0) \Leftrightarrow x^2 = x + 2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}(L) \\ x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}(N) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là ....

- **Nhận xét:** Bài toán vận dụng sự phân tích kéo léo với phương pháp hàm đặt trưng độc đáo. Ta cần phân tích ở hai điểm, 1 là đưa x + 1 vào trong căn, 2 là phân tích $x^2 + x = x(x+1) = x\sqrt{(x+1)^2}$ ta sẽ nhận thấy cần chia 2 vế cho $\sqrt{(x+1)^3}$ để ra được hướng giải!

BÀI TOÁN 38 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình:

$$(2-3\sqrt{x+3})(x^2+6)=23x+9x^2$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq -3$

Xét: $x=\frac{-23}{9}$ thay vào phương trình ta thấy nó là nghiệm của phương trình

Xét: $x \neq \frac{-23}{9}$ ta chia 2 vế cho $2-3\sqrt{x+3}$ ta có:

$x^2+6=\dfrac{23x+9x^2}{2-3\sqrt{x+3}} \Leftrightarrow x^2+6=-x(\dfrac{-23x-9x}{2-3\sqrt{x+3}})$

$\Leftrightarrow x^2+6+x.\dfrac{2^2-(3\sqrt{x+3})^2}{2-3\sqrt{x+3}}=0 \Leftrightarrow x^2+6+x(2+3\sqrt{x+3})=0$

$\Leftrightarrow x^2+2(x+3)+3x\sqrt{x+3}=0$

Đặt: $a=\sqrt{x+3}\geq 0$

Phương trình trở thành:

$x^2+2a^2+3ab=0 \Leftrightarrow (x^2+ax)+(2a^2+2ax)=0$

$\Leftrightarrow x(x+a)+2a(x+a)=0 \Leftrightarrow (x+2a)(x+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2a \\ x=-a \end{array}\right.$

Với $x=-a$:

$\Rightarrow x=-\sqrt{x+3}(x\leq 0) \Leftrightarrow x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}(N) \\ x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}(L) \end{array}\right.$

Với $x=-2a$:

$\Rightarrow x=-2\sqrt{x+3}(x\leq 0) \Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(N) \\ x=6(L) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là ...

- **Nhận xét:** Cần có kiến thức vững về liên hợp để rút gọn được biểu thức, phương trình cũng không quá khó khá phù hợp với HS THCS, cần có kĩ thuật đặc ẩn phụ, phân tích nhân tử, ...

BÀI TOÁN 39 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$(2\sqrt{x}-1)^2+4=2\sqrt{3x+1}(\sqrt{x}-2)(*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 0$

$(*) \Leftrightarrow 4x-4\sqrt{x}+1+4=2\sqrt{x(3x+1)}-4\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow 4x-4\sqrt{x}+5-2\sqrt{x(3x+1}+4\sqrt{3x+1}=0$
$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2+(\sqrt{3x+1})^2+2^2-2\sqrt{x}.\sqrt{3x+1}+2.2.\sqrt{3x+1}-2.\sqrt{x}.2=0$
$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}-2)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{3x+1}-2=0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=\sqrt{3x+1}(x\geq 4[1]) \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4=3x+1$
$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}=3-2x(x\leq \frac{3}{2}[2])$

Từ điều kiện [1] và [2] ta thấy không có x thỏa mãn.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

- **Nhận xét:** Phương trình vô tỉ kết hợp giữa căn thức và hằng đẳng thức $x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy=(x+y+z)^2$ cần nhìn ra được hằng đẳng thức, giải phương trình cuối khá đơn giản tuy nhiên ta có thể tận dùng 2 điều kiện [1], [2] để chứng minh vô nghiệm ngay!.

BÀI TOÁN 40 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình:

$$x^4-4x^3+4x-1=-5(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-1})(*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 2$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4x+1)=\frac{-5(x^2-2x-2x+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4x+1)+\frac{5(x^2-4x+1)}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+1)(x^2-1+\frac{5}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-1}})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+1=0 \\ x^2-1+\frac{5}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-1}}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{3}(L) \\ x=2+\sqrt{3}(N) \end{array}\right. \\ x^2-1+\frac{5}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-1}}=0(**) \end{array}\right.$$

Ta chứng minh:

$$\begin{cases} \frac{5}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-1}}>0 \\ x^2-1\geq 2^2-1=3>0 \end{cases} \Rightarrow x^2-1+\frac{5}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-1}}>0 \Rightarrow (**)(VN)$$

Vậy phương trình có nghiệm là: ...

- **Nhận xét:** VT của phương trình có thể phân tích được thành nhân tử, tương tự VP ta cũng sử dụng liên hợp ra được nhân tử tương tự. Ta cần đánh giá phương trình phức tạp vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất, ta có thể tận dụng điều kiện ở đầu bài để chứng minh dễ dàng hơn.

BÀI TOÁN 41 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$3\sqrt[3]{2x^3+12x^2}=\frac{x^4+40}{4x}+x^2+1, x>0$$

LỜI GIẢI:

Ta nhân 4x vào 2 vế của phương trình ta được:

$12x\sqrt[3]{2x^3+12x^2}=x^4+40+4x^3+4x=x^4+4x^3+4x+40$

$\Leftrightarrow 4.3\sqrt[3]{x^3.2x^2.(x+6)}=x^4+4x^3+4x+40$

Áp dụng BĐT Cauchy cho VT của phương trình ta có (vì x ≥ 0 nên $x^3, 2x^2, x+6$ dương) :

$4.3.\sqrt[3]{x^3.2x^2.(x+6)}\leq 4(x^3+2x^2+x+6)=4x^3+8x^2+4x+24$

Ta lại có:

$8x^2\leq x^4+16(Cauchy)\Rightarrow 4.3\sqrt[3]{x^3.2x^2.(x+6)}\leq 4x^3+x^4+16+4x+24$
$=x^4+4x^3+4x+40=VP$

Dấu "=" xảy ra:

$\begin{cases}x^3=2x^2=x+6\\x^4=16\end{cases}\Leftrightarrow x=2(N)$

Vậy phương trình có nghiệm là x=2.

- **Nhận xét:** Bài toàn dùng đánh giá Cauchy để giải quyết áp dụng cho 3 số dương trong căn 3 và 1 lần nữa cho $8x^2$, Nghiệm của phương trình chính là dấu "=", Chú ý: Dấu "=" phải xảy ra ở tất cả bất đẳng thức đã dùng.

BÀI TOÁN 42 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{2x^2+6x+4}+x^2+4x+3=0(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện của phương trình: x $\in(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$

$(*)\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{2x^2+6x+4}+(x+3)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{2x^2+6x+4}+x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\\sqrt{2x^2+6x+4}+x+1=0(2)\end{array}\right.$

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+6x+4}=-x-1(x\leq -1)$

$\Leftrightarrow 2x^2+6x+4=x^2+2x+1\Leftrightarrow x^2+4x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1(N)\\x=-3(N)\end{array}\right.$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x=-1 và x=-3.

- **Nhận xét:** Phương trình khá cơ bản với các hệ số khá đẹp biểu thức bên ngoài có thể phân tích thành nhân tử để đặt nhân tử chung, nói chung đây là dạng cơ bản ở cấp THCS mà ta đã học.

BÀI TOÁN 43 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $(2x+1)\sqrt{x^2+x+5} = 2x^2+4x-3$

LỜI GIẢI:

Phương trình đã cho tương đương:
$(x^2+x+5)+(2x+1)\sqrt{x^2+x+5} = 3x^2+5x+2$
$\Leftrightarrow (x^2+x+5)+(2x+1)\sqrt{x^2+x+5}-(3x^2+5x+2) = 0(*)$
Đặt: $t = \sqrt{x^2+x+5} \geq 0$
(*) trở thành:
$t^2+(2x+1)t-(3x^2+5x+2) = 0$
$\Delta = (2x+1)^2-4.1.(-3x^2-5x-2) = 4x^2+4x+1+12x^2+20x+8$
$= 16x^2+24x+9 = (4x+3)^2$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-2x-1+4x+3}{2} = x+1 \\ t = \frac{-2x-1-4x-3}{2} = -3x-2 \end{array}\right.$
TH1: t = x + 1
$\sqrt{x^2+x+5} = x+1(x \geq -1) \Leftrightarrow x^2+x+5 = x^2+2x+1$
$\Leftrightarrow x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4(N)$
TH2: t = -3x-2
$\sqrt{x^2+x+5} = -3x-2(x \leq \frac{-2}{3}) \Leftrightarrow x^2+x+5 = 9x^2+12x+4$
$\Leftrightarrow 8x^2+11x-1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-11-3\sqrt{17}}{16}(N) \\ x = \frac{-11+3\sqrt{17}}{16}(L) \end{array}\right.$
Vậy phương trình có 2 nghiệm là ...

BÀI TOÁN 44 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $2x^2-2x-4-(x+5)\sqrt{x-2} = 0(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện $x \geq 2$
$(*) \Leftrightarrow (2x+3)(x-2)-(x+5)\sqrt{x-2}+(2-x) = 0$
Đặt: $t = \sqrt{x-2} \geq 0$
Phương trình trở thành:
$(2x+3)t^2-(x+5)t+(2-x) = 0$
$\Delta = (x+5)^2-4.(2x+3)(2-x) = x^2+10x+25-4(4x-2x^2+6-3x)$
$= x^2+10x+25-4x+8x^2-24 = 9x^2+6x+1 = (3x+1)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{x+5+3x+1}{2(2x+3)} = 1 \\ t = \frac{x+5-3x-1}{2(2x+3)} = \frac{2-x}{2x+3} \end{array}\right.$$

TH1: t = 1

$\sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3(N)$

TH2: $t = \frac{2-x}{2x+3}$

$\sqrt{x-2} = \dfrac{2-x}{2x+3} \Leftrightarrow (2x+3)\sqrt{x-2} = 2 - x$

$\Leftrightarrow (2x+3)\sqrt{x-2} + (x-2) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}(2x+3+\sqrt{x-2}) = 0 \left[\begin{array}{l} x = 2(N) \\ 2x+3+\sqrt{x-2} = 0(VN) \end{array}\right.$

(vì $2x + 3 + \sqrt{x-2} \geq 2.2 + 3 + 0 = 7 > 0$)

Vậy phương trình có 2 nghiệm là x = 3 và x = 2.

- **Nhận xét:** Bài toán 42 và 43 sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn để tính delta, tuy nhiên 2 bài toán này cần có kĩ thuật tách hạng tử để ép delta về bình phương, đây cũng là kĩ thuật không quá xa lạ để giải phương trình.

BÀI TOÁN 45 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2+x+3} = \frac{3x^2+3x+3}{3x+2} (*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \neq \frac{-3}{2}$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+3} = x + \dfrac{x+3}{3x+2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+3} - x = \dfrac{x+3}{3x+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+x} - \dfrac{x+3}{3x+2} = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+3}+x} - \dfrac{1}{3x+2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+x+3}+x} = \frac{1}{3x+2} (**) \end{array}\right.$

$(**) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+3} + x = 3x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+3} = 2x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-7-\sqrt{37}}{6} \\ x = \frac{-7+\sqrt{37}}{6} \end{array}\right.$$

Thử lại ta có $x = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ là nghiệm của phương trình.

- **Nhận xét:** Phương trình kết hợp giữa tách hạng tử, đặt nhân tử chung, liên hợp để giải quyết bài toán, mấu chốt của bài toán nằm ở chỗ phân tích $\frac{3x^2+3x+3}{3x+2} = x + \frac{x+3}{3x+2}$ sau đó chuyển vế dùng liên hợp sẽ xuất hiện nhân tử chung, kết thúc bài toán. Chú ý: thử lại nghiệm sau khi giải!.

BÀI TOÁN 46 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:$\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+2} + x^3 = 0$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq -2$

Ta nhẩm được nghiệm của phương trình là x = -1

Đặt: $f(x) = \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+2} + x^3$

Ta có:

$$f'(x) = (\sqrt{(x+1)^3})' + (\sqrt{x+2})' + (x^3)'$$
$$= \frac{((x+1)^3)'}{2\sqrt{(x+1)^3}} + \frac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}} + 2x^2$$
$$= \frac{(x^3+3x^2+3x+1)'}{2\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + 2x^2$$
$$= \frac{3x^2+6x+3}{2\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + 2x^2$$

$$\begin{cases} \frac{3x^2+6x+3}{2\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}} = \frac{3(x+1)^2}{2\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}} \geq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0 \\ 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến

VP của phương trình là 0

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x = -1

- **Nhận xét:** bài toán dùng tính chất hàm điệu để giải quyết bài toán, ta thấy dễ để nhẩm nghiệm là x =-1 lúc này có thể dùng liên hợp nhưng sẽ khá phức tạp nên ta sẽ dùng tính đơn điệu của hàm số, Đặt f(x) là VT ta thấy f'(x) > 0 nên f(x) đồng biến, VP lại là 0 nên x=-1 là nghiệm duy nhất, Kết thúc bài toán.

BÀI TOÁN 47 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 17 - 2\sqrt{x-2} = 0$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 2$
Phương trình đã cho tương đương:
$2(x^2 - 6x + 9) + (x - 1 - 2\sqrt{x-2}) = 0$
$\Leftrightarrow 2(x-3)^2 + (x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1) = 0$
$\Leftrightarrow 2(x-3)^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 = 0$
Ta có:
$2(x-3)^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 \geq 0$
$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ \sqrt{x-2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3(N)$
Vậy phương trình có nghiệm là x = 3.

BÀI TOÁN 48 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $x^4 - 7x^2 + x + 30 - 2\sqrt{13x^2 + 13x + 13} = 0$

LỜI GIẢI:

Phương trình đã cho tương đương:
$(x^4 - 8x^2 + 16) + (x^2 + x + 14 - 2\sqrt{13x^2 + 13x + 13}) = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 + [(x^2 + x + 1) + 2.\sqrt{13}.\sqrt{x^2 + x + 1} + 13] = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 + (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{13})^2 = 0$
Ta có:
$(x^2 - 4)^2 + (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{13})^2 \geq 0$
$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{13} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x^2 + x + 1 = 13 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 4; x = -3 \end{cases} (VN)$
Vậy phương trình vô nghiệm.

- **Nhận xét:** Bài toán 45 và 46 cùng dùng một phương pháp là đưa về tổng không âm, phương pháp này đòi hỏi kĩ năng tách hạng tử khá cao, Tuy nhiên chỉ cần tách được 1 bình phương thì sẽ xuất hiện bình phương còn lại nên có ý tưởng khá đơn giản.

BÀI TOÁN 49 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{x+1} + (x-3)\sqrt{1-x} + 2x = 0$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Phương trình đã cho tương đương:

$(x+1+2)\sqrt{x+1}+2x=(3-x)\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}+2x=(1-x)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1}+(x+1)+2\sqrt{x+1}=(1-x)\sqrt{1-x}+(1-x)+2\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3+(\sqrt{x+1})^2+2\sqrt{x+1}=(\sqrt{1-x})^3+(\sqrt{1-x})^2+2\sqrt{1-x}$

Xét hàm: $f(t)=t^3+t^2+2t$

Ta có:

$f'(t)=3t^2+2t+1=3(t+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}>0$

$\Rightarrow f(\sqrt{x+1})=f(\sqrt{1-x})$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x+1=1-x \Leftrightarrow x=1(N)$

Vậy phương trình có nghiệm x=1.

- **Nhận xét:** Bài toán khá khó được giải theo phương pháp hàm đặt trưng, Bài này có kĩ thuật tách khá đẹp cần chuyển vế trước khi giải để đưa về biểu thức giống trong căn, nếu đã giải nhiều bài tập về phương pháp này thì bạn sẽ nhìn ra một số hướng đi cơ bản.

BÀI TOÁN 50 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình:

$$2x^2+4x-1-(2x+3)\sqrt{x^2+\frac{5}{2}x+3}=0$$

LỜI GIẢI:

Phương trình đã cho tương đương:

$2x^2+4x-1-(2x+3)\sqrt{\frac{1}{2}(2x^2+5x+6)}=0$

$\Leftrightarrow (2x^2-4x+2)-(2x+3)\sqrt{\frac{1}{2}[(2x^2+5x+3)+3]}-3=0$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2-(2x+3)\sqrt{\frac{1}{2}[(2x+3)(x+1)+3]}-3=0$

Đặt: $\begin{cases} a=x+1 \\ b=\sqrt{\frac{1}{2}(2x+3)(x+1)+3} \end{cases}$

Ta có phương trình:

$2a^2-(2x+3)b-3=0_{(1)}$

Ta lại có phương trình:

$b^2 = \frac{1}{2}[(2x+3)a+3] \Leftrightarrow 2b^2 - (2x+3)a - 3 = 0$ (2)

Lấy (1) - (2) theo vế ta có:

$2(a^2 - b^2) + (2x+3)(a-b) = 0$

$\Leftrightarrow 2(a-b)(a+b) + (2x+3)(a-b) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+2x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a = b \\ 2a+2b+2x+3=0 \end{array}\right.$

TH1: a = b

$\Rightarrow x+1 = \sqrt{x^2 + \frac{5}{2}x + 3}(x \geq -1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + \frac{5}{2}x + 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4(L)$

TH2: 2a + 2b + 2x + 3 = 0

$\Rightarrow 2(x+1) + 2\sqrt{x^2 + \frac{5}{2} + 3} + 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + \frac{5}{2}x + 3} = -4x - 5(x \leq \frac{-5}{4})$

$\Leftrightarrow 4(x^2 + \frac{5}{2}x + 3) = 16x^2 + 40x + 25$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 10x + 12 = 16x^2 + 40x + 25 \Leftrightarrow 12x^2 + 30x + 13 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-15-\sqrt{69}}{12}(N) \\ x = \frac{-15+\sqrt{69}}{12}(L) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 1 nghiệm là ....

- **Nhận xét:** Phương trình có thể đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, Mấu chốt của bài toán là ta phân tích được biểu thức trong căn như lời giải từ đó ta thấy được 2x+3 cùng xuất hiện ở trong và ngoài căn nên có thể đặt ẩn .

BÀI TOÁN 51 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $9x^2 - x = 2\sqrt{x-1}(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: x ≥ 1

$9x^2 - x + x = x + 2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 9x^2 = (x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1$

$\Leftrightarrow (3x)^2 = (\sqrt{x-1} + 1)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \sqrt{x-1} + 1(1) \\ -3x = \sqrt{x-1} + 1(2) \end{array}\right.$

Xét phương trình (1):

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3x - 1 (x \geq \dfrac{1}{3}) \Leftrightarrow x - 1 = 9x^2 - 6x + 1$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 7x + 2 = 0 (VN)$

Xét phương trình (2):

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -3x - 1 (x \leq \dfrac{-1}{3}) \Leftrightarrow x - 1 = 9x^2 + 6x + 1$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 5x + 2 = 0 (VN)$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

- **Nhận xét:** Ý tưởng của phương trình đưa được về phương trình bằng cách đưa về phương trình đơn giản ($a^2 = b^2 \leftrightarrow a = \pm b$). Ta có VT là $9x^2$ là một bình phương cần tìm 1 bình phương cho VP, ta chỉ cần thêm bớt $x - 1$,1 là kết thúc bài toán.

BÀI TOÁN 52 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2x^2 - 10x + 16} (*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 1$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{(2x^2 - 12x + 18) + 2(x-3)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x^2 - 6x + 9) + 2(x-1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2(x-1)}$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x-2} \\ b = x - 3 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$a + b = \sqrt{2a^2 + 2b^2} \Leftrightarrow (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x (x \leq 3)$

$\Leftrightarrow x - 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 (N) \\ x = 5 (L) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là x = 2.

- **Nhận xét:** Phương trình được giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ cơ bản phân tích biểu thức ngoài căn có thành phần $x - 1, x - 3$ nên ta cố gắng biểu diễn biểu thức trong căn tương tự.

BÀI TOÁN 53 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $x^2 - 4x - 15 = (5 - 2x)\sqrt{x-1}$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 1$
Trừ 2(5-2x) cho 2 vế ta được:

$$x^2 - 4x - 15 - 2(5-2x) = (5-2x)\sqrt{x-1} - 2(5-2x)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 25 = (5-2x)(\sqrt{x-1} - 2)$$
$$\Leftrightarrow (x+5)(x-5) = \frac{(5-2x)(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}$$
$$\Leftrightarrow (x+5)(x-5) + \frac{(2x-5)(x-5)}{\sqrt{x-1}+2} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(x+5+\frac{2x-5}{\sqrt{x-1}+2}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 5(N) \\ x+5+\frac{2x-5}{\sqrt{x-1}+2} = 0(*) \end{array}\right.$$

Xét phương trình (*):

$$\Leftrightarrow \frac{(x+5)(\sqrt{x-1}+2)+2x-5}{\sqrt{x-1}+2} = 0$$

Với $x \geq 1$ ta có:

$$\begin{cases} x+5 \geq 6 \\ \sqrt{x-1}+2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow (x+5)(\sqrt{x-1}+2) \geq 12$$
$$2x-5 \geq -3 \Rightarrow (x+5)(\sqrt{x-1}+2)+2x-5 \geq 12-3 = 9 > 0$$

Mà: $\sqrt{x-1}+2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)(\sqrt{x-1}+2)+2x-5}{\sqrt{x-1}+2} > 0 \Rightarrow (*)(VN)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là x=5.

- **Nhận xét:** Phương trình dùng phương pháp nhân lượng liên hợp vì nghiệm là x=5 cũng không quá khó để nhẩm. Chứng minh phần còn lại vô nghiệm ta dựa vào điều kiện ở đầu bài để chứng minh.

BÀI TOÁN 54 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình:

$$\frac{6x^2+18x+10-4\sqrt{x^2+3x+3}}{3\sqrt{x^2+3x+3}+2} = x^2+3x(*)$$

LỜI GIẢI

$$(*) \Leftrightarrow \frac{6(x^2+3x+3)-4\sqrt{x^2+3x+3}-8}{3\sqrt{x^2+3x+3}+2} = (x^2+3x+3)-3$$

Đặt: $t = \sqrt{x^2+3x+3} \geq 0$

Phương trình trở thành:

$$\frac{6t^2-4t-8}{3t+2} = t^2-3 \Leftrightarrow 6t^2-4t-8 = (t^2-3)(3t+2)$$

$$\Leftrightarrow 6t^2-4t-8 = 3t^3+2t^2-9t-6$$

$$\Leftrightarrow 3t^3-4t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2)(3t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(L) \\ t=2(N) \\ t=\frac{1}{3}(N) \end{array}\right.$$

TH1: t = 2 ta có:

$$\sqrt{x^2+3x+3}=2 \Leftrightarrow x^2+3x+3=4$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.(N)$$

TH2: $t=\frac{1}{3}$ ta có:

$$\sqrt{x^2+3x+3}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2+3x+3=\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+27x+26=0(VN)$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là ...

BÀI TOÁN 55 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình:

$$\frac{2x^2-14x+27-5\sqrt{x^2-7x+15}}{3\sqrt{x^2-7x+12}+1} = \sqrt{x^2-7x+15}-3(*)$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \in R \setminus (3;4)$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2(x^2-7x+15)-5\sqrt{x^2-7x+15}-3}{3\sqrt{x^2-7x+12}+1} = \sqrt{x^2-7x+15}-3$$

Đặt: $t=\sqrt{x^2-7x+15} \geq 0, \rightarrow \sqrt{x^2-7x+12}=\sqrt{t^2-3}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{2t^2-5t-3}{3\sqrt{t-3}+1} = t-3 \Leftrightarrow 2t^2-5t-3 = 3(t-3)(3\sqrt{t^2-3}+1)$$

$$\Leftrightarrow (2t+1)(t-3)-(t-3)(3\sqrt{t^2-3}+1)=0$$

$\Leftrightarrow (t-3)(2t+1-3\sqrt{t^2-3}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t=3(N) \\ 3\sqrt{t^2-3}=2t(**) \end{array}\right.$

Xét phương trình (**):

$\Leftrightarrow 9(t^2-3)=4t^2(t\geq 0) \Leftrightarrow 5t^2-27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3\sqrt{15}}{5}(N) \\ t=\frac{-3\sqrt{15}}{5}(L) \end{array}\right.$

TH1: t = 3:

$\Rightarrow t=3 \Rightarrow \sqrt{x^2-7x+15}=3 \Leftrightarrow x-7x+15=9$

$\Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right.(N)$

TH2: t = $\frac{3\sqrt{15}}{5}$:

$\Rightarrow \sqrt{x^2-7x+15}=\dfrac{3\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow x^2-7x+15=\dfrac{27}{5}$

$\Leftrightarrow x^2-7x+\dfrac{48}{5}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{35+\sqrt{265}}{10} \\ x=\frac{35-\sqrt{265}}{10} \end{array}\right.(N)$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là: ...

- **Nhận xét:** Bài toán 52, 53 đều có thể đặt ẩn phụ hoàn toàn bằng cách đặt t là căn thức dấu hiệu nhận thấy là ta thấy có nhiều căn giống nhau khi này ta cố gắng biểu diễn các biểu thức còn lại theo t, tuy nhiên bài toán 53 có phần phức tạp hơn vì 2 căn không giống nhau $\sqrt{x^2-7x+15}, \sqrt{x^2-7x+12}$ nhưng vẫn có thể biểu diễn như lời giải, các phương trình được đưa về đều có thể biến đổi thành tích nên có thể giải dễ dàng.

BÀI TOÁN 56 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $x-20=(x-2)\sqrt{-x^2+2x+52}$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $1-\sqrt{53}\leq x\leq 1+\sqrt{53}$

Phương trình đã cho tương đương:

$(x-1)-19=(x-1)\sqrt{-x^2+2x+52}-\sqrt{-x^2+2x+52}$

$\Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{-x^2+2x+52}=19+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+52}$

Đặt: $\left\{\begin{array}{c} a=x-1 \\ b=\sqrt{-x^2+2x+52}\geq 0 \end{array}\right.$

Phương trình trở thành:

$a+b=19+ab$ (1)

Ta lại có:

$a^2+b^2=(x-1)^2+\sqrt{-x^2+2x+52}=53(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} a+b=19+ab \\ a^2+b^2=53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=ab+19 \\ (a+b)^2-2ab=53 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} S=a+b \\ P=ab \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} S=19+P \\ S^2-2P=53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=19+P \\ (19+P)^2-2P=53(*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow 361+38P+P^2-2P=53 \Leftrightarrow P^2+36P+308=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P=-14 \Rightarrow S=5 \\ P=-22 \Rightarrow S=-3 \end{array}\right.$

TH1: P = -14, S = 5

Khi đó a, b là nghiệm của phương trình:

$X^2-5X-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=7 \\ X=-2 \end{array}\right.$

Vì b $\geq$ 0 $\rightarrow \begin{cases} \mathrm{a}=-2 \\ \mathrm{b}=7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1=-2 \\ \sqrt{-x^2+2x+52}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}$

TH2: P = -22, S=-3

Khi đó a, b là nghiệm của phương trình:

$X^2+3X-22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=\frac{-3+\sqrt{97}}{2} \\ X=\frac{-3-\sqrt{97}}{2} \end{array}\right.$

Vì b $\geq$ 0 $\rightarrow \begin{cases} \mathrm{a}=\frac{-3-\sqrt{97}}{2} \\ \mathrm{b}=\frac{-3+\sqrt{97}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1=\frac{-3-\sqrt{97}}{2} \\ \sqrt{-x^2+2x+52}=\frac{-3+\sqrt{97}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{97}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1-\sqrt{97}}{2} \\ x=\frac{5+\sqrt{97}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy phương tình đã cho có 2 nghiệm là: ....

- **Nhận xét:** Phương trình có thể đưa về hệ đối xứng loại 1 bằng cách đặt ẩn phụ, ta dễ thấy $(\mathrm{x}-1)^2+(\sqrt{-\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+52})^2$ triệt tiêu mất ẩn x vì thế nghĩ ngay đến phương trình đặt 2 ẩn phụ để đưa về hệ, ta cố gắng đưa biểu thức còn lại về biểu thức đã đặt, việc còn lại ta chỉ cần giải hệ loại 1 bằng cách đặt S = a + b, P = ab như lời giải!.

BÀI TOÁN 57 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình: $x^5-x^4-6+(x+2)\sqrt{x+3}=0$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: x ≥ -3

$(*) \Leftrightarrow x^5 - x^4 - 6 + 2(x+2) + (x+2)\sqrt{x+3} - 2(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^5 - x^4 + 2x - 2) + (x+2)(\sqrt{x+3} - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4+2) + \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{x+3}+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4 + 2 + \frac{x+2}{\sqrt{x+3}+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1(N) \\ x^4 + 2 + \frac{x+2}{\sqrt{x+3}+1} = 0(**) \end{array}\right.$$

Xét VT của phương trình (**):

$$= \frac{(x^4+2)(\sqrt{x+3}+2) + x + 2}{\sqrt{x+3}+2} \geq \frac{2.2 + (-3) + 2}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{3}{\sqrt{x+3}+2} > 0$$

(vì x ≥ 3)

Do đó (**) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x=1.

- **Nhận xét:** Dễ dàng nhẩm được nghiệm của phương trình là x=1, từ đó ta sẽ nhân thêm lượng liên hợp để được nhân tử x-1, việc chứng minh (**) vô nghiệm tương tự như bài toán 53.

BÀI TOÁN 58 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $x^2 - 6x + 13 = 3\sqrt{3x - 13}(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: x $\geq \frac{13}{3}$

$(*) \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + 4 = \sqrt{3(x-3) - 4}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + 4 = \sqrt{3(x-3) - 4}$

Đặt: $\begin{cases} a = x - 3 \\ b = \sqrt{3(x-3) - 4} \geq 0 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$a^3 + 4 = b$

Ta lại có: $b^2 = 3a - 4$

Ta có hệ:

$\begin{cases} a^2 + 4 = 3b \\ b^2 = 3b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4 = 3b(1) \\ b^2 + 4 = 3a(2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) theo vế ta có:

$a^2 - b^2 = 3(b - a) \Leftrightarrow (a-b)(a+b) + 3(a-b) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=-3 \end{array}\right.$

TH1: a = b

$\Rightarrow x-3=\sqrt{3x-13} \Leftrightarrow x^2-6x+9=3x-13$

$\Leftrightarrow x^2-9x+22=0 (VN)$

TH2: a + b = -3

$\Rightarrow x-3+\sqrt{3x-13}=-3 \Leftrightarrow x+\sqrt{3x-13}=0$ (**)

Vì: $x \geq \frac{13}{3}$ suy ra $x+\sqrt{3x-13} \geq \frac{13}{3} > 0$

Do đó (**) vô nghiệm.

Vậy phương trình vô nghiệm.

- **Nhận xét:** Một bài phương trình quen thuộc khá cơ bản đưa về hệ đối xứng loại 2, ta phân tích được $x^2-6x+13=(x-3)^2+4$ thì con đường giải bài toán gần như đã xuất hiện.

BÀI TOÁN 59 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $x(x-1)^2=\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x-1}+1)(*)$

LỜI GIẢI:

$(*) \Leftrightarrow (x-1+1)(x-1)^2=\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x-1}+1)$

$\Leftrightarrow (x-1)^3+(x-1)^2=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}$

$\Leftrightarrow (x-1)^3+(x-1)^2+(x-1)=(x-1)+\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}$

Xét hàm: $f(t)=t^3+t^2+t$

Ta có: $f'(x)=3t^2+2t+1=3(t+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}>0$

$\Rightarrow f(x-1)=f(\sqrt[3]{x-1})$

$\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^3=x-1$

$\Leftrightarrow (x-1)^3-(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x)=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là x=0, x=1,x=2.

- **Nhận xét:** Không có khó thấy có thể phân tích được như lời giải vì khi nhân $\sqrt[3]{x-1}$ thì ta sẽ thấy dấu hiệu của phương pháp mà từ đó thêm bớt để ra được lời giải, Ngoài phương pháp hàm để giải ta còn có thể dùng liên hợp vì có khá nhiều nghiệm đẹp!.

BÀI TOÁN 60 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $x^3=(x^2+4x-14)\sqrt{x^2-2x+7}(*)$

LỜI GIẢI:

$(*) \Leftrightarrow x^3 = [3x^2 - (2x^2 - 4x + 14)]\sqrt{x^2 - 2x + 7}$

$\Leftrightarrow x^3 = 3x^2\sqrt{x^2 - 2x + 7} - (2x^2 - 4x + 14)\sqrt{x^2 - 2x + 7}$

$\Leftrightarrow x^3 + 2(x^2 - 2x + 7)\sqrt{x^2 - 2x + 7} = 3x^2\sqrt{x^2 - 2x + 7}$

$\Leftrightarrow x^3 + 2\sqrt{(x^2 - 2x + 7)^3} = 3x^2\sqrt{x^2 - 2x + 7}$

Đặt: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7} \geq 0$

Phương trình trở thành:

$x^3 + 2y^3 = 3x^2y \Leftrightarrow x^3 - 3x^2y + 2y^3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - y) - 2y(x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - 2xy - 2y^2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = y \\ x^2 - 2xy - 2y^2 = 0(**) \end{array}\right.$

TH1: x=y

$\Rightarrow x = \sqrt{x^2 - 2x + 7}(x \geq 0) \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

TH2:

$y \neq 0 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow (\dfrac{x}{y})^2 - 2(\dfrac{x}{y}) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} = 1 + \sqrt{3} \\ \frac{x}{y} = 1 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (1 + \sqrt{3})y(1) \\ x = (1 - \sqrt{3})y(2) \end{array}\right.$

$(1) \Rightarrow x = (1 - \sqrt{3})\sqrt{x^2 - 2x + 7}(x < 0) \Leftrightarrow x^2 = (4 - 2\sqrt{3})(x^2 - 2x + 7)$

$\Leftrightarrow (3 - 2\sqrt{3})x^2 + (4\sqrt{3} - 8)x + 7(4 - 2\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 1,91(L) \\ x \approx -4,22(N) \end{array}\right.$

$(2) \Leftrightarrow x = (1 + \sqrt{3})\sqrt{x^2 - 2x + 7}(x > 0) \Leftrightarrow x^2 = (4 + 2\sqrt{3})(x^2 - 2x + 7)$

$\Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{3})x^2 + (-8 - 4\sqrt{3})x + 7(4 + 2\sqrt{3}) = 0(VN)$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là ...

- **Nhận xét:** Phương trình có thể đưa về phương trình đẳng cấp bằng cách đặt ẩn phụ do thế dễ dàng phân tích thành nhân tử. Đấy là một phương trình khá "ác" vì ở phương trình (**) có nghiệm khá xấu dẫn đến (1), (2) có hệ số cực xấu rất khó giải tuy là phương trình bậc 2 cơ bản.

BÀI TOÁN 61 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình:

$$\frac{3x^2 + 4(x + 4)^2}{3\sqrt{x - 4}} = 32\sqrt{2x}$$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: x > 4

Ta có:

$$VT = \frac{x^2}{\sqrt{x-4}} + \frac{4(x+4)^2}{3\sqrt{x-4}} = \frac{x^2}{\sqrt{x-4}} + \frac{[2(x+4)]^2}{3\sqrt{x-4}}$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$VT \geq \frac{[x+2(x+4)]^2}{4\sqrt{x-4}}$$

Ta có: $4\sqrt{x-4} \leq x - 4 + 4 = x$ (theo bất đẳng thức Cauchy)

$$\Rightarrow VT \geq \frac{(3x+8)^2}{x} = \frac{9x^2+48x+64}{x} = \frac{(x^2+64)+8x^2+48x}{x}$$

Ta lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x^2 + 64 \geq 2\sqrt{x^2.64} = 16x$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{16x+8x^2+48x}{x} = 8x + 64 \geq 2\sqrt{8x.64} = 32\sqrt{2x} = VP$$

Dấu "=" xảy ra:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x-4}} = \frac{2(x+4}{3\sqrt{x-4}} \\ \sqrt{x-4} = 2 \\ x^2 = 64 \\ 8x = 64 \end{cases} \Rightarrow x = 8(N)$$

Vậy x=8 là nghiệm của phương trình.

- **Nhận xét:** Lời giải sử dụng phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức, dựa vào điều kiện x>4 ta được các số dương để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, Cauchy đánh giá, Chú ý khi dùng phương pháp này dấu "=" phải xảy ra ở các bất đẳng thức đã dùng.

BÀI TOÁN 62 (Sưu tầm)**:**
Giải phương trình: $(3x+1)\sqrt{x+3} = 2x^2 + 3x + 3(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: x ≥ -3

$$(*) \Leftrightarrow (3x+1)\sqrt{x+3} = (2x^2+2x) + (x+3)$$

Đặt: $t = \sqrt{x+3} \geq 0$

Phương trình trở thành:

$$(3x+1)t = (2x^2+2x) + t^2 \Leftrightarrow t^2 - (3x+1)t + (2x^2+2x) = 0$$

$$\Delta = (3x+1)^2 - 4.1.(2x^2+2x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3x+1-x+1}{2} = x+1 \\ t = \frac{3x+1+x-1}{2} = 2x \end{array}\right.$$

TH1: t = x + 1

$\Rightarrow \sqrt{x+3} = x + 1 (x \geq -1) \Rightarrow x + 3 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(N) \\ x = -2(L) \end{array}\right.$

TH2: t = 2x

$\Rightarrow \sqrt{x+3} = 2x (x \geq 0) \Rightarrow x + 3 = 4x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(N) \\ x = \frac{-3}{4}(L) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là x=1.

- **Nhận xét:** Đây là một dạng khá quen thuộc, bằng cách đặt ẩn phụ không hoàn toàn, tài liệu cũng đã có khá nhiều bài toán tương tự.

BÀI TOÁN 63 (Sáng tác)**:**
Giải phương trình: $x^2 = (x^3 + 2x + 2)\sqrt{x^3 + 2x} (*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: $x \geq 0$

$(*) \Leftrightarrow x^2 = (x^3 + 2x)\sqrt{x^3 + 2x} + 2\sqrt{x^3 + 2x}$

$\Leftrightarrow x^3 = \sqrt{(x^3 + 2x)^3} + 2\sqrt{x^3 + 2x}$

Đặt: $y = \sqrt{x^3 + 2x} \geq 0$

Phương trình trở thành:

$x^2 = y^3 + 2y$ (1)

Ta lại có:

$y^2 = x^3 + 2x (2)$

Lấy (1) - (2) theo vế ta có:

$x^2 - y^2 = y^3 - x^3 + 2(y - x) \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + (x^3 - y^3) + 2(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) + (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = y \\ x + y + x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 (**) \end{array}\right.$

TH1: x = y

$\Rightarrow x = \sqrt{x^3 + 2x} \Leftrightarrow x^2 = x^3 + 2x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0(N) \\ x^2 - x + 2 = 0(VN) \end{array}\right.$

TH2:

Xét phương trình (**):

$\Rightarrow x + \sqrt{x^3 + 2x} + x^2 + x^3 + 2x + x\sqrt{x^3 + 2x} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 3x + 2 + (x + 2)\sqrt{x^3 + 2x} = 0$

Với x ≥ 0:

$\Rightarrow x^3 + x^2 + 3x + 2 + (x+2)\sqrt{x^3+2x} \geq 2 > 0$

Vậy phương trình có nghiệm là x=0.

- **Nhận xét:** Phương trình đưa về hệđối xứng loại 2, ta biến đổi VP của phương trình theo dấu tương đương thứ nhất không có đó là điều khá dễ thấy từ đó ta thấy có điều chung nên ta đặt y chính là căn từ đó ta có được 2 hệ như lời giải.

BÀI TOÁN 63 (Sáng tác)**:**

Giải phương trình: $x^4 - x^2 + 3x + 5 = 2\sqrt{x+2}(*)$

LỜI GIẢI:

Điều kiện: x ≥ -2

$(*) \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 3x + 5 - 2\sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow (x^4 - 2x^2 + 1) + (x^2 + 2x + 1) + [(x+2) - 2\sqrt{x+2} + 1] = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)^2 + (x+1)^2 + (\sqrt{x+2}-1)^2 = 0$

Mà:

$(x^2-1)^2 + (x+1)^2 + (\sqrt{x+2}-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ \sqrt{x+2} - 1 = 0 \end{cases}$

Vậy phương trình có có nghiệm là x=-1.

- **Nhận xét:** Phương trình có bậc khá cao (bậc 4) ta có thể tách hạng tử để đưa về tổng không âm ta thấy rằng VT có 3 bình phương nên luôn lớn hơn hoặc bằng 0 vì thế nghiệm của phương trình là 3 số đó cùng bằng 0.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- Các bài toán trên internet.
- Các bài toán trên diễn đàn toán học.
- Tài liệu ôn tập/ôn thi HSG toán.
- Đề thi HSG/ Tuyển sinh ở các tỉnh.