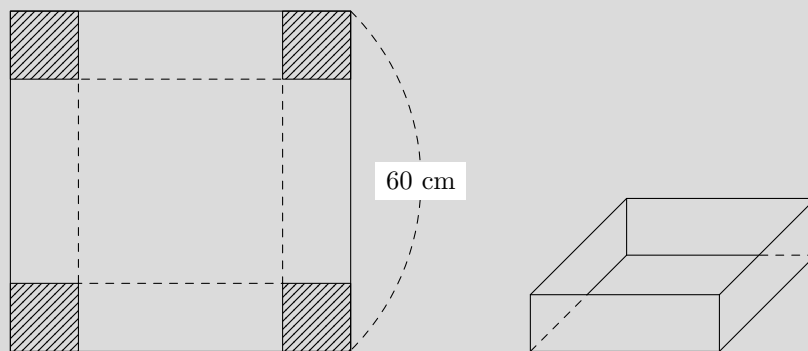


LÊ QUANG XE - 0967.003.131

BÀI GIẢNG

TOÁN 12

(Tài liệu theo sách mới)



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

PHẦN I GIẢI TÍCH

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	3
Bài 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	3
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	3
(B) VÍ DỤ MINH HỌA	4
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	8
Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước	8
Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên	23
Dạng 3. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào đồ thị hàm số	26
Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	31
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	31
(B) VÍ DỤ MINH HỌA	32
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	35
Dạng 1. Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền cho bởi công thức $\mathcal{D}$	35
Dạng 2. Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào bảng biến thiên	41
Dạng 3. Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị hàm số	43
Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	52
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	52
(B) VÍ DỤ MINH HỌA	53
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	60
Dạng 1. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số	60
Dạng 2. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số	68
Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	75
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	75
(B) VÍ DỤ MINH HỌA	77
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	78
Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	78
Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$	86

 Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$	97
--	----

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN 109

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	109
Ⓑ PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	110
 Dạng 1. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng.....	110
 Dạng 2. Bài toán tối ưu hoá đơn giản	112
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN	116



PHẦN

GIẢI TÍCH

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

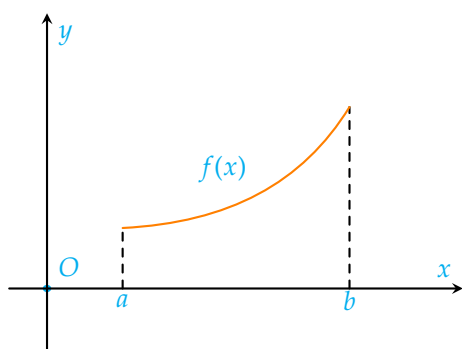
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tính đơn điệu của hàm số

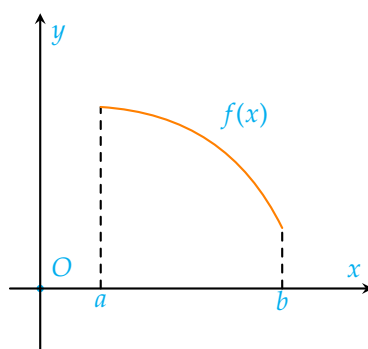
Định nghĩa 1.1. Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

- ✔ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ✔ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

⚠ ✔ Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.1.3a). Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.1.3b).



a) Hàm số đồng biến trên $(a; b)$



a) Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$

Hình 1.3

- ✔ Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K . Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.
- ✔ Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Định lý 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- ✔ Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K .
- ✔ Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

2. Cực trị của hàm số

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- ✔ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- ✔ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .



- ✔ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- ✔ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- ✔ Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

Phương pháp 1.1. Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

- a) Tìm tập xác định của hàm số.
- b) Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- c) Lập bảng biến thiên của hàm số. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

B

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số sau

- a) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$;
- b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;
- c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;
- d) $y = -2x^4 + 4x^2$;
- e) $y = x^4 + 4x^3 - 1$;
- f) $y = -16x^4 + x - 1$.

👉 Lời giải.

a) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x$.

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-4		0		$-\infty$

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-28	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

f) Ta có $y' = -64x^3 + 1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{4}; +\infty)$.

Ví dụ 2

Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x+1};$

b) $y = \frac{3x+1}{x-1};$

c) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1};$

d) $y = x + \frac{4}{x};$

e) $y = \sqrt{x^2 - 2x};$

f) $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}.$

Lời giải.

a) Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

b) Ta có $y' = \frac{-4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

Do vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1); (1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

c)

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

$y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$; nghịch biến trên $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại $y = -2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y = 2$.

d) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+ 0 -			- 0 +	
y	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại $y = -4$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu $y = 4$

e) Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$, $\forall x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \notin \mathcal{D}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-		+	
y	$+\infty$	0	0	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

f) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$, xác định với mọi $x \neq 0$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8$.

Đạo hàm không xác định tại $x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

Ví dụ 3

Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Lời giải.

Xét hàm số $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$, với $T \in [0; 30]$.

Ta có $V'(T) = -0,0002037T^2 + 0,0170086T - 0,06426$.

$V'(T) = 0 \Leftrightarrow T = 3,966514624 = T_1$ hoặc $T = 79,53176716 \notin [0; 30]$.

Bảng biến thiên của hàm số $V(T)$ như sau

T	0	T_1	30
$V'(T)$	–	0	+
$V(T)$	$V(0)$	$V(T_1)$	$V(30)$

Từ bảng biến thiên suy ra, thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ từ 0°C đến $3,966514624^\circ\text{C}$.

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = f(x)$.
- ② Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) thuộc $\mathcal{D}$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần, xét dấu y' và lập bảng biến thiên. Từ đây, nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = 7x^3 + 5x^2 + x - 1$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(-\infty, +\infty)$.
 Ⓑ $\left(-\frac{1}{7}, +\infty\right)$.
 Ⓒ $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ và $\left(-\frac{1}{7}, +\infty\right)$.
 Ⓓ $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right)$.

Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 21x^2 + 10x + 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{7} \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{7}$	$+\infty$			
y		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$-\frac{28}{27}$	$-\frac{52}{49}$	$+\infty$			

Từ BBT ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 2

Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)** $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. **(B)** $(0, +\infty)$. **(C)** $(-1; 1)$. **(D)** $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm } y' = 12x^3 - 12x; \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			3			0		$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{-x-1}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- (A)** $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. **(B)** $(-\infty; +\infty)$.
(C) $(-1, +\infty)$. **(D)** $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{1}{(-x-1)^2}. \text{ Cho } y' = 0, \text{ Ta có bảng biến thiên:}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

Ta thấy $y' = \frac{1}{(-x-1)^2} > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 4

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

- (A)** $(0; -2)$. **(B)** $x = 0$.
(C) $x = \pm 1$. **(D)** $(-1; -1)$ và $(1; -1)$.

👉 Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm } y' = -4x^3 + 4x; \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	-1	-2	-1	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận đồ thị hàm số có điểm cực đại tại $(-1; -1)$ và $(1; -1)$

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 5

Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

- (A)** $x = 1$. **(B)** $x = 3$. **(C)** $A(3; 30)$. **(D)** $B(1; 34)$.

👉 Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$. Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	34	30	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = y(1) = 34$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = y(3) = 30$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 6

Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

(A) $x = -1$.

(B) $x = 5$.

(C) $A(-1; -4)$.

(D) $B(5; 8)$.

👉 Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \frac{(2x - 2)(x - 2) - (x^2 - 2x + 9)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$+\infty$	8	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$ và $y_{CT} = y(5) = 8$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 7

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 0.

👉 Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{(x - 1) - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2} < 0$, với mọi $x \neq 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$
y	1	$+\infty$	1

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 8

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x - 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.
- (B) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- (C) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
- (D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

👉 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 - 1 < 0$ với mọi x . Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B)..... □

Câu 9

Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- (A) 2.
- (B) 1.
- (C) -1.
- (D) 0.

👉 **Lời giải.**

Ta có $y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vì y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = -1$ và đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 1$ nên $x_2 = -1$ là điểm cực tiểu và $x_1 = 1$ là điểm cực đại của hàm số.

Do đó $x_1 + 2x_2 = 1 - 2 = -1$.

Chọn đáp án (C)..... □

Câu 10

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$.
- (B) $2\sqrt{2}$.
- (C) 2.
- (D) 4.

👉 **Lời giải.**

Ta có $y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0. \end{cases}$

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 4), B(2; 0)$. Do đó $AB = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A)..... □

Câu 11

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-1; 0)$.
- (B) $(-1; +\infty)$.
- (C) $(-3; 8)$.
- (D) $(-\infty; -1)$.

👉 **Lời giải.**

$y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta kết luận hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 12

Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.
 (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 (C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
 (D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

📌 Lời giải.

Ta có $y' = -x^3 + x = -x(x^2 - 1)$. Ta có bảng biến thiên như hình bên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			$-\frac{11}{4}$		-3		$-\frac{11}{4}$	
	$-\infty$							$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta kết luận hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 13

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 (B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 (C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 (D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

📌 Lời giải.

Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Có $y' = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 14

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
 (B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
 (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Ta có $y' = \frac{5}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**.

Câu 15

Cho hàm số $y = x^2 + 4 \ln(3 - x)$. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số đã cho.

(A) $y_{CD} = 2$. **(B)** $y_{CD} = 4$. **(C)** $y_{CD} = 1 + 4 \ln 2$. **(D)** $y_{CD} = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$.

Đạo hàm $y' = 2x - \frac{4}{3-x} = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{3-x}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3		
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$				4	
					$1 + 4 \ln 2$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2, y_{CD} = 4$.

Chọn đáp án **(B)**.

Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến. **(B)** Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
(C) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị. **(D)** Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Lời giải.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y	$+\infty$						$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Chọn đáp án (C)..... ☐

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 3.

 **Lời giải.**

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)..... ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Khi đó

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.

d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.

 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Do đó phát biểu này là **ĐÚNG**.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. Do đó phát biểu này **SAI**.

- c) Ta có $f(1) = -1; f(2) = -3; f(3) = 1$. Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 3$.
Do đó phát biểu này là **SAI**.
- d) Ta có $y'' = 6x - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$. Hàm số có đồ thị đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.
Do đó phát biểu này là **ĐÚNG**.

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c sai | d đúng** ☐

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x + 1}$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
b) Hàm số có 2 điểm cực trị.
c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
d) $y_{CD} > y_{CT}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-1	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
		$5 + 2\sqrt{2}$		$5 - 2\sqrt{2}$	
					$-\infty$

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1 - \sqrt{2}; -1)$ nên đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
b) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có 2 điểm cực trị.
c) Ta có hàm số nghịch biến trên $[1; 3]$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 3$.
d) Ta có $y_{CD} = 5 - 2\sqrt{2} < 5 + 2\sqrt{2} = y_{CT}$.

Chọn đáp án **a đúng | b đúng | c sai | d sai** ☐

Câu 3

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm cực trị của (C) .

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $2x + y - 4 = 0$.
d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ.

Lời giải.

a) Hàm số đa thức nên có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

b) Ta có

$$\bullet y' = 3x^2 - 6x \text{ và } y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		4	↘		$+\infty$
		↘		0	↗		

Suy ra hàm nghịch biến trên $(0; 2)$.

c) Tọa độ $A(0; 4)$, $B(2; 0)$. Phương trình đường thẳng AB là

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-4}{0-4} \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$$

d) Diện tích tam giác vuông OAB là $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 4$.

Chọn đáp án a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có đồ thị (C). Gọi A , B lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của (C).

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- Tọa độ điểm $A(-2; -2)$, $B(0; 2)$.
- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB = 2\sqrt{5}$.

📌 **Lời giải.**

a) Đặt điều kiện mẫu số khác 0, ta được $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Suy ra $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$b) y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0. \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$			-2			$+\infty$		
							2		
				$-\infty$					

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy rằng hàm số $y = f'(x)$ nghịch biến trên $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

c) Tọa độ điểm $A(0; 2)$, $B(-2; -2)$

d) Độ dài $AB = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-2 - 2)^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án a sai b sai c sai d sai □

Câu 5

Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- a) Phương trình hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.
- c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
- d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

 **Lời giải.**

a) Ta có $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 6t + 9$ và $a(t) = v'(t) = 6t - 12$.

b) Xét $v(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3. \end{cases}$

Bảng xét dấu

t	0	1	3	$+\infty$		
$v(t)$		+	0	-	0	+

Suy ra vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$, và giảm khi $t \in (1; 3)$.

Chọn đáp án a sai b đúng c đúng d đúng □

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

- a) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
- b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- c) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
- d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

 **Lời giải.**

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 4x + 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 1. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$			
y		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{131}{27}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

a) Dựa vào BBT ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

c) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án a sai | b đúng | c đúng | d sai ☐

Câu 7

Cho hàm số $y = f(x) = 6x^4 - 3x^2 + 4$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

b) Ta có $f'(x) = 24x^3 - 6x$.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm \frac{1}{2}$.

📌 Lời giải.

Ta có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 24x^3 - 6x$; Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$\frac{29}{8}$	4	$\frac{29}{8}$		$+\infty$		

a) Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

b) $f'(x) = 24x^3 - 6x$.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án a sai | b đúng | c đúng | d sai ☐

Câu 8

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S												
a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.		X												
b) Bảng biến thiên của hàm số là <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$0 \nearrow +\infty$</td><td>$-\infty \nearrow 0$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	2	$+\infty$	y'	+		+	y	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$		X	
x	$-\infty$	2	$+\infty$											
y'	+		+											
y	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$												
c) Đạo hàm $y' = \frac{-1}{(x-2)^2}$.		X												
d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.	X													

Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{1}{(x-2)^2}$. Cho $y' = 0$, Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		+	+
y	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	

a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số trên là đúng

c) Đạo hàm $y' = \frac{1}{(x-2)^2}$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án a sai | b đúng | c sai | d đúng ☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 9

Gọi y_{CD} , y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Giá trị của biểu thức $y_{\text{CD}}^2 - 2y_{\text{CT}}^2$ bằng

📌 **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$+\infty$	$+\infty$
				1		

Từ bảng biến thiên ta tìm được $y_{\text{CD}} = -3$; $y_{\text{CT}} = 1 \Rightarrow y_{\text{CD}}^2 - 2y_{\text{CT}}^2 = 9 - 2 = 7$.

Đáp án: **7** □

Câu 10

Tìm điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = (x - 3)e^x$.

📌 **Lời giải.**

✔ Ta có $f'(x) = e^x(x - 2)$, $f''(x) = e^x(x - 1)$.

✔ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ và $f''(2) = e^2 > 0$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Đáp án: **2** □

Câu 11

Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1; 18)$ và $(3; -16)$. Tính tổng $P = a + b + c + d$.

📌 **Lời giải.**

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo giả thiết suy ra:
$$\begin{cases} y'(1) = 3a - 2b + c = 0 \\ y(-1) = -a + b - c + d = 18 \\ y'(3) = 27a + 6b + c = 0 \\ y(3) = 27a + 9b + 3c + d = -16 \end{cases}.$$

Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 28a + 8b + 4c = -34 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{17}{16}; b = \frac{51}{16}; c = -\frac{153}{16}; d = \frac{101}{16} \Rightarrow a + b + c + d = 1.$$

Đáp án: **1** □

Câu 12

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $AB = \frac{a\sqrt{b}}{b}$. Khi đó $30 \cdot a - b$ bằng

👉 **Lời giải.**

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có $y' = 3x^2 - 6x - 9$ nên có hai điểm cực trị $A(-1; 6)$, $B(3; -26)$. Phương trình đường thẳng qua AB là $8x + y + 2 = 0$. Khi đó

$$d(O, AB) = \frac{|2|}{\sqrt{8^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{65}}{65}.$$

Do đó $30 \cdot a - b = -5$.

Đáp án: **-5** □

Câu 13

Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

👉 **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$ nên hàm số có hai điểm cực trị $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2)$ và $B(1 - \sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2})$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 2x - 4$. Tọa độ giao điểm của d với hai trục tọa độ là $A(2; 0)$, $B(0; -4)$.

Diện tích $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 4$.

Đáp án: **4** □

Câu 14

Goi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC gần bằng bao nhiêu (làm tròn tròn đến phần mười)?

👉 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Giả sử $A(0; 4)$, $B(-1; 3)$, $C(1; 3)$. Khi đó $AB = AC = \sqrt{2}$, $BC = 2$.

Suy ra tam giác ABC vuông cân tại A .

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

$$r = \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{AB \cdot AC}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{2}{2(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4.$$

Đáp án: **0,4** □

Câu 15

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = a$, cực đại tại $x = b$. Khi đó $3 \cdot a + 6 \cdot b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 4x + 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$			-3			$+\infty$
					$-\frac{85}{27}$		

Dựa vào BBT, ta có $3 \cdot a + 6 \cdot b = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 6 \cdot (-1) = -7$.

Đáp án: **-7**

Dạng 2 Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên

- ① Nắm vững các khái niệm liên quan đến đơn điệu và cực trị của hàm số.
- ② Dựa vào bảng biến thiên để kết luận tính đơn điệu và cực trị của hàm số.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới. Đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{35}{9}$		$\frac{73}{9}$		$-\infty$

- A** $\left(\frac{5}{3}; \frac{73}{9}\right)$.
B $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{35}{9}\right)$.
C $x = -\frac{1}{3}$.
D $x = \frac{5}{3}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $\left(\frac{5}{3}; \frac{73}{9}\right)$

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Điểm cực tiểu của hàm số là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	6	5	6	$-\infty$

- (A) $x = 5$. (B) $x = 0$. (C) $x = 6$. (D) $x = \pm 1$.

👉 Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận hàm số có điểm cực tiểu tại $x = 0$

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	10	$\frac{145}{27}$	$+\infty$	

- (A) 10. (B) -2. (C) $\frac{145}{27}$. (D) $-\frac{1}{3}$.

👉 Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận đồ thị hàm số đạt có giá trị cực đại $y_{CD} = 10$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 (C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
 (D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		3		$+\infty$	
	$-\infty$		0		

👉 Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ là khẳng định **đúng**.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- (A)** Hàm số có hai điểm cực trị.
(B) Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

📌 **Lời giải.**

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

- a)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
d) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	$+$	0	$+$

📌 **Lời giải.**

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0			1	2			$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$			$+\infty$

Từ đây, suy ra:

- a)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ là khẳng định **sai**.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là khẳng định **đúng**.
c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ là khẳng định **sai**.
d) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c sai | d sai** ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			-4		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$			4		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
- c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

- a) Ta thấy hàm $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua hai nghiệm $x = 2$ và $x = -2$ nên khẳng định trên đúng.
- b) Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
- c) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(0; 2)$ nên khẳng định trên là sai.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên khẳng định trên đúng

Chọn đáp án **a đúng | b đúng | c sai | d đúng** ☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Dạng 3 Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào đồ thị hàm số

- ① Nắm vững các khái niệm liên quan đến đơn điệu và cực trị của hàm số.
- ② Dựa vào đồ thị cùng kiến thức đã học để suy ra tính đơn điệu và cực trị của hàm số

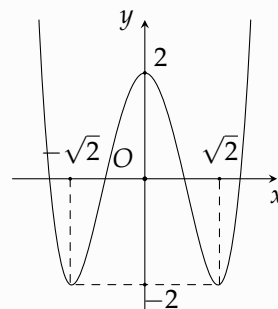
2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(\sqrt{2}; +\infty)$.
 (B) $(-2; 2)$.
 (C) $(-\infty; 0)$.
 (D) $(0; \sqrt{2})$.



📌 **Lời giải.**

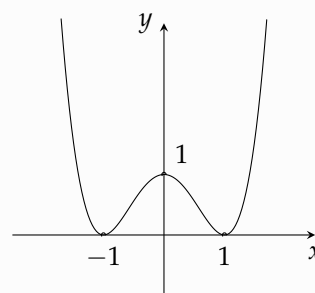
Dựa vào đồ thị, ta thấy trên khoảng $(0; \sqrt{2})$ đồ thị đi xuống nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó nhận xét nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số $f(x)$ không có cực trị.
 (B) Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực tiểu.
 (C) Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một cực đại.
 (D) Hàm số $f(x)$ có 3 cực trị.



📌 **Lời giải.**

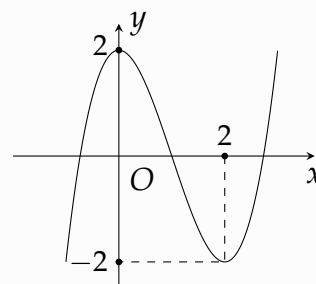
Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) \geq 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Suy ra, hàm số $f(x)$ không có cực trị.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- (A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
 (B) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 .
 (C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
 (D) Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.



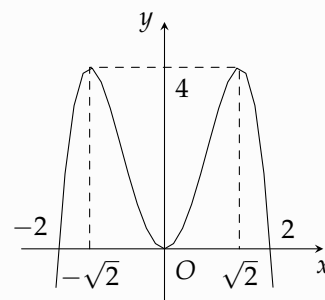
📌 **Lời giải.**

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 4

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- ☐ A $x = 2$.
 ☐ B $x = 0$.
 ☐ C $x = -2$.
 ☐ D $x = 4$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

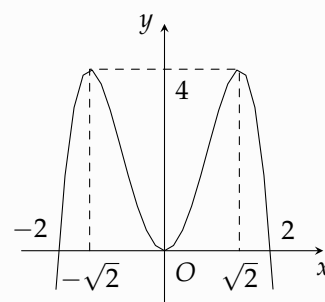
Chọn đáp án ☒ B. □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hãy chọn khẳng định đúng? khẳng định sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\pm\sqrt{2}$.
 b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.
 c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; \sqrt{2})$.
 d) Giá trị cực đại của hàm số bằng $y_{CD} = 4$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ nên khẳng định trên là sai.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \sqrt{2})$ nên khẳng định trên là sai.

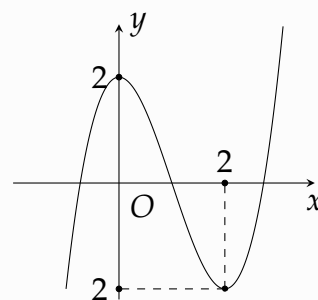
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có giá trị cực đại bằng $y_{CD} = 4$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☐ c sai ☒ d đúng □

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên

- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2.
 b) Giá trị b bằng 0.
 c) Giá trị $c = -2$.
 d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$.



Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 2$, điểm cực đại là $x = 0$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Vì 0, 2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên $b = 0, a = -3$.

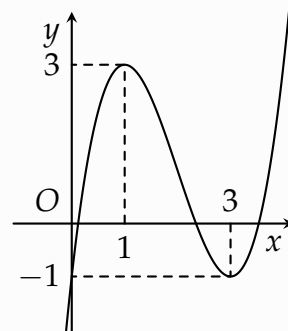
Vì đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0; 2)$ nên $c = 2$. Suy ra $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c đúng | d sai** ☐

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Khi đó

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- b) Điểm cực tiểu của hàm số là $y = -1$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3.
- d) $f'(2) > 0$.



📌 Lời giải.

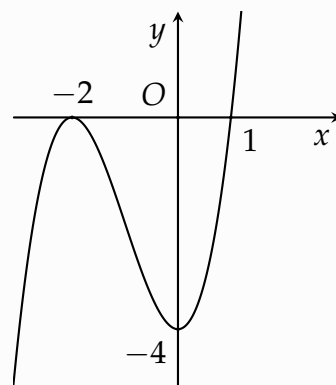
- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ nên nghịch biến trên $(1; 2)$.
- b) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3.
- d) Vì đồ thị hàm số nghịch biến trên $(1; 3)$ nên $f'(2) < 0$.

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c đúng | d sai** ☐

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Khi đó

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) $f(x) < 0$ trên $(-\infty; 0)$.
- c) $f'(x) < 0$ trên $(0; 1)$.
- d) $f'(-3) < f'(-1)$.



📌 Lời giải.

- a) Hàm số có hai điểm cực trị là $x = -2$ và $x = 0$.
- b) Trên $(-\infty; 0)$, đồ thị hàm số $f(x)$ nằm dưới trục hoành nên $f(x) < 0$ trên $(-\infty; 0)$.
- c) Trên $(0; 1)$, đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến nên suy ra $f'(x) > 0$ trên $(0; 1)$.
- d) Trên khoảng $(-\infty; -2)$, đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến nên $f'(-3) > 0$; trên khoảng $(-2; 0)$, đồ thị hàm số $f(x)$ nghịch biến nên $f'(-1) < 0$. Suy ra $f'(-3) > f'(-1)$.

Chọn đáp án **a đúng | b đúng | c sai | d sai** ☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Cho $a \neq 0, b^2 - 3ac > 0$. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

📌 Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, vì $a \neq 0, b^2 - 3ac > 0$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Khi đó, với cả hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ hàm số đã cho đều có 2 điểm cực trị.

Đáp án: **-25** ☐

§2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

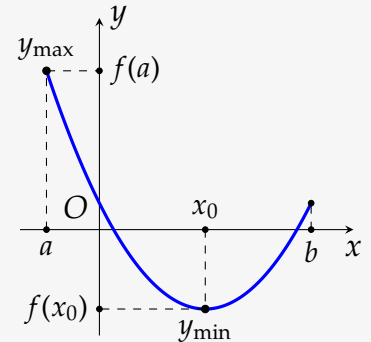
Định nghĩa 2.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Ta có

- ① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$

Kí hiệu $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$

- ② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$

Kí hiệu $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$



- ① Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào, thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.
- ② Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$. Từ bảng biến thiên, ta kết luận:
- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.
- ③ Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a; b)$), thì ta có thể giải như sau:
- Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;
 - Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
 - Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)
 - Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad n = \min_{[a; b]} f(x)$$

- ④ Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.

- Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a, b :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

- Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm a, b, c :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

- Bất đẳng thức Cô-si cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

- a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-3; 1]$. b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$.
- c) $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$ d) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$.
- e) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$; f) $f(x) = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.
- g) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$. h) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ trên miền xác định.

Lời giải.

- a) Hàm số liên tục trên $[-3; 1]$. Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-3; 1] \\ x = 2 \notin [-3; 1] \end{cases}$.
Ta có $f(-3) = 64$, $f(0) = 10$, $f(1) = 12$. Suy ra, $\max_{[-3; 1]} f(x) = f(-3) = 64$; $\min_{[-3; 1]} f(x) = f(0) = 10$.
- b) Hàm số liên tục trên $[-3; 2]$ Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \notin [-3; 2] \end{cases}$.
 $f(1) = \frac{7}{3}$, $f(3) = -35$, $f(2) = \frac{5}{3}$. Vậy $\max_{[-3; 2]} f(x) = \frac{7}{3}$ và $\min_{[-3; 2]} f(x) = -35$.
- c) Ta có $f'(x) = -8x^3 + 8x = -8x(x^2 - 1) = -8x(x - 1)(x + 1)$.
Xét $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ và $f(2) = -13$. Vậy $\max_{[0; 2]} f(x) = 5$ và $\min_{[0; 2]} f(x) = -13$.
- d) Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0; 4]$.
Ta có $y' = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in [0; 4]$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0; 4]$.
Vậy $\max_{[0; 4]} y = y(0) = 3$ và $\min_{[0; 4]} y = y(4) = \frac{11}{5}$.
- e) Xét hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
Đạo hàm $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.
Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (0; +\infty) \\ x = -2 \notin (0; +\infty) \end{cases}$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ -4 $\searrow$	$+\infty$	$\searrow$ 4 $\nearrow$	$+\infty$	

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có $\min_{(0;+\infty)} f(x) = 4$.

f) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có

$$y = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{2}$.

g) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	2		6		2
		1			

Suy ra $M = 6$ và $m = 1$.

h) Hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ liên tục trên $[0; 2]$.

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x}}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có $f(0) = 0, f(2) = 0, f(1) = 1$. Vậy $\max_{x \in [0;2]} f(x) = 1$ và $\min_{x \in [0;2]} f(x) = 0$.

Ví dụ 2

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

b) $y = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0; 2]$

c) $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2; 2]$

d) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^5]$

Lời giải.

a) Ta có

☑ $y' = 1 - 2\cos 2x$.

☑ $\begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

☑ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, f(\pi) = \pi, f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ lần lượt là $\frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{6}$ và $-\frac{\pi}{2}$.

b) Ta có $y' = (3x^2 - 3) \cdot e^{x^3 - 3x + 3}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ do $x \in [0; 2]$.

Khi đó $y(0) = e^3$; $y(2) = e^5$; $y(1) = e$. Vậy $\max_{[0;2]} y = e^5$ khi $x = 2$.

c) Ta có $y' = e^x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$. Xét các giá trị: $f(-2) = e^{-2}$; $f(1) = -2e$; $f(2) = e^2$, từ đó suy ra $y_{\min} = -2e$.

d) $y' = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$.

Tính $y(1) = 0$, $y(e^2) = \frac{4}{e^2} \approx 0,54$, $y(e^5) = \frac{9}{e^5} \approx 0,16$.

Vậy $\max_{x \in [1; e^5]} y = \frac{4}{e^2}$

Ví dụ 3

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

b) $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định.

👉 Lời giải.

a) Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ta được hàm số $y = g(t) = \frac{5t + 1}{t + 2}$.

$g'(t) = \frac{9}{(t + 2)^2} > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Vì $g(0) = \frac{1}{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{5}$ nên $\min_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(t) = g(0) = \frac{1}{2}$.

Vậy $\min_{\left[0; \frac{\pi}{6}\right]} f(x) = \min_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(t) = \frac{1}{2}$

b) Ta có $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x = \cos^3 x + 2(1 - \cos^2 x) + \cos x = \cos^3 x - 2 \cos^2 x + \cos x + 2$.

Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$. Ta được $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 2$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1; 1] \\ t = \frac{1}{3} \in [-1; 1] \end{cases}$.

Mà $f(-1) = -2$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$, $f(1) = 2$ nên $\max_{x \in \mathbb{R}} y = \max_{[-1; 1]} f(t) = \frac{58}{27}$

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền cho bởi công thức $\mathcal{D}$

- ① Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in \mathcal{D}$ và tìm các điểm $x_j \in \mathcal{D}$ mà tại đó y' không xác định.
- ② Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathcal{D}$.
- ③ Từ bảng biến thiên, kết luận:
 - Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-2; 3]$ lần lượt là

- (A) 17, -15. (B) 10, -26. (C) -15, 17. (D) 6, -26.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = 3x^2 - 12$, do đó $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \in [-2; 3]$.

Mặt khác $f(-2) = 17, f(2) = -15, f(3) = -8$.

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất cần tìm lần lượt là 17, -15.

Chọn đáp án (A) 

Câu 2

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4; 4]$. Tính tổng $M + m$.

- (A) 12. (B) 98. (C) 17. (D) 73.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$

Khi đó: $y(-4) = 21, y(-3) = 28, y(1) = -4, y(4) = 77$.

Do đó $M + m = 77 + (-4) = 73$.

Chọn đáp án (D) 

Câu 3

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- (A) 33. (B) 37. (C) 12. (D) 1.

 **Lời giải.**

Hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f'(x) = -4x^3 + 24x = -4x(x^2 - 6)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin [-1; 2] \\ x = 0 \in [-1; 2] \\ x = \sqrt{6} \notin [-1; 2]. \end{cases}$$

Ta có $f(-1) = 12; f(0) = 1; f(2) = 33$. Vậy $\max_{[-1; 2]} f(x) = 33$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 4

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng

- (A) 57. (B) 56. (C) 54. (D) 55.

👉 Lời giải.

Hàm số y liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có đạo hàm $y' = 4x^3 - 6x$.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 3] \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}} \in [0; 3] \\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \notin [0; 3]. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(0) = 2, y(3) = 56, y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 56.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- (A) $\min_{[0; 3]} y = \frac{1}{2}$. (B) $\min_{[0; 3]} y = -3$. (C) $\min_{[0; 3]} y = 1$. (D) $\min_{[0; 3]} y = -1$.

👉 Lời giải.

Trên đoạn $[0; 3]$ hàm số luôn xác định.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 3]$ nên hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[0; 3]$.

Do đó $\min_{[0; 3]} y = y(0) = -1$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 6

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$ là

- (A) 2. (B) $\frac{7}{5}$. (C) 3. (D) $\frac{11}{5}$.

👉 Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ nên $\min_{[0; 4]} y = y(4) = \frac{11}{5}$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 7

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ bằng

Ⓐ 4.

Ⓑ -3.

Ⓒ $-\frac{7}{2}$.Ⓓ $-\frac{13}{3}$.

📌 Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \left[-2; \frac{1}{2}\right] \\ x = 2 \notin \left[-2; \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(0) = -3, y(-2) = \frac{-13}{3}, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-7}{2}.$$

Suy ra $\max_{x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = -3$

$$x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$$

Chọn đáp án Ⓑ ☐

Câu 8

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ là

Ⓐ $M = -2$.Ⓑ $M = 2$.Ⓒ $M = 4$.Ⓓ $M = 0$.

📌 Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = [-2; 2]$.

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-2; 2].$$

$$\text{Ta có } y(2) = y(-2) = 0; y(0) = 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng 2.

Chọn đáp án Ⓑ ☐

Câu 9

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

Ⓐ $M = 4$.Ⓑ $M = \sqrt{7}$.Ⓒ $M = 7$.Ⓓ $M = 3$.

📌 Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-1; 7]$.

$$y' = \frac{-x + 3}{\sqrt{7 + 6x - x^2}}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in \mathcal{D}.$$

$$\text{Có } y(3) = 4, y(-1) = 0, y(7) = 0. \text{ Vậy } M = 4.$$

Chọn đáp án Ⓐ ☐

Câu 10

Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

Ⓐ $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$.Ⓑ $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$.

Ⓒ $\max_{x \in [\frac{1}{2}; e]} y = e.$

Ⓓ $\max_{x \in [\frac{1}{2}; e]} y = \frac{1}{2} + \ln 2.$

👉 **Lời giải.**

Hàm số $y = x - \ln x$ liên tục trên đoạn $[\frac{1}{2}; e]$.

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [\frac{1}{2}; e]$.

Do $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \ln 2$; $y(e) = e - 1$; $y(1) = 1$ nên $\max_{x \in [\frac{1}{2}; e]} y = e - 1$.

Chọn đáp án Ⓓ. □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
- d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.

👉 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗ 1 ↘		↘ -3 ↗		$+\infty$

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- c) Ta có $f(1) = -1$; $f(2) = -3$; $f(3) = 1$. Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 3$.
- d) Ta có $y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$. Hàm số có đồ thị đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.

Chọn đáp án a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 2

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-26; +\infty)$.
- b) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1; +\infty)$ là -26 .

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $4\sqrt{65}$.

📌 Lời giải.

Tập xác định Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	-26	$+\infty$	

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1), (3; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

b) Đạo hàm của hàm số đổi dấu từ "+" sang "-" khi qua điểm $x = -1$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

c) Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1; +\infty)$ là -26 tại $x = 3$.

d) Điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số trên lần lượt là $A(-1; 6)$ và $B(3; -26)$. Từ đó suy ra $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (-26-6)^2} = 4\sqrt{65}$.

Chọn đáp án a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 3

Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1-x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tính $M - N$.

(A) $M - N = 4\ln 2$.

(B) $M - N = -1$.

(C) $M - N = 4\ln 2 - 1$.

(D) $M - N = 4\ln 3 - 4$.

📌 Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$.

Ta có $y' = 2x + \frac{4}{1-x} = \frac{-2x^2 + 2x + 4}{1-x}$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{nhận}) \\ x = 2 & (\text{loại}). \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} y(-2) = 4 - 4\ln 3 \approx -0,4 \\ y(-1) = 1 - 4\ln 2 \approx -1,7 \Rightarrow M = 0, N = 1 - 4\ln 2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Vậy $M - N = 4\ln 2 - 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4

Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = e^{3x^2-2x^3} - f(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

- (A) $e - f(1)$. (B) $f(1)$. (C) $f(0)$. (D) $1 - f(0)$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = (6x - 6x^2)e^{3x^2-2x^3} - f'(x)$.

Trên đoạn $[0; 1]$ thì $6x - 6x^2 \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ nên $g'(x) \geq 0$, suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến, suy ra giá trị nhỏ nhất là $g(0) = 1 - f(0)$.

Chọn đáp án (D) □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ thỏa mãn $\min_{[0;5]} f(x) = 5$. Khi đó giá trị của m bằng

👉 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 5] \\ x = 1 \in [0; 5] \end{cases}$.

Xét $f(0) = m$; $f(1) = -1 + m$; $f(5) = 175 + m$.

Suy ra $\min_{[0;5]} f(x) = -1 + m$. Theo giả thiết $-1 + m = 5 \Leftrightarrow m = 6$.

Đáp án: (6) □

Câu 2

Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2(m - 10)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng -5 .

👉 **Lời giải.**

• $f'(x) = 9x^2 - 8x$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{8}{9} \end{cases}$.

• Ta có bảng biến thiên

x	1	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$2m - 21$	$2m + 25$

• Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng $-5 \Leftrightarrow 2m - 21 = -5 \Leftrightarrow m = 8$.

Đáp án: (m = 8) □

Câu 3

Có bao nhiêu giá trị m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

📌 **Lời giải.**

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{m^2 - m + 1}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}.$$

$$\text{Khi đó } \min_{x \in [0; 1]} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -2 = -m^2 + m \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Đáp án: **2** □

Câu 4

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$ lần lượt là M, m . Tổng $M + m$ bằng

📌 **Lời giải.**

$$\text{Đặt } t = \sin x (-1 \leq t \leq 1). \text{ Ta có } y = f(t) = t^3 - 3t^2 + 2 (-1 \leq t \leq 1).$$

$$y' = 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-1; 1] \\ t = 2 \notin [-1; 1]. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-1) = -2, f(1) = 0, f(0) = 2. \text{ Vậy } M = 2 \text{ và } m = -2 \Rightarrow M + m = 0.$$

Đáp án: **0** □

Câu 5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 2019$ là

📌 **Lời giải.**

$$\text{Tập xác định } \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

$$\text{Biến đổi } f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 2019 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 2019.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow t = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow t \geq -\frac{9}{4} \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Hàm số đã cho trở thành } f(x) = t^2 + 2t + 2019 = (t + 1)^2 + 2018 \geq 2018 \forall t \geq -\frac{9}{4}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng } 2018 \text{ tại } t = -1 \in \left[-\frac{9}{4}; +\infty\right).$$

Đáp án: **2018** □

Dạng 2

Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào bảng biến thiên

② Dựa vào bảng biến thiên của hàm số trên $[a; b]$.

③ Từ bảng biến thiên, kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
- Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

Câu 1

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau.

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- Ⓐ $M = f(0)$. Ⓑ $M = f(-1)$.
Ⓒ $M = f(3)$. Ⓓ $M = f(2)$.

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y			5		1	4
	0				1	

👉 **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = f(0) = 5$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-2; 3]$ như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-	
$f(x)$		0		1		5

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của biểu thức $M - m$ là

- Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ -1. Ⓓ 3.

👉 **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số là $M = 5$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m = -2$ nên $M - m = 7$.

Chọn đáp án Ⓑ □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		4			
	$-\infty$			3			$-\infty$	

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Cực đại của hàm số là 4. b) Cực tiểu của hàm số là 3.

c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4.$

d) $\min_{\mathbb{R}} y = 3.$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **a đúng | b đúng | c đúng | d sai** ☐

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-3		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
			-4		-4	

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. b) Giá trị cực tiểu của hàm số là -3 .
 c) $\min_{\mathbb{R}} y = -4$. d) $\max_{\mathbb{R}} y = -3$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số vừa đồng biến vừa nghịch biến.

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c đúng | d sai** ☐

Câu 3

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau. Khi đó ta có

- a) Trên đoạn $[-1; 3]$ hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5.
 b) Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.
 c) Trên đoạn $[-1; 3]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.
 d) $f(2) = 1$.

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y			5			4
	0			1		

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta dễ dàng xét tính đúng sai các mệnh đề trên.

Chọn đáp án **a đúng | b đúng | c sai | d đúng** ☐

Dạng 3 Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị hàm số

② Dựa vào đồ thị của hàm số trên $[a; b]$.

③ Từ đồ thị, kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
- Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

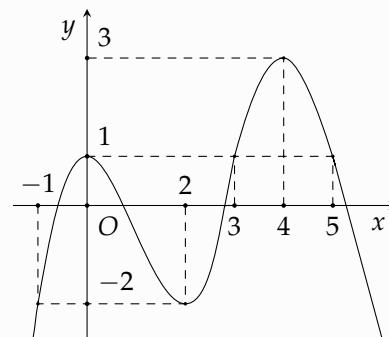
3. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 5]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra $m = \min_{[-1; 5]} f(x) = f(-1) = -2$, $M = \max_{[-1; 5]} f(x) = f(4) = 3$.

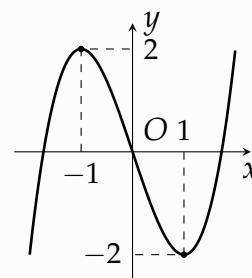
Do đó $M + m = 3 - 2 = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

- (A) $m = 2$. (B) $m = -2$.
(C) $m = 1$. (D) $m = -1$.



Lời giải.

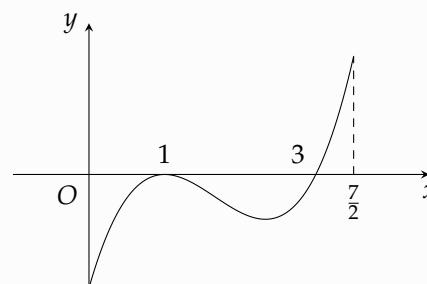
Dựa vào đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -2 .

Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

- (A) $x_0 = 3$. (B) $x_0 = 2$. (C) $x_0 = 1$. (D) $x_0 = 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$

x	0	1	3	$\frac{7}{2}$	
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	$f\left(\frac{7}{2}\right)$	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm $x_0 = 3$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 4

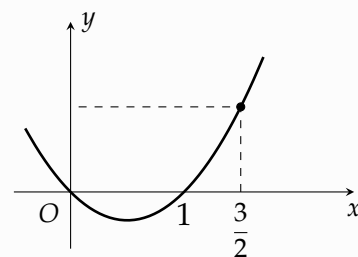
Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?

(A) $x = \frac{3}{2}$.

(B) $x = \frac{1}{2}$.

(C) $x = 1$.

(D) $x = 0$.



👉 Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Ta có bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	
y'	-	0	+	0
y				

Suy ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 5

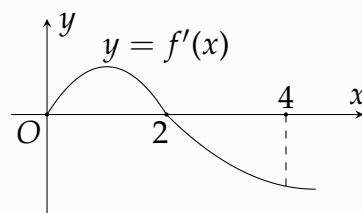
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là

(A) $m = f(4), M = f(1)$.

(B) $m = f(4), M = f(2)$.

(C) $m = f(1), M = f(2)$.

(D) $m = f(0), M = f(2)$.



👉 Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	2	4	
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$	

Từ bảng biến thiên ta thấy $M = f(2)$.

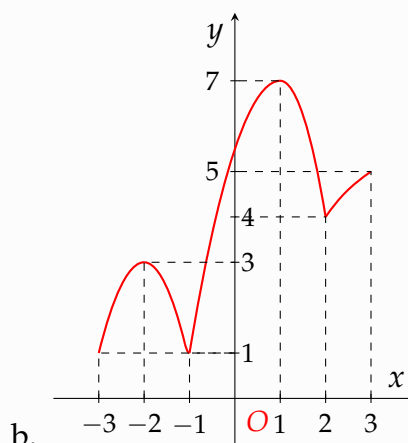
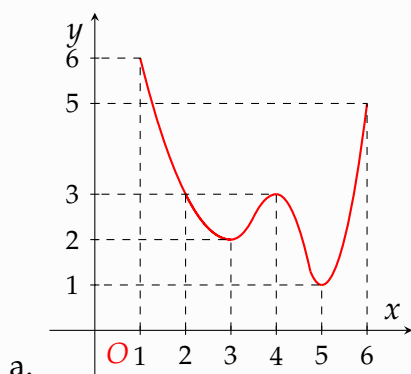
Mặt khác, từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1) < f(2) \\ f(3) < f(2) \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2)$.

Do đó $f(4) = f(0) + f(1) + f(3) - 2f(2) < f(0) + f(2) + f(2) - 2f(2) = f(0) \Rightarrow m = f(4)$.

Chọn đáp án (B)..... □

Bài 1

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở Hình 5.



Lời giải.

Ở hình a, ta có $\min f(x) = 1$ tại $x = 5$, $\max f(x) = 6$ tại $x = 1$.

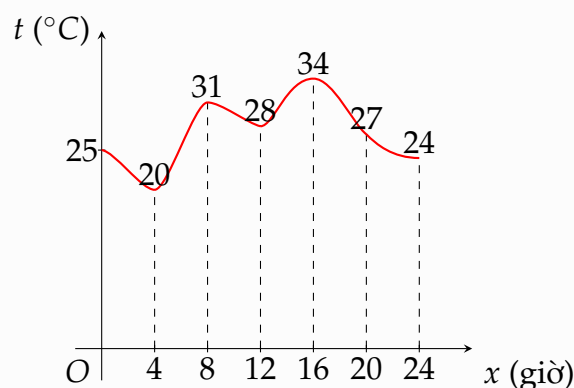
Ở hình b, ta có $\min f(x) = 1$ tại $x = -3$ và $x = -1$, $\max f(x) = 7$ tại $x = 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C .
- Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C .
- Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.
- Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.



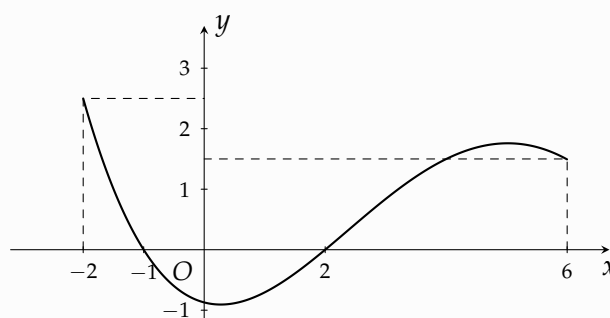
📌 Lời giải.

Chọn đáp án a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$.
- b) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$.
- c) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$.
- d) $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max \{f(-1), f(6)\}$.



📌 Lời giải.

x	-2	-1	2	6		
y'		+	0	-	0	+
y			$f(-1)$		$f(6)$	
	$f(-2)$		$f(2)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- ✔ Hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$ và $(2; 6)$ do $f'(x) > 0$, suy ra

$$f(-1) > f(-2) \text{ và } f(6) > f(2) \quad (1).$$

- ✔ Hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$ do $f'(x) < 0$, suy ra

$$f(-1) > f(2) \quad (2).$$

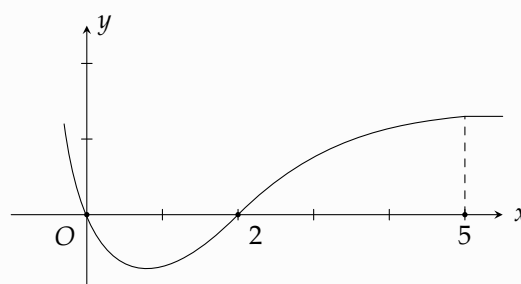
Từ (1), (2) suy ra $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max \{f(-2), f(-1), f(2), f(6)\} = \max \{f(-1), f(6)\}$.

Chọn đáp án a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 3

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- c) $\min_{[0; 5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0; 5]} f(x) = f(5)$.
- d) $\min_{[0; 5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0; 5]} f(x) = f(5)$.



📌 Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0; 5]$

x	0	2	3	5
$f'(x)$		–	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(5)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0); f(5)\}$.

Theo bảng biến thiên thì $f(3) > f(2)$ nên $f(3) - f(2) > 0$.

Theo giả thiết, ta có

$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) = f(0) + [f(3) - f(2)] > f(0).$$

Suy ra $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

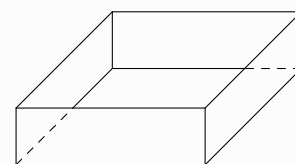
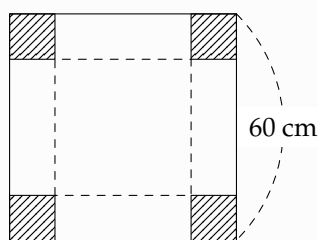
Vậy $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c sai | d đúng** □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (H.1.14). Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Hình 1.14

Lời giải.

Gọi x (cm) là độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ được cắt ở bốn góc của tấm bìa. Điều kiện $0 < x < 30$.

Khi cắt bỏ bốn hình vuông nhỏ có cạnh x cm ở bốn góc và gập lên thì ta được một chiếc hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông với độ dài cạnh bằng $(60 - 2x)$ (cm) và chiều cao bằng x cm. Thể tích của chiếc hộp này là

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ta có $V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $x = 30$ (loại).

Lập bảng biến thiên:

x	0	10	30
$V'(x)$		+	0
$V(x)$	0	16 000	0

Vậy để thể tích của chiếc hộp là lớn nhất thì độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ phải cắt là 10 cm.

Đáp án: **10** □

Câu 2

Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

📌 Lời giải.

Với $0 \leq t \leq 12$ ta có

$$N'(t) = -3t^2 + 24t, N'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8. \end{cases}$$

Ta có $N(0) = 0$, $N(8) = 256$, $N(12) = 0$.

Do đó, số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương là 256 người trong 12 tuần đầu.

Đáp án: **12** ☐

Câu 3

Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

📌 Lời giải.

Hàm số biểu thị tốc độ lây lan của virus là $N'(t) = -3t^2 + 24t$.

Đặt $f(t) = -3t^2 + 24t$, với $0 \leq t \leq 12$.

Ta có $f'(t) = -6t + 24$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

$$f(0) = 0, f(4) = 48, f(12) = -144.$$

Do đó, virus sẽ lây lan nhanh nhất khi $t = 4$ (tuần thứ 4).

Đáp án: **4** ☐

Câu 4

Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

📌 Lời giải.

Gọi x (cm) là chiều rộng của hình chữ nhật.

Điều kiện $0 < x < 12$.

Chiều dài của hình chữ nhật là $12 - x$ (cm).

Diện tích của hình chữ nhật là $x(12 - x) = -x^2 + 12x$ (cm²).

Xét hàm số $y = -x^2 + 12x$ với $0 < x < 12$.

Ta có $y' = -2x + 12$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

$$y(0) = 0; y(6) = 36; y(12) = 0.$$

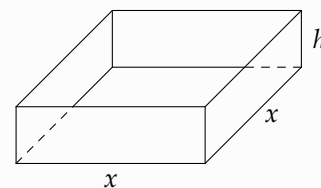
Do đó: $\max_{(0;12)} y = y(6) = 36$.

Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

Đáp án: **24** ☐

Câu 5

Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

👉 Lời giải.

Thể tích của chiếc hộp là $V = x^2 \cdot h \text{ (cm}^3\text{)}$.
 Vì diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 nên ta có

$$x^2 + 4xh = 108 \Leftrightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x} \text{ (điều kiện } 0 < x < \sqrt{108}\text{)}.$$

Khi đó thể tích chiếc hộp là $V = \frac{x(108 - x^2)}{4} = -\frac{x^3}{4} + 27x$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V = -\frac{x^3}{4} + 27x \text{ (} 0 < x < \sqrt{108}\text{)}$.

Có $V' = -\frac{3}{4}x^2 + 27$; $V' = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (vì } 0 < x < \sqrt{108}\text{)}$.

Bảng biến thiên:

x	0	6	$\sqrt{108}$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$		108	
	0		$V(\sqrt{108})$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có thể tích lớn nhất của chiếc hộp là 108 cm^3 khi $x = 6 \text{ cm}$ và $h = 3 \text{ cm}$.

Đáp án: **6;3** ☐

Câu 6

Hộp sữa 1 lít được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh $x \text{ cm}$. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

👉 Lời giải.

Thể tích hộp sữa là $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$ khi đó chiều cao của hộp sữa là $\frac{1000}{x^2} \text{ (cm)}$.

Đặt diện tích toàn phần của hộp sữa là $y = 2x^2 + 4x \cdot \frac{1000}{x^2} = \frac{2x^3 + 4000}{x} \text{ (cm)}^2$.

Xét $y' = \frac{4x^3 - 4000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (cm)}$.

Ta có bảng biến thiên như sau

x	0	10	$+\infty$
y'		- 0 +	
y	$+\infty$	600	$+\infty$

Vậy theo bảng biến thiên ta thấy $x = 10$ (cm) thì diện tích toàn phần của hộp sữa sẽ nhỏ nhất là 600 cm^2 .

Đáp án: **600** ☐

Câu 7

Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m (Hình 6). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

📌 Lời giải.

Gọi chiều dài của khung cửa sổ là x (mét). Điều kiện $0 < x < 2$.

Suy ra chiều rộng của khung cửa sổ là $2 - x$ (mét).

Khi đó diện tích của khung cửa sổ là $x(2 - x) = -x^2 + 2x$.

Đặt $f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên như sau

x	0	1	2
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$	0	1	0

Như bảng biến thiên ta thấy được diện tích khung cửa sổ lớn nhất khi $x = 1$ hay khung cửa có dạng hình vuông cạnh 1 mét.

Đáp án: **1** ☐

§3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

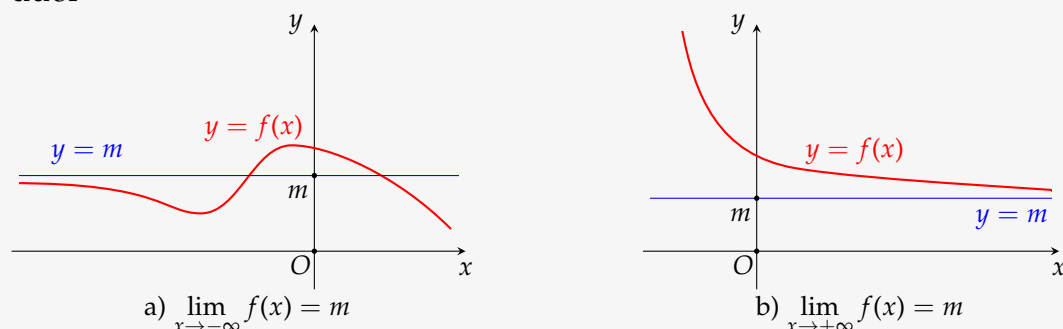
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang (TCN):

Định nghĩa 3.1. Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới



Phương pháp 3.1. Các bước tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

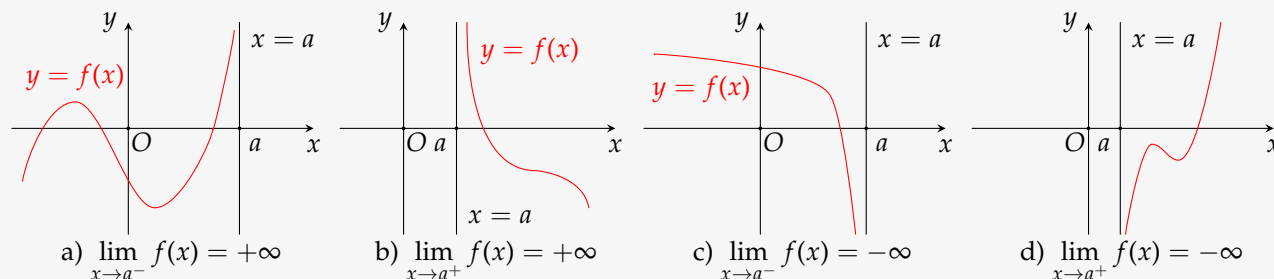
- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

Định nghĩa 3.2. Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới.



Phương pháp 3.2. Các bước tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$

- Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận

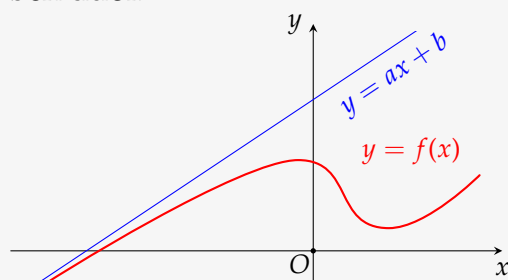
$x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

3. Đường tiệm cận xiên

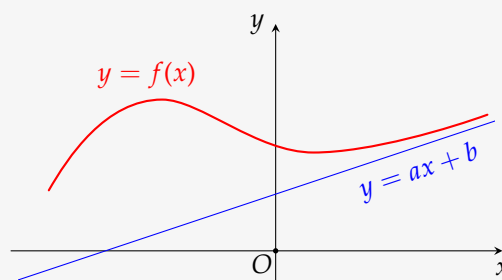
Định nghĩa 3.3. Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Phương pháp 3.3.

Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+1}$; b) $y = \frac{2x-3}{1-2x}$; c) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$; d) $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

📌 **Lời giải.**

a) Xét $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$) nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Xét $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang.

b) Ta có

🟢 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{1-2x} = -1$ suy ra $y = -1$ là tiệm cận ngang.

$$\textcircled{v} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x-3}{1-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x-3}{1-2x} = -\infty \end{cases} \text{ suy ra } x = \frac{1}{2} \text{ là tiệm cận đứng.}$$

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \textcircled{v} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} &= 1 \\ \textcircled{v} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} &= +\infty \\ \textcircled{v} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 1$ và một tiệm cận đứng $x = -1$.

d) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \textcircled{v} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = 0 \text{ nên } y = 0 \text{ là đường tiệm cận ngang.} \\ \textcircled{v} \lim_{x \rightarrow 1^-} y &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \text{ nên } x = 1 \text{ là} \\ &\text{đường tiệm cận đứng.} \\ \textcircled{v} \lim_{x \rightarrow 2^-} y &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \text{ nên } x = 2 \\ &\text{là đường tiệm cận đứng.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2

Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{x^2+2}{2x-4}; \quad \text{b) } y = \frac{2x^2-3x-6}{x+2}; \quad \text{c) } y = \frac{2x^2+9x+11}{2x+5}.$$

Lời giải.

a) Hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2}{2x-4}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\textcircled{v} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+2}{2x-4} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2}{2x-4} = +\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x = 2$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\textcircled{v} \text{ Ta có } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{2x-4} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x-4} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{2x-4} = 1.$$

$$\text{Ta cũng có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \frac{1}{2}x] = 1.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 1$.

b) Hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

✔ Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

✔ Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3 - \frac{6}{x}}{x + 2} = 2$;

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x - 6}{x + 2} = -7.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = -7$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 7$.

c) Hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

✔ Ta có $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{5}{2}\right)^-} \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{5}{2}\right)^+} \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -\frac{5}{2}$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

✔ Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 9 + \frac{11}{x}}{2x + 5} = 1$;

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 11}{2x + 5} = 2.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 2$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$. Hàm số có có đường tiệm cận đứng là

- Ⓐ $y = 0$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = 2$. Ⓓ $x = 0$.

📌 Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow (2)^+} \frac{x-1}{x-2} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (2)^-} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$.

Do đó hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 2$.

Chọn đáp án Ⓑ..... □

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{4x-1}$. Hàm số có có đường tiệm cận đứng là

- Ⓐ $x = \frac{3}{4}$. Ⓑ $y = \frac{3}{4}$. Ⓒ $x = \frac{1}{4}$. Ⓓ $y = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^+} \frac{3x-1}{4x-1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^-} \frac{3x-1}{4x-1} = +\infty$.

Do đó hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C)..... □

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$. Hàm số có đường tiệm cận ngang là

- (A) $y = 3$. (B) $y = 1$. (C) $x = 1$. (D) $x = 3$.

Lời giải.

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$.

Do đó hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 3$.

Chọn đáp án (A)..... □

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{2x}$. Hàm số có đường tiệm cận ngang là

- (A) $x = 0$. (B) $y = 0$. (C) $x = \frac{3}{2}$. (D) $y = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{2x} = \frac{3}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x} = \frac{3}{2}$.

Do đó hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D)..... □

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{-4x^2 - 2x - 5}{-x + 2}$. Đường tiệm cận xiên của hàm số là

- (A) $y = 4x + 10$. (B) $y = 4x + 10$. (C) $y = 4x + 10$. (D) $y = 4x + 10$.

Lời giải.

Giả sử đường tiệm cận xiên có dạng $y = ax + b$. Ta tìm hệ số a và b như sau

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 - 2x - 5}{-x + 2} = 4; b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4x^2 - 2x - 5}{-x + 2} - 4x \right) = 10 \Rightarrow y = 4x + 10$$

Do đó ta được tiệm cận xiên là $y = 4x + 10$.

Chọn đáp án (D)..... □

Câu 6

Cho hàm số $y = \frac{3x^2 + 5x - 4}{-5x + 4}$. Đường tiệm cận xiên của hàm số là

- Ⓐ $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$. Ⓑ $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$. Ⓒ $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$. Ⓓ $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$.

📌 Lời giải.

Giả sử đường tiệm cận xiên có dạng $y = ax + b$. Ta tìm hệ số a và b như sau

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 4}{-5x + 4} = -\frac{3}{5}; b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 5x - 4}{-5x + 4} + \frac{3}{5}x \right) = -\frac{37}{25} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$$

Do đó ta được tiệm cận xiên là $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$.

Chọn đáp án Ⓒ..... ☐

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{-x - 4}{3x + 2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận đứng là

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	$-\frac{1}{3}$

- Ⓐ $y = -\frac{2}{3}$. Ⓑ $x = -\frac{2}{3}$. Ⓒ $y = -\frac{2}{3}$. Ⓓ $x = -\frac{1}{3}$.

📌 Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta được tiệm cận đứng là $x = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ..... ☐

Câu 8

Cho hàm số $y = \frac{x + 1}{5x - 2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận đứng là

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
y'		-	-
y	$\frac{1}{5}$	$+\infty$	$\frac{1}{5}$

- Ⓐ $x = \frac{2}{5}$. Ⓑ $x = \frac{1}{5}$. Ⓒ $y = \frac{2}{5}$. Ⓓ $y = \frac{2}{5}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta được tiệm cận đứng là $x = \frac{2}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Cho hàm số $y = \frac{4x+3}{-3x+2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận ngang là

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$	$-\frac{4}{3}$

- (A) $y = \frac{2}{3}$. (B) $x = -\frac{4}{3}$. (C) $y = -\frac{4}{3}$. (D) $x = -\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta được tiệm cận ngang là $x = -\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Cho hàm số $y = \frac{-x+5}{4x+1}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận ngang là

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
y'		-	-
y	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$

- (A) $x = -\frac{1}{4}$. (B) $x = -\frac{1}{4}$. (C) $y = -\frac{1}{4}$. (D) $y = -\frac{1}{4}$.

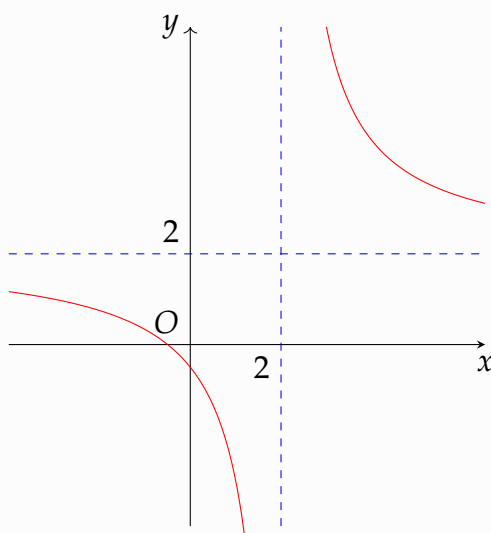
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta được tiệm cận ngang là $x = -\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là



Ⓐ $y = -2$.

Ⓑ $y = 2$.

Ⓒ $x = -2$.

Ⓓ $x = 2$.

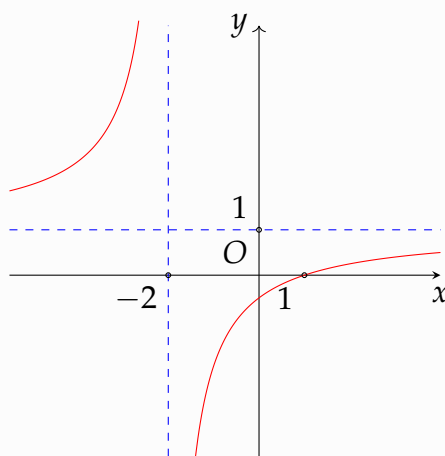
📌 **Lời giải.**

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.

Chọn đáp án Ⓓ

Câu 12

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x = 1$.

Ⓑ $y = -2$.

Ⓒ $x = -2$.

Ⓓ $y = 1$.

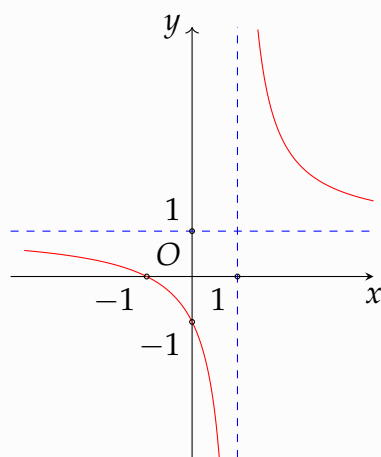
📌 **Lời giải.**

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Chọn đáp án Ⓓ

Câu 13

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



- Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $y = 1$. Ⓒ $y = -1$. Ⓓ $x = 1$.

👉 **Lời giải.**

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y = 1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Ⓒ PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

a) Các bước tìm tiệm cận đứng:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

b) Các bước tìm tiệm cận ngang:

- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

c) Lưu ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 4}{x + 2}$ là

- Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $y = -2$.

👉 **Lời giải.**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-4}{x+2} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{x+2} = 2$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 2

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

(A) $y = -2$.

(B) $x = -2$.

(C) $y = 2$.

(D) $x = 1$.

📌 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{-x+1} = -2$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 3

Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

(A) $y = \frac{1-3x}{2+x}$.

(B) $y = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$.

(C) $y = \frac{1+3x}{1+x}$.

(D) $y = \frac{3x^2+2}{2-x}$.

📌 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+3x}{1+x} = 3$ nên $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1+3x}{1+x}$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 4

Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

(A) $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$.

(B) $y = \frac{1}{x+1}$.

(C) $y = \frac{2}{x+2}$.

(D) $y = \frac{5x}{2-x}$.

📌 **Lời giải.**

Xét hàm số $y = \frac{5x}{2-x}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x = 10 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) < 0$ và $x-2 < 0$ khi $x > 2$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x}{2-x} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{5x}{2-x}$ nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 5

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

(A) $x = -2$.

(B) $x = 2$.

(C) $y = 3$.

(D) $y = -\frac{1}{2}$.

📌 **Lời giải.**

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 6

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là
 (A) $x = -1$. (B) $y = 1; y = -5$. (C) $x = 1; x = -5$. (D) $x = \pm 5$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} y = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -5$.

Chọn đáp án (C).....

Câu 7

Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.
 (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$ và $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C).....

Câu 8

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là
 (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Tiệm cận đứng $x = 2$.

Tiệm cận ngang $y = 0$.

Chọn đáp án (B).....

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
- (B) Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
- (C) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
- (D) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 10

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

📌 Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Ngoài ra $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \frac{1}{6}$ nên $x = 0$ không thể là một tiệm cận được.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	-2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-2
	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
		$-\infty$	1	$-\infty$	

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

📌 Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \mp\infty.$$

Do đó $x = 1$ và $x = -1$ là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$. Do đó $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 12

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
☐ B Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
☐ C Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
☐ D Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

Lời giải.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **C**. □

Câu 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$+$	$-$	
y		$-\infty$	2	0

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- ☐ A 2. ☐ B 3. ☐ C 4. ☐ D 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số, suy ra

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

✓ $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án **A**. □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $f(-5) < f(4)$. b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.
 c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$. d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Lời giải.

- a) Từ bảng biến thiên ta thấy $f(-5) < 2$ và $f(4) > 2$ nên $f(-5) < f(4)$.
 b) Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất.
 c) Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.
 d) Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c đúng | d sai** ☐

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{-4x+5}{2x+3}$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số không có cực trị.
 b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$.
 c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.
 d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = -2$

Diện tích hình chữ nhật cần tìm là $S = \left|-\frac{3}{2}\right| \cdot |-2| = 3$

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c sai | d đúng** ☐

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{-x-2}{-x-1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S												
a) Bảng biến thiên của hàm số là <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>$+\infty$</td><td>1</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	y'	-		-	y	1	$+\infty$	1	X	
x	$-\infty$	-1	$+\infty$											
y'	-		-											
y	1	$+\infty$	1											
b) Đạo hàm $y' = \frac{1}{(-x-1)^2}$.		X												
c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.		X												
d) Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số là $x = -1 ; y = 1$.	X													

Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{-1}{(-x-1)^2}$. Cho $y' = 0$, Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

a) Bảng biến thiên của hàm số trên là đúng

b) Đạo hàm $y' = \frac{-1}{(-x-1)^2}$.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

d) Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số là $x = -1 ; y = 1$.

Chọn đáp án a đúng | b sai | c sai | d đúng

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{-x+1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S
-----------	---	---

a) Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	-2	$+\infty$	-2

X

b) Tâm đối xứng của hàm số là $I(1; -2)$.

X

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -2$.

X

d) Đường tiệm cận ngang của hàm số là $y = 1$.

X

📌 Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{-1}{(-x+1)^2}$. Cho $y' = 0$, Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	-2	$+\infty$	-2

a) Bảng biến thiên của hàm số trên là đúng

b) Giao điểm hai tiệm cận là tâm đối xứng. Do đó tâm đối xứng là $I(1; -2)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$.

d) Đường tiệm cận ngang của hàm số là $y = -2$.

Chọn đáp án a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$, với m là tham số.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$.

d) Tập hợp tất cả giá trị của m để đồ thị có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

📌 Lời giải.

- a) Điều kiện $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Vậy Tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi hệ số của x^2 trên tử số phải bằng 0. Suy ra $m = 0$.
- c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $x = -2$ không là nghiệm của tam thức $g(x) = mx^2 + 6x - 2$. Suy ra
- $$g(-2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{7}{2}$$
- d) Đồ thị hàm số chắc chắn có 1 tiệm cận xiên (hoặc ngang). Suy ra, để đồ thị có hai đường tiệm cận thì nó phải có 1 tiệm cận đứng. Điều này tương đương với $m \neq \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án a đúng | b sai | c sai | d đúng □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Dạng 2 Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

a) Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

b) Lưu ý:

① Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

② Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$ có phương trình là

- Ⓐ $y = x + 1$. Ⓑ $y = 2x - 1$. Ⓒ $y = x - 1$. Ⓓ $y = 2x + 1$.

👉 **Lời giải.**

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án B □

Câu 2

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

- (A) $y = 2x + 1$. (B) $y = x - 3$. (C) $y = x + 3$. (D) $y = 2x - 1$.

📌 **Lời giải.**

Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$ nên đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

- (A) $y = 2x - 5$. (B) $y = x - 2$. (C) $y = x + 5$. (D) $y = x - 5$.

📌 **Lời giải.**

Ta có

$$\text{✔ } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x(x - 2)} = 1$$

$$\text{✔ } \text{và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x - 2} = 5.$$

Vậy đường thẳng $y = x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$).

Tương tự, do $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 5$ nên đường thẳng $y = x + 5$ cũng là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow -\infty$).

Chọn đáp án (C) □

Câu 4

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

- (A) $y = -2$. (B) $y = 1$. (C) $y = x + 2$. (D) $y = x$.

📌 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2} = \frac{x(x + 2) - 2}{x + 2} = x - \frac{2}{x + 2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x + 2} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x + 2} = 0.$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = -3x + 1$. (C) $y = x - 2$. (D) $y = x - 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x} = 1$;

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{x - 2} = -1.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -1$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 6

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

- (A)** (5; 3). **(B)** (-4; -5). **(C)** (6; -1). **(D)** (2; -10).

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + 5x} = 2$;

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x + 5} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-13x}{x + 5} = -13.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -13$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 13$. Đường thẳng này qua (6; -1).

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 7

Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ là

- (A)** (1; 2). **(B)** (1; 1). **(C)** (1; -1). **(D)** (1; 0).

Lời giải.

Ta viết lại $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$. Suy ra

- Tiệm cận đứng $x = 1$;
- Tiệm cận ngang $y = 2x - 1$.

Xét hệ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

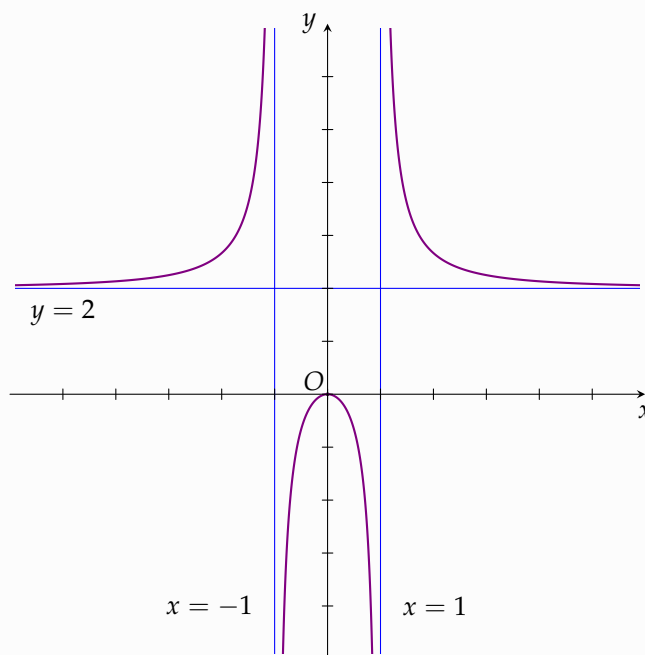
Chọn đáp án **(B)** ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.
- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = 0$.



Lời giải.

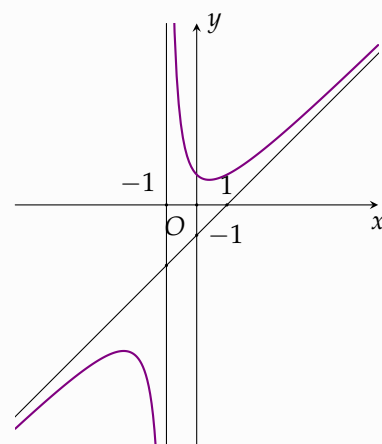
- Đồ thị hàm số có một điểm cực trị $(0; 0)$.
- Theo hình vẽ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng $x = \pm 1$.
- Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang $y = 2$.

Chọn đáp án **a sai | b sai | c sai | d sai** ☐

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị như hình bên.

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- Hàm số có hai điểm cực trị.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 0$.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.



Lời giải.

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c sai | d sai** ☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Hỏi có bao nhiêu giá trị m thỏa mãn điều kiện?

 **Lời giải.**

Điều kiện $m \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-m} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-m} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

✔ Xét $m > -\frac{1}{2}$, ta có $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{2x+1}{x-m} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{2x+1}{x-m} = -\infty \Rightarrow x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

✔ Xét $m < -\frac{1}{2}$, ta có $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{2x+1}{x-m} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{2x+1}{x-m} = +\infty \Rightarrow x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Diện tích hình chữ nhật là $|2m| = 2 \Rightarrow m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Đáp án: **2** □

Câu 2

Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương thuộc $[0; 2024]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 5x + m}{x - m}$ có tiệm cận đứng?

 **Lời giải.**

Ta có $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $2(m)^2 - 5(m) + m \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Đáp án: **2023** □

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng?

 **Lời giải.**

Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng khi m là nghiệm của $2x^2 - 3x + m$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases}$$

Đáp án: **2** □

Câu 4

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-4; 4]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

📌 **Lời giải.**

$$\text{ĐKXĐ: } x^2 - mx + 1 \neq 0$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2 - mx + 1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ 2^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Đáp án: **4** □

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$, khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

📌 **Lời giải.**

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 3.$$

Đáp án: **3** □

Câu 6

Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng).

Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

📌 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x+50}{x}.$$

$$f'(x) = \frac{-50}{x^2} \text{ suy ra hàm số giảm.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+50}{x} = 2.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$+\infty$	2

Từ đó suy ra số sản phẩm sản xuất càng nhiều thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm càng giảm nhưng luôn lớn hơn 2 triệu đồng.

Đáp án: **2** □

Câu 7

Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100 - p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \leq p < 100.$$

Biết rằng tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ có dạng $p = a$. Khi đó a bằng bao nhiêu?

👉 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{p \rightarrow 100^-} C(p) = \lim_{p \rightarrow 100^-} \frac{45p}{100 - p} = +\infty.$$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $p = 100$.

Đáp án: **100** □

§4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

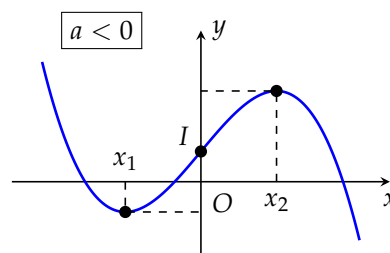
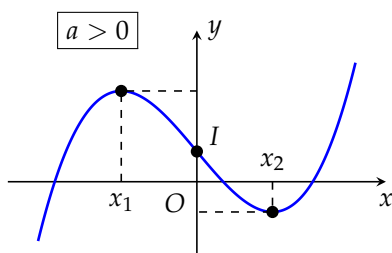
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$

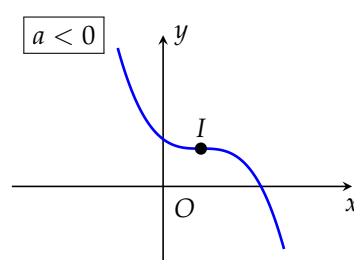
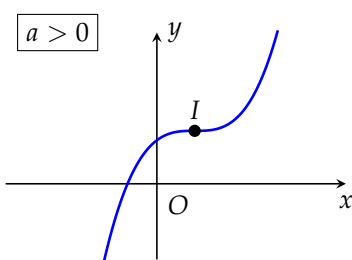
- ✔ Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

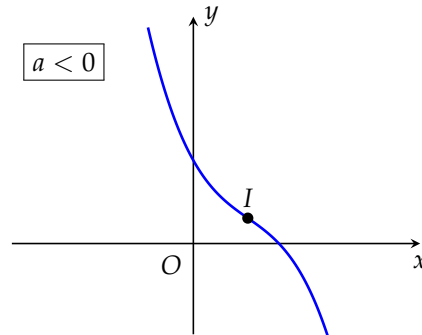
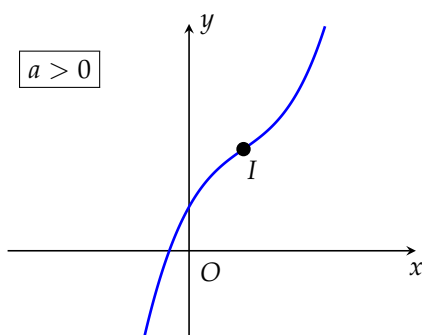
- a) TH1. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



- b) TH2. $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 . Khi đó, hàm số không có cực trị.

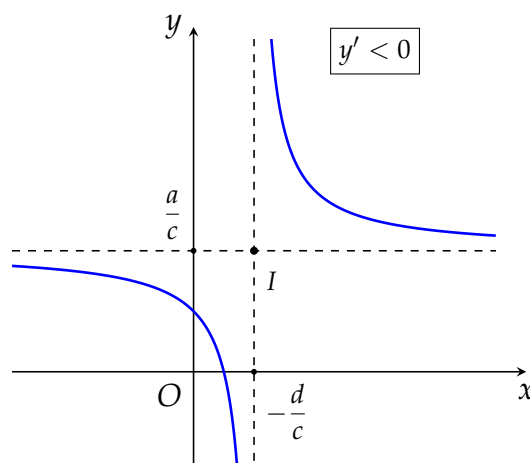
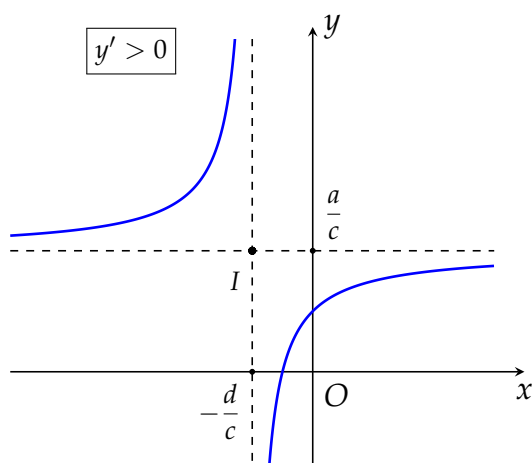


- c) TH3. $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



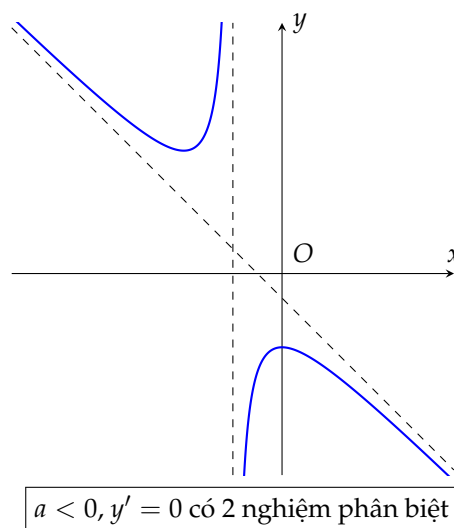
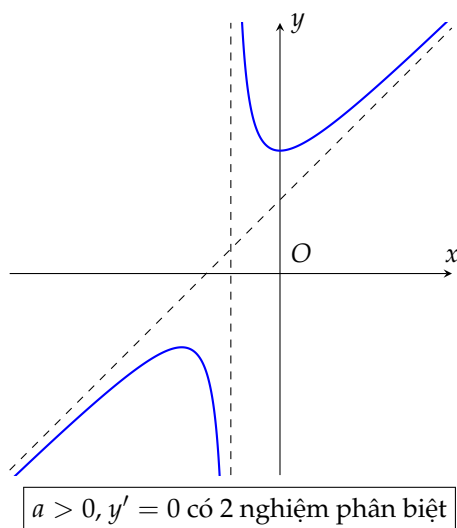
3. Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

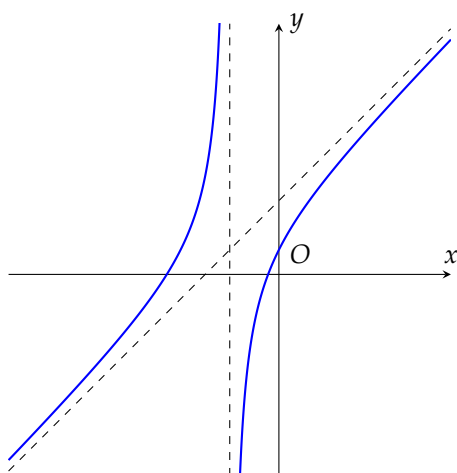
- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$;
- Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



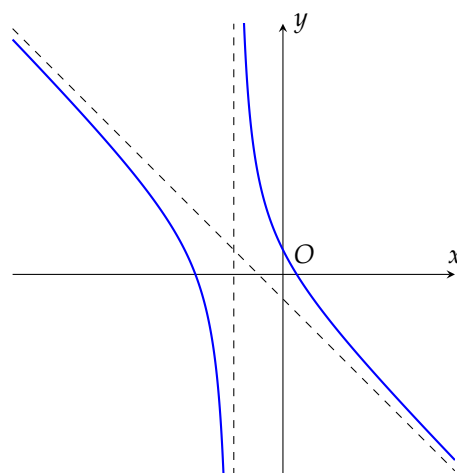
4. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$.
- Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:





$a > 0, y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0, y' = 0$ vô nghiệm

B VÍ DỤ MINH HỌA

1. Hàm bậc $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

📌 Lời giải.

a) Tập xác định $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:

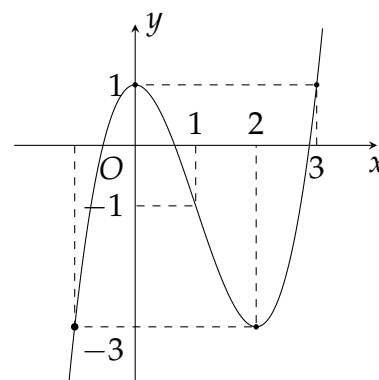
- $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(0; 2)$.
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CD} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2; y_{CT} = -3$.

Đồ thị:

- Đồ thị đi qua các điểm $(2; -3)$, $(-1; -3)$, $(3; 1)$
- Đồ thị nhận điểm $I(1; -1)$ làm tâm đối xứng.



b) Tập xác định $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

- $y' = 3x^2 + 6x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên

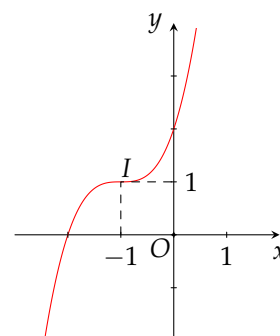
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	$-\infty$	1	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-1; 1)$



C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- ✔ Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			5		1	$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 - 2x^2 + 5.$

(B) $y = x^3 - 3x^2 + 5.$

(C) $y = -x^3 - 3x + 5.$

(D) $y = x^3 + 3x^2 + 5.$

📌 **Lời giải.**

Chọn đáp án (B) □

Câu 2

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + 3x^2.$

(B) $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

(C) $y = x^4 + 2x^2 + 1.$

(D) $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

📌 **Lời giải.**

Ta thấy đây là hàm số bậc ba và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$ nên $a < 0$.

Ta có $f(0) = 1$ nên hàm số cần tìm là $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = x^3 - 3x^2 + x + 3.$

(B) $y = x^3 - 3x + 4.$

Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$

Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5.$

👉 **Lời giải.**

Chọn đáp án Ⓒ..... □

Câu 4

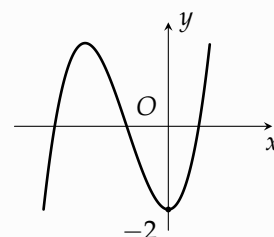
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây.
Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = -x^3 + x^2 - 2.$

Ⓑ $y = x^3 + 3x^2 - 2.$

Ⓒ $y = x^3 - 3x + 2.$

Ⓓ $y = x^2 - 3x - 2.$



👉 **Lời giải.**

Dựa vào hình dáng đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$ nên loại các hàm $y = x^4 + x^2 - 2$, $y = -x^2 - 3x - 2$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm $(0; -2)$ nên loại hàm $y = x^3 - 3x + 2$.

(Ngoài ra, ta có thể đánh giá dấu của các hệ số a, b, c thông qua hoành độ 2 điểm cực trị và hoành độ trung điểm của hai điểm cực trị. Trong đồ thị này ta còn thấy hàm số có điểm cực tiểu $x = 0$ nên $c = 0$)

Chọn đáp án Ⓑ..... □

Câu 5

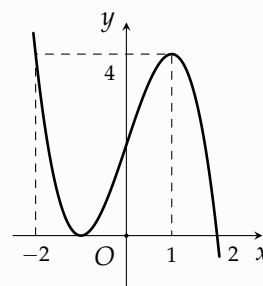
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây.
Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = x^3 + 3x - 2.$

Ⓑ $y = x^3 - 3x + 2.$

Ⓒ $y = -x^3 + 3x + 2.$

Ⓓ $y = -x^3 - 3x - 2.$



👉 **Lời giải.**

Quan sát đồ thị, ta thấy nhánh cuối của đồ thị hướng xuống dưới nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$, suy ra hệ số $a < 0$. Như vậy hai hàm số $y = x^3 + 3x - 2$; $y = x^3 - 3x + 2$ không thỏa mãn.

Mặt khác hàm số có hai điểm cực trị nên hàm số $y = -x^3 - 3x - 2$ có $y' = -3x^2 - 3 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓒ..... □

Câu 6

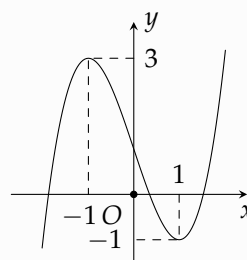
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

(B) $y = -x^2 - 3x - 1$.

(C) $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

(D) $y = x^3 - 3x + 1$.

**Lời giải.**

Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$. Trong các hàm số đã cho, chỉ có duy nhất hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 7

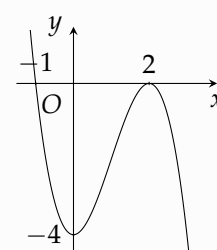
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

(B) $y = -x^3 - 4$.

(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

(D) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

**Lời giải.**

✔ Đồ thị hàm số có dạng chữ N ngược nên đây là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a < 0$. Loại phương án $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

✔ Đồ thị hàm số giao Oy tại điểm có tung độ bằng -4 nên $d = -4$, loại phương án $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

✔ Hàm số có hai điểm cực trị $x = 0, x = 2$ nên loại phương án $y = -x^3 - 4$ (vì phương án này có $y' = -3x^2$, hàm số không có điểm cực trị).

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 8

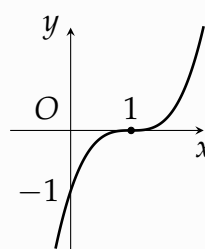
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = x^3 - 1$.

(B) $y = (x + 1)^3$.

(C) $y = (x - 1)^3$.

(D) $y = x^3 + 1$.

**Lời giải.**

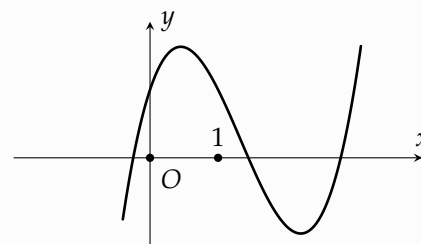
(C) tiếp xúc với Ox tại điểm uốn, suy ra $f(x)$ có nghiệm bội ba $x = 1$ nên hàm số có dạng $y = a(x - 1)^3$. Mà $(0; -1) \in (C)$ nên $a = 1$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 9

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
Ⓑ $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
Ⓒ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
Ⓓ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



👉 Lời giải.

Nhìn vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi từ $-\infty$ lên $+\infty$ nên $a > 0$.

Giao điểm với trục tung nằm trên trục hoành, do đó $d > 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị, và hai điểm cực trị đều dương. Suy ra tổng hai điểm cực trị và tích hai điểm cực trị đều dương.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên tổng hai điểm cực trị là $-\frac{2b}{3a}$. Suy ra $-\frac{2b}{3a} > 0$, hay $b < 0$.

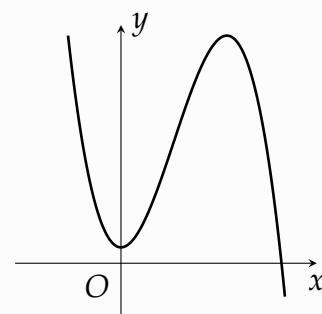
Còn tích hai điểm cực trị là $\frac{c}{3a}$. Suy ra $\frac{c}{3a} > 0$ hay $c > 0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. Ⓑ $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
Ⓒ $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$. Ⓓ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



👉 Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có thể thấy $a < 0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Hàm số có hai cực trị thỏa $\begin{cases} S > 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 11

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 0

Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 3.

📌 Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị nên bậc của đa thức phải lớn hơn 2 $\Rightarrow a \neq 0$.
 Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Từ bảng biến thiên ta có $d = y(0) > y(-1) = 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm là -1 và 2 nên $\begin{cases} -\frac{2b}{3a} = -1 + 2 = 1 > 0 \\ \frac{c}{3a} = (-1) \cdot 2 = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0. \end{cases}$

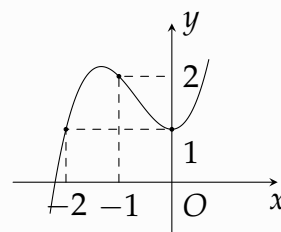
Chọn đáp án (B)..... ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- d) $2a + 3b + c = 9$.



📌 Lời giải.

Theo hình vẽ thì:

- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y = 1$;
- b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$;
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; x_0)$, với $-2 < x_0 < -1$;
- d) Đồ thị qua 3 điểm $(-2; 1)$, $(-1; 2)$, $(0; 1)$ và đạt cực trị tại $x = 1$ nên ta được hệ

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ -a + b - c + d = 2 \\ d = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1; b = 2, c = 0, d = 1$$

nên $2a + 3b + c = 8$.

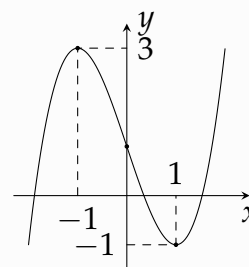
Chọn đáp án a sai | b đúng | c sai | d sai ☐

Câu 2

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Tính tổng $T = ?$.

- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.
- b) Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.
- c) $a - b + c + d = -1$.
- d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.



Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(-1; 3)$ và $(1; -1)$. Suy ra tọa độ tâm đối xứng là $(0; 1)$. Suy ra đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$
- b) Do $I(0; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị, nên đường thẳng qua nó sẽ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt I, A, B với I là trung điểm của AB . Suy ra $x_A + x_B = 2x_I$. Vậy ba điểm này có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.
- c) Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ hình vẽ, ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $a = 1, b = 0, c = -3, d = 1$. Vậy $T = a - b + c + d = -1$.

- d) Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ hình vẽ, ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $a = 1, b = 0, c = -3, d = 1$. Suy ra $y = x^2 - 3x + 1$.

Thay tọa độ $(3; 18)$ vào phương trình, không thỏa mãn. Vậy đồ thị hàm số không đi qua điểm $(3; 18)$.

Chọn đáp án **a đúng | b đúng | c đúng | d sai** ☐

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

- a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.
- b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.
- c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.
- d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		4		$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- a) Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
- b) Vẽ đường thẳng $y = 2$ qua điểm $(0; 2)$ và song song với Ox , rõ ràng đường thẳng này cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt.
- c) Từ các thông số trên hình, ta có thể giải ra chính xác giá trị a, b, c, d bởi hệ

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1, b = -3, c = 0, d = 4.$$

Vậy trong 4 hệ số, có đúng 2 số âm.

d) Từ các thông số trên hình, ta có thể giải ra chính xác giá trị a, b, c, d bởi hệ

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1, b = -3, c = 0, d = 4.$$

Suy ra $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Thay tọa độ $(-4; 20)$ vào phương trình, thỏa mãn. Suy ra Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.

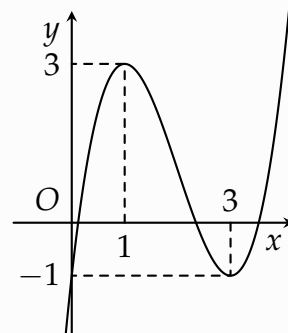
Chọn đáp án **a sai | b đúng | c đúng | d đúng** ☐

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Khi đó

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- b) Điểm cực tiểu của hàm số là $y = -1$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3.
- d) $f'(2) > 0$.



📌 Lời giải.

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ nên nghịch biến trên $(1; 2)$.
- b) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3.
- d) Vì đồ thị hàm số nghịch biến trên $(1; 3)$ nên $f'(2) < 0$.

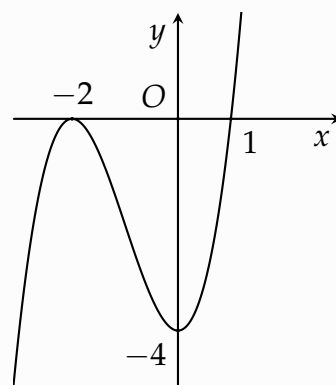
Chọn đáp án **a đúng | b sai | c đúng | d sai** ☐

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Khi đó

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) $f(x) < 0$ trên $(-\infty; 0)$.
- c) $f'(x) < 0$ trên $(0; 1)$.
- d) $f'(-3) < f'(-1)$.



📌 Lời giải.

- a) Hàm số có hai điểm cực trị là $x = -2$ và $x = 0$.
- b) Trên $(-\infty; 0)$, đồ thị hàm số $f(x)$ nằm dưới trục hoành nên $f(x) < 0$ trên $(-\infty; 0)$.
- c) Trên $(0; 1)$, đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến nên suy ra $f'(x) > 0$ trên $(0; 1)$.
- d) Trên khoảng $(-\infty; -2)$, đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến nên $f'(-3) > 0$; trên khoảng $(-2; 0)$, đồ thị hàm số $f(x)$ nghịch biến nên $f'(-1) < 0$. Suy ra $f'(-3) > f'(-1)$.

Chọn đáp án a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Dạng 2

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Ta khảo sát theo sơ đồ

- ✔ Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

1. VÍ DỤ MINH HỌA HÀM SỐ NHẤT BIẾN

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x - 1}{x + 1};$

b) $y = \frac{2x + 1}{x - 1};$

c) $y = \frac{5 + x}{2 - x}.$

👉 Lời giải.

- a) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Sự biến thiên:

- Đạo hàm $y' = \frac{2}{(x + 1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.
- Giới hạn và tiệm cận:
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$. Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$. Do đó, đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- ✔ Bảng biến thiên:

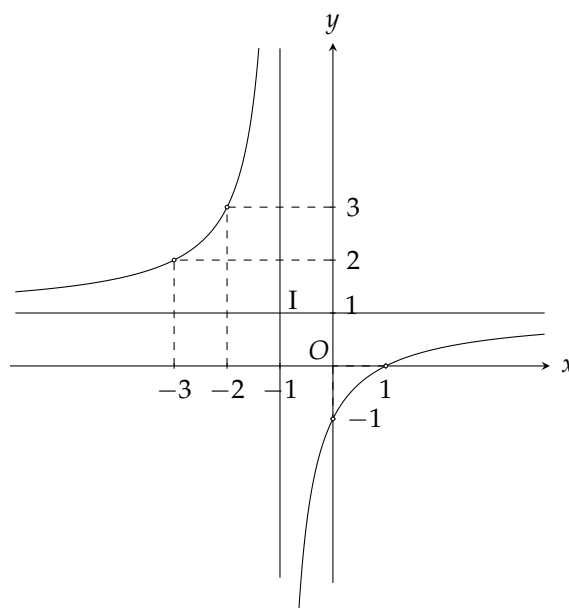
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		-
y	1	$+\infty$	$-\infty$ → 1

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:

- ✔ Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.
- ✔ Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $(1; 0)$.
- ✔ Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-3; 2)$, $(-2; 3)$.



b) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên:

- Đạo hàm: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq 1$.
- Giới hạn và các đường tiệm cận:
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$. Do đó, đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Bảng biến thiên:

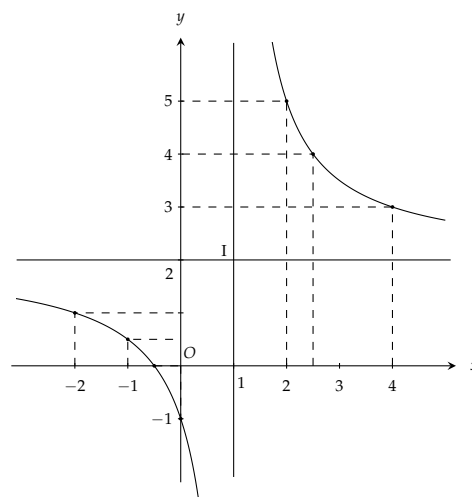
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	$-\infty$ → 2

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:

- ✔ Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.
- ✔ Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $(-\frac{1}{2}; 0)$.
- ✔ Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(-2; 1)$, $(2; 5)$, $(\frac{5}{2}; 4)$ và $(4; 3)$.



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên dưới?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 1$	

Ⓐ $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

Ⓑ $y = \frac{4x-6}{x-2}$.

Ⓒ $y = \frac{3-x}{2-x}$.

Ⓓ $y = \frac{x+5}{x-2}$.

👉 **Lời giải.**

Xét hàm số $y = \frac{x+5}{x-2}$ có

$$\begin{cases} y' = \frac{-7}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 7

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên dưới?

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	$-1 \rightarrow +\infty$	$+\infty \rightarrow -1$	

Ⓐ $y = \frac{x-1}{x-3}$.

Ⓑ $y = \frac{x-1}{-x-3}$.

Ⓒ $y = \frac{x+5}{-x+3}$.

Ⓓ $y = \frac{1}{x-3}$.

📌 Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra

- ✔ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- ✔ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ và đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

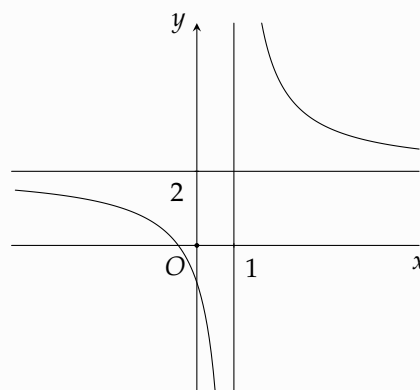
Vậy ta nhận hàm số $y = \frac{x+5}{x-2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 8

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

- A** $y = \frac{x-1}{x-2}$. **B** $y = x+2$.
C $y = x^4 - 3x^2 + 1$. **D** $y = \frac{2x+1}{x-1}$.



📌 Lời giải.

Đồ thị hàm số như hình vẽ nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

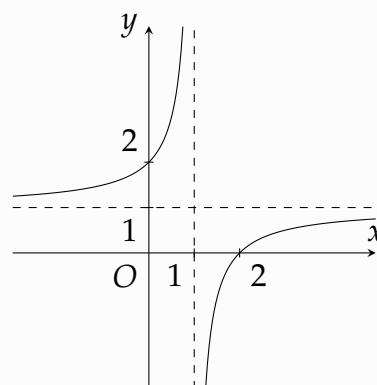
Do đó, hàm số cần tìm là $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 9

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

- A** $y = \frac{x-2}{x+1}$. **B** $y = \frac{x+2}{x-2}$.
C $y = \frac{x-2}{x-1}$. **D** $y = \frac{x+2}{x-1}$.



📌 Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy

- ✔ Tiệm cận ngang là $y = 1$, tiệm cận đứng là $x = 1$ nên các hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, $y = \frac{x-2}{x+1}$ không thỏa mãn.

- ✔ Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0; 2)$ nên hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ không thỏa mãn, hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ thỏa mãn.

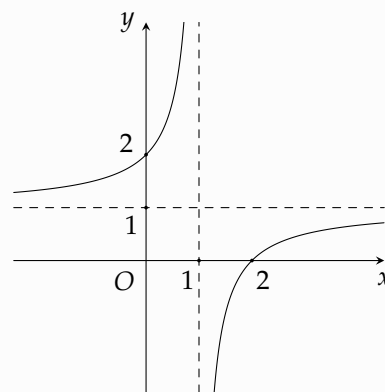
Chọn đáp án (C)..... □

Câu 10

Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Giá trị của biểu thức $2a + b - 3c$ bằng

- (A) -3. (B) 4.
(C) 7. (D) -5.



👉 Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có:

Đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $-c = 1 \Leftrightarrow c = -1$.

Đường tiệm cận ngang là $y = 1$ nên $a = 1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2)$ nên $\frac{-b}{c} = 2 \Leftrightarrow b = 2$.

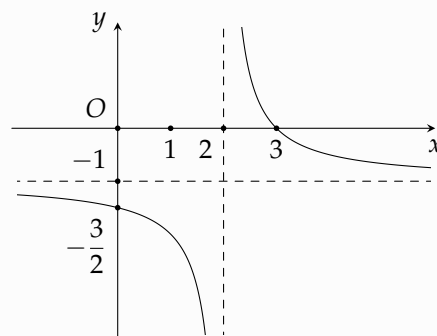
Vậy $2a + b - 3c = 2 + 2 + 3 = 7$.

Chọn đáp án (C)..... □

Câu 11

Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{cx+2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

- (A) -3. (B) 5. (C) -4. (D) 3.



👉 Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có

- ✔ Đường tiệm cận đứng $x = 2$, suy ra $-\frac{2}{c} = 2 \Leftrightarrow c = -1$.
- ✔ Đường tiệm cận ngang $y = -1$, suy ra $\frac{a}{c} = -1 \Leftrightarrow a = -c = 1$.
- ✔ Giao điểm với trục Oy tại điểm $(0; -\frac{3}{2})$, suy ra $-\frac{b}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 3$.

Vậy $a + b + c = 1 + 3 - 1 = 3$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 12

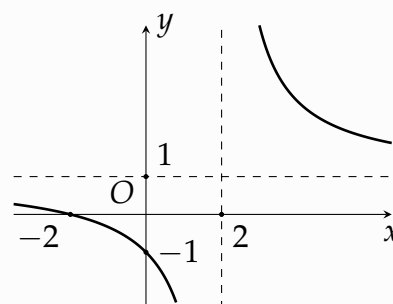
Hãy xác định a, b để hàm số $y = \frac{2 - ax}{x + b}$ có đồ thị như hình vẽ?

(A) $a = 1; b = -2$.

(B) $a = b = 2$.

(C) $a = -1; b = -2$.

(D) $a = b = -2$.



📌 Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ nên $b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$ nên $2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 13

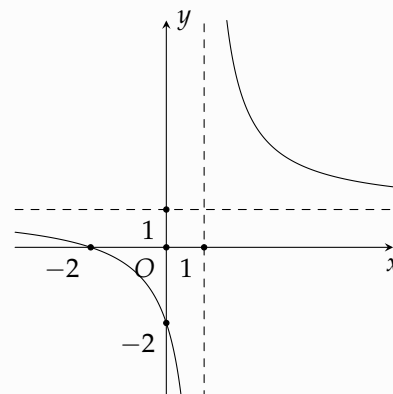
Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

(A) $a < 0, b < 0$.

(B) $0 < b < a$.

(C) $b < 0 < a$.

(D) $a < b < 0$.



📌 Lời giải.

Hàm số có dạng $y = \frac{ax - b}{x - 1}$.

✓ Tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow a = 1$.

✓ Đồ thị đi qua $(-2; 0) \Rightarrow -2a - b = 0$

Suy ra $b < 0 < a$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 14

Cho hàm số $y = \frac{ax + 4}{bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$3 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow 3$

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y(0) > 3 \Rightarrow \frac{4}{c} > 0 \Rightarrow c > 0$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 3$ nên $\begin{cases} -\frac{c}{b} > 0 \\ \frac{a}{b} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ a < 0. \end{cases}$

Vậy $c > 0, a < 0, b < 0$.

Chọn đáp án (B)..... □

Câu 15

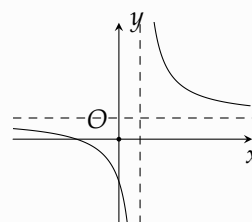
Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $b < 0, c < 0, d < 0$.

(B) $b > 0, c < 0, d < 0$.

(C) $b < 0, c > 0, d < 0$.

(D) $b > 0, c > 0, d < 0$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ nằm trên trục Ox nên $\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow c > 0$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ nằm bên phải trục Oy nên $-\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow d < 0$.

Vậy mệnh đề đúng là " $b > 0, c > 0, d < 0$ ".

Chọn đáp án (D)..... □

Câu 16

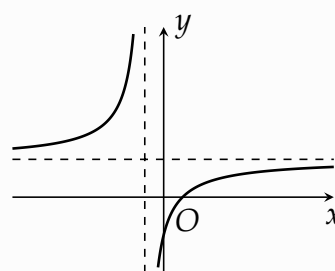
Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $ab > 0, bd < 0$.

(B) $ab < 0, ad > 0$.

(C) $ab < 0, ad < 0$.

(D) $bd > 0, ad > 0$.



Lời giải.

Ta có

• Đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$. Theo hình vẽ thì $-\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$ (1).

• Đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$. Theo hình vẽ thì $\frac{a}{c} < 0 \Rightarrow ac < 0$ (2).

• Giao điểm với trục tung tại điểm có tung độ $y = \frac{b}{d}$. Theo hình vẽ thì $\frac{b}{d} > 0 \Rightarrow bd > 0$ (3).

• Giao điểm với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{a}$. Theo hình vẽ thì $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$

(4).

Lấy (3) nhân với (4), ta được $ad \cdot b^2 < 0$. Suy ra $ad < 0$.

Mặt khác theo (4) thì $ab < 0$.

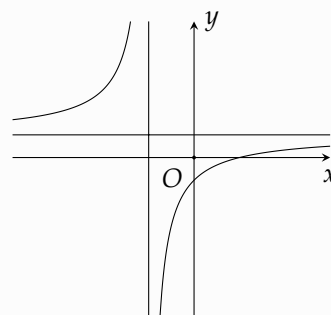
Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $ac \neq 0, ad - cb \neq 0$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $ad > 0$ và $ab < 0$. (B) $bd < 0$ và $ab > 0$.
 (C) $ad < 0$ và $ab < 0$. (D) $ad > 0$ và $bd > 0$.

**Lời giải.**

✔ Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$.

✔ Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$.

✔ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$. (1)

✔ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ad > 0$.

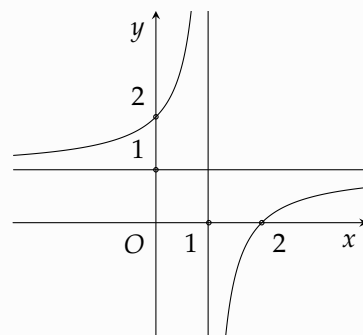
Chọn đáp án (A) □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
 b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.
 c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 d) $a - 3b - 2c = -3$.

**Lời giải.**

Căn cứ vào đồ thị, ta có

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
 b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty, 1)$ và $(1; +\infty)$

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ nên $\frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = 1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ nên $-\frac{c}{b} = 1$ mà $b = 1 \Rightarrow c = -1$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$ nên $\frac{a}{c} = 2$ mà $c = -1$ nên $a = -2$.

Vậy $T = a - 3b - 2c = -2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = -3$.

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c sai | d đúng** ☐

Câu 2

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax - 1}{bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty, \frac{1}{2})$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$.

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.

d) $b > \frac{2}{3}$ hoặc $b < 0$.

Lời giải.

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty, 3)$ nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty, \frac{1}{2})$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$.

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3.

d) Từ bảng biến thiên suy ra

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \\ -\frac{c}{b} = 3. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{ac + b}{(bx + c)^2} < 0, \forall x \neq -\frac{c}{b} \Leftrightarrow ac + b < 0. \quad (2)$$

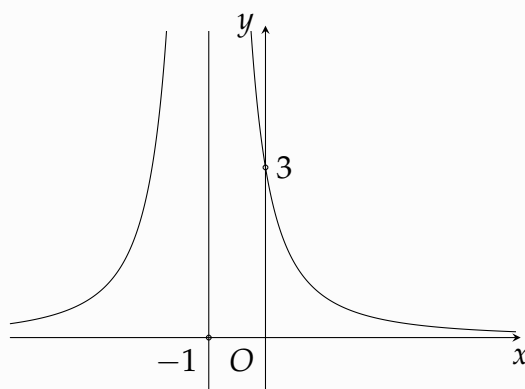
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{b}{2} \cdot (-3b) + b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c đúng | d đúng** ☐

Câu 3

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8.

- $f'(0) = 3$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.
- Giá trị của $f(2)$ bằng 4.

**Lời giải.**

- Theo hình vẽ, đồ thị $f'(x)$ qua điểm $(0; 3)$ nên $f'(0) = 3$.
- Do $f'(x) > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- Vì $f'(x) > 0, \forall x \neq -1 \Rightarrow \max_{[-3; -2]} f(x) = f(-2) = 8$. Suy ra $f(-3) \neq 8$.

d) Ta có $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 3)$ nên $f'(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{ad - bc}{d^2} = 3$.

Mặt khác, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có tiệm cận đứng $x = -1$ nên $-c + d = 0$.

Vì $f'(x) > 0, \forall x \neq -1 \Rightarrow \max_{[-3; -2]} f(x) = f(-2) = 8 \Leftrightarrow \frac{-2a + b}{-2c + d} = 8$.

Vậy ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} ad - bc = 3d^2 \\ -c + d = 0 \\ b - 2a = 8(d - 2c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = d \\ a - b = 3d \\ b - 2a = -8d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5d \\ b = 2d \\ c = d. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $f(x) = \frac{5dx + 2d}{dx + d} = \frac{5x + 2}{x + 1} \Rightarrow f(2) = 4$.

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c sai | d đúng** ☐

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$. Khi đó

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $x = -1$.
- Tâm đối xứng của đồ thị là $I(-1; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	2	$+\infty$	2
		$-\infty$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Do đó phát biểu này là **ĐÚNG**.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$.

Suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$. Suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

d) Ta có tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm hai tiệm cận đứng và ngang.

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c sai | d đúng** ☐

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Khi đó

a) Hàm số có đạo hàm là $y' = \frac{3}{(x-1)^2}$.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 4)$.

c) Đồ thị hàm số và đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ có 2 điểm chung.

d) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 2 là $y = -3x + 10$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

a) Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

b) Ta có $4 = \frac{2+2}{2-1}$ suy ra điểm A thuộc đồ thị hàm số.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x+2}{x-1} = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x+6 = -x^2+x-2x+2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

Suy ra đồ thị hàm số và d có 1 giao điểm.

d) Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4, y'(x_0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -3(x-2) + 4 = -3x + 10$.

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c sai | d đúng** ☐

Dạng

3

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

- ✔ Bước 1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$.
 - Giải $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c = 0$, tìm nghiệm.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$; b) $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$;

📌 Lời giải.

a) Ta viết lại hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = x + 3 + \frac{1}{x - 1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên:

- Đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Giới hạn và tiệm cận:
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$. Suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - (x + 3)) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - (x + 3)) = 0$. Suy ra $y = x + 3$ là tiệm cận xiên.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+
y	$-\infty$		2	$-\infty$	$+\infty$		6	$+\infty$

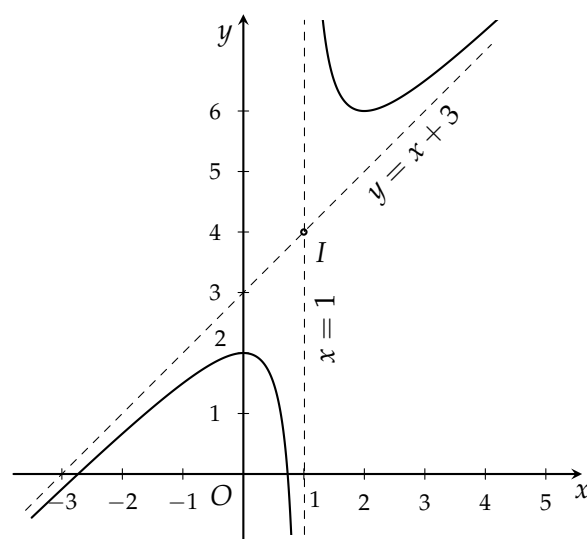
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CE} = 2$.

Đồ thị:

- Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1 + \sqrt{3}; 0)$ và điểm $(-1 - \sqrt{3}; 0)$.
- Đồ thị nhận $I(1; 4)$ làm tâm đối xứng.



Hình 5

b) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên:

- Đạo hàm $y' = -1 + \frac{1}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.
- Giới hạn và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty.$$

Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+1} = 0.$$

Do đó, đường thẳng $y = -x + 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

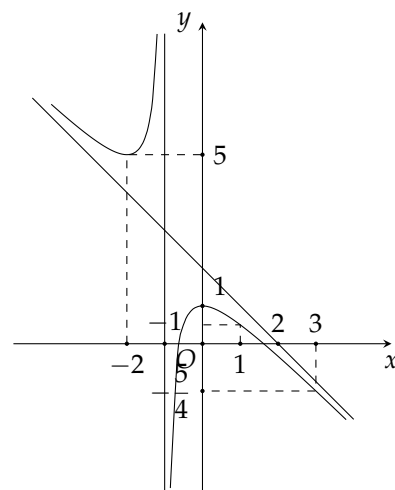
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	1	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$, $y_{CT} = 5$; đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 1$.

Đồ thị:

- Đồ thị hàm số qua các điểm $\left(-3; -\frac{11}{2}\right), \left(3; -\frac{5}{4}\right)$.
- Đồ thị nhận $I(-1; 3)$ làm tâm đối xứng.



3. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	0	$-\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			24	$-\infty$	$-\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

- (A) $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.
 (B) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$.
 (C) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$.
 (D) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$.

📌 **Lời giải.**

Dựa vào BBT ta thấy

- ✔ TCD là đường thẳng $x = -4$.
- ✔ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$
- ✔ Điểm cực đại $A(2; 0)$, điểm cực tiểu $B(-10; 24)$.

Do đó hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B)..... □

Câu 7

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

☐ A $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.
 ☐ B $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$.
 ☐ C $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$.
 ☐ D $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy

- ✔ TCD là đường thẳng $x = 3$.
- ✔ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$
- ✔ Điểm cực đại $A(5; -9)$, điểm cực tiểu $B(1; -1)$.

Do đó hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án ☒ C..... □

Câu 8

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	-9	-4	1	$+\infty$
y'		+	0	-	
y	$-\infty$		-20		$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

☐ A $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$.
 ☐ B $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$.
 ☐ C $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$.
 ☐ D $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy

- ✔ TCD là đường thẳng $x = -4$.
- ✔ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- ✔ Điểm cực đại $A(-9; -20)$, điểm cực tiểu $B(1; 0)$.

Do đó hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án ☒ A..... □

Câu 9

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

(B) $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.

(C) $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$.

(D) $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy

✔ TCD là đường thẳng $x = 2$.

✔ Đạo hàm $y' > 0$ với mọi $x \neq 2$

Do đó hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)**..... □

Câu 10

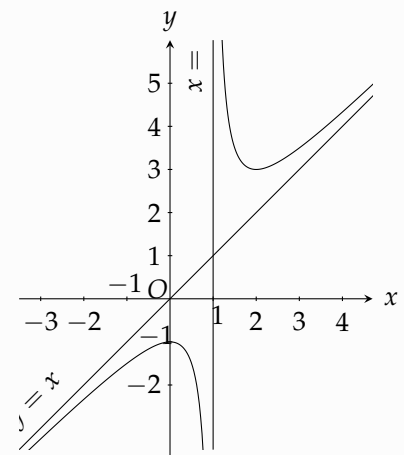
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

(B) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

(C) $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$.

(D) $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy

✔ Đường TCD $x = 1$; Đường TCX $y = x$

✔ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Do đó hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ thỏa mãn

Chọn đáp án **(B)**..... □

Câu 11

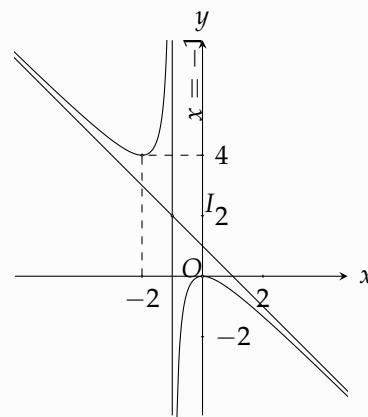
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}.$

B $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}.$

C $y = \frac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}.$

D $y = \frac{-x^2}{x + 1}.$



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy

☑ Đường TCD $x = -1$; Đường TCX $y = -x + 1$

☑ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Do đó hàm số $y = \frac{-x^2}{x + 1}$ thỏa mãn

Chọn đáp án **(D)** □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$. Khi đó

a) Hàm số có tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

b) Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = +\infty$ nên hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.

c) Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số nhận $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng.

Lời giải.

☑ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

☑ Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = x + 2 + \frac{1}{x + 2};$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = -\infty.$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = -\infty.$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 2} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

✔ Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng.

a) Hàm số có tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Do đó phát biểu này là **SAI**.

b) Hàm số có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 2} = 0$. Suy ra đường thẳng $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Do đó phát biểu này **SAI**.

c) Hàm số có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = -\infty$. Vậy đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. Do đó phát biểu này là **ĐÚNG**.

d) Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng. Do đó phát biểu này là **ĐÚNG**.

Chọn đáp án a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x + 1}$. Khi đó

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- Hàm số có 2 điểm cực trị.
- Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
- Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

📌 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } y' = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-1	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
		$5 + 2\sqrt{2}$		$5 - 2\sqrt{2}$	
			$-\infty$		$-\infty$

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1 - \sqrt{2}; -1)$ nên đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$. Do đó phát biểu này là **ĐÚNG**.

b) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có 2 điểm cực trị. Do đó phát biểu này **ĐÚNG**.

- c) Ta có hàm số nghịch biến trên $[1; 3]$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 3$. Do đó phát biểu này là **SAI**.
- d) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên hàm số không có tiệm cận ngang. Do đó phát biểu này là **SAI**.

Chọn đáp án **a đúng | b đúng | c sai | d sai** ☐

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1}$. Khi đó

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1, 5; 2, 5]$ là $-\frac{19}{3}$.
- d) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $2x + y = 0$.

👉 Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-2x^2 + 4x}{(-x + 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	-6		$-\infty$

- a) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. Do đó phát biểu này là **SAI**.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Do đó phát biểu này **SAI**.
- c) Ta có $f(1, 5) = -7$, $f(2) = -6$ và $f(2, 5) = -\frac{19}{3}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1, 5; 2, 5]$ là -7 . Do đó phát biểu này là **SAI**.
- d) Ta có $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1} - (-2x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{-x + 1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -2x$. Do đó phát biểu này là **ĐÚNG**.

Chọn đáp án **a sai | b sai | c sai | d đúng** ☐

Câu 4

Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x}$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 2$.
 d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $O(0; 0)$.

📌 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- a) **Đúng.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 b) **Sai.** Hàm số không có cực trị.
 c) **Sai.** Ta có $f(1) = 0; f(2) = \frac{3}{2}; f(3) = \frac{8}{3}$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
 d) **Đúng.** Hàm số có đồ thị đối xứng qua điểm $O(0; 0)$, là giao điểm của hai tiệm cận đứng và xiên.

Chọn đáp án **a đúng | b sai | c sai | d đúng** ☐

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 3}{x - 1}$. Khi đó

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
 c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 0]$ tại $x = 0$.
 d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

📌 **Lời giải.**

Ta có $y = \frac{x^2 - x - 3}{x - 1} = x - 2 - \frac{1}{x - 1}$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$y' = 1 + \frac{1}{(x - 1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- a) **Đúng**. Hàm số nghịch biến trên trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- b) **Sai**. Hàm số không có cực trị.
- c) **Sai**. Ta có $f(-3) = -\frac{19}{4}$, $f(0) = 3$. Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 0]$ tại $x = 0$.
- d) **Đúng**. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

Chọn đáp án a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 6

Cho hàm số $y = \frac{1 - x^2}{x}$. Khi đó

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 0$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x$.
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
- d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là O .

Lời giải.

Ta có $y = f(x) = -x + \frac{1}{x}$. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = -1 - \frac{1}{x^2} < 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		+
y	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$ vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$. Do đó khẳng định này là **ĐÚNG**.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = -x$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x)] = 0$. Do đó khẳng định này là **ĐÚNG**.
- c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định nên khẳng định này là **SAI**.
- d) Đồ thị hàm số đối xứng qua $O(0; 0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận. Do đó khẳng định này là **ĐÚNG**.

Chọn đáp án a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x + 1$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.

- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(1; 1)$.

📌 Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = -x + 1$.

Ta có $y' = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 2 = 0$ (vô nghiệm).

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Hàm số nhận giao điểm hai tiệm cận $I(1, 0)$ làm tâm đối xứng.

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$.
 b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = -x + 1$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x + 1)] = 0$.
 c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định nên khẳng định này là **sai**.
 d) Đồ thị hàm số đối xứng qua $I(1; 0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án **a đúng | b đúng | c sai | d sai** ☐

Câu 8

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ có đồ thị (C). Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3, -1)$.
 b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x = -1$.
 c) Đồ thị (C) nhận $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng.
 d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$.

📌 Lời giải.

✔ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

✔ Sự biến thiên:

— Giới hạn, tiệm cận:

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = x + 2 + \frac{1}{x + 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = -\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 2} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

— Bảng biến thiên:

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = -1.$$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

— Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$;
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.

- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3, -2)$ và $(-2, -1)$.
- b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1; 2)$.
- c) Ta có $x = -2$ là đường tiệm cận đứng và $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
Suy ra đồ thị nhận giao điểm $I(-2; 0)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- d) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = x + 2$ không đi qua điểm $A(1; 2)$.

Chọn đáp án a sai | b sai | c đúng | d sai □

Câu 9

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$. Khi đó

- a) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x - 4y + 2 = 0$.
- c) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
- d) Đồ thị không cắt trục Ox .

👉 Lời giải.

✔ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

✔ Bảng biến thiên:

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 3.$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$					
$f'(x)$		+	0	-		+	0	-		
$f(x)$			1			$+\infty$		5		$+\infty$
		$-\infty$							$-\infty$	

- a) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- b) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$ và $y'(0) = \frac{3}{4}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.
- c) Hàm số đạt cực trị tại $x = 1$ và $x = 3$ nằm cùng phía so với trục Oy .
- d) Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

Chọn đáp án a sai | b đúng | c sai | d sai □

§5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- ✔ Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- ✔ Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- ✔ Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- ✔ Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- ✔ Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- ✔ Bước 1. Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ✔ Bước 2. Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- ✔ Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ví dụ 1

Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

👉 Lời giải.

- a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ m/s. Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ m/s.
- b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{b}{2a} = \frac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5) = 32,625$ m.
- c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$, hay $t \approx 5,08$ (giây). Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5,08) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ m/s. Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Ví dụ 2

Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B: $A + B \rightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

(Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả, *Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến*, NXB Đại học Sư phạm, 2023).

- Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

Lời giải.

- a) Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.

Tốc độ của phản ứng là đạo hàm của $[C] = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}$ theo biến t . Do đó

$$[C]' = \left(\frac{a^2 Kt}{aKt + 1} \right)' = \frac{a^2 K(aKt + 1) - a^2 Kt \cdot aK}{(aKt + 1)^2} = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}.$$

- b) Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.

Theo câu trên, nếu nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}$.

Ta lại có

$$K(a - x)^2 = K \left(a - \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} \right)^2 = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}.$$

Vậy $x'(t) = K(a - x)^2$.

- c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} [C] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} = a$ (mol/l).

Vậy nồng độ của chất C dần đến a (mol/l).

- d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2} = 0$.

Vậy tốc độ của phản ứng dần đến 0.

Ví dụ 3

Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải.

Ta có $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0$.

Theo đề bài, ta có $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Ví dụ 4

Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải.

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.

b) Ta có $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14\,300$.

Chi phí biên tại $x = 200$ là 14 300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14 300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$$C(201) - C(200) = 1\,004\,372,625 - 990\,000 = 14\,372,625 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

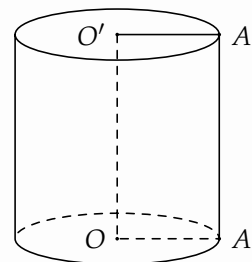
Dạng

2

Bài toán tối ưu hoá đơn giản

Ví dụ 1

Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

**Lời giải.**

Đổi 1 lít = 1000 cm³.

Gọi $r(\text{cm})$ là bán kính đáy của hình trụ, $h(\text{cm})$ là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là 1000 cm³ nên ta có: $1000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là $S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$, $r > 0$.

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$S' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2};$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 500 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

r	0	$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$	$+\infty$
$S'(r)$	–	0	+
$S(r)$	$+\infty$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$+\infty$

Khi đó

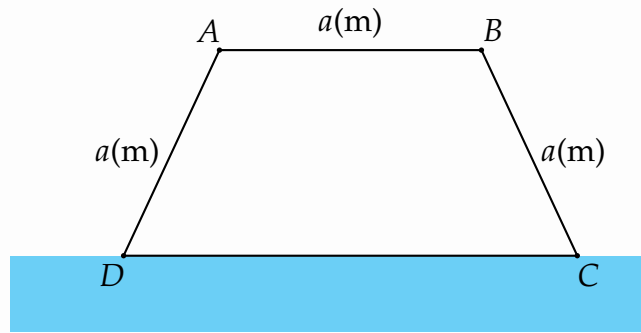
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{250\pi}.$$

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$ (cm) và chiều cao

$$h = \sqrt[3]{250\pi} \approx 10,84 \text{ (cm)}.$$

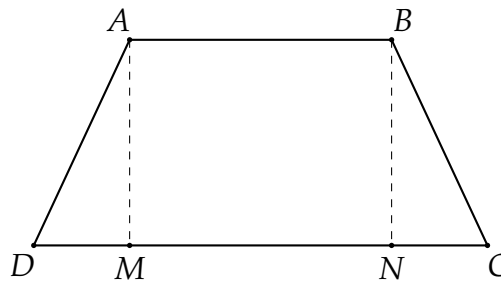
Ví dụ 2

Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Hình 36

🔗 Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên CD .

Đặt $x = MD$, ($0 < x < a$). Suy ra $AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Diện tích của mảnh vườn hình thang cân là $S(x) = \frac{(AB + CD)AM}{2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên khoảng ($0 < x < a$).

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \notin (0 < x < a) \\ x = \frac{a}{2} \in (0 < x < a) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; a)$.

x	0	$\frac{a}{2}$	a
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	a^2	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	0

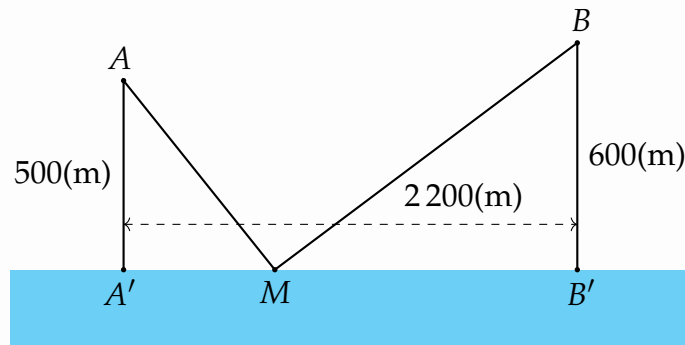
Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{(0;a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \text{ m}^2$.

Ví dụ 3

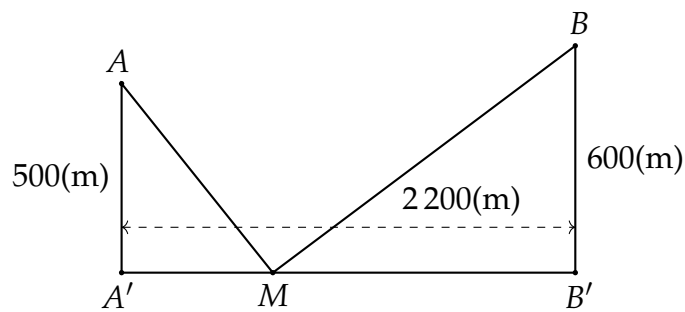
Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500 \text{ m}$, $BB' = 600 \text{ m}$ và người ta đo được $A'B' = 2200 \text{ m}$ Hình 37. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ

sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hình 37

📌 Lời giải.



Hình 37

Đặt $A'M = x$, ($0 < x < 2200$), $B'M = 2200 - x$.

Ta có: $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$.

Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là $AM + BM = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$ trên khoảng ($0 < x < 2200$).

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} = \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + 500^2} = \frac{(2200 - x)^2}{(2200 - x)^2 + 600^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + 500^2} = \frac{(2200 - x)^2}{(2200 - x)^2 + 600^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{500^2}{x^2} = 1 + \frac{600^2}{(2200 - x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{x^2} = \frac{36}{(2200 - x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{x} = \frac{6}{2200 - x} \Leftrightarrow x = 1000, \text{ vì } x > 0.$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; 2200)$.

x	0	1000	2200		
$f'(x)$		—	0	+	
$f(x)$	2780		2460		2856

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng 2460 m, tại vị trí M cách điểm A' là 1000 m.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét.

(Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1*, Cornelsen 2016).

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).
- Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $(0 \leq t \leq 50)$. Xác định hàm số $v(t)$.
- Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?
- Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?
- Tìm thời điểm t ($0 \leq t \leq 50$) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

👉 Lời giải.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$.

✔ Miền khảo sát: $[0; 50]$.

✔ Đạo hàm: $h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 18 \\ t \approx 55. \end{cases}$$

✔ Bảng biến thiên:

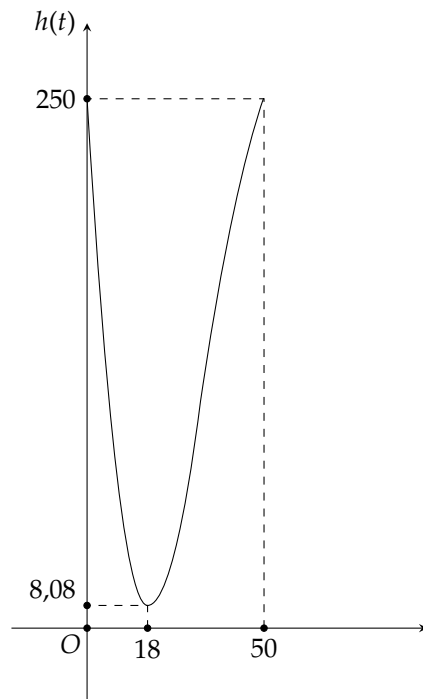
t	0	18	50		
$h'(t)$		−	0	+	
$h(t)$	250		8,08		250

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0; 18)$ và đồng biến trên khoảng $(18; 50)$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $t = 18, y_{CT} = h(18) = 8,08$.

✔ Bảng giá trị:

x	0	18	50
y	250	8.08	250

✔ Đồ thị:



b) Xác định $v(t)$.

Ta có $v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$.

c) Tính vận tốc tức thời lúc bắt đầu hãm phanh và lúc $t = 25$ (giây).

- ✔ Vận tốc tức thời lúc bắt đầu hãm phanh là: $v(0) = -30$ (km/s).
- ✔ Vận tốc tức thời lúc $t = 25$ (giây) là: $v(25) = 6,25$ (km/s).

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay tăng trở lại?

- ✔ Ta có phương trình gia tốc: $a(t) = v'(t) = -0,06t + 2,2$.
- ✔ Vì $a(25) = 53,5 > 0$ nên tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu đang tăng trở lại.

e) Tìm thời điểm mà khoảng cách giữa con tàu và Mặt Trăng nhỏ nhất.

Dựa vào đồ thị ta thấy tại thời điểm $t = 18$ (giây) thì khoảng cách giữa con tàu và Mặt Trăng nhỏ nhất, khoảng cách này bằng 8,08 km.

Bài 2

Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng)}, 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

👉 Lời giải.

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{300x}{100 - x}, 0 \leq x < 100$.

Ta có

$$✔ y' = \frac{30\,000}{(100 - x)^2} > 0, \text{ với mọi } x \in [0; 100).$$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$.

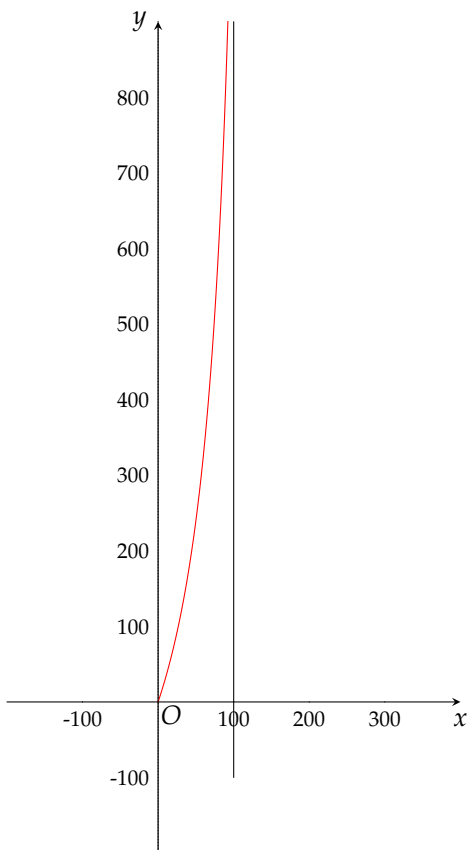
$$✔ \lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{300x}{100 - x} = +\infty, \text{ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là } x = 100.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
$C'(x)$	+	
$C(x)$	0	$\nearrow \infty$

Đồ thị hàm số như Hình 1.34.

- Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.
- Vì $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).



Bài 3

Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

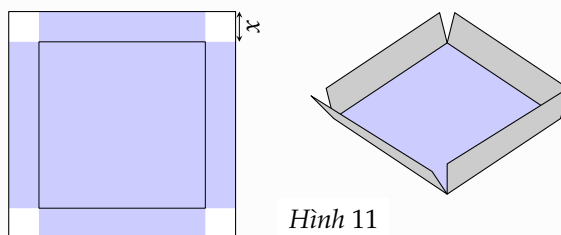
📌 Lời giải.

Ta có tốc độ thay đổi của huyết áp là $P'(t) = \frac{-100t}{(t^2 + 1)^2}$.

Do đó tốc độ thay đổi huyết áp sau 5 s là $P'(5) = -\frac{125}{169}$.

Bài 4

Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình 11).



Hình 11

Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

- a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.
- b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
 Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

👉 Lời giải.

- a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi. Mặt đáy của hộp là hình vuông có cạnh bằng $6 - 2x$ (cm), với $0 < x < 3$. Vậy diện tích của đáy hộp là $S = (6 - 2x)^2$.
 Khối hộp có chiều cao $h = x$ (cm).
 Vậy thể tích hộp là $V = S \cdot h = (6 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ (cm³).

- b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
 Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$, $0 < x < 3$.

(a) Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; 3)$.

(b) Sự biến thiên.

🟢 Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

🟢 Ta có $f'(x) = 12x^2 - 48x + 36 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

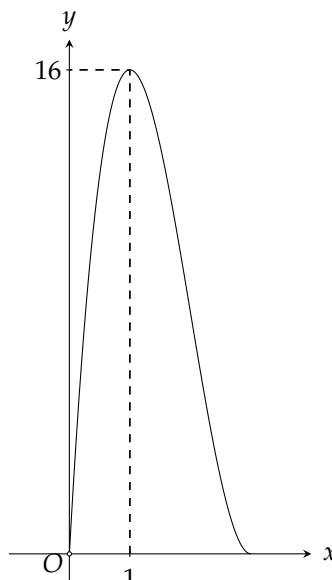
Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	3		
y'		+	0	-	0
y	0 ↗ 16 ↘ 0				

Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

Hàm số không có cực trị.

🟢 Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 0)$, $(1; 16)$, $(3; 0)$.



Vậy hình vuông mà bạn Việt cần cắt bỏ phải có độ dài cạnh $x = 1$ dm thì chiếc hộp đựng thể tích lớn nhất.

Bài 5

Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B: $A + B \rightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

(Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả, Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến, NXB Đại học Sư phạm, 2023).

- Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

Lời giải.

- a) Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.

Tốc độ của phản ứng là đạo hàm của $[C] = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}$ theo biến t . Do đó

$$[C]' = \left(\frac{a^2 Kt}{aKt + 1} \right)' = \frac{a^2 K(aKt + 1) - a^2 Kt \cdot aK}{(aKt + 1)^2} = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}.$$

- b) Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.

Theo câu trên, nếu nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}$.

Ta lại có

$$K(a - x)^2 = K \left(a - \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} \right)^2 = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}.$$

Vậy $x'(t) = K(a - x)^2$.

- c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} [C] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} = a$ (mol/l).

Vậy nồng độ của chất C dần đến a (mol/l).

- d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2} = 0$.

Vậy tốc độ của phản ứng dần đến 0.

Bài 6

((Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng)) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

-  Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo

sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau t tuần học ($5 \leq t \leq 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong bảng bên dưới. (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10e*, Cengage 2014).

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

☑ Ta cần chọn hàm số $y = f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở bảng trên, tức là ở hệ trục tọa độ Oty , đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0; +\infty)$ “gần” với các điểm $A(5; 38)$, $B(10; 56)$, $C(15; 79)$, $D(20; 90)$, $E(25; 93)$, $G(30; 94)$. Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y = f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}$, $M > 94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở bảng trên. Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t) = \frac{at + b}{ct + d}$ ($ac \neq 0$) cho mục đích đó. Dựa vào bảng trên, ta chọn hàm số $f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2}$ ($t > 0$).

- Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).
- Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

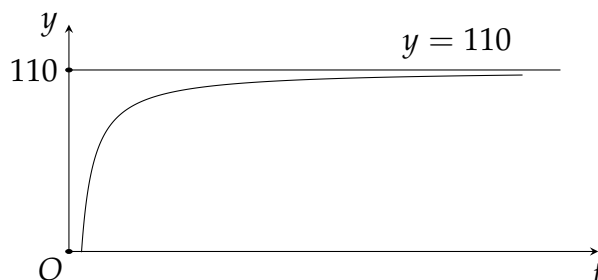
👉 Lời giải.

a) Ta có $f(40) = \frac{110 \cdot 40 - 280}{40 + 2} \approx 98$. Vậy tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần là khoảng 98 từ/phút.

b) Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{110t - 280}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(110 - \frac{500}{t + 2} \right) = 110$.
 Vậy đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$.

c) Do đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$ nên khi t càng lớn thì tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sẽ tiến gần đến mức 110 từ/phút.

⚠ Đồ thị hàm số $y = f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2}$ ($t > 0$) được cho ở hình bên. Đồ thị đó giao với trục tung tại điểm có tọa độ là $(0; -140)$.



Bài 7

Trong Vật lí, điện trở tương đương R_{td} của hai điện trở R_1, R_2 mắc song song được xác định bởi công thức $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, biết rằng $R_2 = 3(\Omega)$. Đặt $R_1 = x(\Omega)$, $x > 0$.

- a) Tính R_{td} theo x , xem biểu thức tính được này là một hàm số $y = f(x)$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ với $x > 0$.
- b) Khi x tăng, điện trở R_{td} thay đổi như thế nào? R_{td} không thể vượt qua giá trị bao nhiêu?

📌 Lời giải.

a) Với $R_1 = x$ và $R_2 = 3$, ta có $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{x+2}{2x}$.

Suy ra $R_{td} = \frac{2x}{x+2} = f(x)$.

Khảo sát sự biến thiên của $f(x)$ với $x > 0$.

(a) Sự biến thiên:

✔ Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{4}{(x+2)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq -2$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

✔ Tiệm cận:

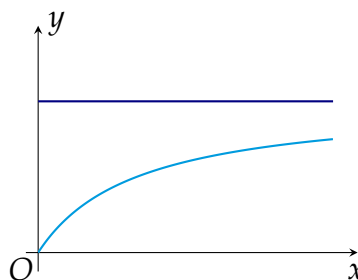
Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+2} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+2} = 2$. Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

✔ Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
y'		+
y	0	2

(b) Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(0; 0)$. Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên dưới. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -2$ và $y = 2$.

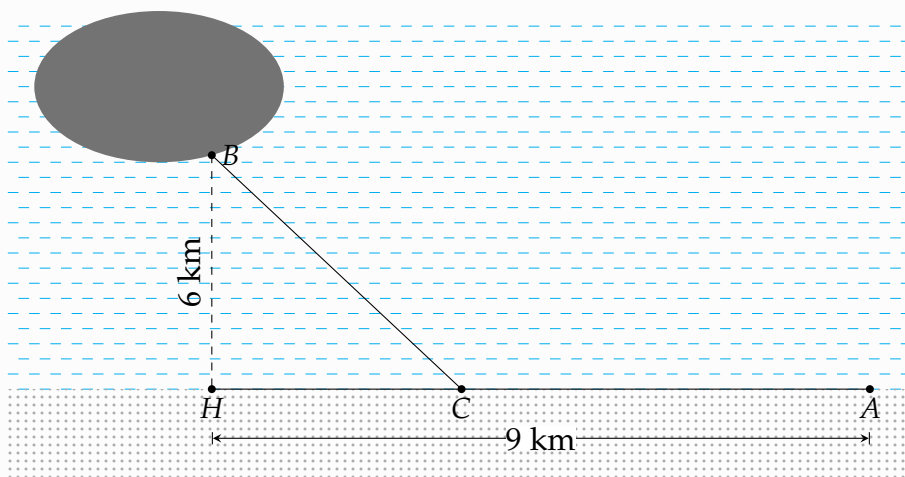


Hình 1.41

- b) Do $y' > 0$ với mọi $x \geq 0$ nên R_{td} tăng khi x tăng;
Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của $f(x)$ nên R_{td} không thể vượt qua 2Ω .

Bài 8

Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (Hình 1.42). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130000 USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9$ km. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.



Hình 1.42

👉 Lời giải.

Đặt $AC = x$, với $x \in [0, 9]$. Khi đó $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{6^2 + (9 - x)^2}$.

Tổng chi phí công ty bỏ ra để lắp ống dẫn dẫn theo đường gấp khúc ACB là

$$c(x) = 50000x + 130000\sqrt{6^2 + (9 - x)^2} = 10000(5x + 13\sqrt{6^2 + (9 - x)^2}).$$

Do đó, chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất khi $f(x) = 5x + 13\sqrt{6^2 + (9 - x)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'(x) = 5 + \frac{13(x - 9)}{\sqrt{36 + (9 - x)^2}}$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{36 + (9 - x)^2} = 13(x - 9) \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$.

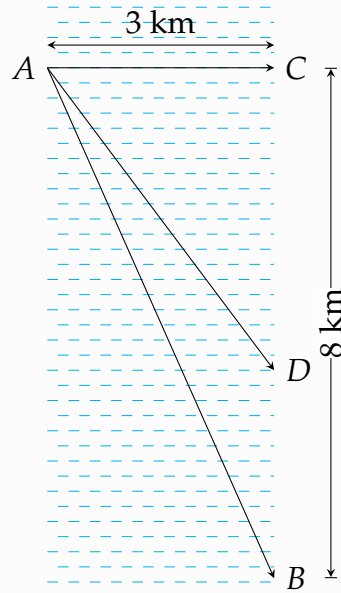
Ta có $f(0) = 13\sqrt{117}$, $f(\frac{13}{2}) = 117$ và $f(9) = 123$.

Từ đó, $f(x) \rightarrow \min$ khi $x = \frac{13}{2} = 6,5$.

Vậy với $AC = 6,5$ khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

Bài 9

Một người chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng, rộng 3 km và muốn đến điểm B , cách bờ đối diện 8 km về phía hạ lưu, càng nhanh càng tốt như Hình 1.39. Người ấy có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B , hoặc anh ta có thể chèo thẳng đến B , hoặc có thể chèo thuyền đến điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B . Biết rằng tốc độ chèo thuyền của người này là 6 km/h và tốc độ chạy bộ là 8 km/h. Tìm thời gian ngắn nhất mà người này có thể đi từ A đến B (bỏ qua vận tốc của nước và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.39

📌 Lời giải.

Gọi $x = CD$, với $x \in [0, 8]$.

Thời gian người đó di chuyển từ A đến D là $\frac{\sqrt{3^2 + x^2}}{6} = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{6}$.

Thời gian người đó di chuyển từ D đến B là $\frac{8 - x}{8}$.

Thời gian người đó di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{6} + \frac{8 - x}{8}$.

Khảo sát sự biến thiên của hàm $f(x)$.

Đạo hàm của $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$.

Phương trình $f'(x) = 0$ tương đương với

$$\begin{aligned} 4x &= 3\sqrt{x^2 + 9} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16x^2 = 9(x^2 + 9) \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{9\sqrt{7}}{7}$	8	$+\infty$
y'			-	0	+
y		$\frac{3}{2}$		$\frac{\sqrt{73}}{6}$	

$\frac{\sqrt{7}}{8} + 1$

Suy ra $\min_{x \in [0, 8]} = \frac{\sqrt{7}}{8} + 1 \approx 1,33$.

Tìm thời gian ngắn nhất mà người này có thể đi từ A đến B gần bằng 1,33 h.

Bài 10

Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$, với t (đơn vị: giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (đơn vị: mét) là quãng đường chất điểm đi chuyển được trong khoảng thời gian đó.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $s = s(t)$ trên hệ trục tọa độ tOs .
- Trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

👉 Lời giải.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$, với $t \geq 0$.

(a) Sự biến thiên:

✔ Chiều biến thiên:

Đạo hàm $s' = -3t^2 + 4t - 1$; $s' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ hoặc $t = 1$.

Trên các khoảng $(0; \frac{1}{3})$ và $(1; +\infty)$, $s' > 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$, $s' < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

✔ Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $t = \frac{1}{3}$ và $s_{CT} = -\frac{4}{27}$.

Hàm số đạt cực đại tại $t = 1$ và $s_{CD} = 0$.

✔ Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

✔ Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
s'		0	0	
s	0	$-\frac{4}{27}$	0	$-\infty$

(b) Đồ thị:

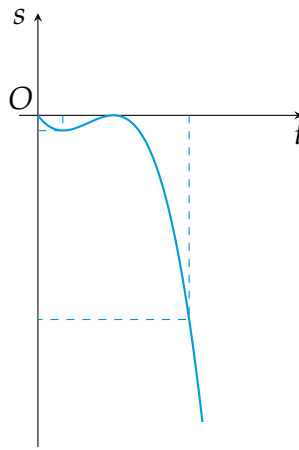
Khi $x = 0$ thì $s = 0$ nên $(0; 0)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy .

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -t^3 + 2t^2 - t = 0$

$$\Leftrightarrow t \in \{0, 1\}.$$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại hai điểm có hoành độ $\{0, 1\}$.

Điểm $(\frac{1}{3}; -\frac{4}{27})$ là điểm cực tiểu và điểm $(1; 0)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{27}\right)$.

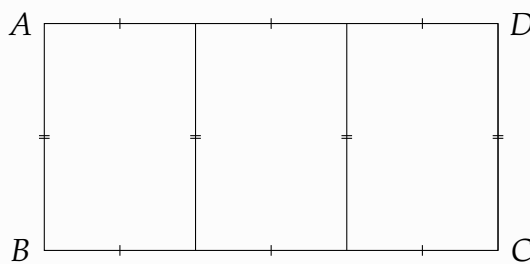
b) Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường.

$$\text{Do đó } v(t) = s'(t) = -3t^2 + 4t - 1 = -3\left(t - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là $\frac{1}{3}$ m/s.

Bài 11

Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 600 m^2 . Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau (Hình 1.40). Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật $ABCD$ không vượt quá 60 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ sao cho chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.40

📌 Lời giải.

Gọi x là chiều dài hình chữ nhật. Ta có $x \in [10\sqrt{6}; 60]$.

Chiều rộng hình chữ nhật bằng $\frac{\text{diện tích}}{\text{chiều dài}} = \frac{600}{x}$.

Chi phí cần để xây dựng hàng rào là $60000 \cdot \left(2x + \frac{3 \cdot 600}{x}\right) = 120000 \cdot \left(x + \frac{900}{x}\right)$.

Suy ra, chi phí hàng rào là thấp nhất khi hàm $f(x) = x + \frac{900}{x}$, với $x \in [10\sqrt{6}; 60]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $f'(x) = 1 - \frac{900}{x^2}$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$.

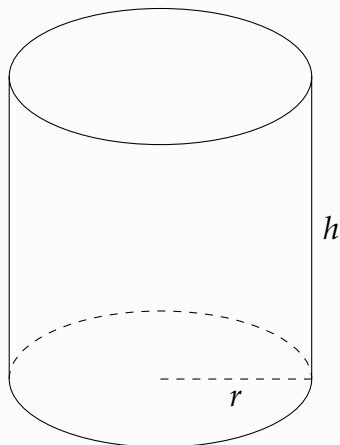
Mặt khác, $f(10\sqrt{6}) = 25\sqrt{6} \approx 61,23$, $f(30) = 60$ và $f(60) = 75$.

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 30$.

Vậy hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài bằng 30 m và chiều rộng bằng 20 m thì chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất.

Bài 12

Người ta cần thiết kế một cái lon có dạng hình trụ có thể tích là 1 lít (Hình 1.41). Tính tỉ lệ chiều cao và bán kính đáy hình trụ này để tổng chi phí làm vỏ lon (bao gồm cả hai đáy) là nhỏ nhất.



👉 Lời giải.

Giả sử h và r ($h, r > 0$) lần lượt là chiều cao và bán kính đáy hình trụ.

Ta có $V = \pi r^2 h$. Suy ra $h = \frac{1}{\pi r^2}$.

Tổng chi phí làm vỏ lon là nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$S_{\text{tp}} = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 2\pi(r \cdot h + r^2) = 2\pi \left(\frac{1}{\pi r} + r^2 \right) = 2\pi f(r)$$

là nhỏ nhất.

Suy ra chi phí làm vỏ lon là nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(r) = \frac{1}{\pi r} + r^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, với $r > 0$.

Ta có:

$$f'(r) = -\frac{1}{\pi r^2} + 2r = \frac{2\pi r^3 - 1}{\pi r^2}$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}.$$

Bảng biến thiên của $f(r)$

x	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)$		

Do đó, $f(r) \rightarrow \min \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Mặt khác, $\frac{h}{r} = \frac{1}{\pi r^3} = 2$.

Vậy, chi phí làm vỏ lon là nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{h}{r} = 2$.