SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ	**ĐỀ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM 2025 – ĐỢT 1**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN	**MÔN: TOÁN** ***(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)***
HÙNG VƯƠNG	**Ngày 16 tháng 3 năm 2025**
(Đề thi gồm: 01 trang)	*Thời gian làm bài: 150 phút.*
	(05 câu TL)

Họ và tên thí sinh……………………………………………………SBD…………………………………

Thí sinh làm bài vào tờ giấy thi.

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9.$$

b) Cho a,b,c là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng $I=a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ luôn khác 0.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a^2+5b^2=2b+(c+2)^2+9(a-b)(b-c)(c-a)+6.$$

Chứng minh rằng $a+b+c$ là số chẵn.

b) Tìm tất cả các số nguyên m để $(m+1)\left(m^2+2m\right)$ là một số chính phương.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^4-2x^3-14x^2+32x-16=0.$

b) Tìm tất cả bộ ba số thực không âm $(x;y;z)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x\le y\le z \\ x+y+z=xy+yz+zx \\ \sqrt{yz}(x+1)=2 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho điểm A di động trên nửa đường tròn đường kính BC tâm O. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, dựng đường tròn tâm I đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Gọi D là giao điểm của MN và OA.

a) Chứng minh tứ giác $HIDO$ nội tiếp và $\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{HB}+\dfrac{1}{HC}\cdot$

b) Khi $AB<AC$, gọi P là giao điểm của BC và MN, K là giao điểm thứ hai khác A của đường tròn đường kính BC và đường tròn đường kính AH. Chứng minh A, K, P thẳng hàng.

c) Gọi E, F lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và ABH. Xác định vị trí điểm A để chu vi tam giác EFH lớn nhất.

Câu 5. (1,0 điểm)

Hai bạn Vinh và Tùng, mỗi bạn có 99 tấm thẻ, trên mỗi tấm thẻ của từng bạn ghi một số nguyên dương từ 1 đến 99 (trên hai tấm thẻ khác nhau của mỗi bạn ghi hai số khác nhau). Bạn Hưng có 99 cái hộp trống, Hưng bảo Vinh và Tùng bỏ ngẫu nhiên vào mỗi hộp một thẻ, sau đó ghi lên mỗi hộp trị tuyệt đối của hiệu hai số trong hộp. Tùng khẳng định: *Chắc chắn có hai hộp sẽ được Hưng ghi cùng một số.* Hỏi bạn Tùng nói đúng hay sai?

-------------------- HẾT --------------------

Lưu ý: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Thời gian *(dự kiến)* thi đợt kế tiếp: ngày 26, 27/04/2025; thời gian đăng kí từ 10/04/2025 – 20/04/2025.

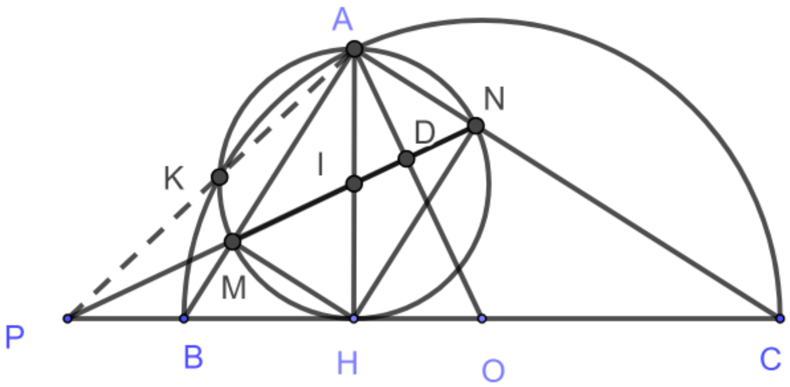
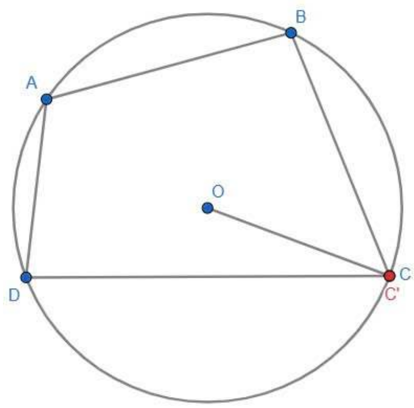
SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ **TRƯỜNG THPT CHUYÊN** **HÙNG VƯƠNG**	**HƯỚNG DẪN CHẤM** **ĐỀ THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM 2025 – ĐỢT 1** **MÔN: TOÁN (*Chuyên*)** (HDC có: 05 trang)

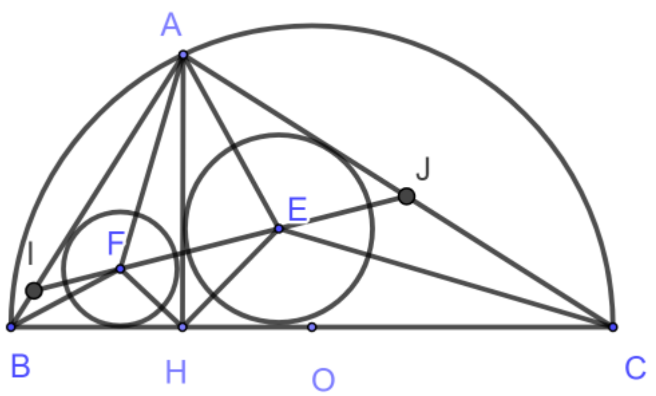
Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

Câu	***Ý***	***Nội dung trình bày***	***Điểm***
Câu 1 ***(2,0 đ)***	**a)** 1,0 đ	$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ $=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\cdots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\left(\sqrt{99}+\sqrt{100}\right)\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}$	0,5
		$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-1=9$	0,5
	b) 1,0 đ	Biến đổi biểu thức I ta thu được $I=-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).$	0,5
		Với a,b,c đôi một khác nhau ta thấy I khác 0.	0,5
Câu 2 **(2,0 đ)**	**a)** 1,0 đ	**a) Cho a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn** $a^2+5b^2=2b+(c+2)^2+9(a-b)(b-c)(c-a)+6.$ **Chứng minh rằng $a+b+c$ là số chẵn.**	
		Biến đổi biểu thức đề bài cho ta được $(a+b+c)^2=2X+(a-b)(b-c)(c-a)$	0,25
		trong đó X là một số nguyên. Khi đó nếu $a+b+c$ là số lẻ, nghĩa là trong 3 số a,b,c sẽ có 2 số cùng tính chẵn lẻ	0,25
		Do đó $(a-b)(b-c)(c-a)$ sẽ chẵn, thay vào biểu thức trên ta có mâu thuẫn. Từ đây suy ra $a+b+c$ phải là số chẵn.	0,25
		Tồn tại a,b,c nguyên dương thỏa mãn biểu thức đề bài: $a=3,b=5,c=6.$	0,25
	b) 1,0 đ	**b) Tìm tất cả các số nguyên m để $(m+1)\left(m^2+2m\right)$ là một số chính phương.**	
		Giả sử $(m+1)\left(m^2+2m\right)$ là một số chính phương với m là số nguyên. Suy ra $(m+1)\left(m^2+2m\right)=k^2\ (k\in\mathbb{Z}).$	0,25
		Vì $k^2\ge 0 \Rightarrow (m+1)\left(m^2+2m\right)\ge 0.$ Với $m<-2\Rightarrow (m+1)\left(m^2+2m\right)<0$ (loại). Với $m\in\{-2;-1;0\}$ ta đều có $k^2=0$ (thoả mãn).	0,25
		Với $m>0$ ta có $k^2=(m+1)\left(m^2+2m\right)$. Gọi d là một ước chung lớn nhất của $m+1$ và m^2+2m. Khi đó $\begin{cases}(m+1)\,\vdots\, d\\ \left(m^2+2m\right)\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^2+m\,\vdots\, d\\ m^2+2m\,\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+1\,\vdots\, d\\ m\,\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow d=1.$	0,25

		nên $\left(m+1\right)\left(m^2+2m\right)$ là một số chính phương khi $m+1$ và m^2+2m đều là số chính phương.	
		Để m^2+2m là số chính phương thì $m^2+2m=a^2\ \left(a\in\mathbb{Z}\right)$. Suy ra $\left(m+1\right)^2-1=a^2\Rightarrow\left(m+1+a\right)\left(m+1-a\right)=1\Rightarrow m+1+a=m+1-a\Rightarrow a=0$ Đến đây thu được $m=0$ hoặc $m=-2$ đều không thỏa mãn. Vậy $m\in\left\{-2;-1;0\right\}$ thì $\left(m+1\right)\left(m^2+2m\right)$ là một số chính phương.	0,25
Câu 3 (2,0 đ)	**a)** 1,0 đ	**Giải phương trình** $x^4-2x^3-14x^2+32x-16=0$. Ta biến đổi phương trình đã cho trở thành $x^4-2x^3+(3-17)x^2+2(17-1)x-17+1=0$. Đặt $a=\sqrt{17}$ ta được $x^4-2x^3+(3-a^2)x^2+2(a^2-1)x-a^2+1=0$ Tức là $(x^2-x+1)^2-(ax-a)^2=0$	0,5
		Hay $(x^2-ax-x+a+1)(x^2+ax-x-a+1)=0$. Thay lại $\sqrt{17}=a$, ta có $(x^2-\sqrt{17}x-x+\sqrt{17}+1)(x^2+\sqrt{17}x-x-\sqrt{17}+1)=0$. Giải hai PT bậc hai: $x^2-\sqrt{17}x-x+\sqrt{17}+1=0$ $x^2+\sqrt{17}x-x-\sqrt{17}+1=0$ Ta được bốn nghiệm là $x_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{17}+\sqrt{2(7+\sqrt{17})})$ $x_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{17}-\sqrt{2(7+\sqrt{17})})$ $x_3=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17}+\sqrt{14-2\sqrt{17}})$ $x_4=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17}-\sqrt{14-2\sqrt{17}})$	0,5
	b) 1,0 đ	**Tìm tất cả bộ ba số thực không âm (x,y,z) thỏa mãn:** $\begin{cases}x\le y\le z\\ x+y+z=xy+yz+zx\\ \sqrt{yz}(x+1)=2\end{cases}$	
		Theo giả thiết ta có: $3yz\ge yz+zx+xy=\frac{(x+y+z)^2}{yz+zx+xy}\ge 3\Rightarrow yz\ge 1$. Nếu $yz>4$ thì $\sqrt{yz}(x+1)>2$ (vô lí) Do đó $1\le yz\le 4$. Đặt $\sqrt{yz}=t, 1\le t\le 2$.	0,5
		Ta có: $x=\frac{y+z-yz}{y+z-1}=1-\frac{yz-1}{y+z-1}\ge 1-\frac{yz-1}{2\sqrt{yz}-1}=1-\frac{t^2-1}{2t-1}$	0,25
		Ta chứng minh $\sqrt{yz}(x+1)\ge 2$. Thật vậy BĐT tương đương với: $t\left(2-\frac{t^2-1}{2t-1}\right)\ge 2$ $\Rightarrow t^3-4t^2+5t-2\le 0$ $\Rightarrow (t-1)^2(t-2)\le 0$. Do đó điều ta cần chứng minh là đúng. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ hoặc $x=0, y=z=2$.	0,25

<table>
<tr>
<td rowspan="6">**Câu 4**
(3,0 đ)</td>
<td rowspan="4">**a)**
1,0 đ</td>
<td>**a) Chứng minh tứ giác $HIDO$ nội tiếp và $\frac{1}{AD}=\frac{1}{HB}+\frac{1}{HC}$.**</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>**Chứng minh tứ giác $HIDO$ nội tiếp**
Ta có tam giác ABC vuông tại A và O là trung điểm của cạnh BC nên
$OA=OB=OC \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OAC}=\widehat{OCA}$ => $\widehat{OAC}=\widehat{BCN}$ Mà
$\widehat{AMN}=\widehat{ACB}=\widehat{AHN}$ (vì $AMHN$ là hình chữ nhật) nên $\widehat{AMN}=\widehat{DAN}$
Vì ΔAMN vuông tại A nên $\widehat{AMN}+\widehat{ANM}=90^\circ$ nên $\widehat{DAN}+\widehat{ANM}=90^\circ$
Suy ra $\widehat{ADN}=90^\circ$
Gọi L là trung điểm của IO. Do các tam giác IDO, IHO vuông tại D, H nên
$LH=LD=LI=LO$ nên bốn điểm H, I, D, O nằm trên đường tròn đường kính
IO</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>Chứng minh $\frac{1}{AD}=\frac{1}{HB}+\frac{1}{HC}$.
Vì $\Delta ADI \backsim \Delta AHO$ nên $\frac{AD}{AH}=\frac{AI}{AO}$ suy ra $\frac{1}{AD}=\frac{AO}{AH.AI}$
Mà $AO=\frac{1}{BC}; AI=\frac{1}{2}AH$; suy ra $\frac{1}{AD}=\frac{BC}{AH^2}$
Mặt khác, vì tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao nên $AH^2=HB.HC$.
Suy ra $\frac{1}{AD}=\frac{HB+HC}{HB.HC}=\frac{1}{HB}+\frac{1}{HC}$</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">**b)**
1,0 đ</td>
<td>**b) Khi $AB<AC$, gọi P là giao điểm của BC và MN, K là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính BC và đường tròn đường kính AH. Chứng minh A, K, P thẳng hàng.**</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Gọi K' là giao điểm thứ hai của AP và đường tròn đường kính AH.
Trước tiên, ta chứng minh bài toán: một tứ giác có tổng hai góc đối bằng *180* độ là tứ giác nội tiếp.
Thật vậy: Dựng đường tròn *(O)* ngoại tiếp tam giác *ABD*.
Giả sử đường tròn *(O)* cắt tia *OC* tại *C'*.
Ta có tứ giác *ABC'D* nội tiếp đường tròn tâm *O*
Suy ra: $\widehat{BAD}+\widehat{BC'D}=180^0$
Mà $\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0(gt)$
Suy ra: $\widehat{BCD}=\widehat{BC'D}$
Mà B, D cố định, nên C' thuộc tia OC

</td>
<td>0,5</td>
</tr>
</table>

		Từ đó suy ra $C \equiv C'$ Suy ra C thuộc đường tròn tâm O. Vậy $ABCD$ nội tiếp.	
		Quay trở lại bài toán ban đầu. Ta chứng minh được tứ giác BMNC nội tiếp => $\widehat{PBM}=\widehat{MNC}$ => $\widehat{PBM}+\widehat{ANM}=\widehat{MNC}+\widehat{ANM}=180^\circ\ (1)$ Vì tứ giác ANMK' nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PK'M}=\widehat{ANM}\,(2)$ Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PBM}+\widehat{PK'M}=180^\circ$, do đó tứ giác PK'MB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PK'B}=\widehat{PMB}=\widehat{AMN}=\widehat{ACB}$ => $\widehat{AK'B}+\widehat{ACB}=\widehat{AK'B}+\widehat{PK'B}=180^\circ$ Do đó tứ giác BK'AC nội tiếp $\Rightarrow K'$ là giao điểm thứ hai của (O) và (I) nên $K'\equiv K$ thẳng hàng	0,5
	c) 1,0 đ	**c) Gọi E,F lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và ABH. Xác định vị trí điểm A để chu vi tam giác EFH lớn nhất.**  	
		Gọi giao điểm của EF với AB, AC lần lượt là I và J. Ta có $\widehat{CAH}=\widehat{ABH}$ (vì cùng phụ $\widehat{ACB}$). Suy ra $\widehat{EAH}=\widehat{FBH}$ Mặt khác $\widehat{EHA}=\widehat{FHB}=45^\circ$. Suy ra ΔAEH đồng dạng với ΔBFH. Do đó $\frac{EH}{FH}=\frac{AH}{HB}$ mà $\frac{AH}{HB}=\frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{EH}{FH}=\frac{AC}{AB}$.	0,5
		ΔEHF đồng dạng với ΔCAB (vì $\widehat{EHF}=\widehat{CAB}=90^\circ$ và $\frac{EH}{EH}=\frac{AC}{AB}$). Suy ra $\widehat{HFE}=\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABC}+\widehat{HFI}=180^\circ$. Suy ra tứ giác $BHFI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIJ}=\widehat{FHB}=45^\circ$. Suy ra ΔAIJ cân tại $A \Rightarrow AI=AJ$.	
		Ta có $\Delta AFI=\Delta AFH$ (g.c.g) suy ra $AI=AH$ và $FI=FH$. Tương tự cũng có $EH=EJ$.	
		Chu vi tam giác EFH là $EH+HF+EF=JE+EF+FI=IJ=\sqrt{2}AI=\sqrt{2}AH.$ Ta có $AH\le R$. Suy ra chu vi tam giác EFH lớn nhất bằng $\sqrt{2}R$ khi $AH=R$, hay A nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính BC.	0,5

Câu 4 (1,0 đ)		**Hai bạn Vinh và Tùng mỗi bạn có 99 tấm thẻ, trên mỗi tấm thẻ ghi các số nguyên dương từ 1 đến 99 (mỗi thẻ ghi đúng một số). Bạn Hưng có 99 cái hộp trống, Hưng bảo Vinh và Tùng bỏ ngẫu nhiên vào mỗi hộp một thẻ, sau đó ghi lên hộp trị tuyệt đối của hiệu hai số trong hộp. Tùng khẳng định: Chắc chắn có hai hộp sẽ được Hưng ghi cùng một số. Hỏi bạn Tùng nói đúng hay sai?**	
		Bạn Tùng nói đúng. Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Giả sử các số được ghi trên mỗi hộp là đôi một khác nhau, khi đó trên 99 hộp sẽ là 99 số từ 0 đến 98 (50 số chẵn và 49 số lẻ). Tùng và Vinh đều có 99 thẻ gồm 50 thẻ ghi số lẻ và 49 thẻ ghi số chẵn. Ta gọi a,b,c,d lần lượt là số các hộp chứa các thẻ ghi lẻ - lẻ, chẵn - chẵn, chẵn - lẻ và lẻ - chẵn (thứ tự tương ứng Tùng - Vinh).	0,5
		Từ giả thiết đầu bài ta có: $a+d=50=a+c;b+c=b+d=49.$ Từ đây suy ra $c=d$, nói cách khác có $2c$ hộp có thẻ khác tính chẵn lẻ hay có $2c$ hộp sẽ được ghi số lẻ. Điều này mâu thuẫn với nhận xét có 49 số lẻ ở trên. Mâu thuẫn này suy ra giả sử phản chứng là sai hay Tùng nói đúng.	0,5