NEW

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO

KHỐI ĐA DIỆN

(CHINH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10)

(CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT)

ÔN THI THPT QUỐC GIA

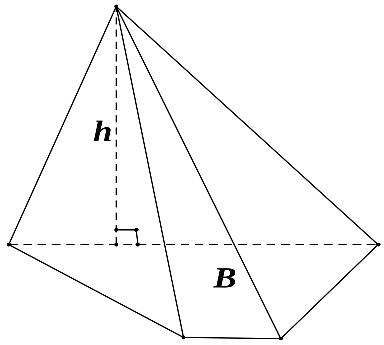
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

A- LÝ THUYẾT CHUNG

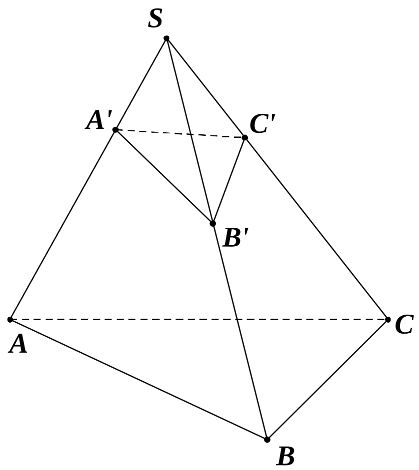
Trước khi vào phần bài tập bạn đọc cần trang bị cho mình các kiến thức căn bản tối thiểu:

1. Thể tích khối chóp

Công thức tính: $V = \frac{1}{3}B.h$ với B diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.



2. Định lý tỉ số thể tích khối tứ diện hoặc khối chóp tam giác



Cho khối tứ diện $SABC$ và A',B',C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$$

Chúng ta sẽ cùng đi ngay vào các ví dụ minh họa để thấy rằng có những bài liên quan đến thể tích khối đa diện rất khó, đòi hỏi khả năng vận dụng cao.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của A qua D. Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F. Tính thể tích V của khối tứ diện $AECF$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{30}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{60}$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{40}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{15}$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V=3$. **B.** $V=4$. **C.** $V=6$. **D.** $V=5$.

Câu 3: Cho tứ diện đều cạnh a và điểm I nằm trong tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{34}}{2}$.

Câu 4: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC=3, CD=4, \measuredangle ABC=\measuredangle BCD=\measuredangle ADC=90^0$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60^0. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD)?

A. $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$ **C.** $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$

Câu 5: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB=2a$, $AD=3BC=3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}a$.

A. $6\sqrt{6}a^3$. **B.** $2\sqrt{6}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a, BC=a\sqrt{2}$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng x. Tìm x biết thể tích khối chóp đã cho có thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

A. $x=\dfrac{3a}{2}$. **B.** $x=\dfrac{7a}{2}$. **C.** $x=\dfrac{9a}{2}$. **D.** $x=\dfrac{5a}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$, $SC\perp(ABC)$ và $SC=a$. Mặt phẳng qua C, vuông góc với SB cắt SA, SB lần lượt tại E và F. Tính thể tích khối chóp $S.CEF$.

A. $V_{SCEF}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{36}$. **B.** $V_{SCEF}=\dfrac{a^3}{18}$. **C.** $V_{SCEF}=\dfrac{a^3}{36}$. **D.** $V_{SCEF}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Câu 9: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3}{8}$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD,CD,BC. Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x, thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y. Giá trị x,y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây:

A. $x^2+2xy-y^2>160$ **B.** $x^2-2xy+2y^2<109$

C. $x^2+xy-y^4<145$ **D.** $x^2-xy+y^4>125$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $V=\dfrac{a^3}{6}$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A,D; AB=AD=2a, CD=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng $(SBI),(SCI)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{3\sqrt{15}}{5}a^3$ **B.** $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}a^3$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{19}}{5}a^3$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{23}}{5}a^3$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC; các mặt phẳng $(SAB);(SAC);(SBC)$ cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng nhau. Biết $AB=25, BC=17, AC=26$, đường thẳng SB tạo với đáy một góc bằng 45^0. Tính thể tích V của khối chóp $SABC$.

A. $V=680$ **B.** $V=408$ **C.** $V=578$ **D.** $V=600$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=8$, $BC=6$. Biết $SA=6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính thể tích của khối tứ diện $M.ABC$.

A. $V=24$. **B.** $V=\dfrac{64}{3}$. **C.** $V=\dfrac{32}{3}$. **D.** $V=12$.

Câu 15: Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S. Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng

A. $\frac{nV}{S}$. **B.** $\frac{V}{nS}$. **C.** $\frac{3V}{S}$. **D.** $\frac{V}{3S}$.

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều với cạnh a (a> 0). Cạnh SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B trên SB sao cho AM $\perp$ MD. Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$.

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{5}{4}$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng:

A. $\sqrt{3}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **D.** $4\sqrt{3}$

Câu 19: Nếu một tứ diện chỉ có đúng một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích tứ diện đó lớn nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{5}{8}$

Câu 20: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB > 1$ và tất cả các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Hỏi thể tích lớn nhất của khối tứ diện đó là?

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{24}$. **D.** 3.

Câu 21: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x\left(x > 1\right)$ và có tất cả các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Tính x khi thể tích của khối tứ diện đó lớn nhất.

A. $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a$, $CD = x$ và tất cả các cạnh còn lại bằng $3a$.Tìm x để khối tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $x = 2\sqrt{10}a.$ **B.** $x = \sqrt{10}a.$ **C.** $x = 6a$. **D.** $3a$.

Câu 23: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng $2 - x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của x để khối tứ diện đã cho có thể tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

A. 1. **B.** 6. **C.** 4 **D.** 2.

Câu 24: Xét khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$. **B.** $x = \sqrt{14}$. **C.** $x = 3\sqrt{2}$. **D.** $x = 3\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 26: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 2$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = BA = BC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 30: Trong các khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh $2a$ và tam giác ABD vuông tại D, $AD = \frac{a}{2}$. Khoảng cách lớn nhất từ B đến mặt phẳng (ACD) là?

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SC = 1$, tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{27}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB = 2$. Cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $SA = AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AHK$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 34: Cho tam giác ABC vuông cân tại B, $AC=2$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M,N khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho $AM.AN=1$. Tìm thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $MNBC$.?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 35: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Câu 36: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SC=a, \widehat{SCA}=\varphi$. Xác định góc φ để thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất.

A. $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B.** $\varphi=\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$

C. $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ **D.** $\varphi=3\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=x$, các cạnh còn lại bằng 2. Tìm giá trị của x để thể tích khối chóp lớn nhất

A. $\sqrt{6}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{7}$ **D.** $2\sqrt{6}$

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN}=45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN}=60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Mặt phẳng (P) thay đổi qua I, cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Biết $SA=SB=\sqrt{2}$, $SC=\sqrt{7}$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. $\frac{243\sqrt{7}}{256}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{81\sqrt{7}}{256}$. **D.** $\frac{27\sqrt{7}}{256}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD=4$, các cạnh bên bằng nhau và bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{130}{3}$.   **B.** $\frac{128}{3}$.   **C.** $\frac{125}{3}$.   **D.** $\frac{250}{3}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SB = x$ $\left(0 < x < \sqrt{3}\right)$. Tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1. Với giá trị nào của x thì thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất?

A. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.   **B.** $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.   **C.** $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.   **D.** $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 4$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SC = 6$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{40}{3}$.   **B.** $\frac{80}{3}$.   **C.** $\frac{20}{3}$.   **D.** 24.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng 1, $SO \perp (ABCD)$ và $SC = 1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.   **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.   **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$.   **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.   **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$.   **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 30°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{1}{9}$.   **B.** $\frac{1}{3}$.   **C.** $\frac{2}{27}$.   **D.** $\frac{4}{27}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 60°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$.   **B.** $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$.   **C.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.   **D.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AD = 4a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tìm thể tích $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{\max} = \frac{8a^3}{3}$.   **B.** $V_{\max} = \frac{4\sqrt{6}a^3}{3}$.   **C.** $V_{\max} = 8a^3$.   **D.** $V_{\max} = 4\sqrt{6}a^3$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và thể tích bằng V. Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB và AD sao cho $\frac{AB}{AM}+2\frac{AD}{AN}=4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MBCDN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V'.

A. $\frac{1}{4}V$. **B.** $\frac{2}{3}V$. **C.** $\frac{3}{4}V$. **D.** $\frac{1}{3}V$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k=\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là?

A. $\frac{1}{60}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{3}{4}V$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Câu 51: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp SABH đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 52: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA=SB=SC=2a$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $\frac{32\sqrt{3}a^3}{9}$. **C.** $\frac{4\sqrt{6}a^3}{9}$. **D.** $\frac{32\sqrt{3}a^3}{27}$.

Câu 53: Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $SA=SB=SC=a$, Cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp $S.ABH$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

C – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của A qua D. Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F. Tính thể tích V của khối tứ diện $AECF$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{30}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{60}$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{40}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{15}$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lý Menelaus: $\dfrac{HB}{HM}.\dfrac{FA}{FB}.\dfrac{EM}{EA}=1 \Leftrightarrow 2.\dfrac{FA}{FB}.\dfrac{3}{4}=1 \Leftrightarrow \dfrac{FA}{FB}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow AF=\dfrac{2}{5}AB$ và $AE=2AD$. Ta có: $\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABD}}=\dfrac{AE}{AD}.\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow V_{AECF}=\dfrac{4}{5}V_{ABCD}=\dfrac{4}{5}.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích -- của khối chóp $A.GBC$.

A. $V=3$. **B.** $V=4$. **C.** $V=6$. **D.** $V=5$.

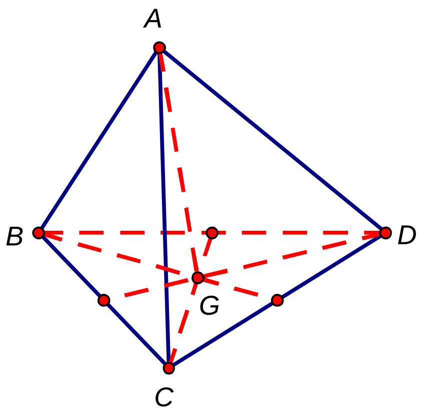
Chọn B.

- ***Cách 1:***

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $A.GBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}$ $\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta BGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

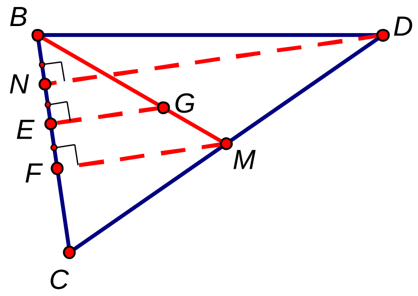
$$\left.\begin{array}{l} V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}h.S_{\Delta BCD} \\ V_{A.GBC}=\dfrac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}}=\dfrac{\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}}=\dfrac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=3$$



$\Rightarrow V_{A.GBC}=\dfrac{1}{3}V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.12=4$.

Chứng minh: Đặt $DN=h; BC=a$.

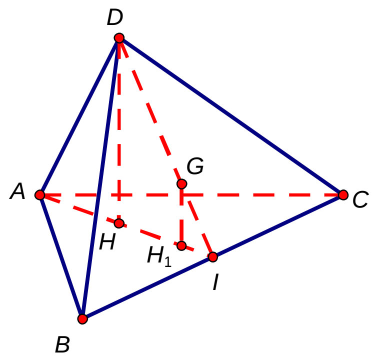
Từ hình vẽ có:



+) $MF//ND \Rightarrow \dfrac{MF}{DN}=\dfrac{CM}{CD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MF=\dfrac{1}{2}DN \Rightarrow MF=\dfrac{h}{2}$.

+) $GE//MF \Rightarrow \dfrac{GE}{MF}=\dfrac{BG}{BM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow GE=\dfrac{2}{3}MF=\dfrac{2}{3}.\dfrac{h}{2}=\dfrac{h}{3}$

+) $\dfrac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}} = \dfrac{\frac{1}{2}DN.BC}{\frac{1}{2}GE.BC} = \dfrac{\frac{1}{2}ha}{\frac{1}{2}\frac{h}{3}a} = 3 \Rightarrow S_{\Delta BCD} = 3S_{\Delta GBC}$



+) Chứng minh tương tự có $S_{\Delta BCD} = 3S_{\Delta GBD} = 3S_{\Delta GCD}$

$\Rightarrow S_{\Delta BGC} = S_{\Delta BGD} = S_{\Delta CGD}$.

□ ***Cách 2:***

☑ $\dfrac{d\left(G;(ABC)\right)}{d\left(D;(ABC)\right)} = \dfrac{GI}{DI} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow d\left(G;(ABC)\right) = \dfrac{1}{3}d\left(D;(ABC)\right)$.

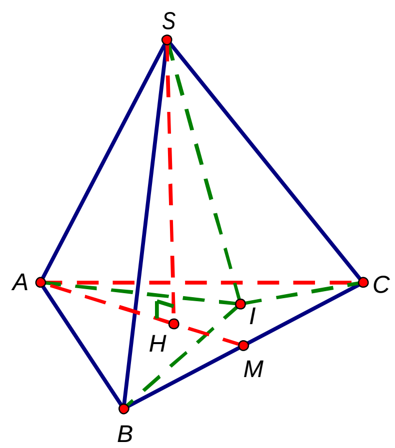
Nên $V_{G.ABC} = \dfrac{1}{3}d\left(G;(ABC)\right).S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.V_{DABC} = 4$.

Câu 3: Cho tứ diện đều cạnh a và điểm I nằm trong tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{34}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



$AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác, $V_{SABC} = V_{ISAB} + V_{IABC} + V_{ISAC} + V_{ISBC}$

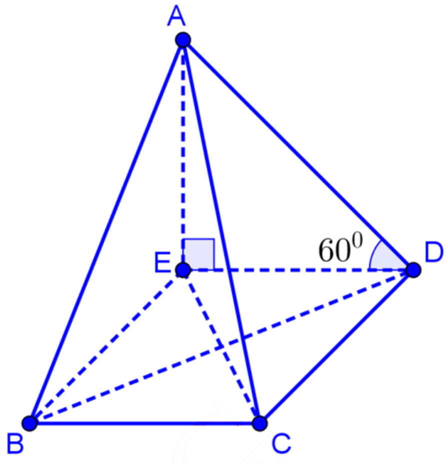
$= \dfrac{1}{3}S_{ABC}.\left[d\left(I;(SAB)\right) + d\left(I;(ABC)\right) + d\left(I;(SAC)\right) + d\left(I;(SBC)\right)\right]$

$\Leftrightarrow d\left(I;(SAB)\right) + d\left(I;(ABC)\right) + d\left(I;(SAC)\right) + d\left(I;(SBC)\right) = \dfrac{3V_{SABC}}{S_{ABC}} = \dfrac{3.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3, CD = 4, \measuredangle ABC = \measuredangle BCD = \measuredangle ADC = 90^0$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60^0. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD)?

A. $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$

Hướng dẫn giải:



Ta dựng $AE \perp (BCD)$ và dễ dàng chứng minh được $BCDE$ là hình chữ nhật. Khi đó $\measuredangle(AD, BC) = \measuredangle ADE = 60^0$ khi đó ta suy ra $AE = 3\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABCD} = 6\sqrt{3}$.

Mặt khác ta chú ý công thức tính nhanh:

$$V_{ABCD} = \frac{2S_{ABC}S_{ACD}\sin\left((ABC),(ACD)\right)}{3AC}$$

Do vậy đặt $\measuredangle\left((ABC),(ACD)\right) = \alpha$ và theo định lý Pythagoras ta suy ra $AB = \sqrt{43}; AD = 6; AC = 2\sqrt{13}$.

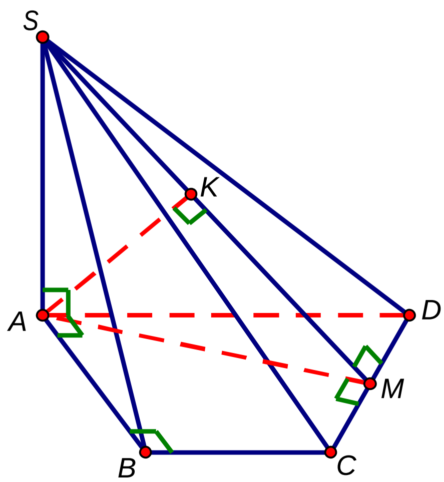
Khi đó: $6\sqrt{3} = \frac{2}{6\sqrt{13}}\left(\frac{1}{2}3\sqrt{43}\right)(12)\sin\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{2\sqrt{43}}{43}}$.

Câu 5: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = 2a$, $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{6}}{4}a$.

A. $6\sqrt{6}a^3$. **B.** $2\sqrt{6}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

Hướng dẫn giải:



Dựng $AM \perp CD$ tại M.

Dựng $AH \perp SM$ tại H.

Ta có: $AH = \frac{3\sqrt{6}}{4}a$.

$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}.AB = 4a^2$

$CD = \sqrt{(AD - BC)^2 + AB^2} = 2a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$

$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = 3a^2$

$S_{ACD} = \frac{1}{2}AM.CD \Rightarrow AM = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AS = \frac{AH.AM}{\sqrt{AM^2 - AH^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}a$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 2\sqrt{6}a^3$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, BC = a\sqrt{2}$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng x. Tìm x biết thể tích khối chóp đã cho có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

A. $x = \frac{3a}{2}$. **B.** $x = \frac{7a}{2}$. **C.** $x = \frac{9a}{2}$. **D.** $x = \frac{5a}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SA.

Khi đó ta có $FE \perp SA, FE \perp BC$ và $BC \perp (SAE)$ nên $BC \perp SA$.

Và $FE^2 = AE^2 - FA^2 = AB^2 - BE^2 - FA^2$

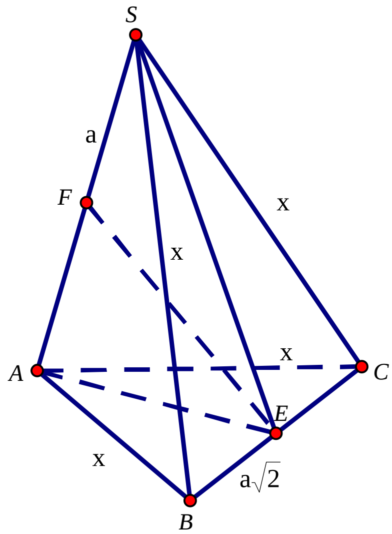
$= x^2 - \frac{2a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{4x^2 - 3a^2}{4}$

Áp dụng công thức:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}.SA.BC.d(SA;BC).\sin(SA;BC)$

Suy ra: $V = \frac{1}{6}.a.a\sqrt{2}.\sqrt{\frac{4x^2 - 3a^2}{4}}.\sin 90°$

$\Rightarrow \frac{a^3\sqrt{11}}{6} = \frac{1}{12}.a.a\sqrt{2}.\sqrt{4x^2 - 3a^2} \Leftrightarrow x = \frac{5a}{2}$.



Câu 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

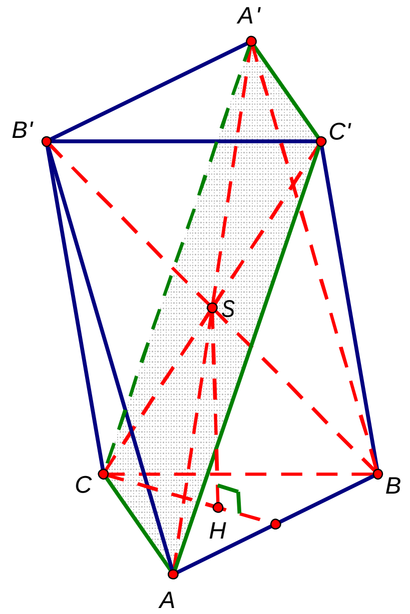
Chọn A.

Cách 1: Ta tính thể tích khối chóp $S.ABC$:

Gọi H là tâm tam giác ABC đều cạnh a $\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0

$\Rightarrow \widehat{SCH} = 60^o \Rightarrow SH = a \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

$V = 2V_{B.ACA'C'} = 2.4V_{B.ACS} = 8V_{S.ABC} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.



Cách 2: Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Diện tích tam giác SBC là: $S_{\Delta SBC} = \dfrac{a^2\sqrt{39}}{12}$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là:

$d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Tứ giác $BCB'C'$ là hình chữ nhật vì có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Có $SB = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BB' = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B'C = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

Diện tích $BCB'C'$ là: $S_{BCB'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{39}}{3}$.

Thể tích khối 8 mặt cần tìm là:

$V = 2.\dfrac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{BCB'C'} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Cách 3

Thể tích khối bát diện đã cho là $V = 2V_{A'B'C'BC} = 2.4V_{A'.SBC} = 8V_{S.ABC} = 8.\dfrac{1}{3}SG.S_{ABC}$

Ta có: $\left(\widehat{SA;(ABC)}\right) = \widehat{SAG} = 60^0$. Xét ΔSGA vuông tại G:

$\tan\widehat{SAG} = \dfrac{SG}{AG} \Leftrightarrow SG = AG.\tan\widehat{SAG} = a.$

Vậy $V = 8.\dfrac{1}{3}SG.S_{ABC} = 8.\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $SC \perp (ABC)$ và $SC = a$. Mặt phẳng qua C, vuông góc với SB cắt SA, SB lần lượt tại E và F. Tính thể tích khối chóp $S.CEF$.

A. $V_{SCEF} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{36}$. **B.** $V_{SCEF} = \dfrac{a^3}{18}$. **C.** $V_{SCEF} = \dfrac{a^3}{36}$. **D.** $V_{SCEF} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

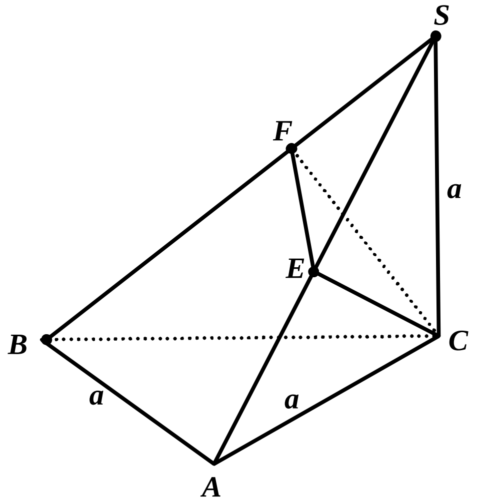
Hướng dẫn giải:

Từ C hạ $CF \perp SB, (F \in SB)$, $CE \perp SA, (E \in SA)$

Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp CE$

$\Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$

Vậy mặt phẳng qua C và vuông góc SB là mặt (CEF).



Ta có $\dfrac{V_{SCEF}}{V_{SCAB}} = \dfrac{SE}{SA}.\dfrac{SF}{SB}$

Tam giác vuông SAC vuông tại C ta có: $SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$

và $\boxed{\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SC^2}{SA^2}} = \dfrac{a^2}{2a^2} \Rightarrow \dfrac{SE}{SA} = \dfrac{1}{2}$

Tam giác vuông SBC vuông tại C ta có: $SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$

và $\boxed{\dfrac{SF}{SB} = \dfrac{SC^2}{SB^2}} = \dfrac{a^2}{3a^2} \Rightarrow \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{1}{3}$

Do đó $\dfrac{V_{SCEF}}{V_{SCAB}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{SCEF} = \dfrac{1}{6}V_{SABC} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{36}a^3$.

Chọn C.

Câu 9: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3}{8}$

Hướng dẫn giải:

Tổng quát: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$

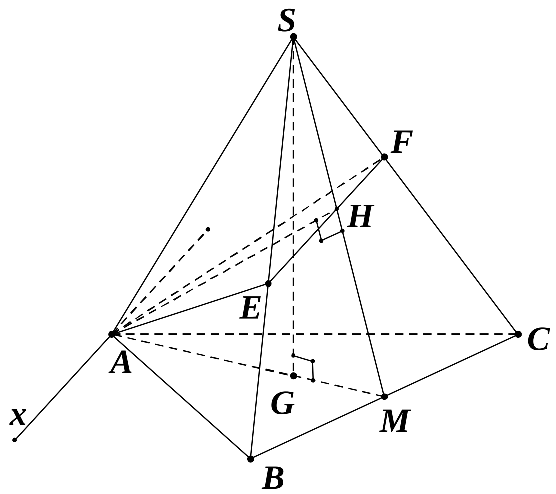
có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi

qua A và song song BC và vuông góc với (SBC),

góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$V_{S.ABC} = \dfrac{a^3 \cot\alpha}{24}$



Áp dụng bài này: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\cot 30^0}{24}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

+ ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Gọi G là trọng tâm

+ Gọi $(P)\cap(SBC)$=EF$\Rightarrow$ EF//BC$\Rightarrow(P)\cap(SBC)$=Ax với $Ax//EF//BC$

+ Gọi M là trung điểm $BC, SM\cap EF=N$.

Ta có: $AM\perp BC, SG\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow AN\perp BC\Rightarrow AN\perp Ax$

Mà $AM\perp BC, BC//Ax\Rightarrow AM\perp \text{Ax}\Rightarrow \widehat{((P),(ABC))}=\widehat{NAM}=30^0$

Ta có: $\widehat{GSM}=\widehat{NAM}=\alpha$ (cùng phụ với $\widehat{SMA}$)

Xét ΔSGM vuông tại G có: $SG=GM.\cot\widehat{GSM}=\dfrac{1}{3}AM.\cot 30^0=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{a}{2}$

Vậy: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

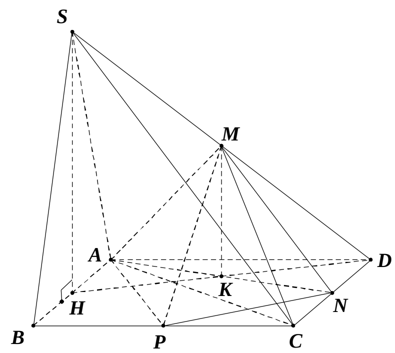
Chọn A.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC. Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x, thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y. Giá trị x, y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây:

A. $x^2+2xy-y^2>160$　　**B.** $x^2-2xy+2y^2<109$

C. $x^2+xy-y^4<145$　　**D.** $x^2-xy+y^4>125$

Hướng dẫn giải:



+ Gọi H là trung điểm AB.

Do ΔABC đều và $(SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Xét ΔABC đều: $SH=\dfrac{\sqrt{3}AB}{2}=2\sqrt{3}$

+ Ta có: $S_{ABPN}=S_{ABCD}-S_{ADN}-S_{CND}$

$=AB^2-\dfrac{AD.DN}{2}-\dfrac{CN.CP}{2}=4^2-\dfrac{4.2}{2}-\dfrac{2.2}{2}=10$

$\Rightarrow V_{S.ABPN}=\dfrac{1}{3}.S_{ABPN}.SH=\dfrac{1}{3}.10.2\sqrt{3}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

+ Gọi $AN\cap HD=\{K\}$ ta có MK là đường trung bình của ΔDHS

$$\Rightarrow HK=\frac{1}{2}SH \Rightarrow V_{CMNP}=\frac{1}{3}.S_{CNP}.MK=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.CN.CP.\frac{1}{2}.SH=\frac{1}{3}.\frac{2.2}{2}.\frac{2\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Thay vào các đáp án.

Chọn C.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

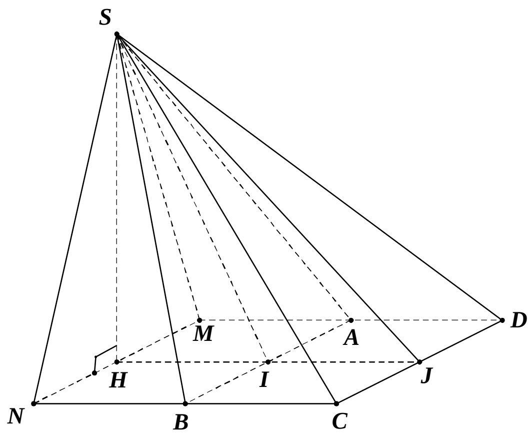
A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $V=\frac{a^3}{6}$

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm AB;J là trung điểm của CD từ giả thiết ta có:

$$IJ=a; SI=\frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } SJ=\sqrt{SC^2-JC^2}=\sqrt{3a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{11}}{2}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SIJ ta có:



$$\cos\left(\widehat{SIJ}\right)=\frac{IJ^2+IS^2-SJ^2}{2.IJ.IS}=\frac{a^2+\frac{3a^2}{4}-\frac{11a^2}{4}}{2.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$=-\frac{a^2}{a^2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}<0$$

Suy ra, tam giác SIJ là tam giác có $\widehat{SIJ}$ tù. Từ giả thiết tam giác SAB đều và tam giác SCD là cân đỉnh S. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$, ta có H thuộc IJ và I nằm giữa HJ tức là tam giác vuông SHI có $\widehat{H}=90^0$.

Góc I nhọn và $\cos\hat{I}=\cos\widehat{SIH}=-\cos\widehat{SIJ}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\widehat{SIJ} \text{ va } \widehat{SIH} \text{ ke bu}\right)\Rightarrow \sin\widehat{SIH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác SHI ta có $SH=SI.\sin\widehat{SIH}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

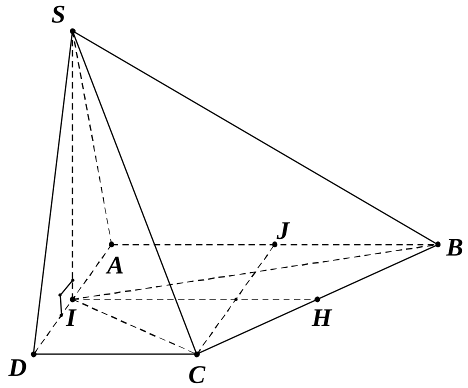
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn C.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A,D; AB=AD=2a, CD=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng $(SBI),(SCI)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$ **B.** $\frac{3\sqrt{17}}{5}a^3$ **C.** $\frac{3\sqrt{19}}{5}a^3$ **D.** $\frac{3\sqrt{23}}{5}a^3$

Hướng dẫn giải:



Gọi H trung điểm của BC, I là hình chiếu của H lên BC, J là trung điểm $AB.$

Ta có $SI \perp mp\left(ABCD\right), IC = \sqrt{ID^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$

$IB = \sqrt{IA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$ và

$BC = IB = \sqrt{CJ^2 + JB^2} = a\sqrt{5}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD\left(AB + CD\right) = 3a^2$; $S_{IAB} = \frac{1}{2}.IA.AB = a^2$

và $S_{CID} = \frac{1}{2}.DC.DI = \frac{1}{2}a^2$

$\Rightarrow S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{IAB} - S_{DIC} = \frac{3a^2}{2}.$

Mặt khác $S_{IBC} = \frac{1}{2}IH.BC,$ nên $IH = \frac{2S_{IBC}}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a.$

$SI = IH.\tan 60^0 \frac{9\sqrt{3}}{5}a.$

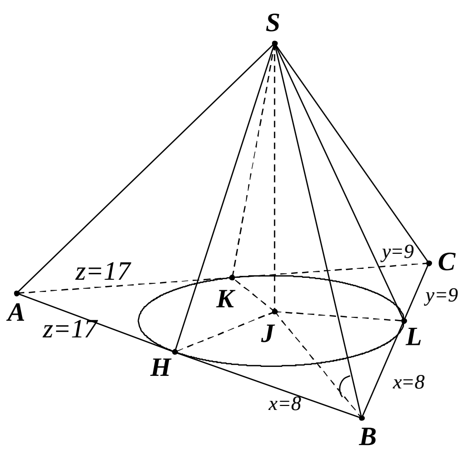
Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{15}}{5}a^3.$

Chọn A.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC; các mặt phẳng $\left(SAB\right);\left(SAC\right);\left(SBC\right)$ cùng tạo với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ một góc bằng nhau. Biết $AB = 25, BC = 17, AC = 26,$ đường thẳng SB tạo với đáy một góc bằng 45^0. Tính thể tích V của khối chóp $SABC$.

A. $V = 680$ **B.** $V = 408$ **C.** $V = 578$ **D.** $V = 600$

Hướng dẫn giải:



Gọi J là chân đường cao của hình chóp $S.ABC; H, K$ và L lần lượt là hình chiếu của J trên các cạnh AB, BC và $CA.$

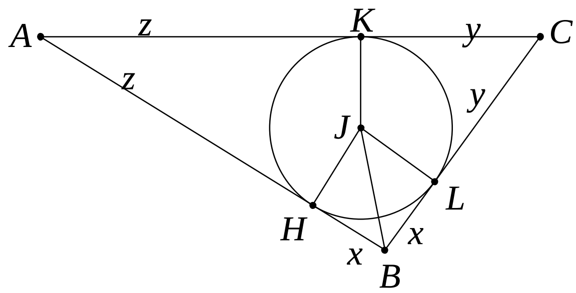
Suy ra $\widehat{SHJ}, \widehat{SLJ}$ và $\widehat{SKJ}$ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng $\left(ABC\right)$ với các mặt phẳng $(SAB),(SAC),(SBC)$.

Theo giả thiết ta có: $\widehat{SHJ} = \widehat{SLJ} = \widehat{SKJ}$,

suy ra các tam giác vuông SJH, SJL, SJK bằng nhau.

Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà J nằm trong tam giác ABC nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Áp dụng công thức Hê- rông, ta tính được diện tích của tam giác ABC là $S = 204$. Kí hiệu P là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn



nội tiếp của ABC. Ta có $r = \dfrac{S}{P} = \dfrac{204}{34} = 6.$

Đặt $x = BH = BL, y = CL = CK, z = AH = AK.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta được $(x; y; z) = (8; 9; 17)$

$JB = \sqrt{JH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Ta có $\widehat{SBJ} = \widehat{(SB,(ABC))} = 45^0$, suy ra SJB là

tam giác vuông cân tại J. $SJ = JB = 10$.

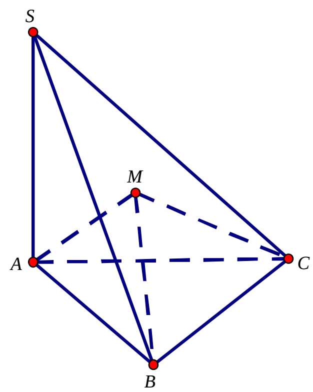
Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} SJ.S_{\Delta ABC} = 680$

Chọn A.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính thể tích của khối tứ diện $M.ABC$.

A. $V = 24$. **B.** $V = \dfrac{64}{3}$. **C.** $V = \dfrac{32}{3}$. **D.** $V = 12$.

Hướng dẫn giải:



Chọn C

Vì $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$. Khi đó $S_{SAB} = \dfrac{1}{2} SA.AB = 24$,

$S_{SAC} = \dfrac{1}{2} SA.AC = \dfrac{1}{2}.6.\sqrt{8^2 + 6^2} = 30$,

$S_{SBC} = \dfrac{1}{2} SB.BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2}.6 = 30$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.6.8 = 24$.

Thể tích khối chóp đã cho là: $V=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}.AB.BC=48$.

Theo bài ra điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp nên ta gọi khoảng cách từ điểm M đến các mặt của hình chóp là d thì:

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}d.\left(S_{SAB}+S_{SAC}+S_{SBC}+S_{ABC}\right)\Leftrightarrow d=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{SAB}+S_{SAC}+S_{SBC}+S_{ABC}}$

$\Leftrightarrow d=\frac{3.48}{30+30+24+24}=\frac{4}{3}$. Khi đó: $V_{M.ABC}=\frac{1}{3}.d.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{4}{3}.24=\frac{32}{3}$.

Câu 15: Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S. Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng

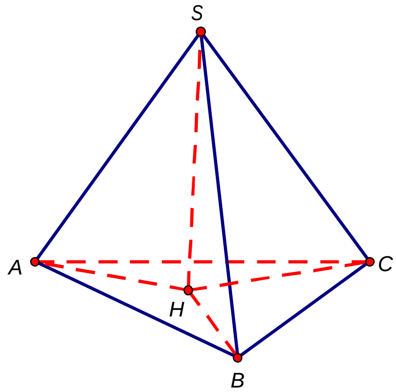
A. $\frac{nV}{S}$. **B.** $\frac{V}{nS}$. **C.** $\frac{3V}{S}$. **D.** $\frac{V}{3S}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Xét trong trường hợp khối tứ diện đều.

Các trường hợp khác hoàn toàn tương tự.



$V_{H.ABC}=\frac{1}{3}h_1.S;\ V_{H.SBC}=\frac{1}{3}h_2.S;\ V_{H.SAB}=\frac{1}{3}h_3.S;\ V_{H.SAC}=\frac{1}{3}h_4.S$

$h_1=\frac{3V_1}{S};h_2=\frac{3V_2}{S};h_3=\frac{3V_3}{S};h_4=\frac{3V_4}{S}$

$\Rightarrow h_1+h_2+h_3+h_4=\frac{3\left(V_1+V_2+V_3+V_4\right)}{S}=\frac{3V}{S}$

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều với cạnh a (a> 0). Cạnh SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B trên SB sao cho AM $\perp$ MD. Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$.

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{5}{4}$

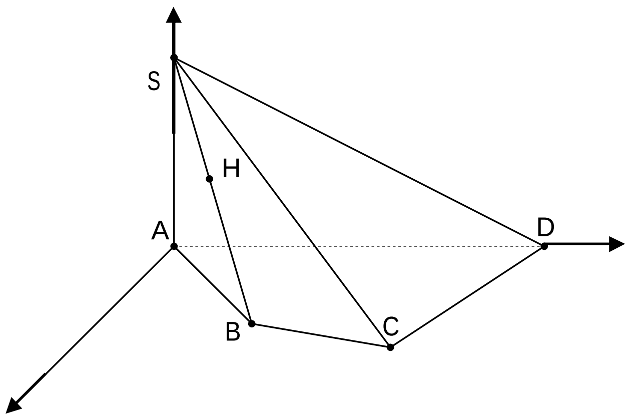
Hướng dẫn giải: :

Đặt hình chóp vào hệ trục toạ độ như hình vẽ. Suy ra ta có: A = (0; 0; 0), D = (2a; 0; 0), S = (0; 0; a$\sqrt{3}$) và

B = $\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$. Suy ra phương trình

của SB là: $\frac{2x}{a}=\frac{2y}{a\sqrt{3}}=\frac{z-a\sqrt{3}}{-a\sqrt{3}}$

Gọi M(x_0; y_0; z_0) thuộc cạnh SB, ta có:



$$\begin{cases} y_0 = \sqrt{3}x_0 \\ z_0 = a\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x_0 \end{cases}.$$

Mặt khác AM⊥DN $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM} = 0$

$\Leftrightarrow x_0^2 - 2ax_0 + y_0^2 + z_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{3a}{8}$

$\Leftrightarrow M = \left(\dfrac{3a}{8}; \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{SB}$ hay $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{3}{4}$.

Chọn A.

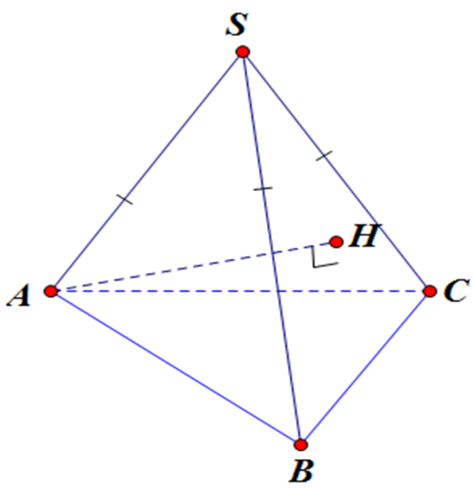
CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng SBC.

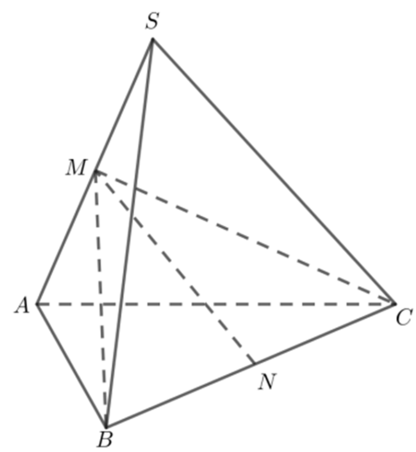
Ta có $V = \dfrac{1}{3}.AH.S_{SBC} = \dfrac{1}{6}.AH.SB.SC.\sin\widehat{BSC} \le \dfrac{1}{6}.AS.SB.SC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} AH = AS \\ \sin\widehat{BSC} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AS \perp (SBC) \\ SB \perp SC \end{cases} \Leftrightarrow SA \perp SB,\ SB \perp SC,$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng:

A. $\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **C.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ **D.** $4\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải: Ta gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC.



Dễ chứng minh được $SA \perp (MBC)$ và ΔMBC cân tại M

Tính được:

$$MN^2 = MB^2 - \frac{BC^2}{4} = AB^2 - \frac{SA^2}{4} - \frac{BC^2}{4} = 1 - \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

Do đó: $V = V_{S.ABC} = \frac{1}{6}xy\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{4}}$.

Vì $x^2+y^2 \ge 2xy$ nên $V \le \frac{1}{6}xy\sqrt{1-\frac{xy}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(xy)^2.(2-xy)}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Đến đây, có hai hướng xử lý:

Thứ nhất, sử dụng BĐT Côsi:

$$(xy)^2(2-xy) = 4.\frac{xy}{2}.\frac{xy}{2}(2-xy) \le 4.\left(\frac{\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+2-xy}{3}\right)^3 = \frac{32}{27}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{xy}{2} = 2-xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x+y = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Thứ hai, đặt $t = xy$ và xét $f(t) = t^2(2-t)$, đạt GTLN khi $t = \frac{4}{3}$, suy ra

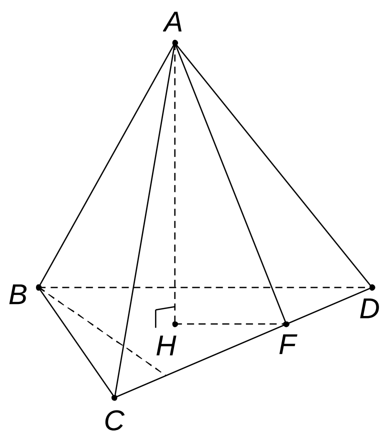
$x = y = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x+y = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 19: Nếu một tứ diện chỉ có đúng một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích tứ diện đó lớn nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{5}{8}$

Hướng dẫn giải:

Giả sử tứ diện $ABCD$ có cạnh lớn nhất là AB, suy ra các tam giác ACD và BCD có tất cả các cạnh đều không lớn hơn 1. Các chiều cao AF và BE của chúng không lớn hơn $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$, trong đó $CD = a \le 1$.



Chiều cao hình tứ diện $AH \le \text{AF} \le \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$

(do tam giác AHF vuông tại H có AF là cạnh huyền)

Thể tích của khối tứ diện là:

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.BE.CD.AH \le \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.\left(1-\frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24}a\left(4-a^2\right)$$

Để tìm giá trị lớn nhất của V ta xét biểu thức $a\left(4-a^2\right)$.

Vì $0 \le a \le 1$ nên $a\left(4-a^2\right) \le 3$ và $V \le \frac{1}{24}a\left(4-a^2\right) \le \frac{1}{8}$.

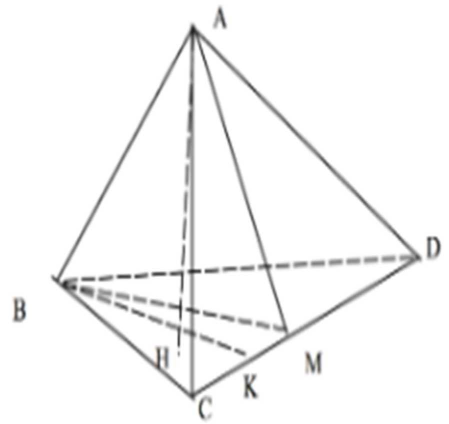
Chọn C.

Câu 20: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB>1$ và tất cả các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Hỏi thể tích lớn nhất của khối tứ diện đó là?

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{24}$. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Tứ diện $ABCD$ có $AB>1$, các cạnh còn lại đều không lớn hơn 1. Đặt $CD=a, x\in\left(0;1\right]$

Gọi M là trung điểm của BC, K là hình chiếu của B lên CD và H là hinfhc hiếu của A trên $mp\left(BCD\right)$. Khi đó ta có

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}AH.S_{BCD}=\frac{1}{6}x.BK.AH$ (1)

Có

$$BM^2=\frac{BC^2+BD^2}{2}-\frac{CD^2}{4}\le 1-\frac{x^2}{4}\Rightarrow BM\le\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

Tương tự ta cũng có $AM\le\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$

Mà $BK\le BM\Rightarrow BK\le\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ (2), $AH\le AM\le\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ $\left(3\right)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $V_{ABCD}\le\frac{1}{24}x\left(4-x^2\right);x\in\left(0;1\right]$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{24}x\sqrt{4-x^2}, x\in\left(0;1\right]$ là hàm đồng biến nên

$f\left(x\right)\le f\left(1\right)=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{ABCD}\le\frac{1}{8}$

(Dấu bằng xảy ra khi hai tam giác ACD, BCD là hai tam giác đều có cạnh bằng 1 và H,K trùng với M . Khi đó $AB=\sqrt{\frac{3}{2}}>1$)

Chọn B.

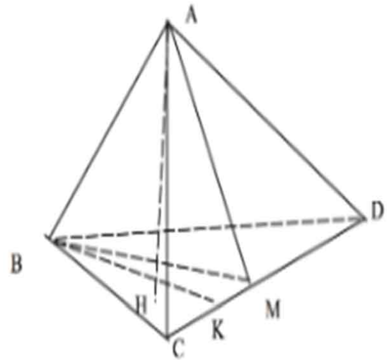
Câu 21: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB=x\left(x>1\right)$ và có tất cả các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Tính x khi thể tích của khối tứ diện đó lớn nhất.

A. $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Tứ diện $ABCD$ có $AB = x > 1$, các cạnh còn lại đều không lớn hơn 1. Đặt $CD = a, y \in (0;1]$



Gọi M là trung điểm của BC, K là hình chiếu của B lên CD và H là hinfhc hiếu của A trên $mp(BCD)$. Khi đó ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} = \frac{1}{6}y.BK.AH$ (1)

Có

$$BM^2 = \frac{BC^2 + BD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} \le 1 - \frac{y^2}{4} \Rightarrow BM \le \frac{1}{2}\sqrt{4 - y^2}$$

Tương tự ta cũng có $AM \le \frac{1}{2}\sqrt{4 - y^2}$

Mà $BK \le BM \Rightarrow BK \le \frac{1}{2}\sqrt{4 - y^2}$ (2), $AH \le AM \le \frac{1}{2}\sqrt{4 - y^2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $V_{ABCD} \le \frac{1}{24}y\left(4 - y^2\right); y \in (0;1]$

Xét hàm số $f(y) = \frac{1}{24}y\sqrt{4 - y^2}, y \in (0;1]$ là hàm đồng biến nên

$$f(y) \le f(1) = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{ABCD} \le \frac{1}{8}$$

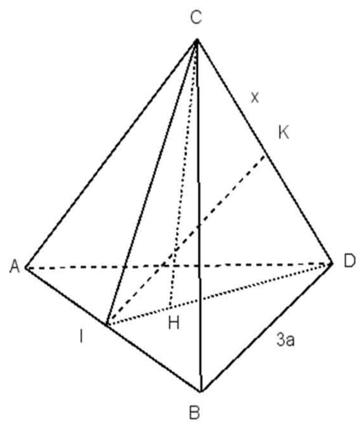
Dấu bằng xảy ra khi hai tam giác ACD, BCD là hai tam giác đều có cạnh bằng 1 và H, K trùng với M. Khi đó $x = AB = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a$, $CD = x$ và tất cả các cạnh còn lại bằng $3a$. Tìm x để khối tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $x = 2\sqrt{10}a.$ **B.** $x = \sqrt{10}a.$ **C.** $x = 6a$. **D.** $3a$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Gọi I là trung điểm AB, H là hình chiếu của C lên mặt (ABD),

K là trung điểm CD.

$$DI = \sqrt{BD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5} = CI.$$

$$IK = \sqrt{DI^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{20a^2 - x^2}}{2}.$$

$$CH = \frac{IK.CD}{ID} = \frac{x.\dfrac{\sqrt{20a^2 - x^2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{x\sqrt{20a^2 - x^2}}{2a\sqrt{5}}.$$

Thể tích khối tứ diện lớn nhất khi CH lớn nhất.

$$x\sqrt{20a^2 - x^2} \le \frac{x^2 + 20a^2 - x^2}{2} = 10a^2 \Rightarrow CD \le a\sqrt{5}.$$

Đạt được khi $x^2 = 20a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{10}.$

Câu 23: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng $2 - x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của x để khối tứ diện đã cho có thể tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

A. 1. **B.** 6. **C.** 4 **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có $\begin{cases} CA = CB = CD = 2 - x \\ \cos\widehat{ACB} = \dfrac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = 1 - \dfrac{x^2}{2(2-x)^2}, \cos\widehat{BCD} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $V = \dfrac{(2-x)^3}{6}\sqrt{1 + 2\left(1 - \dfrac{x^2}{2(2-x)^2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) - \left(1 - \dfrac{x^2}{2\left(2 - x^2\right)}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$.

$$= \frac{x(2-x)}{6}\sqrt{\frac{x^2 - 6x + 6}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \approx 0,275842 \end{array}\right..$$

Câu 24: Xét khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

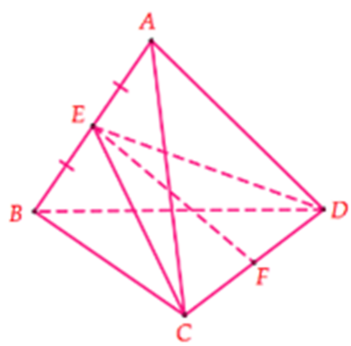
A. $x = \sqrt{6}$. **B.** $x = \sqrt{14}$. **C.** $x = 3\sqrt{2}$. **D.** $x = 3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi E là trung điểm của AB, ta có các tam giác CAB, DAB lần lượt cân tại C, D nên $CE \perp AB, DE \perp AB \Rightarrow AB \perp (ECD)$. Suy ra

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}AB.S_{CDE}$$



Ta có $CE = DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{12 - \dfrac{x^2}{4}}$

Gọi F là trung điểm của CD, ta có $EF \perp CD$ và

$FE = \sqrt{DE^2 - DF^2} = \sqrt{12 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{12}{4}} = \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{4}}$, Suy ra $S_{CDE} = \dfrac{1}{2}FE.CD = \sqrt{3}.\sqrt{9 - \dfrac{x^2}{4}}$

Khi đó $V=\frac{\sqrt{3}}{3}x\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{6}x\sqrt{36-x^2}\le\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{x^2+36-x^2}{2}\right)=3\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SB=a\sqrt{2}$, $SC=a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

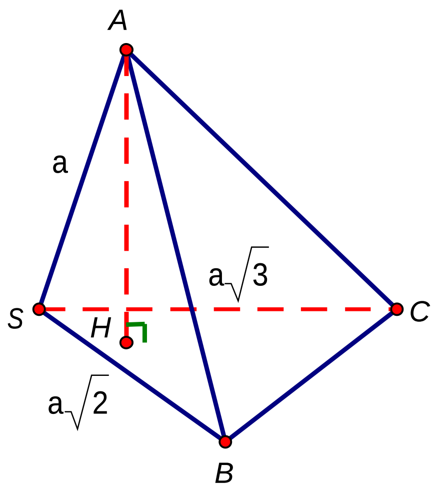
A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Chọn D.

Gọi H là hình chiếu của A lên $(SBC)\Rightarrow V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}$.

Ta có $AH\le SA$; dấu "=" xảy ra khi $AS\perp(SBC)$.

$S_{SBC}=\frac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{SBC}\le\frac{1}{2}SB.SC$, dấu "=" xảy ra khi $SB\perp SC$.



Khi đó,
$V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}\le\frac{1}{3}AS\cdot\frac{1}{2}SB\cdot SC=\frac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC$.

Dấu "=" xảy ra khi SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau.

Suy ra thể tích lớn nhất của khối chóp là

$V=\frac{1}{6}SA.SB.SC=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 26: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SB=a\sqrt{2}$, $SC=a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

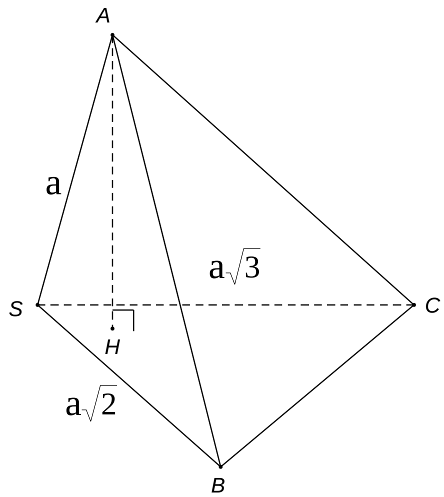
A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải: :

Gọi H là hình chiếu của A lên $(SBC)\Rightarrow V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}$.

Ta có $AH\le SA$; dấu "=" xảy ra khi $AS\perp(SBC)$.

$S_{SBC}=\frac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{SBC}\le\frac{1}{2}SB.SC$, dấu "=" xảy ra khi $SB\perp SC$.



Khi đó,
$V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}\le\frac{1}{3}AS\cdot\frac{1}{2}SB\cdot SC=\frac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC$.

Dấu "=" xảy ra khi SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau.

Suy ra thể tích lớn nhất của khối chóp là $V=\frac{1}{6}SA.SB.SC=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Chọn D.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

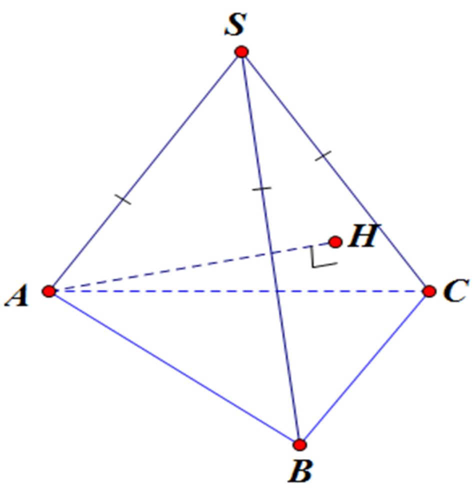
Hướng dẫn giải:

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng SBC.

Ta có $V=\frac{1}{3}.AH.S_{SBC}=\frac{1}{6}.AH.SB.SC.\sin\widehat{BSC}\le\frac{1}{6}.AS.SB.SC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}AH=AS\\ \sin\widehat{BSC}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AS\perp(SBC)\\ SB\perp SC\end{cases}\Leftrightarrow SA\perp SB,\ SB\perp SC,$.



Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=2$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải:

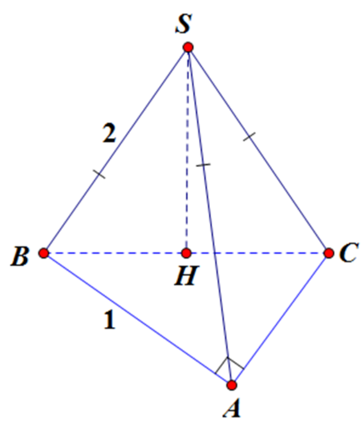
Chọn A

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC). Khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Hay H là trung điểm BC.

Đặt $AC=x$. Khi đó $BC=\sqrt{x^2+1}$, $SH=\frac{\sqrt{15-x^2}}{2}$.

Ta có: $$V=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{6}.SH.AB.AC=\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{15-x^2}}{2}.x\le\frac{1}{12}.\frac{\left(15-x^2+x^2\right)}{2}=\frac{5}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $15-x^2=x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{15}{2}}$.



Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = BA = BC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Cách 1:

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC). Khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

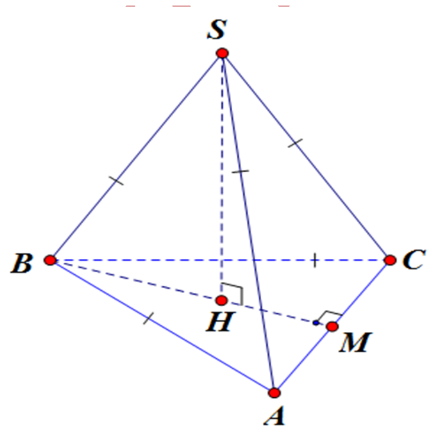
Vì ΔABC cân tại B nên H thuộc đường trung trực BM của AC.

Đặt $AC = x$.

Ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.BM.AC = \frac{1}{2}.x.\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}$ và

$R = \frac{abc}{4S_{ABC}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.



Mặt khác chiều cao của khối chóp:

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{SB^2 - R^2} = \sqrt{\frac{3-x^2}{4-x^2}}$.

Thể tích khối chóp:

$V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{3-x^2}{4-x^2}}.\frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} = \frac{\sqrt{x^2\left(3-x^2\right)}}{12} \le \frac{1}{8}$

.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Cách 2:

Gọi K, I lần lượt là hình chiếu của C lên (SAB) và SB.

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}.CK.S_{SAB} \le \frac{1}{3}.CI.S_{SAB}\,\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi hình chiếu của C lên (SAB) trùng trung điểm SB.

Câu 30: Trong các khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh $2a$ và tam giác ABD vuông tại D, $AD = \frac{a}{2}$. Khoảng cách lớn nhất từ B đến mặt phẳng (ACD) là?

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

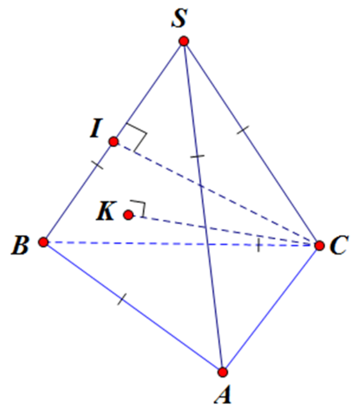
Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có $\begin{cases} AB = AC = 2a, AD = \frac{a}{2} \\ \cos\widehat{BAC} = \frac{1}{2}, \cos\widehat{DAB} = \frac{1}{4}, \cos\widehat{CAD} = x \end{cases}$

Khi đó $V=\dfrac{2a.2a.\frac{a}{2}}{6}\sqrt{1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}-x^2+2.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}.x}=\dfrac{a^3\sqrt{-16x^2+4x+11}}{12}$.

Khi đó $d_B=\dfrac{3V}{S_{ACD}}=f\left(x\right)=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{-16x^2+4x+11}{1-x^2}}\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)=a\sqrt{3}$.

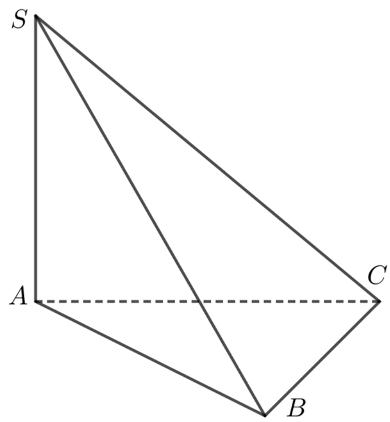


Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $\left(ABC\right)$. Biết $SC=1$, tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D



Đặt $AC=x\Rightarrow SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{1-x^2}$ và $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}CA^2=\dfrac{x^2}{2}$.

Vì vậy $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{x^2}{2}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{x^2.x^2\left(2-2x^2\right)}}{6\sqrt{2}}$

$\le\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{x^2+x^2+2-2x^2}{2}\right)^3}}{6\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{27}$

Dấu bằng xảy ra khi $x^2=2-2x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB=2$. Cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Đặt $CA=x$, $CB=\sqrt{AB^2-CA^2}=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{CA.CB}{2}=\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$.

Suy ra $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{6} = \frac{\sqrt{x^2(4-x^2)}}{6} \le \frac{x^2+4-x^2}{2.6} = \frac{1}{3}$

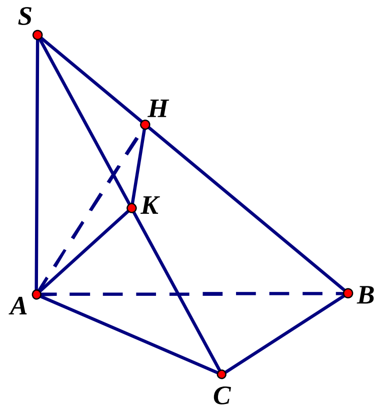
Dấu bằng đạt tại $x^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $SA = AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AHK$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Đặt $AC = x \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - x^2}$

Ta có $V_{SABC} = \frac{1}{6}.SA.BC.AC = \frac{1}{6}.2a.x\sqrt{4a^2 - x^2}$

$= \frac{ax\sqrt{4a^2 - x^2}}{3}$

Vì vậy $V_{S.AHK} = \frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SC}V_{S.ABC} = \frac{1}{2}.\frac{SA^2}{SC^2}.\frac{ax\sqrt{4a^2-x^2}}{3}$

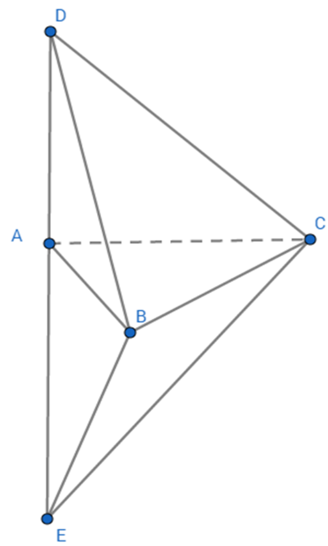
$= \frac{2}{3}.\frac{a^3x\sqrt{4a^2-x^2}}{4a^2+x^2} \le \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 34: Cho tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = 2$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M, N khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho $AM.AN = 1$. Tìm thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $MNBC$.?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Tam giác ABC vuông cân tại B,
$AC = 2 \Rightarrow AB = BC = \sqrt{2}$.

Ta có

$V_{MNBC} = \frac{1}{3}(AM + AN).S_{ABC} = \frac{1}{3}(AM + AN).\frac{1}{2}.AB.BC = \frac{1}{3}($

Sử dụng BĐT cauchy ta có

$AM + AN \ge 2\sqrt{AM.AN} = 2 \Rightarrow V_{MNBC} \ge \frac{2}{3}$.

Câu 35: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

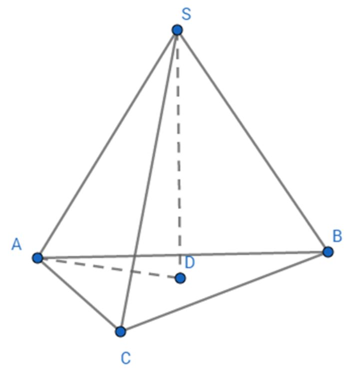
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Gọi $R=OA=x\left(0<x<1\right)$

Ta tính được

$SO=\sqrt{SA-R^2}=\sqrt{1-x^2}$



Cạnh của tam giác đều ABC là

$a=2R\sin 60^0=\sqrt{3}x\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}a^2\sin 60^0=\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SO.S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\sqrt{1-x^2}$
$=\frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{x^4\left(1-x^2\right)}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{x^4-x^6}$

Cách 1: Dùng Cauchy: Có

$1=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2+1-x^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}x^4\left(1-x^2\right)}\Rightarrow x^4\left(1-x^2\right)\le\frac{4}{27}\Rightarrow V_{S.ABC}\le\frac{1}{6}$.

Cách 2: Dùng hàm $f\left(x\right)=x^4-x^6\left(0<x<1\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=4x^3-6x^5;\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Dùng bảng biế thiên thì $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ khi đó

$\max\limits_{0<x<1} f\left(x\right)=\frac{4}{27}\Rightarrow V_{S.ABC}\le\frac{1}{6}$

Câu 36: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right), SC=a, \widehat{SCA}=\varphi.$ Xác định góc φ để thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất.

A. $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B.** $\varphi=\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$

C. $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ **D.** $\varphi=3\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải:

$BC = AC = a.\cos\varphi; SA = a.\sin\varphi$

$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{6}.AC.BC.SA = \frac{1}{6}a^3\sin\varphi.\cos^2\varphi$

$= \frac{1}{6}a^3\sin\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)$

Xét hàm số: $f\left(x\right) = x - x^3$ trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right) = 1-3x^2$, $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Từ đó ta thấy trên khoảng $\left(0;1\right)$ hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và có một điểm cực trị là điểm cực đại, nên tại đó hàm số đạt $GTLN$ hay:

$\max\limits_{x\in(0;1)} f\left(x\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ hay $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\left(\forall 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$

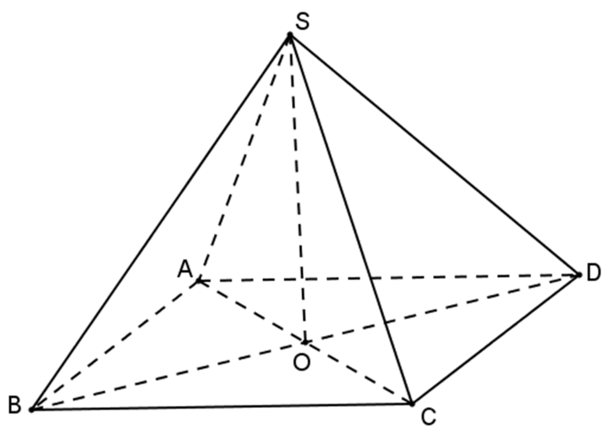
Chọn A.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$, các cạnh còn lại bằng 2. Tìm giá trị của x để thể tích khối chóp lớn nhất

A. $\sqrt{6}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{7}$ **D.** $2\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD.



Ta có OD=OB và SB=SD nên $SO \perp BD$, do đó $BO \perp \left(SAC\right)$.

Mặt khác $SO^2 = SB^2 - OB^2 = AB^2 - OB^2 = OA^2$ nên $SO = OA = OC$. Do đó tam giác SAC vuông tại S.

Ta có $AC^2 = x^2 + 4 \Rightarrow 4OA^2 = x^2 + 4$.

Do đó $4OB^2 = 12 - x^2 \Rightarrow 0 < x < 2\sqrt{3}$.

Và $16S_{SOA}^2 = x^2\left(4OA^2 - x^2\right) = 4x^2$.

Để $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi V_{SOAB} đạt giá trị lớn nhất.

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x^2\left(12 - x^2\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Suy ra $x^2 = 12 - x^2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $\left(ABCD\right)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Đặt $DM = x, BN = y$ ta có

$$\tan 45^\circ = \tan\left(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}\right) = \frac{\tan\widehat{DAM} + \tan\widehat{BAN}}{1 - \tan\widehat{DAM}.\tan\widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy}.$$ Suy ra $y = \frac{1-x}{1+x}$.

và $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2+1}$,

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}{x+1}.$$

Vì vậy $V = \frac{1}{3}SA.S_{AMN} = \frac{1}{6}SA.AM.AN\sin 45^\circ = f(x) = \frac{x^2+1}{6(x+1)} \ge f\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Đặt $DM = x, BN = y$. Ta có:

$$\tan 60^\circ = \tan\left(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}\right) = \frac{\tan\widehat{DAM} + \tan\widehat{BAN}}{1 - \tan\widehat{DAM}.\tan\widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}.$$

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2+1},\ AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{y^2+1} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}\right)^2 + 1}.$$

Vì vậy $V_{S.AMN} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta AMN} = \frac{1}{6}.SA.AM.SN.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}\left(x^2+1\right)}{6\left(\sqrt{3}+x\right)}$.

Ta có $f(x) = \frac{\sqrt{3}\left(x^2+1\right)}{6\left(\sqrt{3}+x\right)} \ge f\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Mặt phẳng (P) thay đổi qua I, cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Biết $SA = SB = \sqrt{2}$, $SC = \sqrt{7}$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. $\frac{243\sqrt{7}}{256}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{81\sqrt{7}}{256}$. **D.** $\frac{27\sqrt{7}}{256}$.

Hướng dẫn giải:

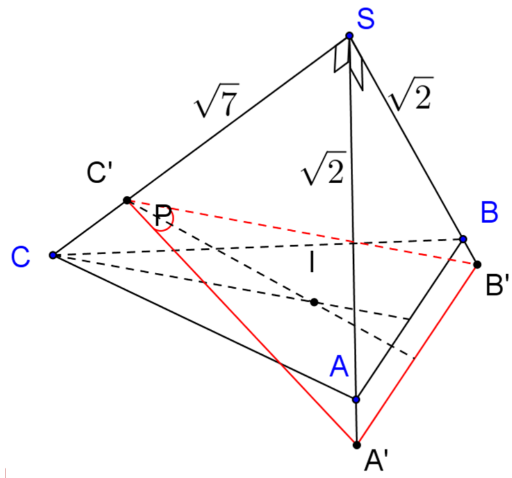
Chọn A

- Ta có

$$V_{S.A'B'C'}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.V_{S.ABC}$$

- Ta có $SA=SB=\sqrt{2}, SC=\sqrt{7}$

$$\Rightarrow V_{S.ACB}=\frac{1}{6}SA.SB.SC=\frac{1}{3}\sqrt{7}$$



- Từ $SA=SB=\sqrt{2}, SC=\sqrt{7}\Rightarrow AB=2, BC=3=AC$

- Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên:

$$BC.\overrightarrow{IA}+CA.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow BC\left(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SI}\right)+CA.\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SI}\right)+AB.\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SI}\right)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SI}=\frac{BC}{AB+BC+CA}\overrightarrow{SA}+\frac{CA}{AB+BC+CA}\overrightarrow{SB}+\frac{AB}{AB+BC+CA}\overrightarrow{SC}$$

$$=\frac{BC}{AB+BC+CA}.\frac{SA}{SA'}.\overrightarrow{SA'}+\frac{CA}{AB+BC+CA}.\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{AB}{AB+BC+CA}.\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}.$$

- Do bốn điểm A',B',C',I đồng phẳng nên

$$\frac{BC}{AB+BC+CA}.\frac{SA}{SA'}+\frac{CA}{AB+BC+CA}.\frac{SB}{SB'}+\frac{AB}{AB+BC+CA}.\frac{SC}{SC'}=1$$

- Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$1=\frac{BC}{AB+BC+CA}.\frac{SA}{SA'}+\frac{CA}{AB+BC+CA}.\frac{SB}{SB'}+\frac{AB}{AB+BC+CA}.\frac{SC}{SC'}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{AB.BC.CA}{(AB+BC+CA)^3}.\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}}$$

$$\Rightarrow 1\geq 3^3\frac{AB.BC.CA}{(AB+BC+CA)^3}.\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}\Rightarrow\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}\geq\frac{27.AB.BC.CA}{(AB+BC+CA)^3}$$

- $V_{S.A'B'C'}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}V_{S.ABC}\geq\frac{27.AB.BC.CA}{(AB+BC+CA)^3}V_{S.ABC}=\frac{27.2.3.3}{(2+3+3)^3}.\frac{1}{3}\sqrt{7}=\frac{81\sqrt{7}}{256}$

Dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{BC}{AB+BC+CA}.\frac{SA}{SA'}+\frac{CA}{AB+BC+CA}.\frac{SB}{SB'}+\frac{AB}{AB+BC+CA}.\frac{SC}{SC'}=1\\ \frac{BC}{AB+BC+CA}.\frac{SA}{SA'}=\frac{CA}{AB+BC+CA}.\frac{SB}{SB'}=\frac{AB}{AB+BC+CA}.\frac{SC}{SC'}\end{cases}$$

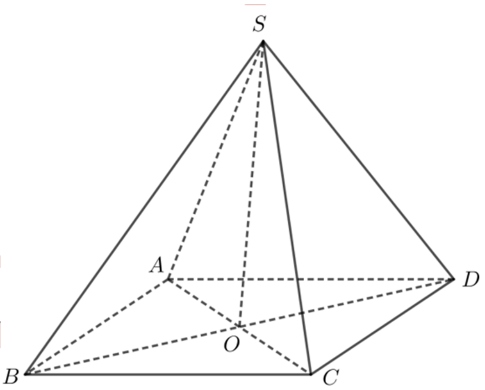
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{SB}{SB'} = \dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{8}{9} \\ \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SA' = SB' = \dfrac{9}{8}\sqrt{2} \\ SC' = \dfrac{3}{4}\sqrt{7} \end{cases}.$$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 4$, các cạnh bên bằng nhau và bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{130}{3}$. **B.** $\dfrac{128}{3}$. **C.** $\dfrac{125}{3}$. **D.** $\dfrac{250}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Đặt $AB = x$ và O là tâm của mặt đáy, ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{6^2 - \dfrac{x^2+4^2}{4}} = \sqrt{32 - \dfrac{x^2}{4}}$.

Vì vậy sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta co có:

$$V = \frac{1}{3}(4x).\sqrt{32 - \frac{x^2}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^2\left(128 - x^2\right)} \le \frac{2}{3}.\frac{x^2 + 128 -}{2}$$

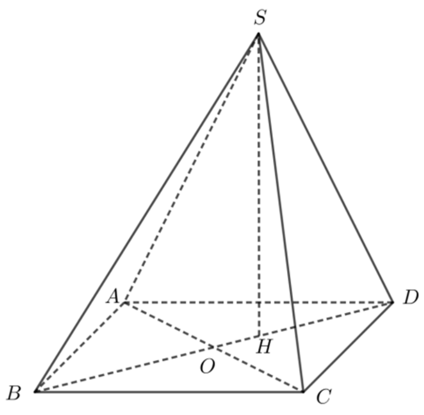
.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SB = x$ $\left(0 < x < \sqrt{3}\right)$. Tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1. Với giá trị nào của x thì thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất?

A. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Theo giả thiết $ABCD$ là hình thoi và gọi $O = AC \cap BD$.

$\Delta SAC = \Delta BAC\left(c-c-c\right) \Rightarrow OS = OB = OD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S.

Vì $SA = SC = SD \Rightarrow$ chân đường cao H của khối chóp nằm trên đường thẳng BD và $SH = \dfrac{SB.SD}{\sqrt{SB^2 + SD^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Ta có $BD = \sqrt{x^2+1},\ AC = 2OA = 2\sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{3-x^2}$.

Vì vậy $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{3-x^2}\sqrt{x^2+1}$.

Suy ra $V = \dfrac{x\sqrt{3-x^2}}{6} = \dfrac{\sqrt{x^2\left(3-x^2\right)}}{6} \le \dfrac{x^2+3-x^2}{2.6} = \dfrac{1}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 4$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SC = 6$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{40}{3}$. **B.** $\frac{80}{3}$. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** 24.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt AD=x, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{x^2 + 16}$ và

$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{6^2 - x^2 - 16} = \sqrt{20 - x^2}$.

Vì vậy $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{20 - x^2}.4x = \frac{4\sqrt{x^2(20 - x^2)}}{3} \le \frac{2(x^2 + 20 - x^2)}{3} = \frac{40}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = 20 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng 1, $SO \perp (ABCD)$ và $SC = 1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Đặt $OC = x \Rightarrow OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow S_{ABCD} = 4S_{OBC} = 2x\sqrt{1 - x^2}$

và $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2}$ vì vậy

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{2x(1 - x^2)}{3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2x^2(1 - x^2)(1 - x^2)}}{3}$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3}\right)^3} \le \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Đặt $DM = x, BN = y$ ta có

$$\tan 45^\circ = \tan\left(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}\right) = \frac{\tan\widehat{DAM} + \tan\widehat{BAN}}{1 - \tan\widehat{DAM}.\tan\widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy}. \text{ Suy ra } y = \frac{1-x}{1+x}.$$

và $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2+1}$,

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}{x+1}.$$

Vì vậy $V = \frac{1}{3}SA.S_{AMN} = \frac{1}{6}SA.AM.AN\sin 45^\circ = f(x) = \frac{x^2+1}{6(x+1)} \geq f\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{27}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Đặt $DM = x, BN = y$. Ta có:

$$\tan 30^\circ = \tan\left(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}\right) = \frac{\tan\widehat{DAM} + \tan\widehat{BAN}}{1 - \tan\widehat{DAM}.\tan\widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x}.$$

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2+1},\ AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{y^2+1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x}\right)^2 + 1}.$$

Vì vậy $V_{S.AMN} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta AMN} = \frac{1}{6}.SA.AM.SN.\sin 30^\circ = \frac{x^2+1}{6\left(\sqrt{3}x+1\right)}$.

Ta có $f(x) = \frac{x^2+1}{6\left(\sqrt{3}x+1\right)} \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Đặt $DM = x, BN = y$. Ta có:

$$\tan 60° = \tan\left(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}\right) = \frac{\tan \widehat{DAM} + \tan \widehat{BAN}}{1 - \tan \widehat{DAM}.\tan \widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}.$$

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2+1},\ AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{y^2+1} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}\right)^2 + 1}.$$

Vì vậy $V_{S.AMN} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta AMN} = \frac{1}{6}.SA.AM.SN.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}\left(x^2+1\right)}{6\left(\sqrt{3}+x\right)}$.

Ta có $f(x) = \frac{\sqrt{3}\left(x^2+1\right)}{6\left(\sqrt{3}+x\right)} \geq f\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AD = 4a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tìm thể tích $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{\max} = \frac{8a^3}{3}$. **B.** $V_{\max} = \frac{4\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V_{\max} = 8a^3$. **D.** $V_{\max} = 4\sqrt{6}a^3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Do $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{6}$ nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, do vậy $ABCD$ là một hình chữ nhật và H là giao điểm của AC và BD.

Đặt $AB = x > 0$ ta có:

$$AC = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 16a^2},\ SH = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{8a^2 - x^2}.$$

Vì vậy $S.ABCD = \frac{1}{3}.SO.AB.AD = \frac{2ax\sqrt{8a^2-x^2}}{3}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$x\sqrt{8a^2-x^2} \leq \frac{x^2 + 8a^2 - x^2}{2} = 4a^2 \Rightarrow V \leq \frac{8a^3}{3} \Rightarrow V_{\max} = \frac{8a^3}{3}.$$

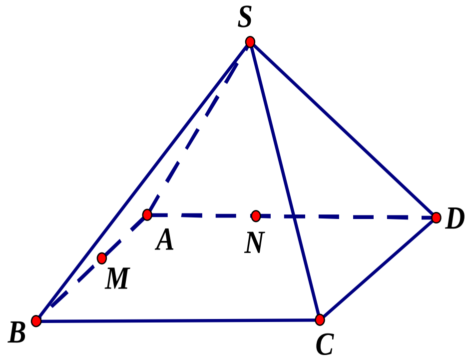
Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và thể tích bằng V. Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB và AD sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MBCDN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V'.

A. $\frac{1}{4}V$. **B.** $\frac{2}{3}V$. **C.** $\frac{3}{4}V$. **D.** $\frac{1}{3}V$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $V'=\left(1-\frac{1}{2}.\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AD}\right)V\ =\left(1-\frac{xy}{2}\right)V$



Trong đó $\begin{cases} x=\frac{AM}{AB}, y=\frac{AN}{AD} & 0<x,y<1 \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=4 \end{cases}$

$\Rightarrow y=\frac{2x}{4x-1}\ \left(\frac{1}{4}<x<1\right)$

Vì vậy $V'=\left(1-\frac{x^2}{4x-1}\right)V\geq\frac{2}{3}V\ \Rightarrow V'_{\min}=\frac{2}{3}V$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A',C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại B', D' và đặt $k=\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là?

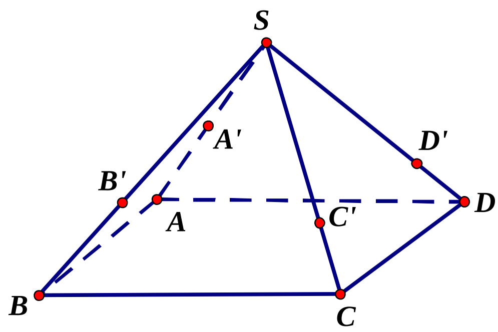
A. $\frac{1}{60}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{3}{4}V$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $V=V_{S.ABCD}$, ta có $\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}$

$=3+5=8$



Mặt khác $\frac{V_{S.A'B'C'}}{\frac{1}{2}V}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{15}x$

$\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{30}xV$

$\frac{V_{S.A'C'D'}}{\frac{1}{2}V}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{15}y\Rightarrow V_{S.A'C'D'}=\frac{1}{30}yV\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{30}xV$

Do đó $k=\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{30}(x+y)$, trong đó $x=\frac{SB'}{SB}$, $y=\frac{SD'}{SD}$

Và $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4\Rightarrow x+y\geq\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow k\geq\frac{1}{60}$.

Câu 51: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp SABH đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Hướng dẫn giải:

Ta có góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB} = 30^0$

Trong tam giác SBC có $SB = BC.\cot 30^0 = a\sqrt{3}$

Trong tam giác SAB có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABH$ là: $V_{S.ABH} = \frac{1}{3}S_{ABH}SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}HA.HB.a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}HA.HB$

Ta có $HA^2 + HB^2 = AB^2 = a^2$ và theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$a^2 = HA^2 + HB^2 \geq 2HA.HB \Rightarrow HA.HB \leq \frac{a^2}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $HA = HB \Leftrightarrow \widehat{ABM} = 45^0 \Leftrightarrow M \equiv D$

Khi đó $V_{S.ABH} = \frac{a\sqrt{2}}{6}HA.HB \leq \frac{a\sqrt{2}}{6}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Chọn D.

Câu 52: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = 2a$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $\frac{32\sqrt{3}a^3}{9}$. **C.** $\frac{4\sqrt{6}a^3}{9}$. **D.** $\frac{32\sqrt{3}a^3}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính R.

Ta có:

$h = \sqrt{cb^2 - R^2} = \sqrt{4a^2 - R^2}$ và

$$S = \frac{AC.BD\sin(AC,BD)}{2} = \frac{\left(2R\sin\widehat{ABC}\right)\left(2R\sin\widehat{BAD}\right)\sin(AC,DB)}{2} \leq 2R^2$$

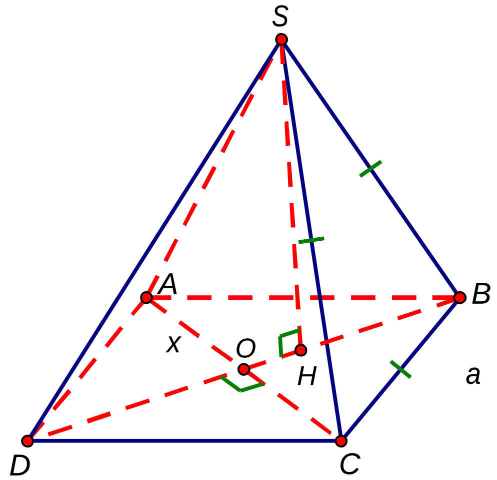
$$V = \frac{Sh}{3} = f(R) = \frac{2R^2\sqrt{4a^2 - R^2}}{3} \leq max_{(0;2a)} f(R) = f\left(\frac{2\sqrt{6}a}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}a^3}{27}$$

Câu 53: Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $SA = SB = SC = a$, Cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Hướng dẫn giải:
Chọn D.

Khi SD thay đổi thì AC thay đổi. Đặt $AC = x$.
Gọi $O = AC \cap BD$.
Vì $SA = SB = SC$ nên chân đường cao SH trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
$\Rightarrow H \in BO$.



Ta có $OB = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}OB.AC = \frac{1}{2}x.\frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$

$HB = R = \frac{a.a.x}{4S_{ABC}} = \frac{a^2x}{4.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$.

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4a^2 - x^2}} = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$

$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$

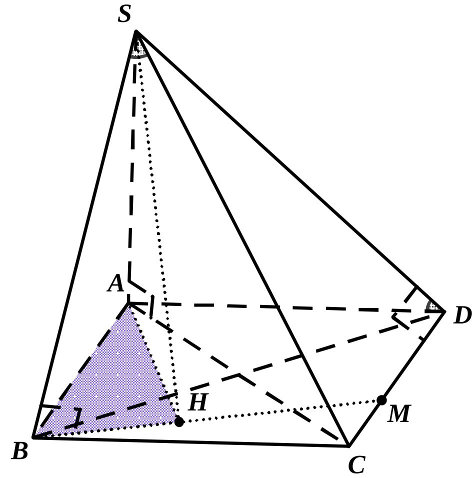
$= \frac{1}{3}a\left(x.\sqrt{3a^2 - x^2}\right) \le \frac{1}{3}a\left(\frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2}\right) = \frac{a^3}{2}$

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp $S.ABH$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D



Góc giữa SC và (SBC) là $\widehat{CSB} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^0$

Ta có

$\tan\widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = a\sqrt{3}; SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Đặt $CM = x, (0 \le x \le a) \Rightarrow DM = a - x$,

Ta có $\begin{cases} BM \perp SH \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAH) \Rightarrow BM \perp AH$

Ta có

$S_{BMC} = \frac{1}{2}BC.CM = \frac{1}{2}ax, S_{ADM} = \frac{1}{2}AD.DM = \frac{1}{2}a.(a-x); S_{ABM} = S_{ABCD} - S_{AMC} - S_{ADM} = \frac{a^2}{2}$

Ta có $S_{ABM}=\frac{1}{2}AH.BM\Rightarrow AH=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Thể tích của khối chóp $S.ABH$ là

$V=\frac{1}{3}SA.S_{ABH}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}BH.AH=\frac{1}{6}a\sqrt{2}.\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^4.\frac{x}{a^2+x^2}$ (*)

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{a^2+x^2},x\in\left[0;a\right]$

Ta có $f'\left(x\right)=\frac{a^2-x^2}{\left(a^2+x^2\right)^2}$; $f'\left(x\right)=0\Rightarrow x=a$

Trên đoạn $\left[0;a\right]$ ta có $f'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left[0;a\right]$

Vậy giá trị lớn nhất của V tại $x=a$ $\Rightarrow V_{mzx}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Cách 2: Từ (*) $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^4.\frac{x}{a^2+x^2}\le\frac{\sqrt{2}}{6}a^4.\frac{1}{2a}=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. Dấu $=$ khi: $x=a$.

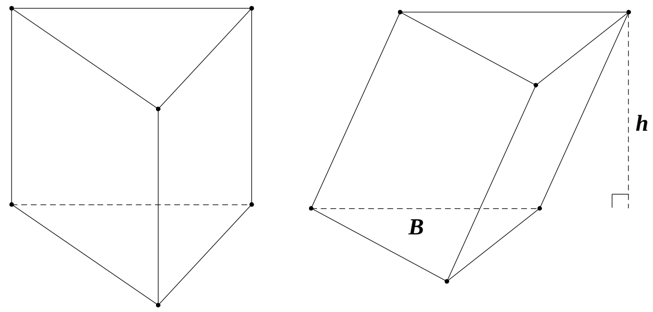
Cách 3: Dễ thấy H nhìn AB dưới góc vuông nên $V_{S.ABH}$ lớn nhất khi S_{ABH} lớn nhất khi và chỉ khi $H\equiv O$ (tâm của hình vuông) $\Leftrightarrow x=a$. Từ đó có kết quả.

THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

A- LÝ THUYẾT CHUNG

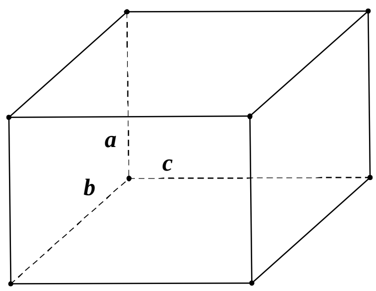
1. Thể tích khối lăng trụ

$V = B.h$ với B diện tích đáy, h là chiều cao lăng trụ.



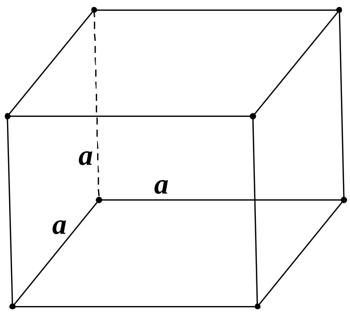
2. Thể tích khối hộp chữ nhật

$V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước.



3. Thể tích khối lập phương

$V = a^3$ với a là độ dài cạnh.



B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $BC=2a$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 60^0.Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $a^3\sqrt{2}$ **B.** $2a^3$ **C.** $a^3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{3}a^3$

Câu 2: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt thuộc các cạnh bên AA',CC' sao cho $MA=MA'$ và $NC=4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$ **B.** Khối $GA'B'C'$ **C.** Khối $ABB'C'$ **D.** Khối $BB'MN$

Câu 3: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng $60°$, tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC}=60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của ΔABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{13a^3}{108}$. **B.** $\frac{7a^3}{106}$. **C.** $\frac{15a^3}{108}$. **D.** $\frac{9a^3}{208}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$.Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là lục giác đều, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ

A. $V=\frac{27}{8}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $V=\frac{3}{2}a^3$. **D.** $\frac{9}{4}a^3$.

Câu 6: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $AM=\frac{1}{3}a$, $CP=\frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ là:

A. $\frac{11}{30}a^3$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{11}{15}a^3$.

Câu 8: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng 1.; đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có các cạnh $BA=\sqrt{3}, AD=\sqrt{7}$; các mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ hợp với mặt đáy các góc theo thứ tự $45^0;60^0$. Thể tích khối hộp là:

A. 4 (đvdt) **B.** 3 (đvdt) **C.** 2 (đvdt) **D.** 6 (đvdt)

Câu 9: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bên bằng a; đáy là hình thoi, diện tích của hai mặt chéo là S_1 và S_2; góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt chéo là α. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V=\frac{S_1S_2\cos\alpha}{a}$ **B.** $V=\frac{S_1S_2\cos\alpha}{3a}$. **C.** $V=\frac{S_1S_2\cos\alpha}{4a}$ **D.** $V=\frac{S_1S_2\cos\alpha}{2a}$

Câu 10: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bên bằng a và các góc $A'AB, BDA, A'AD$ đều bằng $\alpha\left(0^0<\alpha<90^0\right)$. Tính thể tích V của khối hộp.

A. $V=a^3\sin 2\alpha\sqrt{\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\alpha}\ \arcsin\theta$ **B.** $V=2a^3\sin\alpha\sqrt{\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\alpha}$

C. $V=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\alpha}$ **D.** Đáp số khác.

Câu 11: Cho khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=b, \widehat{BAD}=\alpha$; đường chéo AC' hợp với đáy góc β. Tính thể tích khối hộp đứng đã cho là:

A. $V=4ab\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$ **B.** $V=2ab\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$

C. $V=3ab\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$ **D.** $V=ab\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Câu 12: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $16\sqrt{2}$. **D.** $24\sqrt{3}$.

Câu 13: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp chữ nhật đã cho?

A. $V_{\max}=8$. **B.** $V_{\max}=12$. **C.** $V_{\max}=8\sqrt{2}$. **D.** $V_{\max}=6\sqrt{6}$.

Câu 14: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp đã cho.

A. $V_{\max}=16\sqrt{2}$. **B.** $V_{\max}=16$. **C.** $V_{\max}=6\sqrt{6}$. **D.** $V_{\max}=12\sqrt{3}$.

Câu 15: Tìm $V_{\max}$ là giá trị lớn nhất của thể tích các khối hộp chữ nhật có đường chéo bằng $3\sqrt{2}cm$ và diện tích toàn phần bằng $18cm^2$.

A. $V_{\max} = 6cm^3$. **B.** $V_{\max} = 5cm^3$. **C.** $V_{\max} = 4cm^3$. **D.** $V_{\max} = 3cm^3$.

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp chữ nhật đã cho?

A. $V_{\max} = 8$. **B.** $V_{\max} = 12$. **C.** $V_{\max} = 8\sqrt{2}$. **D.** $V_{\max} = 6\sqrt{6}$.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp đã cho.

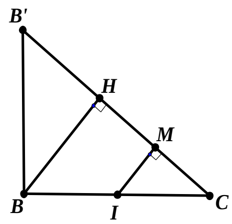
A. $V_{\max} = 16\sqrt{2}$. **B.** $V_{\max} = 16$. **C.** $V_{\max} = 6\sqrt{6}$. **D.** $V_{\max} = 12\sqrt{3}$.

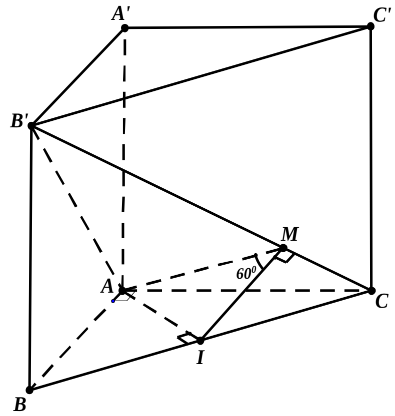
C – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $BC=2a$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 60^0.Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $a^3\sqrt{2}$ **B.** $2a^3$ **C.** $a^3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{3}a^3$

Hướng dẫn giải:





Từ A kẻ $AI \perp BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC

$AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp B'C$ (1)

Từ I kẻ $IM \perp B'C$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow B'C \perp (IAM)$

Vậy góc giữa $(AB'C)$ và $(B'CB)$ là $\widehat{AMI} = 60^0$

Ta có $AI = \frac{1}{2}BC = a$; $IM = \frac{AI}{\tan 60^0} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$BH = 2IM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{BH^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{3}{4a^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2a^2}$.

Suy ra $BB' = a\sqrt{2}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = \frac{1}{2}a.2a = a^2$

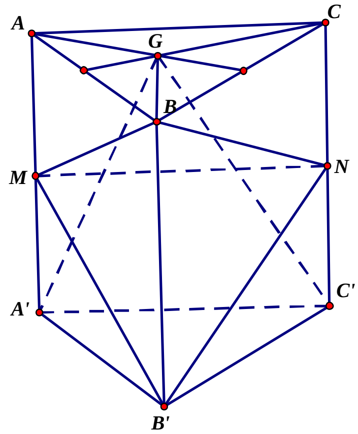
$V_{ABC\,A'B'C'} = a\sqrt{2}.a^2 = a^3\sqrt{2}$

Chọn A.

Câu 2: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$ **B.** Khối $GA'B'C'$ **C.** Khối $ABB'C'$ **D.** Khối $BB'MN$

Hướng dẫn giải:



+ Nhận thấy khoảng cách từ G và A xuống mặt phẳng $(A'B'C')$ là bằng nhau (do G,A thuộc mặt phẳng $(ABC)//(A'B'C')$

$V_{GA'B'C'} = V_{A.A'B'C'}$

Mà $V_{A.A'B'C'} = V_{ABB'C'}$(Do 2 hình chóp này có 2 đáy $AA'B'$ và ABB' diện tích bằng nhau;chung đường cao hạ từ C')

$\Rightarrow V_{GA'B'C'} = V_{ABB'C'}$

=> Không thể khối chóp $GA'B'C'$ hoặc $ABB'C'$ thể thích nhỏ nhất $\to$ Loại B,C

+ So sánh Khối $A'BCN$ và Khối $BB'MN$

Nhận thấy khoảng cách từ M và A' xuống mặt $BBCC'$ là bằng nhau $\to$ Khối $A'BCN$ và Khối $BB'MN$ có đường cao hạ từ M và A' bằng nhau. Mặt khác Diện tích đáy BNB' > Diện tích đáy BCN

=> Khối $A'BCN$ < Khối $BB'MN$.

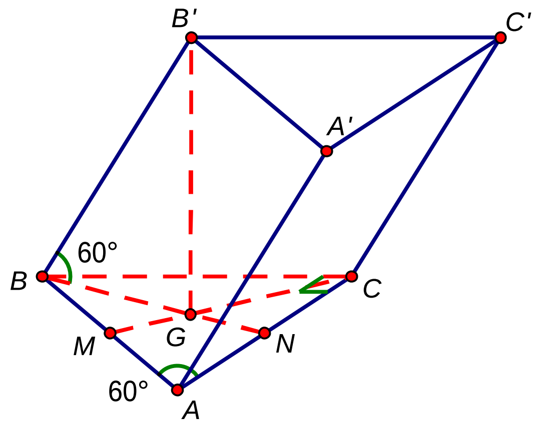
=> Khối $A'BCN$ có diện tích nhỏ hơn.

Chọn A.

Câu 3: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng $60°$, tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC}=60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của ΔABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\dfrac{13a^3}{108}$. **B.** $\dfrac{7a^3}{106}$. **C.** $\dfrac{15a^3}{108}$. **D.** $\dfrac{9a^3}{208}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M,N là trung điểm của AB, AC và G là trọng tâm của ΔABC.

$B'G\perp(ABC) \Rightarrow \left(\widehat{BB',(ABC)}\right)=\widehat{B'BG}=60^0$.

$V_{A'.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.B'G=\dfrac{1}{6}.AC.BC.B'G$

Xét $\Delta B'BG$ vuông tại G, có $\widehat{B'BG}=60^0$

$\Rightarrow B'G=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (nửa tam giác đều)

Đặt $AB=2x$. Trong ΔABC vuông tại C có $\widehat{BAC}=60^0$

$\Rightarrow$ tam giác ABC là nữa tam giác đều $\Rightarrow AC=\dfrac{AB}{2}=x,\ BC=x\sqrt{3}$

Do G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow BN=\dfrac{3}{2}BG=\dfrac{3a}{4}$.

Trong ΔBNC vuông tại C: $BN^2=NC^2+BC^2$

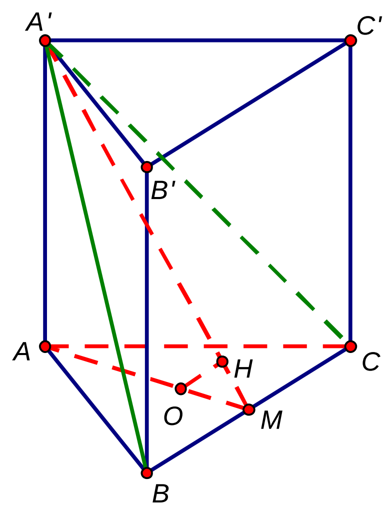
$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16}=\frac{x^2}{4}+3x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{9a^2}{52} \Rightarrow x=\frac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AC=\dfrac{3a}{2\sqrt{13}} \\ BC=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

Vậy, $V_{A'ABC} = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2\sqrt{13}}.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{208}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$.Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của BC,
ta có $(A'AM) \perp (A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.
Trong $(A'AM)$ kẻ $OH \perp A'M$ $(H \in A'M)$.
$\Rightarrow OH \perp (A'BC)$
Suy ra: $d(O,(A'BC)) = OH = \frac{a}{6}$.
$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và OHM có góc $\widehat{M}$ chung nên chúng đồng dạng.

Suy ra: $\frac{OH}{A'A} = \frac{OM}{A'M} \Rightarrow \frac{\frac{a}{6}}{A'A} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2 + AM^2}} \Rightarrow \frac{1}{A'A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$.

$\Rightarrow A'A = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Thể tích: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là lục giác đều, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ

A. $V = \frac{27}{8}a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $V = \frac{3}{2}a^3$. **D.** $\frac{9}{4}a^3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $ABCDEF$ là lục giác đều nên góc ở đỉnh bằng $120°$.

ABC là tam giác cân tại B, DEF là tam giác cân tại E.

$S_{ABC} = S_{DEF} = \frac{1}{2}a.a.\sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2.AB.BC.\cos B}$

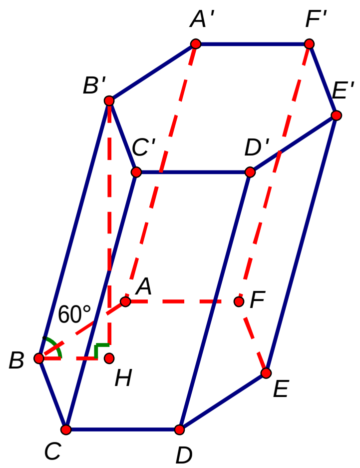
$=\sqrt{a^2+a^2-2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)}=a\sqrt{3}$

$S_{ACDF}=AC.AF=a\sqrt{3}.a=a^2\sqrt{3}$

$S_{ABCDEF}=S_{ABC}+S_{ACDF}+S_{DEF}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+a^2\sqrt{3}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$\widehat{B'BH}=60°\Rightarrow B'H=BB'.\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $V=BH'.S_{ABCDEF}=a\sqrt{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9}{4}a^3$



Câu 6: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

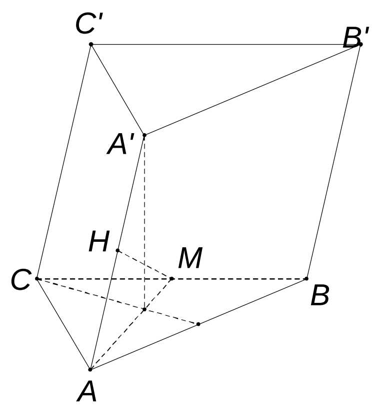
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm BC, dựng MH vuông góc với AA'. Suy ra $MH=d(BC,A'A)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Đặt $AH=x$, ta có: $A'A=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{3}}$

Từ $A'A.MH=A'G.AM\Rightarrow x=\frac{a}{3}$.

Vậy $V=\frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Chọn A.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $AM=\frac{1}{3}a$, $CP=\frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ là:

A. $\frac{11}{30}a^3$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{11}{15}a^3$.

Hướng dẫn giải:

Tứ giác *MNPQ* là hình bình hành có tâm là I thuộc đoạn OO'.

Ta có: $OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{11}{30}a < \frac{a}{2}$

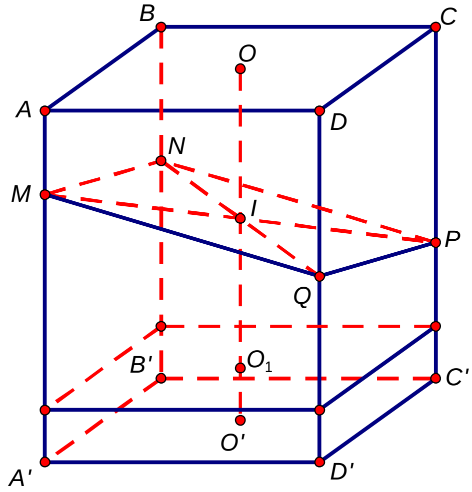
Gọi O_1 là điểm đối xứng O qua I thì:

$OO_1 = 2OI = \frac{11}{15}a$ < a. Vậy O_1 nằm trong đoạn OO'.

Vẽ mặt phẳng qua O_1 song song với (ABCD) cắt các cạnh *AA'; BB';CC'; DD'* lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1. Khi đó I là tâm của hình hộp $ABCD.AB_1C_1D_1$. Vậy

$V(ABCD.MNPQ) = V(MNPQ.A_1B_1C_1D_1) =$

$\frac{1}{2}V(ABCD.A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{2}a^2OO_1 = \frac{11}{30}a^3$



Câu 8: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng 1.; đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có các cạnh $BA = \sqrt{3}, AD = \sqrt{7}$; các mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ hợp với mặt đáy các góc theo thứ tự $45^0; 60^0$. Thể tích khối hộp là:

A. 4 (đvdt) **B.** 3(đvdt) **C.** 2 (đvdt) **D.** 6 (đvdt)

Hướng dẫn giải:

Dựng $A'H \perp (ABCD)$ và $A'I \perp AB, A'J \perp AD \Rightarrow HI \perp AB, HJ \perp AD.$

Ta có $\widehat{A'IH} = 45^0$; $\widehat{A'JH} = 60^0$.

Đặt $A'H = h.$

Tam giác $HA'J$ vuông có $\widehat{A'JH} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều có cạnh $A'J$, đường cao $A'H, HJ$ là nửa cạnh

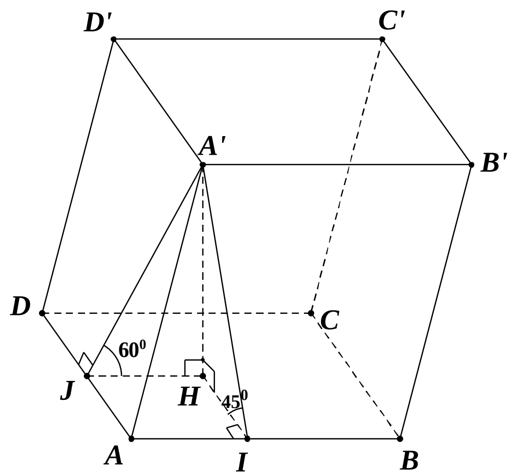
$\Rightarrow A'J = \frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2h\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow A'J^2 = AA'^2 - A'J^2 = 1 - \frac{12h^2}{9} = \frac{9-12h^2}{9}$

$\Rightarrow AJ = \frac{\sqrt{9-12h^2}}{3}$ với $0 < h < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tam giác $HA'I$ vuông cân tại $H \Rightarrow IH = A'H = h$

AIHJ là hình chữ nhật.



$AJ = IH \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9-12h^2}}{3} = h \Leftrightarrow 9-12h^2 = 9h^2 \Leftrightarrow h = \frac{3}{\sqrt{21}}$

Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = S_{ABCD}.A'H = \sqrt{3}.\sqrt{7}.\frac{3}{\sqrt{21}} = 3$ (đvdt)

Chọn B.

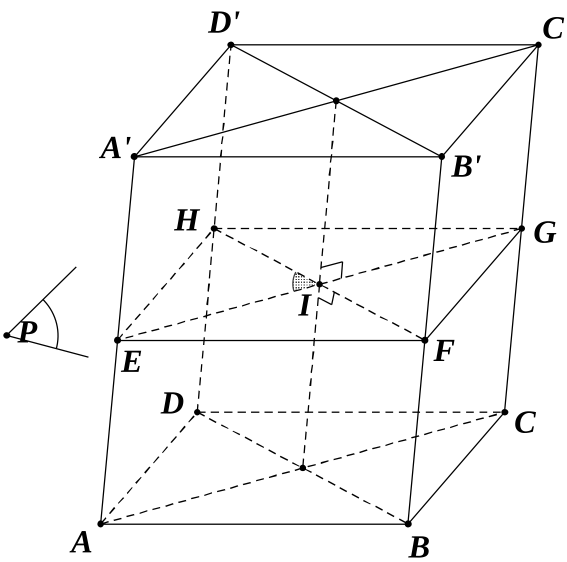
Câu 9: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bên bằng a; đáy là hình thoi, diện tích của hai mặt chéo là S_1 và S_2; góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt chéo là α. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V = \frac{S_1S_2\cos\alpha}{a}$　**B.** $V = \frac{S_1S_2\cos\alpha}{3a}$.　**C.** $V = \frac{S_1S_2\cos\alpha}{4a}$　**D.** $V = \frac{S_1S_2\cos\alpha}{2a}$

Hướng dẫn giải:

Gọi O và O' theo thứ tự là tâm của hai mặt đáy $ABCD, A'B'C'D'$.

Hai mặt chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có giao tuyến là OO', có diện tích theo thứ tự S_1, S_2.



Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với OO' tại I, cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' theo thứ tự tại E, F, G, H ($(P) \perp$ các cạnh bên).

Ta có: $EG, HF \perp OO'$ tại $I \Rightarrow \widehat{EIH} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$.

- $EFGH$ là một thiết diện thẳng của hình hộp và là một hình bình hành.

Do đó, ta có thể tích V của hình hộp là:

$V = S_{EFGH}.AA' = \frac{1}{2}.EG.HF.AA'.\sin\alpha$

Ta lại có: $S_1 = S_{ACC'A'} = EG.AA' \Leftrightarrow EG = \frac{S_1}{a}$;　$S_2 = S_{BDD'B'} = HF.BB' \Leftrightarrow HF = \frac{S_2}{a}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{2}.\frac{S_1}{a}.\frac{S_2}{a}.a.\sin\alpha = \frac{S_1S_2\cos\alpha}{2a}$.

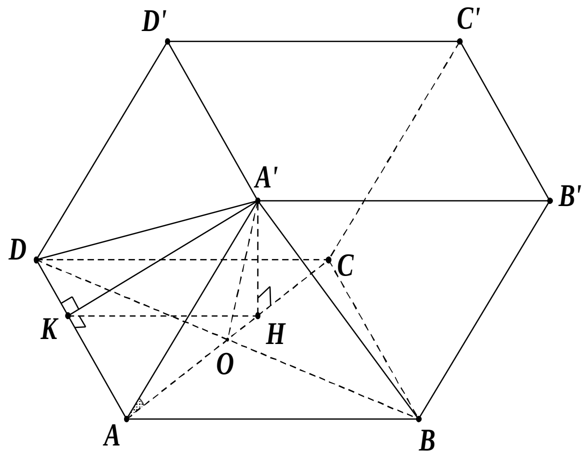
Chọn D.

Câu 10: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bên bằng a và các góc $A'AB, BDA, A'AD$ đều bằng $\alpha\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$. Tính thể tích V của khối hộp.

A. $V = a^3\sin 2\alpha\sqrt{\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\alpha}\arcsin\theta$ **B.** $V = 2a^3\sin\alpha\sqrt{\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\alpha}$

C. $V = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\alpha}$ **D.** Đáp số khác.

Hướng dẫn giải:



Dựng $A'H \perp AC; A'K \perp AD \Rightarrow \Delta A'BD$ cân tại $A' \Rightarrow A'O \perp BD$

Ta có

$$\begin{cases} A'O \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp AH$$

$$\Rightarrow AH \perp (ABCD) \Rightarrow HK \perp AD$$

Đặt $\widehat{A'AO} = \beta . \Delta HAA'$ vuông tại $H \Rightarrow \cos\beta = \frac{AH}{AA'}$

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC$ là phân giác góc $\widehat{BAD} = \alpha, \Delta KAH$ vuông tại K

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \cos\beta.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA'}.\frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA'} = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow A'H = AA'.\sin\beta = a.\sin\beta \Rightarrow A'H = a\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$$

Do đó ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = a^2.\sin\alpha.\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$

$$= 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\alpha}.$$

Chọn C.

Câu 11: Cho khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, \widehat{BAD} = \alpha$; đường chéo AC' hợp với đáy góc β. Tính thể tích khối hộp đứng đã cho là:

A. $V = 4ab\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$ **B.** $V = 2ab\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$

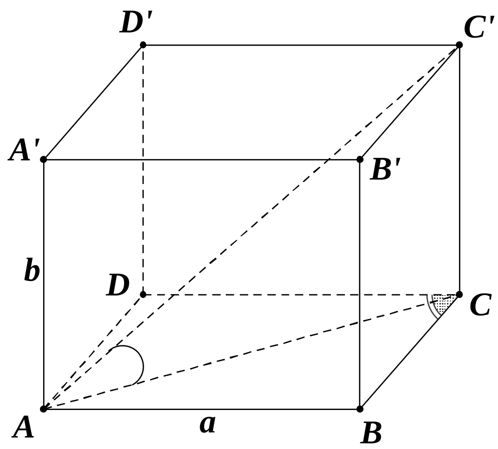
C. $V = 3ab\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$ **D.** $V = ab\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

Hướng dẫn giải:

$$V = ab\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$$

Ta có: $CC'\perp(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{CAC'}=\beta$ là góc của AC' và mặt đáy $(ABCD)$.



Xét ΔABC, ta có: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos\widehat{ABC}$

$=a^2+b^2+2ab.\cos\left(180^0-\alpha\right)=a^2+b^2+2ab.\cos\alpha$.

$\Rightarrow AC=\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}$

Do đó ta có: $CC'=AC.\tan\beta=\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}.\tan\beta$.

Thể tích của hình hộp đứng: $V=S_{ABCD}.CC'=ab\sin\alpha.\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}.\tan\beta$

$V=ab\sqrt{a^2+b^2+2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

Chọn D.

CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Câu 12: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $16\sqrt{2}$. **D.** $24\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi chiều dài 3 cạnh của hình hộp chữ nhật lần lượt là: a, b, $c>0$

Ta có

$AC'^2=a^2+b^2+c^2=36; S=2ab+2bc+2ca=36\Rightarrow(a+b+c)^2=72\Rightarrow a+b+c=6\sqrt{2}$

$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{6\sqrt{2}}{3}\right)^3=16\sqrt{2}$. Vậy $V_{Max}=16\sqrt{2}$

Câu 13: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp chữ nhật đã cho?

A. $V_{\max}=8$. **B.** $V_{\max}=12$. **C.** $V_{\max}=8\sqrt{2}$. **D.** $V_{\max}=6\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Gọi a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật. Ta có

* Độ dài đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=6$.

* Tổng diện tích các mặt $S=2(ab+bc+ca)=36$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của $V=abc$.

Ta có $a+b+c=\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac}=6\sqrt{2}$.

Mà $(b+c)^2\ge 4bc \Leftrightarrow \left(6\sqrt{2}-a\right)^2\ge 4\left(18-a(b+c)\right)=4\left(18-a\left(6\sqrt{2}-a\right)\right)\Leftrightarrow 0\le a\le 4\sqrt{2}$.

Khi đó $V=abc=a\left(18-a\left(6\sqrt{2}-a\right)\right)=a^3-6\sqrt{2}a^2+18a=f(a)$.

Khảo sát hàm số $y=f(a)$ trên $\left[0;4\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(a)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{2}\\ a=3\sqrt{2}\end{array}\right.$.

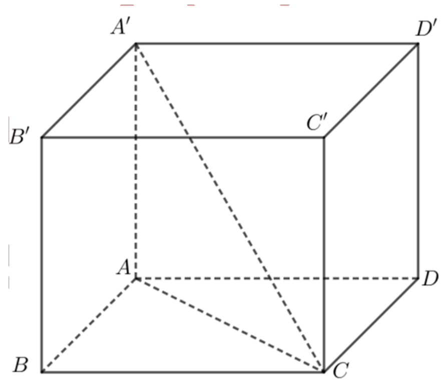
So sánh $f(0)=0,\ f\left(\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2},\ f\left(3\sqrt{2}\right)=0,\ f\left(4\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2}$ ta được $V_{\max}=8\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp đã cho.

A. $V_{\max}=16\sqrt{2}$. **B.** $V_{\max}=16$. **C.** $V_{\max}=6\sqrt{6}$. **D.** $V_{\max}=12\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Gọi $a,\ b,\ c$ là kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có

$$\begin{cases}4(a+b+c)=32\\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=8\\ a^2+b^2+c^2=24\end{cases}$$

Suy ra $ab+bc+ca=\dfrac{(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}=20$

$(b+c)^2\ge 4bc\Leftrightarrow (8-a)^2\ge 4\left[20-a(8-a)\right]\Leftrightarrow 0\le a\le 4$.

$V=abc=a\left[20-a(8-a)\right]=f(a)=a\left(a^2-8a+20\right)$.

Suy ra $V_{\max}=\max\limits_{[0;4]} f(a)=f(2)=f(4)=16$

Câu 15: Tìm $V_{\max}$ là giá trị lớn nhất của thể tích các khối hộp chữ nhật có đường chéo bằng $3\sqrt{2}cm$ và diện tích toàn phần bằng $18cm^2$.

A. $V_{\max} = 6cm^3$. **B.** $V_{\max} = 5cm^3$. **C.** $V_{\max} = 4cm^3$. **D.** $V_{\max} = 3cm^3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đặt a,b,c là kích thước của hình hộp thì ta có hệ $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=18 \\ ab+bc+ac=9 \end{cases}$.

Suy ra $a+b+c=6$. Cần tìm GTLN của $V=abc$.

Ta có $b+c=6-a \Rightarrow bc=9-a(b+c)=9-a(6-a)$.

Do $(b+c)^2 \ge 4bc \Rightarrow (6-a)^2 \ge 4\left[9-a(6-a)\right] \Leftrightarrow 0<a\le 4$.

Tương tự $0<b,c\le 4$.

Ta lại có $V=a\left[9-a(6-a)\right]$. Khảo sát hàm số này tìm được GTLN của V là 4.

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp chữ nhật đã cho?

A. $V_{\max}=8$. **B.** $V_{\max}=12$. **C.** $V_{\max}=8\sqrt{2}$. **D.** $V_{\max}=6\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Gọi $a,\ b,\ c$ là các kích thước của hình hộp chữ nhật. Ta có

* Độ dài đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=6$.

* Tổng diện tích các mặt $S=2(ab+bc+ca)=36$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của $V=abc$.

Ta có $a+b+c=\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac}=6\sqrt{2}$.

Mà $(b+c)^2 \ge 4bc \Leftrightarrow \left(6\sqrt{2}-a\right)^2 \ge 4\left(18-a(b+c)\right)=4\left(18-a\left(6\sqrt{2}-a\right)\right) \Leftrightarrow 0\le a\le 4\sqrt{2}$.

Khi đó $V=abc=a\left(18-a\left(6\sqrt{2}-a\right)\right)=a^3-6\sqrt{2}a^2+18a=f(a)$.

Khảo sát hàm số $y=f(a)$ trên $\left[0;4\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{2} \\ a=3\sqrt{2} \end{array}\right.$.

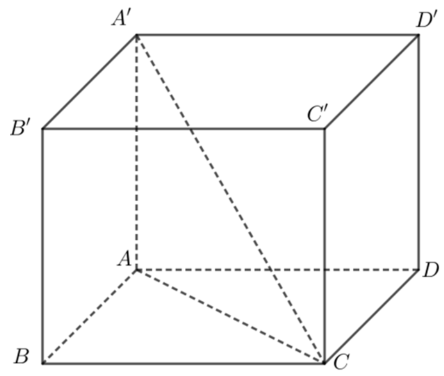
So sánh $f(0)=0,\ f\left(\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2},\ f\left(3\sqrt{2}\right)=0,\ f\left(4\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2}$ ta được $V_{\max}=8\sqrt{2}$.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32, độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình hộp đã cho.

A. $V_{\max}=16\sqrt{2}$. **B.** $V_{\max}=16$. **C.** $V_{\max}=6\sqrt{6}$. **D.** $V_{\max}=12\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Gọi a, b, c là kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có

$$\begin{cases} 4(a+b+c)=32 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ a^2+b^2+c^2=24 \end{cases}$$

Suy ra $ab+bc+ca=\dfrac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}=20$

$(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (8-a)^2 \geq 4\left[20-a(8-a)\right] \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4$

.

$V=abc=a\left[20-a(8-a)\right]=f(a)=a\left(a^2-8a+20\right)$.

Suy ra $V_{\max}=\max\limits_{[0;4]} f(a)=f(2)=f(4)=16$

TỈ LỆ THỂ TÍCH

A- LÝ THUYẾT CHUNG

1. Hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_m$ có chung đỉnh S và hai mặt đáy cùng nằm trên một mặt phẳng, ta có: $\dfrac{V_{S.A_1A_2...A_n}}{V_{S.B_1B_2...B_m}} = \dfrac{S_{A_1A_2...A_n}}{S_{B_1B_2...B_m}}$

2. Hai khối chóp tam giác $S.ABC$ có $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$ ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{v_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$

3. Kiến thức cần nhớ đối với khối lăng trụ tam giác và khối hộp.

□ $V_{A'.ABC} = \dfrac{V}{3}$, $V_{A'.BCC'B'} = \dfrac{2V}{3}$.

□ $V_{A'.ABD} = \dfrac{V}{6}$, $V_{BDA'C'} = \dfrac{V}{3}$.

4. Một số công thức nhanh cho các trường hợp hay gặp

□ Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH có $\dfrac{BH}{BC} = \left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2$, $\dfrac{CH}{CB} = \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2$.

□ Mặt phẳng (α) song song với mặt đáy của khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt SA_k tại điểm M_k thỏa mãn $\dfrac{SM_k}{SA_k} = p$, ta có $\dfrac{V_{S.M_1M_2...M_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}} = p^3$.

□ Hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\dfrac{AM}{AA'} = x, \dfrac{BN}{BB'} = y, \dfrac{CP}{CC'} = z$ có $V_{ABC.MNP} = \dfrac{x+y+z}{3}V$.

□ Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\dfrac{AM}{AA'} = x, \dfrac{BN}{BB'} = y, \dfrac{CP}{CC'} = z$. Mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại Q thì ta có đẳng thức $x+z = y+t$ với $t = \dfrac{DQ}{DD'}$ và $V_{ABCD.MNPQ} = \dfrac{x+y+z+t}{4}V$.

□ Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $\dfrac{SM}{SA} = x, \dfrac{SN}{SB} = y, \dfrac{SP}{SC} = z$. Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q thì ta có đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{t}$ với $t = \dfrac{SQ}{SD}$ và $V_{S.MNPQ} = \dfrac{1}{4}xyzt\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}\right)V$.

□ Định lí Meneleus cho 3 điểm thẳng hàng $\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{PC}{PA} = 1$ với MNP là một đường thẳng cắt ba đường thẳng AB, BC, CA lần lượt tại M, N, P.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$.Trên cạnh SA lấy các điểm M,N sao cho $SM = MN = NA$.Gọi $(\alpha),(\beta)$là các mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua M,N.Khi đó hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$chia khối chóp đã cho thành 3 phần.Nếu phần trên cùng có thể tích là $10\,dm^3$tích hai phần còn lại lần lượt là?

A. $80\,dm^3$ và $190\,dm^3$. **B.** $70\,dm^3$ và $190\,dm^3$.

C. $70\,dm^3$ và $200\,dm^3$. **D.** $80\,dm^3$ và $180\,dm^3$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng V. Gọi M,N,P lần lượt là các điểm trên các cạnh SA,SB,SC sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{2},\frac{SN}{SB}=\frac{2}{3},\frac{SP}{SC}=\frac{1}{3}$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại điểm Q. Tính thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$.

A. $\frac{5}{63}V$. **B.** $\frac{10}{63}V$. **C.** $\frac{53}{63}V$. **D.** $\frac{58}{63}V$.

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=\sqrt{3}a$, $AD=a$, SA vuông góc với đáy và

$SA=a$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{40}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{40}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{30}$.

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy là hình bình hành. Điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'}=k\overrightarrow{DC}\,(k>0)$. Biết thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là $\frac{7}{25}V$. Tìm k.

A. $k=9$. **B.** $k=6$. **C.** $k=11$. **D.** $k=4$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Tính diện tích tam giác MNP biết (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $S_{\Delta MNP}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{8}$. **B.** $S_{\Delta MNP}=\frac{a^3.\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S_{\Delta MNP}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}$. **D.** $S_{\Delta MNP}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=b$ và cạnh bên $SA=c$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là một điểm trên cạnh SA sao cho $AM=x\,(0<x<c)$. Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $x=\dfrac{\left(3-\sqrt{2}\right)c}{2}$. **B.** $x=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)ab}{2c}$. **C.** $x=\dfrac{\left(3-\sqrt{5}\right)c}{2}$. **D.** $x=\dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)ab}{2c}$.

Câu 7: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD$ và $CD=4AB$ .Gọi M là 1 điểm trên cạnh SA sao cho $0<AM<SA$. Tìm tỉ số $\dfrac{SM}{SA}$ sao cho mặt phẳng $\left(CDM\right)$ chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau:

A. $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$. **B.** $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{-4+\sqrt{26}}{2}$. **C.** $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$. **D.** $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{-3+\sqrt{23}}{2}$.

Câu 8: Cho điểm M trên cạnh SA, điểm N trên cạnh SB của hình chóp tam giác $S.ABC$ có thể tích bằng V sao cho $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{3},\dfrac{SN}{SB}=x$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ qua MN và song song với SC chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính x.

A. $x=\dfrac{4-\sqrt{5}}{3}$ **B.** $x=\dfrac{8-\sqrt{10}}{6}$ **C.** $x=\dfrac{4-\sqrt{5}}{6}$ **D.** $x=\dfrac{8-\sqrt{10}}{9}$

Câu 9: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a, Gọi M , N là trung điểm các cạnh AB, BC svà E là điểm thuộc tia đối DB sao cho $\dfrac{BD}{BE}=k$. Tìm k để mặt phẳng $\left(MNE\right)$ chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích là $\dfrac{11\sqrt{2}a^3}{294}$.

A. $k=\dfrac{6}{5}$. **B.** $k=6$. **C.** $k=4$. **D.** $V=5$.

Câu 10: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2cm$. Gọi M,N,P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác ABC, ABD, ACD. Tính thể tích V của khối chóp $AMNP$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{162}cm^3$. **B.** $V=\dfrac{2\sqrt{2}}{81}cm^3$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{2}}{81}cm^3$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{144}cm^3$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng $\left(BMN\right)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Câu 12: (Hình học không gian) Cho tứ diện $ABCD$ và M,N,P lần lượt thuộc BC,BD,AC sao cho $BC=4BM, BD=2BN, AC=3AP$. Mặt phẳng $\left(MNP\right)$ cắt AD tại Q. Tính tỷ số thể tích hai phần khối tứ diện $ABCD$ bị chia bởi mặt phẳng $\left(MNP\right)$.

A. $\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{7}{13}$ **C.** $\dfrac{5}{13}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Câu 13: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Câu 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ lệ thể tích hai khối đa diện là gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau:

A. $0,11$ **B.** $0,13$ **C.** $0,7$ **D.** $0,9$

Câu 15: Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α), trong đó, (H_1) chứa điểm S, (H_2) chứa điểm A; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA = $a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ theo a.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{20}$ **C** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{10}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}a^3}{10}$

Câu 17: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện ABCE và tứ diện BCDE lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{5}{8}$

Câu 18: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 6, SB = 2, SC = 4, AB = 2\sqrt{10}$ và $\angle SBC = 90^\circ, \angle ASC = 120^\circ$. Mặt phẳng (P) qua B và trung điểm N của SC và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt cạnh SA tại M. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 19: Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V, khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ có thể tích V_1, các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Khối tứ diện $A_2B_2C_2D_2$ có thể tích V_2, các đỉnh A_2, B_2, C_2, D_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$. Cứ tiếp tục như thế ta được khối tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n, các đỉnh A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trọng tâm của các tam giác $B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}A_{n-1}$, $D_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}$, $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Tính $S = V_1 + V_2 + ... + V_{2018}$?

A. $S = \frac{\left(3^{2018}-1\right)V}{2.3^{2018}}$. **B.** $S = \frac{\left(27^{2019}-1\right)V}{26.27^{2019}}$.

C. $S = \frac{\left(27^{2018}-1\right)V}{26.27^{2018}}$. **D.** $S = \frac{\left(3^{2019}-1\right)V}{2.3^{2019}}$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'; NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$. **B.** Khối $GA'B'C'$. **C.** Khối $ABB'C'$. **D.** Khối $BB'MN$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Câu 22: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tich khối chứa điểm A' và V_2 là thể tich khối chứa điểm C'. Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{25}{47}$. **B.** 1. **C.** $\frac{17}{25}$. **D.** $\frac{8}{17}$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh $A, (H')$ là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

A. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{37}{48}$ **B.** $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{55}{89}$ **C.** $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{2}{3}$ **D.** $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{1}{2}$

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V1}{V2}$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{55}{89}$. **C.** $\frac{37}{48}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 25: Cho hình hộp $ABCDA'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm A'B'. Mặt phẳng (P) qua BM đồng thời song song với $B'D'$. Biết mặt phẳng (P) chia khối hộp thành hai khối có thể tích là V_1, V_2 (Trong đó V_1 là thể tích khối chứa A). Tính tỉ số $F = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{7}{17}$. **B.** 1. **C.** $\frac{17}{25}$. **D.** $\frac{8}{17}$.

Câu 26: Cho khối lăng trụ tam giác *ABC. A'B'C'*. Gọi *I, J, K* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *AA'* và *B'C'*. Mặt phẳng (*IJK*) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

A. $\frac{25}{47}$. **B.** 1. **C.** $\frac{49}{95}$. **D.** $\frac{8}{17}$.

CỰC TRỊ TỈ LỆ THỂ TÍCH

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{60}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{4}{15}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC' cắt các cạnh SB, SD tại B', D'. Đặt $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng :

A. $\frac{2}{27}$. **B.** $\frac{4}{27}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

Câu 29: Cho khối tứ diện đều $S.ABC$ cạnh bằng a. Mặt phẳng (P) đi qua S và trọng tâm của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Đặt $m = \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng qua A và trung điểm N cạnh SC cắt cạnh SB,SD lần lượt tại M,P. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{V}{8}$. **B.** $\frac{3V}{8}$. **C.** $\frac{V}{4}$. **D.** $\frac{V}{3}$.

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình hình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại B',D' và đặt $k=\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Tính giá trị lớn nhất của k là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{105}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{4}{15}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Gọi M,N thứ tự là các điểm di động trên các cạnh AB,AD sao cho $\frac{AB}{AM}+\frac{2AD}{AN}=4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.AMN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V'.

A. $\frac{1}{4}V$ **B.** $\frac{1}{6}V$ **C.** $\frac{1}{8}V$ **D.** $\frac{1}{3}V$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Gọi M,N thứ tự là các điểm di động trên các cạnh AB,AD sao cho $\frac{AB}{AM}+\frac{2AD}{AN}=4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của V'.

A. $\frac{1}{4}V$ **B.** $\frac{2}{3}V$ **C.** $\frac{3}{4}V$ **D.** $\frac{1}{3}V$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V, đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (α) đi qua A, trung điểm I của SO cắt các cạnh SB,SC,SD lần lượt tại M,N,P. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{V}{18}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{6}$. **D.** $\frac{3V}{8}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD, SA$ là đường cao, đáy là hình chữ nhật với $SA=a, AB=b, AD=c.$ Trong mặt phẳng (SDB) lấy G là trọng tâm tam giác SDB, qua G kẻ đường thẳng d cắt cạnh BS tại M, cắt cạnh SD tại N, mp(AMN) cắt SC tại K. Xác định M thuộc SB sao cho V_{SAMKN} đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

A. $V_{SAMKN\to\max}=\frac{abc}{8},V_{SAMKN\to\min}=\frac{abc}{9}$ **B.** $V_{SAMKN\to\max}=\frac{abc}{8},V_{SAMKN\to\min}=\frac{abc}{10}$

C. $V_{SAMKN\to max}=\dfrac{abc}{9}, V_{SAMKN\to\min}=\dfrac{abc}{10}$ **D.** $V_{SAMKN\to max}=\dfrac{abc}{10}, V_{SAMKN\to\min}=\dfrac{abc}{11}$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A',C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại B', D' và đặt $k=\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của k là?

A. $\dfrac{4}{105}$. **B.** $\dfrac{1}{30}$. **C.** $\dfrac{4}{15}$. **D.** $\dfrac{4}{27}$.

Câu 37: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\dfrac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 38: Cho khối chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\dfrac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNP.M'N'P'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** . .

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V}$?

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=30^\circ$ và $SA=SB=SC=a$. Mặt phẳng (P) qua A cắt hai cạnh SB,SC lần lượt tại B',C' sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Gọi V_1,V_2 là lượt là thể tích các khối chóp $S.AB'C', S.ABC$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=3-2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\sqrt{3}-1$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=4-2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\sqrt{2}-1$.

Câu 41: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$. **B.** $\frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

C – HƯỚNG DẪN GIẢI

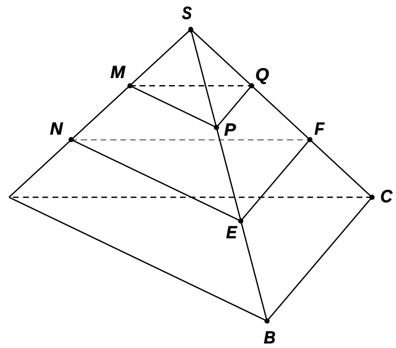
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$.Trên cạnh SA lấy các điểm M,N sao cho $SM = MN = NA$.Gọi $(\alpha),(\beta)$là các mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua M,N.Khi đó hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$chia khối chóp đã cho thành 3 phần.Nếu phần trên cùng có thể tích là $10\,dm^3$tích hai phần còn lại lần lượt là?

A. $80\,dm^3$và $190\,dm^3$. **B.** $70\,dm^3$và $190\,dm^3$.

C. $70\,dm^3$và $200\,dm^3$. **D.** $80\,dm^3$và $180\,dm^3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Đặt $V = V_{S.ABC}, V_1 = S_{S.MNP}$ ta có:

$$V_1 = \frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SB}.\frac{SQ}{SC}.V = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V = \frac{1}{27}V \Rightarrow V = 270\,dm^3.$$

Tương tự ta có :

$$V_1 + V_2 = \frac{SN}{SA}.\frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC}.V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V = \frac{8}{27}V = 80\,dm^3.$$

Do đó:$V_2 = 80 - V_1 = 70\,dm^3, V_3 = V - V_1 - V_2 = 190\,dm^3$.

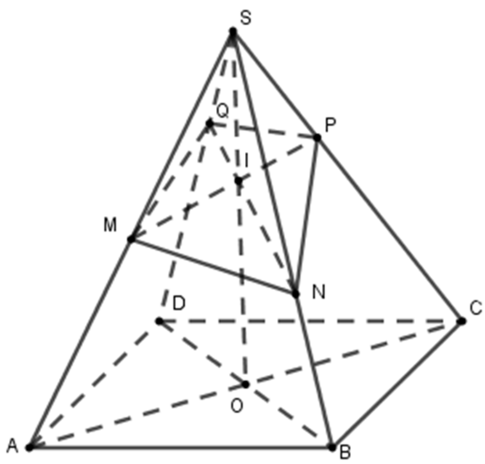
Chọn B.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng V. Gọi M,N,P lần lượt là các điểm trên các cạnh SA,SB,SC sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{2},\frac{SN}{SB}=\frac{2}{3},\frac{SP}{SC}=\frac{1}{3}$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại điểm Q. Tính thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$.

A. $\frac{5}{63}V$. **B.** $\frac{10}{63}V$. **C.** $\frac{53}{63}V$. **D.** $\frac{58}{63}V$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D



Đặt $x = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$, $z = \frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}$, $t = \frac{SQ}{SD}$.

Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Rightarrow 2 + 3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{2}{7}$.

Do đó $V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.PQM} = xyz.\frac{1}{2}V + zxt.\frac{1}{2}V = \frac{1}{2}xz(y+t)V = \frac{5}{63}V$.

Suy ra $V_{ABCD.MNPQ} = \left(1 - \frac{5}{63}\right)V = \frac{58}{63}V$.

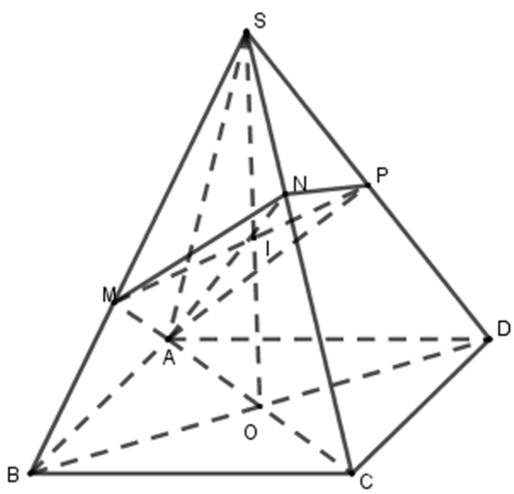
Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{3}a$, $AD = a$, SA vuông góc với đáy và

$SA = a$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{40}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{40}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{30}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM, SC \perp AN, SC \perp AP$.

Mặt khác $CB \perp (SAB) \Rightarrow AM \perp CB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM$

. Tương tự ta có $AP \perp SD$.

Thể tích khối chóp ban đầu là

$V = \frac{1}{3}\sqrt{3}a^2.a = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Tính các tỉ số $x = \frac{SA}{SA} = 1$,

$y = \frac{SM}{SB} = \left(\frac{SA}{SB}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + 3a^2} = \frac{1}{4}$,

$z = \frac{SN}{SC} = \left(\frac{SA}{SC}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + 3a^2 + a^2} = \frac{1}{5}$, $t = \frac{SP}{SD} = \left(\frac{SA}{SD}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + a^2} = \frac{1}{2}$.

Vậy $V' = \frac{xyzt}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)V = \frac{3}{40}V = \frac{\sqrt{3}a^3}{40}$.

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy là hình bình hành. Điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = k\overrightarrow{DC}\ (k > 0)$. Biết thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là $\frac{7}{25}V$. Tìm k.

A. $k = 9$. **B.** $k = 6$. **C.** $k = 11$. **D.** $k = 4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có $AB//CD//SS'$ nên $B'=S'A\cap SB, C'=S'D\cap SC$.

Theo Thales ta cũng có

$$\frac{B'S}{B'B}=\frac{C'S}{C'C}=\frac{S'S}{DC}=k\Rightarrow\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{k}{k+1},t=\frac{SD}{SD}=1.$$

Do đó $V_{S.ADC'B'}=\frac{1}{4}.1.1.\frac{k}{k+1}.\frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{k}{k+1}}+\frac{1}{\frac{k}{k+1}}\right)V=\frac{k^2(2k+1)}{2k(k+1)^2}V$.

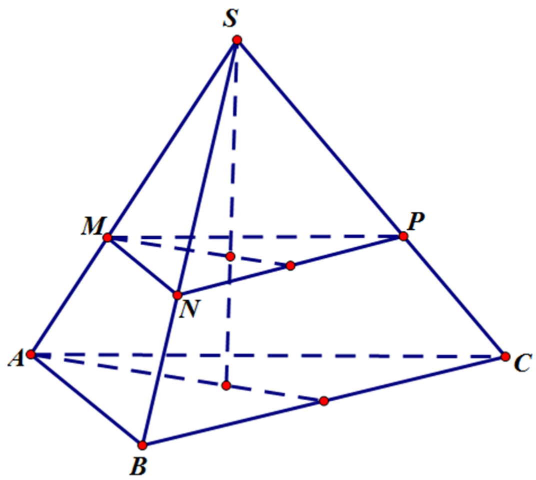
Vậy thể tích phần chung là $V'=V-V_{S.ADC'B'}=\left(1-\frac{k^2(2k+1)}{2k(k+1)^2}\right)V=\frac{7}{25}V\Leftrightarrow k=4\,(k>0)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Tính diện tích tam giác MNP biết (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $S_{\Delta MNP}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{8}$. **B.** $S_{\Delta MNP}=\frac{a^3.\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S_{\Delta MNP}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}$. **D.** $S_{\Delta MNP}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\left(\frac{SM}{SA}\right)^3 \quad (1)$$

Theo bài ra: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}$ (2)

Từ (1), (2) ta có $\left(\frac{SM}{SA}\right)^3=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{SM}{SA}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Lại có:

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{\frac{1}{3}d(S,(MNP)).S_{\Delta MNP}}{\frac{1}{3}d(S,(ABC)).S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{2} \quad (3)$$

Mà $\frac{d(S,(MNP))}{d(S,(ABC))}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (4)

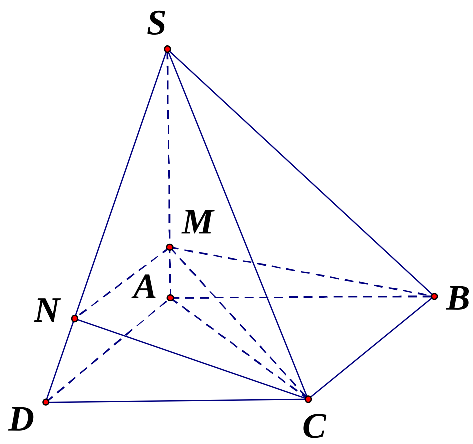
Từ (3), (4) ta có được $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4.\sqrt[3]{4}}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=b$ và cạnh bên $SA=c$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là một điểm trên cạnh SA sao cho $AM=x(0<x<c)$. Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $x=\frac{(3-\sqrt{2})c}{2}$. **B.** $x=\frac{(2-\sqrt{3})ab}{2c}$. **C.** $x=\frac{(3-\sqrt{5})c}{2}$. **D.** $x=\frac{(\sqrt{5}-1)ab}{2c}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Ta có $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SD}=\frac{c-x}{c}$

Vì vậy $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}=\frac{c-x}{c}\Rightarrow V_{S.MBC}=\frac{c-x}{2c}V_{S.ABCD}$

Và

$$\frac{V_{SMNC}}{V_{SADC}}=\frac{SM.SN}{SA.SD}=\frac{(c-x)^2}{c^2}\Rightarrow V_{S.MNC}=\frac{(c-x)^2}{2c^2}V_{S.ABCD}$$

Vậy

$$V_{SMNBC}=\left(\frac{(c-x)^2}{2c^2}+\frac{c-x}{c}\right)V_{SABCD}=\frac{1}{2}V_{SABCD}.\frac{(c-x)^2+c^2-cx}{c^2}$$

Từ giả thiết ta có $\frac{(c-x)^2+c^2-cx}{c^2}=1\Leftrightarrow c^2-3cx+x^2=0\Leftrightarrow x=\frac{(3-\sqrt{5})c}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD$ và $CD=4AB$.Gọi M là 1 điểm trên cạnh SA sao cho $0<AM<SA$. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ sao cho mặt phẳng (CDM) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau:

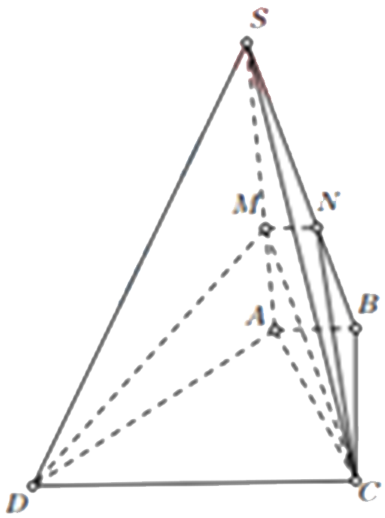
A. $\frac{SM}{SA}=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. **B.** $\frac{SM}{SA}=\frac{-4+\sqrt{26}}{2}$. **C.** $\frac{SM}{SA}=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$. **D.** $\frac{SM}{SA}=\frac{-3+\sqrt{23}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Đặt $x=\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB},0<x<1$.

Ta có $\dfrac{V_{SADC}}{V_{SABC}} = \dfrac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD}{AB} = 4$
$\Rightarrow V_{SADC} = \dfrac{4}{5}V_{SABDC}, V_{SABC} = \dfrac{1}{5}V_{SABDC}$.



Ta có $\dfrac{V_{SMCD}}{V_{SACD}} = \dfrac{SM}{SA} \Rightarrow V_{SMCD} = \dfrac{4x}{5}V_{SABDC}$

$\dfrac{V_{SMNC}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB} = x^2 \Rightarrow V_{SMNC} = \dfrac{x^2}{5}V_{SABC}$

Vậy $V_{SMNCD} = \left(\dfrac{4x}{5} + \dfrac{x^2}{5}\right)V_{SABCD} = \dfrac{V_{SABCD}}{2}$

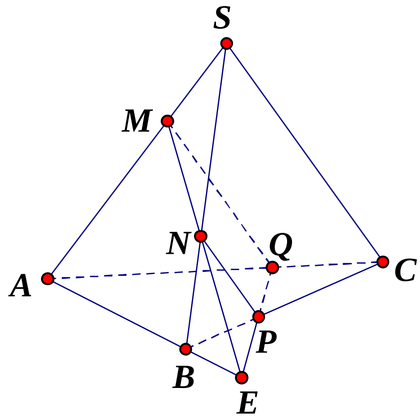
Suy ra $\dfrac{4x}{5} + \dfrac{x^2}{5} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-4+\sqrt{26}}{2}$.

Câu 8: Cho điểm M trên cạnh SA, điểm N trên cạnh SB của hình chóp tam giác $S.ABC$ có thể tích bằng V sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{SN}{SB} = x$. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính x.

A. $x = \dfrac{4-\sqrt{5}}{3}$ **B.** $x = \dfrac{8-\sqrt{10}}{6}$ **C.** $x = \dfrac{4-\sqrt{5}}{6}$ **D.** $x = \dfrac{8-\sqrt{10}}{9}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Trong $(ABS): MN \cap AB = E$, trong $(SAC): MQ//SC, Q \in AC$, trong $(ABC): EQ \cap BC = P$.

Khi đó $NP//SC//MQ \Rightarrow \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{CQ}{CA} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{CP}{CB} = x$.

Trong tam giác $SAB: \dfrac{NB}{NS}.\dfrac{MS}{MA}.\dfrac{EA}{EB} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{1-x}{x}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{EA}{EB} = 1 \Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{2x}{1-x} \Rightarrow \dfrac{AB}{EB} = \dfrac{3x-1}{1-x}$

Ta có $\dfrac{V_{EAMQ}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{AM}{AS}.\dfrac{AQ}{AC}.\dfrac{EA}{BA} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2x}{3x-1} = \dfrac{8x}{9(3x-1)} \Rightarrow V_{EAMQ} = \dfrac{8x}{9(3x-1)}V$

$$\frac{V_{EBNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{BN}{BS}.\frac{BP}{BC}.\frac{EB}{AB}=\left(1-x\right)^2.\frac{1-x}{3x-1}=\frac{\left(1-x\right)^3}{3x-1}\Rightarrow V_{EBNP}=\frac{\left(1-x\right)^3}{3x-1}V$$

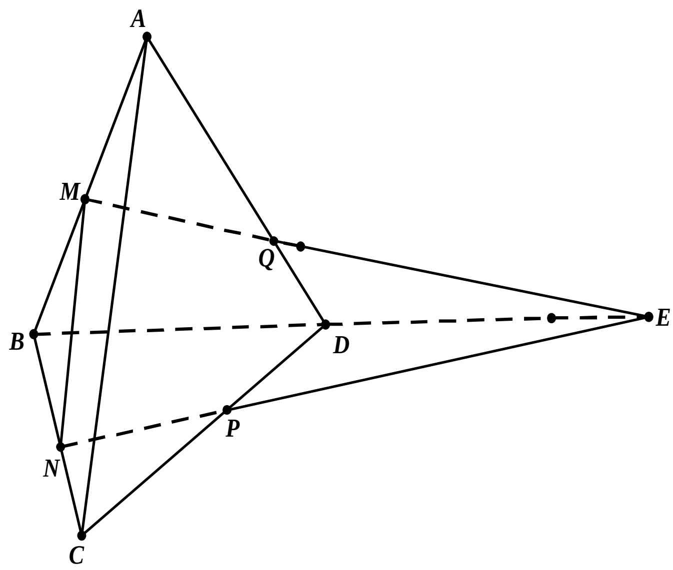
$$\Rightarrow V_{AMQBNP}=\frac{8x}{9\left(3x-1\right)}V-\frac{\left(1-x\right)^3}{3x-1}V=\frac{1}{2}V\Rightarrow\frac{8x}{9\left(3x-1\right)}-\frac{\left(1-x\right)^3}{3x-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{8-\sqrt{10}}{6}$$

Câu 9: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a, Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, BC svà E là điểm thuộc tia đối DB sao cho $\frac{BD}{BE}=k$. Tìm k để mặt phẳng $\left(MNE\right)$ chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích là $\frac{11\sqrt{2}a^3}{294}$.

A. $k=\frac{6}{5}$. **B.** $k=6$. **C.** $k=4$. **D.** $V=5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Ta có diện tích khối tứ diện đều cạnh a bằng $V_0=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$$\frac{V_{BMNE}}{V_{ABCD}}=\frac{BM}{BA}.\frac{BN}{BC}.\frac{BE}{BD}$$

$$\Rightarrow V_{BMQE}=\frac{1}{4}V_0$$

Theo ta let ta có:

$$\frac{EP}{EN}=\frac{EQ}{EM}=\frac{k-1}{k-1+\frac{1}{2}}=\frac{2\left(k-1\right)}{2k-1}$$

$$\Rightarrow V_{EDPQ}=\frac{EP}{EN}.\frac{EQ}{EM}.\frac{DE}{BE}V_{BMQE}=\frac{4\left(k-1\right)^2}{\left(2k-1\right)^2}.\frac{k-1}{k}\frac{1}{4}V_0$$

Do đó $V_{BMNPQD}=\frac{k}{4}V_0-\frac{4\left(k-1\right)^2}{\left(2k-1\right)^2}.\frac{k-1}{k}\frac{1}{4}V_0=\frac{k}{4}V_0\left(1-\frac{4\left(k-1\right)^3}{k\left(2k-1\right)^2}\right)$

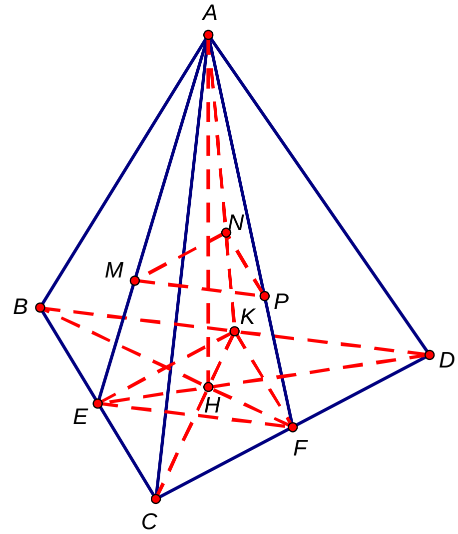
$V_{BMNPQD}=\frac{22}{49}V_0$ hay $\frac{k}{4}V_0=\frac{k}{4}V_0\left(1-\frac{4\left(k-1\right)^3}{k\left(2k-1\right)^2}\right)\Leftrightarrow k=4$

Câu 10: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2cm$. Gọi M,N,P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác ABC, ABD, ACD. Tính thể tích V của khối chóp $AMNP$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{162}cm^3$. **B.** $V=\dfrac{2\sqrt{2}}{81}cm^3$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{2}}{81}cm^3$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{144}cm^3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Tam giác BCD đều $\Rightarrow DE=\sqrt{3}\Rightarrow DH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$S_{\Delta EFK}=\dfrac{1}{2}.d_{(E,FK)}.FK=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}d_{(D,BC)}.\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{SKFE}=\dfrac{1}{3}AH.S_{\Delta EFK}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2\sqrt{6}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Mà $\dfrac{AM}{AE}=\dfrac{AN}{AK}=\dfrac{AP}{AF}=\dfrac{2}{3}$

Lại có:

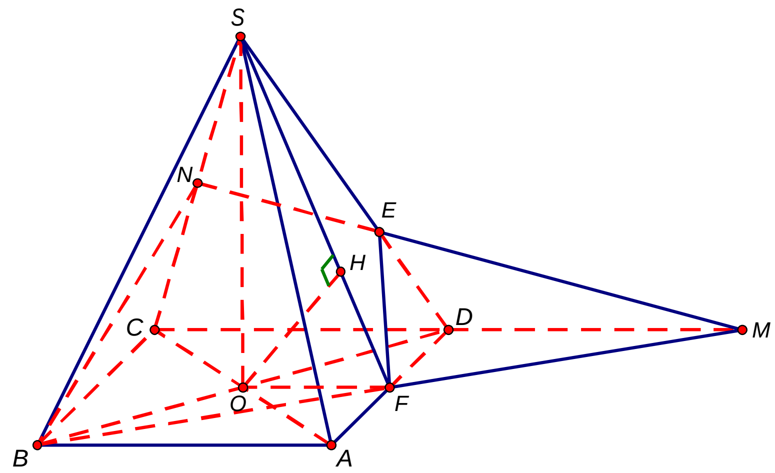
$\dfrac{V_{AMNP}}{V_{AEKF}}=\dfrac{AM}{AE}.\dfrac{AN}{AK}.\dfrac{AP}{AF}=\dfrac{8}{27}\Rightarrow V_{AMNP}=\dfrac{8}{27}V_{AEKF}=\dfrac{4\sqrt{2}}{81}$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Giả sử các điểm như hình vẽ.

$E=SD\cap MN\Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SCM,

$DF\ //\ BC\Rightarrow F$ là trung điểm BM.

Ta có:

$\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right)=\widehat{SDO}=60°$,

$\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$SF=\sqrt{SO^2+OF^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow d\left(O,\left(SAD\right)\right)=OH=h=\dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}};S_{SAD}=\dfrac{1}{2}SF.AD=\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$

$\dfrac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}}=\dfrac{ME}{MN}\cdot\dfrac{MF}{MB}\cdot\dfrac{MD}{MC}=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{BFDCNE}=\dfrac{5}{6}V_{MNBC}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot d\left(M,\left(SAD\right)\right)\cdot\dfrac{1}{2}S_{SBC}=\dfrac{5}{18}\cdot 4h\cdot\dfrac{1}{2}S_{SAD}=\dfrac{5a^3\sqrt{6}}{72}$

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}\Rightarrow V_{SABFEN}=V_{S.ABCD}-V_{BFDCNE}=\dfrac{7a^3\sqrt{6}}{36}\cdot$

Suy ra: $\dfrac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}=\dfrac{7}{5}\cdot$

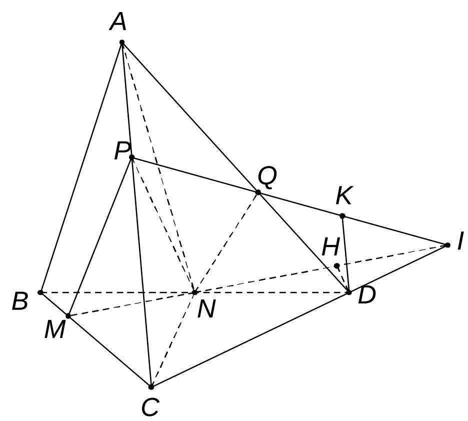
Câu 12: (Hình học không gian) Cho tứ diện $ABCD$ và M,N,P lần lượt thuộc BC,BD,AC sao cho $BC=4BM,BD=2BN,AC=3AP$. Mặt phẳng $\left(MNP\right)$ cắt AD tại Q. Tính tỷ số thể tích hai phần khối tứ diện $ABCD$ bị chia bởi mặt phẳng $\left(MNP\right)$.

A. $\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{7}{13}$ **C.** $\dfrac{5}{13}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $I=MN\cap CD,Q=PI\cap AD$,

kẻ $DH//BC\left(H\in IM\right),DK//AC\left(K\in IP\right)$.



$\Delta NMB=\Delta NDH\Rightarrow\dfrac{ID}{IC}=\dfrac{DH}{CM}=\dfrac{BM}{CM}=\dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{IK}{IP}=\dfrac{DK}{CP}=\dfrac{ID}{IC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{DK}{2AP}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow DK=\dfrac{2}{3}$

$\Delta APQ\sim\Delta DKQ$.

Suy ra $\Rightarrow\dfrac{AQ}{DQ}=\dfrac{AP}{DK}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{AQ}{AD}=\dfrac{3}{5}$

Đặt $V=V_{ABCD}$. Ta có: $\dfrac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}}=\dfrac{AP}{AC}.\dfrac{AQ}{AD}=\dfrac{1}{5}$;

$\dfrac{V_{ANCD}}{V_{ABCD}}=\dfrac{V_{DACN}}{V_{DABC}}=\dfrac{DN}{DB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{ANPQ}=\dfrac{1}{10}V$

$\dfrac{V_{CDMP}}{V_{CDBA}}=\dfrac{CM}{CB}.\dfrac{CP}{CA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{CDMP}=\dfrac{1}{2}V$

$\Rightarrow V_{V.ABMP}=\dfrac{1}{2}V_{DABMP}=\dfrac{1}{2}V-V_{CDMP}=\dfrac{1}{4}V$

$$\Rightarrow V_{ABMNQP}=V_{ANPQ}+V_{N.ABMP}=\frac{7}{20}V\Rightarrow\frac{V_{ABMNQP}}{V_{CDMNQP}}=\frac{7}{13}$$

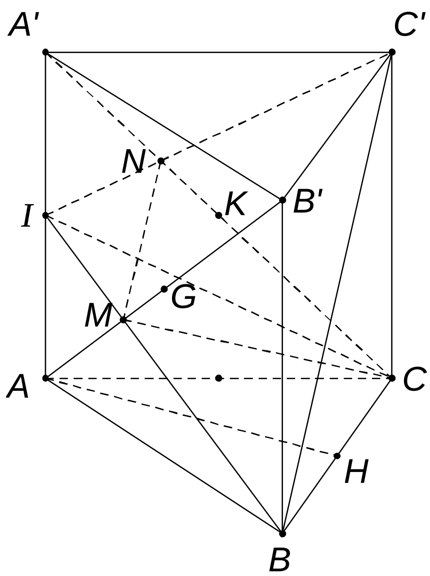
Vậy mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần với tỉ lệ thể tích $\frac{7}{13}$.

Chọn B.

Câu 13: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'}=\frac{A'N}{A'C}=\frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Hướng dẫn giải:



Gọi G, K lần lượt tâm các hình chữ nhật $ABB'A'$ và $AA'C'C$.

Ta có: $\frac{AM}{AB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AM}{AG}=\frac{2}{3}$

(Do G trung điểm AB')

Xét tam giác ABA' có AG là trung tuyến và $\frac{AM}{AG}=\frac{2}{3}$. Suy ra M là trọng tâm tam giác ABA'. Do đó BM đi q ua trung điểm I của AA'.

Ta có: $\frac{A'N}{A'C}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{A'N}{A'K}=\frac{2}{3}$

(Do K là trung điểm A'C)

Xét tam giác $AA'C'$ có $A'K$ là trung tuyến và $\frac{A'N}{A'K}=\frac{2}{3}$. Suy ra N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Do đó $C'N$ đi qua trung điểm I của AA'.

Từ M là trọng tâm tam giác ABA' và N trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Suy ra: $\frac{IM}{IB}=\frac{IN}{IC'}=\frac{1}{3}$.

Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $IMNC; IBCC'$. Ta có: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{IM}{IB}.\frac{IN}{IC'}.\frac{IC}{IC}=\frac{1}{9}$

Mà $V_1+V=V_2\Rightarrow V=\frac{8}{9}V_2$.

Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC. Ta được AH vuông góc với mặt phẳng $(BB'C'C)$. AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng khoảng cách từ A đến $(BB'C'C)$ và bằng AH.

Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $V_2 = \frac{1}{3}d\left[I,(BB'C'C)\right].S_{\Delta BCC'} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Suy ra: $V = \frac{8}{9}V_2 = \frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$.

Chọn B.

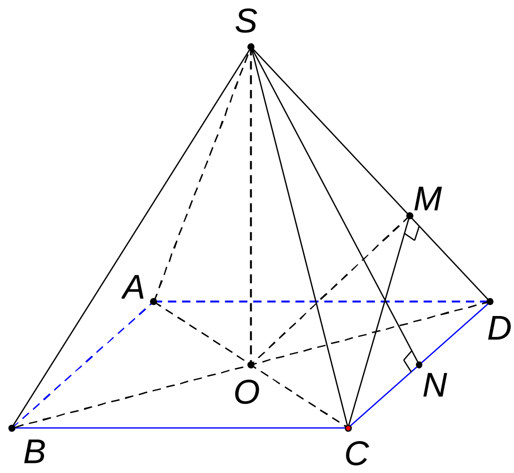
Câu 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ lệ thể tích hai khối đa diện là gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau:

A. $0,11$ **B.** $0,13$ **C.** $0,7$ **D.** $0,9$

Hướng dẫn giải:

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều

$SO \perp (ABCD)$.



Gọi N là trung điểm CD

$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp SN, CD \perp ON \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{SNO}$

Kẻ $CM \perp SD$. Ta có:

$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

$\Rightarrow AC \perp SD \Rightarrow SD \perp (ACM) \Rightarrow (ACM) \perp (SAD)$

nên mặt phẳng (P) là (ACM).

+ Xét tam giác SON vuông tại N có:

$SN = \frac{ON}{\cos\widehat{SNO}} = \frac{3a}{2}$.

$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$.

+ Xét tam giác SOD vuông tại O có:

$SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Ta có: $S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}CM.SD=\frac{1}{2}SN.CD\Rightarrow CM=\frac{SN.CD}{SD}=\frac{3a\sqrt{10}}{10}$.

Xét tam giác MCD vuông tại M có: $DM=\sqrt{CD^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Ta có: $\frac{V_{M.ACD}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{MACD}}{2V_{SACD}}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}.\frac{DA}{DA}.\frac{DC}{DC}=\frac{1}{2}\frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}}=\frac{1}{10}\Rightarrow V_{MACD}=\frac{1}{10}V_{SABCD}$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối $M.ACD$ và

$S.ABCM\Rightarrow V_{SABCD}=V_{MACD}+V_{SABCM}\Rightarrow V_{SABCM}=\frac{9}{10}V_{SABCD}$

Do đó: $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}}=\frac{1}{9}\approx 0,11$

Chọn A.

Câu 15: Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA=2SM$, $SN=2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α), trong đó, (H_1) chứa điểm S, (H_2) chứa điểm A; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

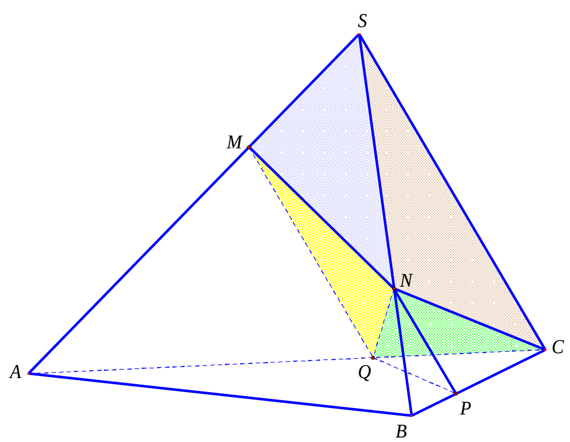
A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải:

Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC.

Ta có $NP//MQ//SC$. Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.



Ta có: $\frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\frac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}\cdot\frac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$;

$\frac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\frac{NS}{BS}=\frac{2}{3}$;

$$\frac{S_{AMQ}}{S_{ASC}}=\left(\frac{AM}{AS}\right)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{S_{SMQC}}{S_{ASC}}=\frac{5}{9}.$$

Suy ra $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{27}$

$$\frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\frac{d(N,(QPC))}{d(S,(ABC))}\cdot\frac{S_{QPC}}{S_{ABC}}$$
$$=\frac{NB}{SB}\cdot\frac{CQ}{CA}\cdot\frac{CP}{CB}==\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$

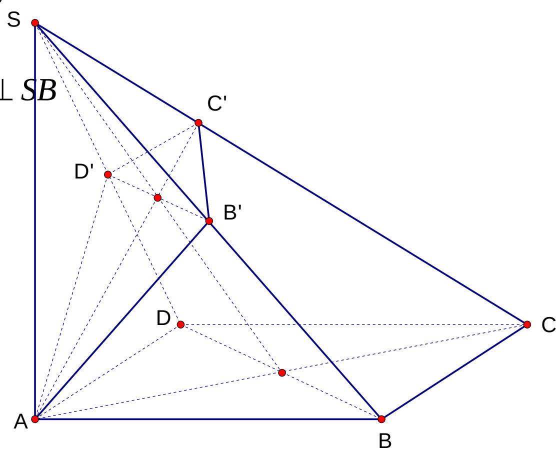
$$\frac{V_1}{V}=\frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}+\frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\frac{10}{27}+\frac{2}{27}=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{V_1}{V_1+V_2}=\frac{4}{9}\Rightarrow 5V_1=4V_2\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh *a*, SA = $a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với SC cắt SB,SC,SD lần lượt tại B',C',D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ theo *a*.

A. $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{20}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{20}$ **C** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{10}$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}a^3}{10}$

Hướng dẫn giải:

$BC\perp AB, BC\perp SA\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AB'$



$SC\perp(P)\Rightarrow SC\perp AB'\Rightarrow AB'\perp(SBC)\Rightarrow AB'\perp SB$

Tương tự $AD'\perp SD$

$V_{S.AB'C'D'}=V_{S.AB'C'}+V_{S.AD'C'}$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{SB'.SB}{SB^2}.\frac{SC'.SC}{SC^2}$$
$$=\frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{3}{4}.\frac{3}{5}=\frac{9}{20}\quad(1)$$

$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}}=\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}=\frac{SD'.SD}{SD^2}.\frac{SC'.SC}{SC^2}=\frac{SA^2}{SD^2}.\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{3}{4}.\frac{3}{5}=\frac{9}{20}\quad(2)$$

Do $V_{S.ABC}=V_{S.ADC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}a^2.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}}+\frac{V_{S.AD'C'}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}}=\frac{9}{20}+\frac{9}{20}\Leftrightarrow V_{S.AB'C'D'}=\frac{9}{10}.\frac{a^3\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$$

Chọn A.

Câu 17: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện ABCE và tứ diện BCDE lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{5}{8}$

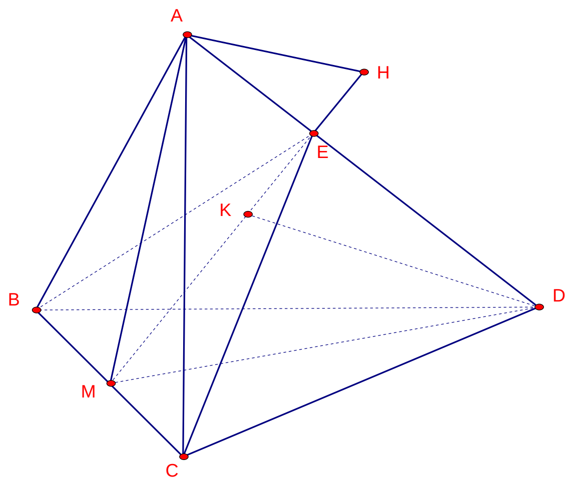
Hướng dẫn giải:

+) Gọi M là trung điểm BC.

Khi đó BC ⊥ (MAD) nên (P)⊥(AMD); (P)∩(AMD) =ME.

Kẻ AH⊥ME thì AH⊥(BCE) (do AH⊂ (AMD))

Kẻ DK⊥ME nên DK⊥(BCE) (do DK⊂ (AMD)). Hiển nhiên AH song song DK



Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{A.BCE}}{V_{D.BCE}} = \frac{AH}{DK}$

+) Gọi β là góc giữa (P) và (ABC) ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$). Hiển nhiên $\widehat{DME} = \alpha$; $\widehat{AME} = \beta$.

Vì AM = DM nên: $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{AH}{DK} \Rightarrow \sin\beta = \frac{V_1}{V_2}.\sin\alpha = t.\sin\alpha$ (1)

+) Trong tam giác OMA: $\cos(\alpha+\beta) = \frac{MO}{MA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha sin\beta = \frac{1}{3}$. (2)

Từ (1) có: $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-t^2.\sin^2\alpha} = \sqrt{1-t^2.x}$; với x=sin²α.

Thay vào (2) ta có: $\sqrt{1-t^2x}.\sqrt{1-x} - t.x = \frac{1}{3} \leftrightarrow \sqrt{(1-t^2x)(1-x)} = t.x + \frac{1}{3}$.

+) Giải phương trình có: $x = \frac{8}{(9t^2+6t+9)}$.

Vì $\sin^2\alpha = x \to \tan^2\alpha = \frac{x}{1-x} = \frac{8}{9t^2+6t+9}.\frac{9t^2+6t+9}{9t^2+6t+1} = \frac{8}{9t^2+6t+1}$

Theo giả thiết suy ra $\frac{8}{9t^2+6t+1} = \frac{50}{49} \leftrightarrow 9t^2+6t+1 = \frac{196}{25} \leftrightarrow 9t^2+6t-\frac{171}{25} = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{5} \\ t = \frac{-19}{15} \end{array}\right.$

Vậy $\frac{V_{ABCE}}{V_{DBCE}}=\frac{3}{5}$

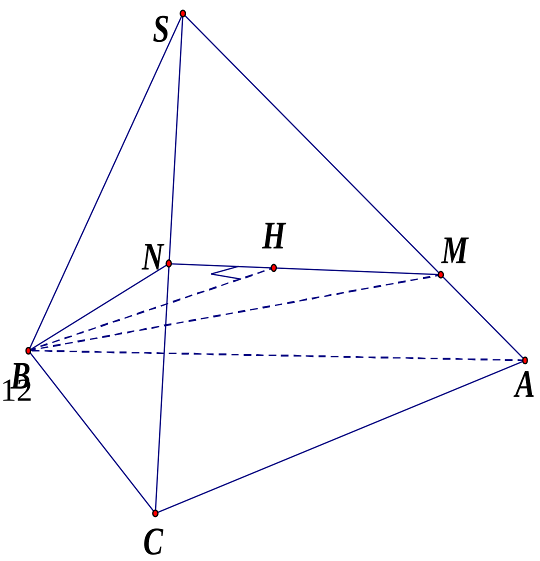
Chọn C.

Câu 18: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=6, SB=2, SC=4, AB=2\sqrt{10}$ và $\angle SBC=90^{\circ}, \angle ASC=120^{\circ}$. Mặt phẳng (P) qua B và trung điểm N của SC và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt cạnh SA tại M. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Ta có: $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}k$ với $k=\frac{SM}{SA}$.

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có:
$\angle ASB=90^{\circ}; \angle BSC=60^{\circ}; \angle ASC=120^{\circ}$

Đặt

$\overrightarrow{SA}=\vec{a};\ \overrightarrow{SB}=\vec{b};\ \overrightarrow{SC}=\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}|=6,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=4\\ \vec{a}.\vec{b}=0;\vec{b}.\vec{c}=4;\vec{a}.\vec{c}=-12\end{cases}$

Vì $(BMN)\perp(SAC)$ nên kẻ
$BH\perp MN, H\in MN\Rightarrow BH\perp(SAC)$.

Khi đó: $\overrightarrow{BH}=x.\overrightarrow{BM}+(1-x)\overrightarrow{BN}=x\left(\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SB}\right)+(1-x)\left(\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SB}\right)$

$=x\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)+(1-x)\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}\right)=kx\vec{a}-\vec{b}+\frac{1-x}{2}\vec{c}$.

Lại có: $BH\perp(SAC)\Rightarrow\begin{cases}BH\perp SA\\ BH\perp SC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{SA}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{SC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}\left(kx\vec{a}-\vec{b}+\frac{1-x}{2}\vec{c}\right)=0\\ \vec{c}\left(kx\vec{a}-\vec{b}+\frac{1-x}{2}\vec{c}\right)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}36kx-6(1-x)=0\\ -12kx-4+8(1-x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{3}\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Câu 19: Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V, khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ có thể tích V_1, các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Khối tứ diện $A_2B_2C_2D_2$ có thể tích V_2, các đỉnh A_2, B_2, C_2, D_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$. Cứ tiếp tục như thế ta được khối tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n, các đỉnh A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trọng tâm của các tam giác $B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}A_{n-1}$, $D_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}$, $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Tính $S = V_1 + V_2 + ... + V_{2018}$?

A. $S = \dfrac{\left(3^{2018} - 1\right)V}{2.3^{2018}}$. **B.** $S = \dfrac{\left(27^{2019} - 1\right)V}{26.27^{2019}}$.

C. $S = \dfrac{\left(27^{2018} - 1\right)V}{26.27^{2018}}$. **D.** $S = \dfrac{\left(3^{2019} - 1\right)V}{2.3^{2019}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có

$$V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V = \frac{1}{27}V$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_1 = \frac{1}{27}V_1 = \left(\frac{1}{27}\right)^2 V$$

…

$$V_{2018} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_{2017} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2018} V$$

$$\Rightarrow S = V\left[\frac{1}{27} + \left(\frac{1}{27}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{27}\right)^{2018}\right] = V.\frac{1}{27}.\frac{1 - \left(\frac{1}{27}\right)^{2018}}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{\left(27^{2018} - 1\right)V}{26.27^{2018}}$$

Câu 20: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'; NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$. **B.** Khối $GA'B'C'$. **C.** Khối $ABB'C'$. **D.** Khối $BB'MN$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi V là thể tích khối lăng trụ đã cho.

Ta có: $V_{M.BB'C'C} = V_{A.BB'C'C} = V_{A'BB'C'C} = \dfrac{2}{3}V$

Và

$S_{BB'N} = S_{CBB'} = \frac{1}{2}S_{BB'C'C} \Rightarrow V_{A.BB'C'} = \frac{1}{2}V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{3}V$

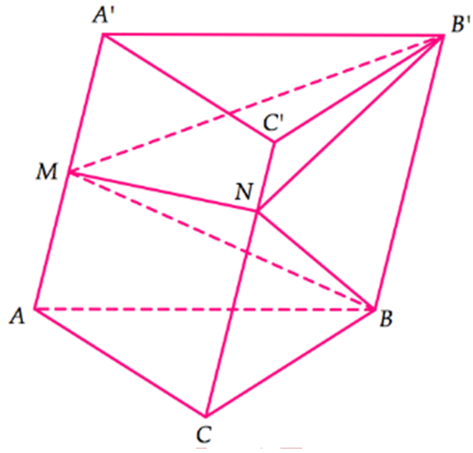
Và

$S_{BB'N} = S_{CBB'} = \frac{1}{2}S_{BB'C'C} \Rightarrow V_{BB'MN} = \frac{1}{2}V_{M.BB'C'C} = \frac{1}{3}V$

Chú ý:

$S_{BCN} = \frac{4}{5}S_{BCC'} = \frac{2}{3}S_{BB'C'C} \Rightarrow V_{A'.BCN} = \frac{2}{3}V_{A'.BB'C'C} = \frac{4}{15}V$

.



Chọn A.

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Hướng dẫn giải:

Gọi G, K lần lượt là tâm các hình chữ nhật ABB'A' và AA'C'C**.**

Ta có: $\frac{AM}{AB'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$ (Do G trung điểm AB').

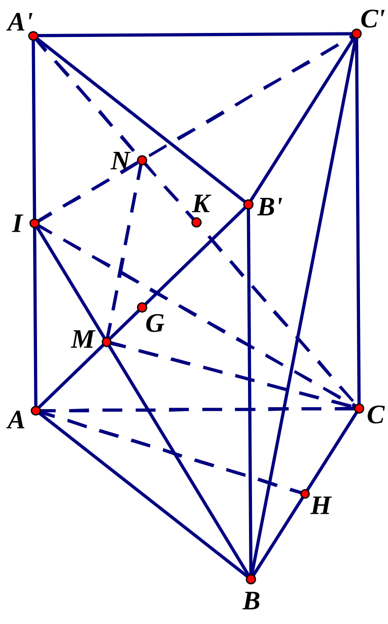
Xét tam giác ABA' có AG là trung tuyến và $\frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$.

Suy ra M là trọng tâm tam giác ABA'. Do đó BM đi qua trung điểm I của AA'.

Ta có: $\frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$ (Do K là trung điểm A'C).

Xét tam giác AA'C' có A'K là trung tuyến và $\frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$.

Suy ra N là trọng tâm của tam giác AA'C'. Do đó C'N đi qua trung điểm I của AA'.



Từ M là trọng tâm tam giác ABA' và N là trọng tâm của tam giác AA'C'. Suy ra:

$$\frac{IM}{IB} = \frac{IN}{IC'} = \frac{1}{3}.$$

Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích các khối chóp IMNC; IBCC'. Ta có:

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{IM}{IB}.\frac{IN}{IC'}.\frac{IC}{IC}=\frac{1}{9}$. Mà $V_1+V=V_2$. Suy ra $V=\frac{8}{9}V_2$.

Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC. Ta được AH vuông góc với mặt phẳng (BB'C'C). AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng (BB'C'C) bằng khoảng cách từ A đến (BB'C'C) và bằng AH. Ta có: $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

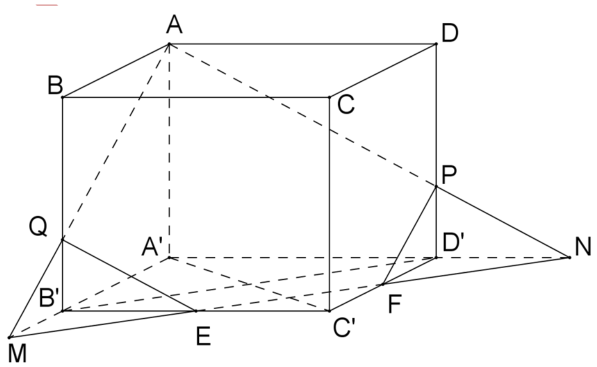
$V_2=\frac{1}{3}d\left[I;(BB'C'C)\right].S_{\Delta BCC'}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. Suy ra $V=\frac{8}{9}V_2=\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$.

Chọn B.

Câu 22: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tich khối chứa điểm A' và V_2 là thể tich khối chứa điểm C'. Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{25}{47}$. **B.** 1. **C.** $\frac{17}{25}$. **D.** $\frac{8}{17}$.

Hướng dẫn giải:



Đường thẳng EF cắt $A'D'$ tại N, cắt $A'B'$ tại M, AN cắt DD' tại P, AM cắt BB' tại Q. Từ đó mặt phẳng (AEF) cắt khối lăng trụ thành hai khối đó là $ABCDC'QEFP$ và $AQEFPB'A'D'$.

Gọi $V=V_{ABCD.A'B'C'D'}$, $V_3=V_{A.A'MN}$, $V_4=V_{PFD'N}$, $V_4=V_{QMB'E}$.

Do tính đối xứng của hình lập phương nên ta có $V_4=V_5$.

$V_3=\frac{1}{6}AA'.A'M.A'N=\frac{1}{6}a.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2}=\frac{3a^3}{8}$,

$V_4=\frac{1}{6}PD'.D'F.D'N=\frac{1}{6}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{72}$

$V_1=V_3-2V_4=\frac{25a^3}{72}$,

$V_2=V-V_1=\frac{47a^3}{72}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{25}{47}$.

Chọn A.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh $A,(H')$ là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

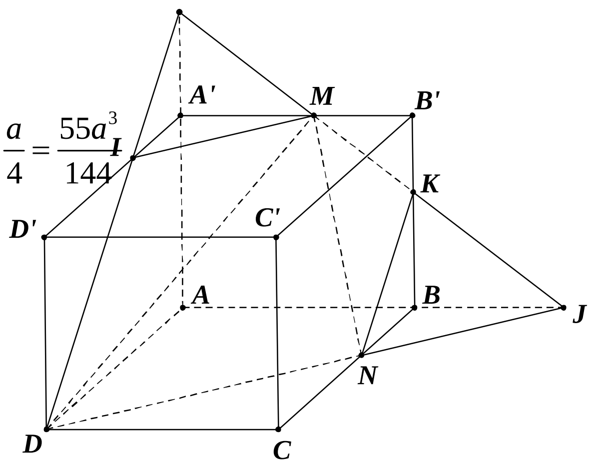
A. $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\dfrac{37}{48}$ **B.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\dfrac{55}{89}$ **C.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

$AN\cap ND=J, JM\cap BB'=K$. Ta có: $BK=2B'K; I\in A'D'$.

Ta có: $A'I=\dfrac{1}{4}D'D'$. Suy ra thiết diện là $KMIDN$

$V_{(H)}=V_{ABA'KMIDN}=V_{D.ABKMA'}+V_{D.BKN}+V_{D.MA'I}$



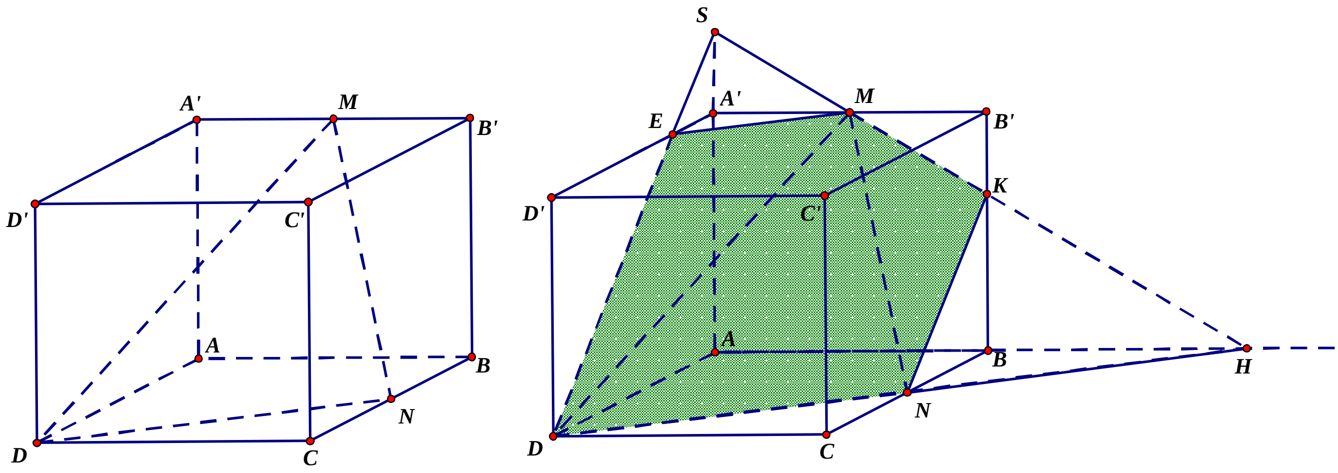
$=\dfrac{1}{3}a.\left(a^2-\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{3}.\dfrac{a}{2}\right)+\dfrac{1}{3}a.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{2a}{3}+\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{4}=\dfrac{55a^3}{144}$

$\Rightarrow V_{(H')}=a^3-\dfrac{55a^3}{144}=\dfrac{89a^3}{144}\Rightarrow\dfrac{V_H}{V_{H'}}=\dfrac{55}{89}$.

Chọn B.

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$ *và* BC. Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V1}{V2}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{55}{89}$. **C.** $\dfrac{37}{48}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.



Hướng dẫn giải

Gọi $H = AB \cap DN$; MH cắt $B'B$ tại K, cắt $A'A$ tại S; SD cắt $A'D'$ tại E.

Thiết diện tương ứng là ngũ giác $DNKME$.

Phần đa diện chứa A có thể tích là: $V_1 = V_{S.ADH} - V_{S.A'EM} - V_{K.BNH}$.

Dùng tam giác đồng dạng kiểm tra được: $BA = BH$; $AH = 4A'M$; $AD = 4A'E$ và $SA' = B'K = \frac{1}{3}A'A$.

Đặt độ dài cạnh hình lập phương bằng 1thì: $SA' = \frac{1}{3}$; $KB = \frac{2}{3}$.

Ta có: $V_{S.ADH} = \frac{1}{6}SA.AD.AH = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}\right).1.2 = \frac{4}{9}$.

$V_{S.A'EM} = \frac{1}{64}V_{S.ADH} = \frac{1}{144}$; $V_{K.BNH} = \frac{1}{8}V_{S.ADH} = \frac{1}{18}$

Vậy thì phần đa diện chứa A có thể tích là: $\frac{4}{9} - \frac{1}{144} - \frac{1}{18} = \frac{55}{144}$.

Suy ra phần đa diện không chứa A có thể tích là: $1^3 - \frac{55}{144} = \frac{89}{144}$.

Chọn B.

Câu 25: Cho hình hộp $ABCDA'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm A'B'. Mặt phẳng (P) qua BM đồng thời song song với $B'D'$. Biết mặt phẳng (P) chia khối hộp thành hai khối có thể tích là V_1, V_2 (Trong đó V_1 là thể tích khối chứa A). Tính tỉ số $F = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{7}{17}$. **B.** 1. **C.** $\frac{17}{25}$. **D.** $\frac{8}{17}$.

Hướng dẫn giải:

*Gọi N là trung điể A'D'. Khi đó $(P) \equiv BDNM$).

Thấy BM∩DN∩AA’=I.

Khi đó: V_1=V(A’MNABD); V_2=V-V_1. (Với V là thể tích hình hộp)

* Ta có: $\dfrac{V(IA'MN)}{V(AA'B'D')}=\dfrac{S(AMN)}{S(A'B'D')}=\dfrac{1}{4}$

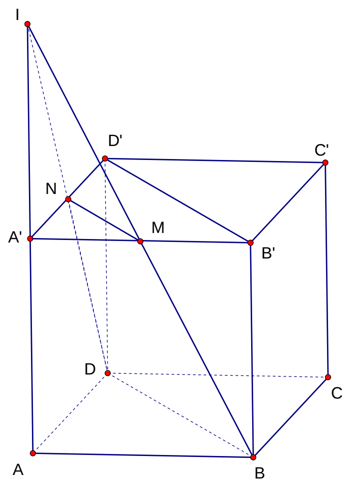
* Mà: $\dfrac{V(AA'B'D')}{V}=\dfrac{1}{6}$ nên có: $V(IA'MN)=\dfrac{1}{24}V$

* Lại có: $\dfrac{V(IA'MN)}{V(IABD)}=\dfrac{IA'.IM.IN}{IA.IB.ID}=\dfrac{1}{8}$

*Vậy: $V(IABD)=\dfrac{1}{3}V$

* Do đó: $V_1=\dfrac{1}{3}V-\dfrac{1}{24}V=\dfrac{7}{24}V$ nên $V_2=V-V_1=\dfrac{17}{24}V$.

Vậy: $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{17}$



Chọn A.

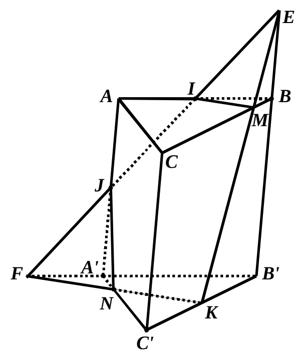
Câu 26: Cho khối lăng trụ tam giác *ABC. A’B’C’*. Gọi *I, J, K* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *AA’* và *B’C’*. Mặt phẳng (*IJK*) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

A. $\dfrac{25}{47}$. **B. 1.** **C.** $\dfrac{49}{95}$. **D.** $\dfrac{8}{17}$.

Hướng dẫn giải:

Chứng minh $EI = IJ = JF$. Từ đó suy ra

$\dfrac{EB}{EB'}=\dfrac{EM}{EK}=\dfrac{FA'}{FB'}=\dfrac{1}{3}$. Lại từ đó suy ra $\dfrac{FN}{FK}=\dfrac{1}{2}$.



Ta có: $d(K, A'B') = (1/2)d(C', A'B')$, $FB' = (3/2)A'B'$. Suy ra $S_{KFB'} = (3/4)S_{A'B'C'}$.

Mặt khác vì $\dfrac{EB}{EB'}=\dfrac{1}{3}$ nên suy ra $d(E, (KFB')) = (3/2)h$ (h là chiều cao lăng trụ).

Do đó $V_{EKFB'} = (3/8)V$ (V là thể tích lăng trụ).

$\dfrac{V_{EBIM}}{V_{EB'FK}}=\dfrac{EI}{EF}.\dfrac{EM}{EK}.\dfrac{EB}{EB'}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$ nên $V_{EBIM}=\dfrac{1}{27}.\dfrac{3}{8}V=\dfrac{1}{72}V$.

$\dfrac{V_{FA'JN}}{V_{FB'EK}}=\dfrac{FJ}{FE}.\dfrac{FA'}{FB'}.\dfrac{FN}{FK}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{18}$ nên $V_{FA'JN}=\dfrac{1}{18}.\dfrac{3}{8}V=\dfrac{1}{48}V$.

Mặt phẳng (*IJK*) chia khối lăng trụ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần chứa điểm *B*' và V_2 là thể tích phần chứa điểm *C*.

Ta có $V_1 = (3/8 - 1/72 - 1/48)V = (49/144)V$ nên $V_2 = (95/144)V$.

Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{49}{95}$.

Chọn C.

CỰC TRỊ TỈ LỆ THỂ TÍCH

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{60}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{4}{15}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Đặt $V = V_{S.ABCD}$, ta có: $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 3 + 5 = 8$.

Đặt $x = \frac{SB'}{SB} > 0, y = \frac{SD'}{SD} > 0 \Rightarrow (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15}x \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{30}xV.$$

$$\frac{V_{S.A'D'C'}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{15}y \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{30}yV.$$

Do đó $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30}(x+y) \Rightarrow x + y \geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow k \geq \frac{1}{60}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC' cắt các cạnh SB, SD tại B', D'. Đặt $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng :

A. $\frac{2}{27}$. **B.** $\frac{4}{27}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Đặt $V = V_{S.ABCD} \Rightarrow \dfrac{V_{S.B'C'D'}}{\frac{1}{2}V} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{2}xy$.

$m = \dfrac{1}{2}xy\left(x = \dfrac{SB'}{SB}; y = \dfrac{SD'}{SD}\right)$; $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{SA'}{SA} + \dfrac{SC'}{SC} = 1 + 2 = 3$.

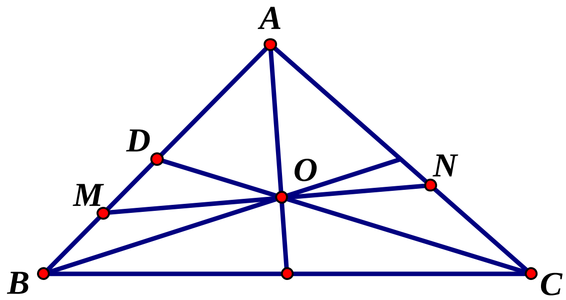
Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow xy \ge \dfrac{4}{9} \Rightarrow m \ge \dfrac{1}{9}$.

Câu 29: Cho khối tứ diện đều $S.ABC$ cạnh bằng a. Mặt phẳng (P) đi qua S và trọng tâm của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Đặt $m = \dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Ta có $m = \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AN}{AC} = xy$.

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC, đặt $x = \dfrac{AM}{AB}; y = \dfrac{AN}{AC}\left(x, y \in [0;1]\right)$

Ta có D là trung điểm của AB, giả sử $AM > AD$ đặt $AB = a$

Áp dụng định lí Meneleuys cho tam giác ACD có $\dfrac{MD}{MA}.\dfrac{OC}{OD}.\dfrac{NA}{NC} = 1$.

$\Rightarrow \dfrac{xa - \frac{a}{2}}{xa}.2.\dfrac{ya}{a - ya} = 1 \Leftrightarrow (2x-1)y = x(1-y) \Leftrightarrow 3xy = x + y \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow m = xy \ge \dfrac{4}{9}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng qua A và trung điểm N cạnh SC cắt cạnh SB, SD lần lượt tại M, P. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\dfrac{V}{8}$. **B.** $\dfrac{3V}{8}$. **C.** $\dfrac{V}{4}$. **D.** $\dfrac{V}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có $x = \dfrac{SA}{SA} = 1, y = \dfrac{SM}{SB}, z = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}, t = \dfrac{SP}{SD}$.

Và $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{t}=1+2=3$.

Do đó $V_{S.AMNP}=\frac{xyzt}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)V=\frac{1}{4}(3+3)yt.1.\frac{V}{2}=\frac{3}{4}ytV$.

Mặt khác $yt=\frac{y+t}{3}\geq\frac{2\sqrt{yt}}{3}\Rightarrow yt\geq\frac{4}{9}\Rightarrow V_{S.AMNP}\geq\frac{V}{3}$.

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình hình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại B',D' và đặt $k=\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Tính giá trị lớn nhất của k là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{105}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{4}{15}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Đặt $V=V_{S.ABCD}$, ta có: $\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=3+5=8$.

Đặt $x=\frac{SB'}{SB}>0,y=\frac{SD'}{SD}>0$.

$\frac{V_{S.A'B'C'}}{\frac{1}{2}V}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{15}x\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{30}xV$.

$\frac{V_{S.A'D'C'}}{\frac{1}{2}V}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{15}y\Rightarrow V_{S.A'D'C'}=\frac{1}{30}yV$.

Do đó $k=\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{30}(x+y)$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\leq\frac{1}{4}\Rightarrow y\geq\frac{1}{4}$, từ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8\Rightarrow x=\frac{y}{8-y}$

$\Rightarrow k=\frac{1}{30}(x+y)=\frac{1}{30}\left(\frac{y}{8-y}+y\right)$ với $\frac{1}{4}\leq y\leq 1$. Ta có

$k'=\frac{1}{30}\left(\frac{8}{(8-y)^2}+1\right)>0,\forall y\in\left[\frac{1}{4};1\right]$.

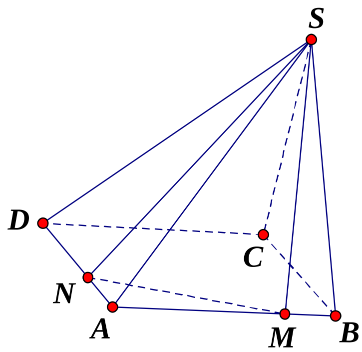
Vậy $k_{\max}=k(1)=\frac{1}{30}\left(\frac{1}{7}+1\right)=\frac{4}{105}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các cạnh AB, AD sao cho $\frac{AB}{AM}+\frac{2AD}{AN}=4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.AMN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V'.

A. $\frac{1}{4}V$ **B.** $\frac{1}{6}V$ **C.** $\frac{1}{8}V$ **D.** $\frac{1}{3}V$

Hướng dẫn giải:

Chọn A



Đặt

$$\frac{AB}{AM}=\frac{1}{x};\frac{AD}{AN}=\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=4\Rightarrow y=\frac{2x}{4x-1}\Rightarrow\frac{1}{4}<x<1$$

$$\frac{V_{SAMN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AD}=\frac{1}{2}xy=\frac{x^2}{4x-1}\Rightarrow V'=\frac{x^2}{4x-1}V$$

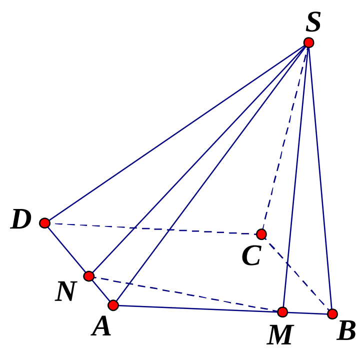
$$\min_{\left(\frac{1}{4};1\right)}\left(\frac{x^2}{4x-1}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các cạnh AB, AD sao cho $\frac{AB}{AM}+\frac{2AD}{AN}=4$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của V'.

A. $\frac{1}{4}V$ **B.** $\frac{2}{3}V$ **C.** $\frac{3}{4}V$ **D.** $\frac{1}{3}V$

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Đặt

$$\frac{AB}{AM}=\frac{1}{x};\frac{AD}{AN}=\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=4\Rightarrow y=\frac{2x}{4x-1}\Rightarrow\frac{1}{4}<x<1$$

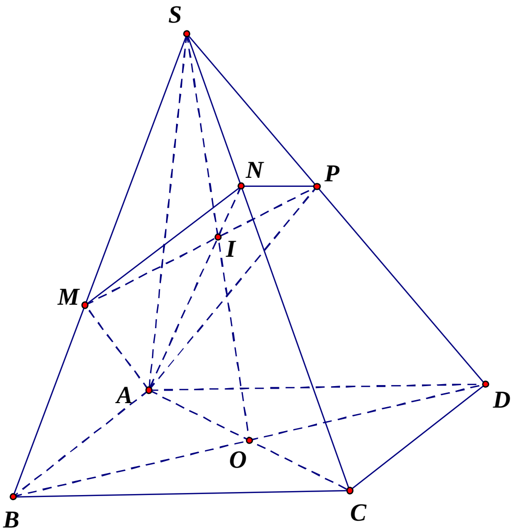
$$\frac{V_{SAMN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AD}=\frac{1}{2}xy=\frac{x^2}{4x-1}\Rightarrow V'=\left(1-\frac{x^2}{4x-1}\right)V$$

$$\max_{\left(\frac{1}{4};1\right)}\left(1-\frac{x^2}{4x-1}\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V, đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (α) đi qua A, trung điểm I của SO cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{V}{18}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{6}$. **D.** $\frac{3V}{8}$.

Hướng dẫn giải:
Chọn C



Với $x=\frac{SA}{SA}=1$, $y=\frac{SM}{SB}=\frac{2}{3}$, $z=\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}$,

$t=\frac{SP}{SD}$ ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{t}$. Xét tam giác SAC

ta có

$\overrightarrow{SO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}\right)\Rightarrow\frac{SO}{SI}\overrightarrow{SI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\frac{SC}{SN}\overrightarrow{SN}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{SI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\frac{1}{z}\overrightarrow{SN}\right)$

Mặt khác 3 điểm A,I,N thẳng hàng nên

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4z}=1\Rightarrow z=\frac{1}{3}$.

Vậy

$V_{S.AMNP}=\frac{xyzt}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)V=f\left(t\right)=\frac{2t^2}{3\left(4t-1\right)}V\geq\min_{\left[\frac{1}{4};1\right]}f\left(t\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{V}{6}$

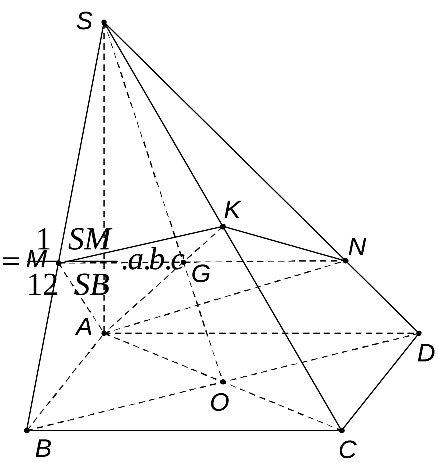
Dấu bằng xảy ra khi $t=\frac{1}{2};y=\frac{1}{2}$ tức $\left(\alpha\right)$ đi qua trung điểm của SB,SD.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD,SA$ là đường cao, đáy là hình chữ nhật với $SA=a,AB=b,AD=c.$ Trong mặt phẳng $\left(SDB\right)$ lấy G là trọng tâm tam giác SDB, qua G kẻ đường thẳng d cắt cạnh BS tại M, cắt cạnh SD tại N, mp$\left(AMN\right)$ cắt SC tại K. Xác định M thuộc SB sao cho V_{SAMKN} đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

A. $V_{SAMKN\to max}=\frac{abc}{8},V_{SAMKN\to\min}=\frac{abc}{9}$ **B.** $V_{SAMKN\to max}=\frac{abc}{8},V_{SAMKN\to\min}=\frac{abc}{10}$

C. $V_{SAMKN\to max}=\frac{abc}{9},V_{SAMKN\to\min}=\frac{abc}{10}$ **D.** $V_{SAMKN\to max}=\frac{abc}{10},V_{SAMKN\to\min}=\frac{abc}{11}$

Hướng dẫn giải:



Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD.$

Ta có: $SG=\frac{2}{3}SO$ và $K=AG\cap SC$ và K là trung điểm SC

$\frac{V_{SMAK}}{V_{SBAC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SA}{SA}.\frac{SK}{SC}\Rightarrow V_{SMAK}=\frac{1}{2}.\frac{SM}{SB}.V_{SBAC}=\frac{1}{4}\frac{SM}{SB}.V_{SBAC}=\frac{1}{12}\frac{SM}{SB}.a.b.c$

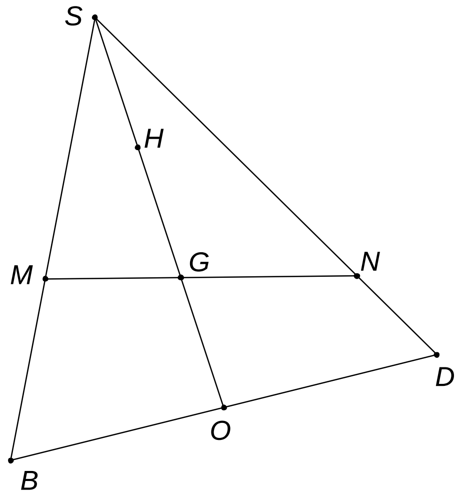
Tương tự $V_{SNAK}=\frac{1}{12}\frac{SN}{SC}.a.b.c$.

Do đó: $V_{SAMKN} = \frac{1}{12}\left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC}\right)a.b.c$

Trong mp (SBD):

$\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{S_{SMG} + S_{SGN}}{2S_{SBO}} = \frac{S_{SMG}}{2S_{SBO}} + \frac{S_{SGN}}{2S_{SBO}} = \frac{SG.SM}{2.SO.SB} + \frac{SG.SN}{2.SO.SB} \Rightarrow \frac{SM.SN}{SB.SC} = \frac{1}{3}\left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC}\right)$

Do M, N lần lượt nằm trên cạnh SB, SD nên: $\frac{SB}{2} \le SM \le SB \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{SM}{SB} \le 1$



Đặt $t = \frac{SM}{SN}, \left(\frac{1}{2} \le t \le 1\right)$ thì

$t.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}\left(t + \frac{SN}{SC}\right) \Leftrightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{t}{3t-1}$.

Nhận thấy V_{SAMKN} đạt GTLN, GTNN nếu:

$f(t) = \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC} = t + \frac{t}{3t-1}$ với $\frac{1}{2} \le t \le 1$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{(3t-1)^2} = \frac{9t^2 - 6t}{(3t-1)^2}$

Nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}, t = 0$ (loại).

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}, f(1) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

Do vậy $V_{SAMKN} = \frac{abc}{8}$ là GTLN khi M là trung điểm SB hoặc M trùng với B.

$V_{SAMKN} = \frac{abc}{9}$ là GTNN khi MB chiếm 1 phần SB.

Chọn A.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của k là?

A. $\frac{4}{105}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{4}{15}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

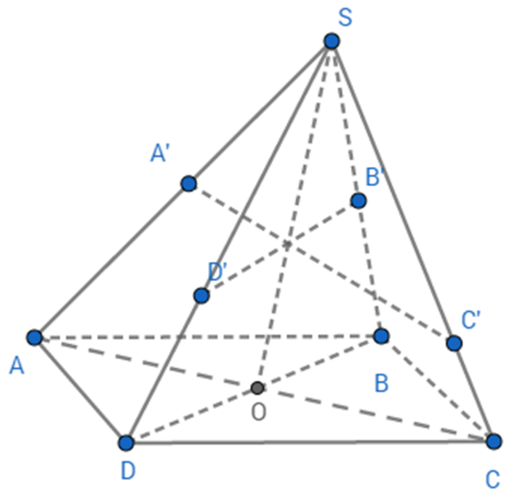
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $V = V_{S.ABCD}$, ta có $\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = 3 + 5 = 8$

Mặt khác $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{\frac{1}{2}V} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{15}x \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{30}xV$

$\dfrac{V_{S.A'C'D'}}{\frac{1}{2}V} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SD'}{SD} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{15}y$



$\Rightarrow V_{S.A'C'D'} = \dfrac{1}{30}yV$

Do đó $k = \dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{30}(x+y)$, trong đó

$x = \dfrac{SB'}{SB}$, $y = \dfrac{SD'}{SD}$

Và

$k = f(x) = \dfrac{1}{30}\left(x + \dfrac{x}{8x-1}\right) \le \max\limits_{\left(\frac{1}{8};1\right]} f(x) = f(1) =$

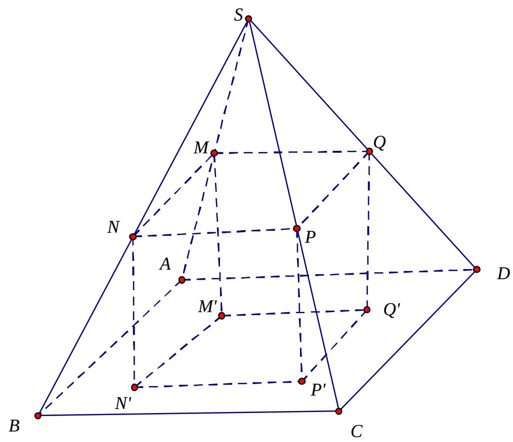
.

Câu 37: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\dfrac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Đặt $\dfrac{SM}{SA} = x$ $(0 < x < 1)$, kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho,

theo Thales ta có: $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SM}{SA} = x$;

và $\dfrac{d(M,(ABCD))}{d(S,(ABCD))} = \dfrac{AM}{SA} = 1 - x$

$\Rightarrow d(M,(ABCD)) = (1-x)h$.

Vì vậy: $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = MN.MQ.d(M,(ABCD))$

$= x^2(1-x).AB.AD.h = 3x^2(1-x)V$.

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$x^2(1-x)=\frac{1}{2}x.x.(2-2x)\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$$

Do đó $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}\le\frac{4}{9}V$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2-2x\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

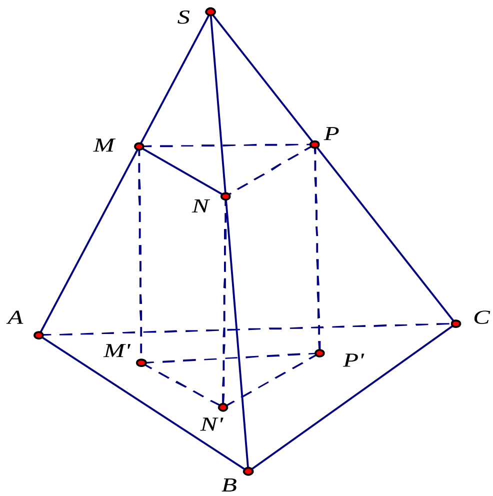
Chọn B.

Câu 38: Cho khối chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNP.M'N'P'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Đặt $\frac{SM}{SA}=x$ $(0<x<1)$, kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho, theo Thales ta có: $\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}=\frac{MP}{CA}=\frac{SM}{SA}=x$;

và $\frac{d(M,(ABC))}{d(S,(ABC))}=\frac{AM}{SA}=1-x$

$\Rightarrow d(M,(ABC))=(1-x)h$; $S_{MNP}=x^2S_{ABC}$.

Vì vậy: $V_{MNP.M'N'P'}=S_{MNP}.d(M,(ABC))$

$=x^2(1-x).S_{ABC}.h=3x^2(1-x)V$.

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$x^2(1-x)=\frac{1}{2}x.x.(2-2x)\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$$

Do đó $V_{MNPQM'N'P'}\le\frac{4}{9}V$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2-2x\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Chọn B.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. G là trọng tâm tam giác SAC.

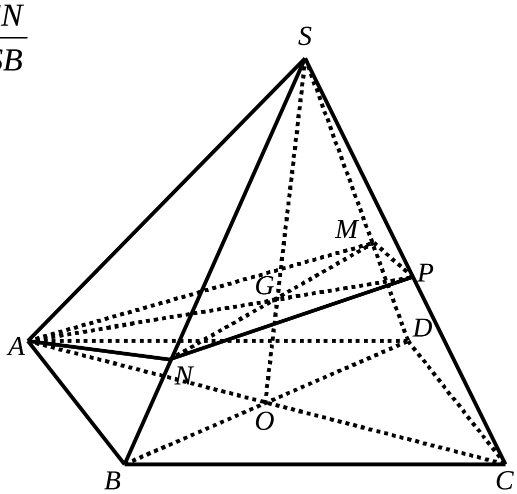
Ta có M,G,N thẳng hàng. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ADC}=V_{S.ABC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Theo công thức tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}}=\frac{SM}{SD}.\frac{SP}{SC}\Leftrightarrow\frac{V_{S.AMP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{SM}{SD}\Leftrightarrow\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\frac{SM}{SD}$$

Tương tự

$$\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}\Leftrightarrow\frac{V_{S.ANP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{SN}{SB}\Leftrightarrow\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\frac{SN}{SB}$$



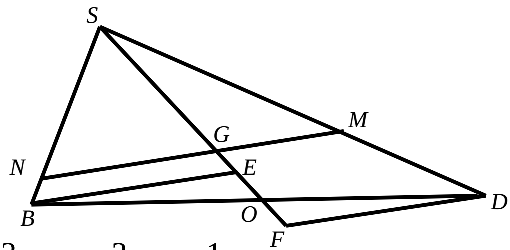
Từ đó suy ra $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}}+\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)$

$$\Rightarrow\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)$$

Hay $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)$

Ta chứng minh $\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=3$.

Thậy vậy, qua B,D kẻ các đường song song với MN cắt SO lần lượt tại E,F.



Ta có: $\frac{SD}{SM}=\frac{SF}{SG};\frac{SB}{SN}=\frac{SE}{SG}\Rightarrow\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=\frac{SE+SF}{SG}$

$$\Rightarrow\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=\frac{2SO}{SG}=2.\frac{3}{2}=3$$

Đặt $\frac{SD}{SM}=x;\frac{SB}{SN}=y$. Ta có $x+y=3$

Mặt khác $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x+y}{4xy}=\frac{3}{4xy}\geq\frac{3}{(x+y)^2}=\frac{1}{3}$

Vậy $\frac{V_1}{V}$ nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=30^\circ$ và $SA=SB=SC=a$. Mặt phẳng (P) qua A cắt hai cạnh SB,SC lần lượt tại B',C' sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Gọi V_1,V_2 lầ lượt là thể tích các khối chóp $S.AB'C',S.ABC$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

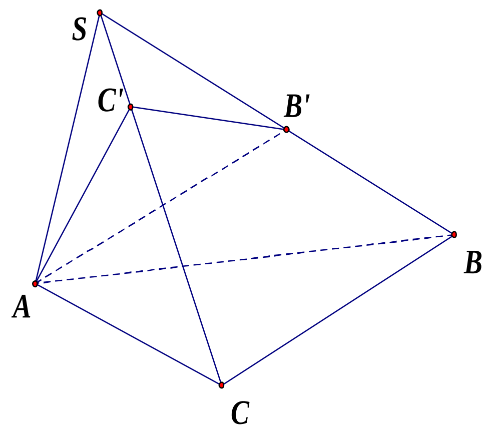
A. $\frac{V_1}{V_2}=3-2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\sqrt{3}-1$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=4-2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\sqrt{2}-1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Đặt $\frac{SB'}{SB}=x,\frac{SC'}{SC}=y\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=x.y$.

Khi đó:



$AB'^2=SA^2+SB'^2-2.SA.SB'.\cos\angle ASB$

$=a^2+(ax)^2-2.a.ax.\cos 30^\circ=a^2\left(1-\sqrt{3}x+x^2\right)$.

$\Rightarrow AB'=a\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}$

Tương tự: $AC'=a\sqrt{1-\sqrt{3}y+y^2}$,

$B'C'=a\sqrt{x^2-\sqrt{3}xy+y^2}$

Ta có:

$2p=AB'+AC'+B'C'$

$=a\left[\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}+\sqrt{1-\sqrt{3}y+y^2}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}xy+y^2}\right]$

$$=a\left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}+\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}\right]$$

$$\geq a\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^2}+a\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}=a(\sqrt{1-x+x^2}+\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}).$$

$$=a\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\geq a\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x=\dfrac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}-y},x=\sqrt{3}-1\Leftrightarrow x=y=\sqrt{3}-1\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$.

Câu 41: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ $\widehat{ASB}=60^\circ$, $\widehat{BSC}=90^\circ$, $\widehat{ASC}=120^\circ$. Gọi M,N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC}=\frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$. **B.** $\frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ à $V_0 = \frac{a^3}{6}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Đặt $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB} = m\left(0 \le m \le 1\right)$, ta có

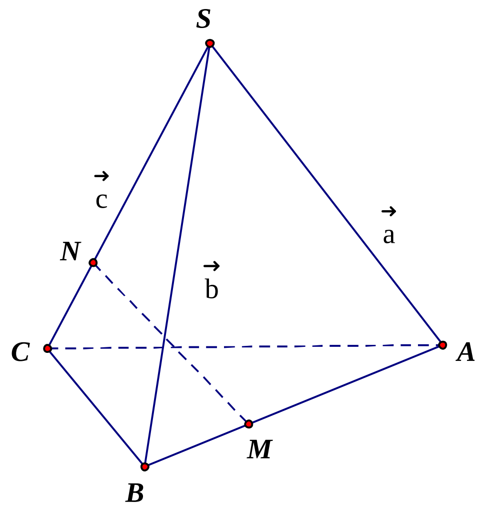
$\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = a$, $\vec{a}.\vec{b} = \frac{a^2}{2}, \vec{b}.\vec{c} = 0, \vec{a}.\vec{c} = -\frac{a^2}{2}$.

Theo đẳng thức trên ta có đẳng thức vectơ

$\overrightarrow{SN} = \left(1-m\right)\vec{c}, \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + m\overrightarrow{AB} = \vec{a} + m\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = \left(1-m\right)\vec{c} - \left[\vec{a} + m\left(\vec{b} - \vec{a}\right)\right]$.

$= \left(m-1\right)\vec{a} - m\vec{b} + \left(1-m\right)\vec{c}$



Do đó

$MN^2 = \left(\left(m-1\right)\vec{a} - m\vec{b} + \left(1-m\right)\vec{c}\right)^2$

$= \left(3m^2 - 5m + 3\right)a^2 \ge \frac{11a^2}{12}$.

Dấu bằng xảy ra tại

$m = \frac{5}{6} \Rightarrow V = \frac{SN}{SC}.V_{S.AMC} = \frac{SN}{SC}.\frac{AM}{AB}.V_0$

$= m\left(1-m\right)V_0 = \frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{2}a^3}{12} = \frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$.

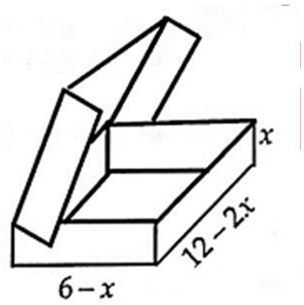
ỨNG DỤNG THỰC TẾ

A – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Kim tự tháp Cheops (có dạng hình chóp) là kim tự tháp cao nhất ở Ai Cập. Chiều cao của kim tự tháp này là $144\,m$, đáy của kim tự tháp là hình vuông có cạnh dài $230\,m$. Các lối đi và phòng bên trong chiếm 30% thể tích của kim tự tháp. Biết một lần vận chuyển gồm 10 xe, mỗi xe chở 6 tấn đá, và khối lượng riêng của đá bằng $2,5.10^3\,kg/m^3$. Số lần vận chuyển đá để xây đủ dựng kim tự tháp là:

A. 740600. **B.** 76040. **C.** 7406. **D.** 74060.

Câu 2: Một hộp đựng chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hộp được dải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị là V_0. Tìm V_0.

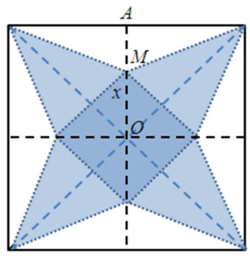


A. 48 đvtt **B.** 16 đvtt **C.** 64 đvtt **D.** $\dfrac{64}{3}$ đvtt

Câu 3: Tính thể tích khối rubic mini (mỗi mặt của rubic có 9 ô vuông), biết chu vi mỗi ô (ô hình vuông trên một mặt) là 4cm.

A. 27 cm^3. **B.** 1728 cm^3. **C.** 1 cm^3. **D.** 9 cm^3.

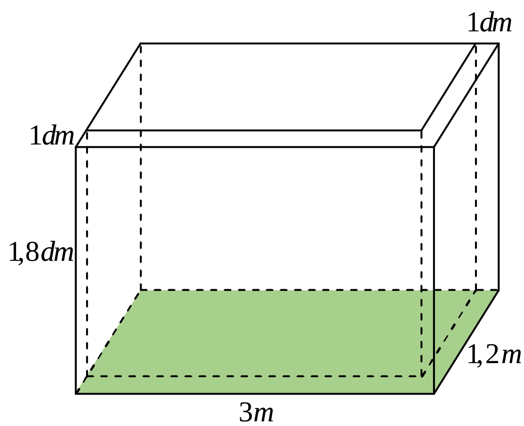
Câu 4: Cắt một miếng giấy hình vuông ở hình 1 và xếp thành một hình chóp tứ giác đều như hình 2. Biết cạnh hình vuông bằng $20cm$, $OM = x\left(cm\right)$. Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất?



A. $x = 9cm$. **B.** $x = 8cm$.

C. $x = 6cm$. **D.** $x = 7cm$.

Câu 5: Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là $3m$; $1,2m$; $1,8m$ (người ta chỉ xây hai mặt thành bể như hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài $20cm$, chiều rộng $10cm$, chiều cao $5cm$. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bể đó và thể tích thực của bể chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng



kể).

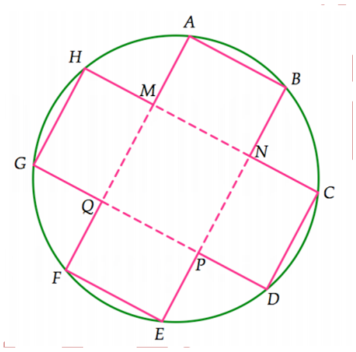
A. 738 viên, 5742 lít. **B.** 730 viên, 5742 lít.

C. 738 viên, 5740 lít. **D.** 730 viên, 5740 lít.

Câu 6: Cho một cây nến hình lăng trụ lục gác đều có chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là 15cm và 5cm. Người ta xếp cây nến trên vào trong một hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho cây nến nằm khít trong hộp. Thể tích của chiếc hộp đó bằng

A. 1500 ml. **B.** $600\sqrt{6}$ ml. **C.** 1800 ml. **D.** $750\sqrt{3}$ ml.

Câu 7: Một miếng bìa hình tròn có bán kính là $20cm$. Trên biên của miếng bìa, ta xác định 8 điểm A,B,C,D,E,F,G,H theo thứ tự chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau. Cắt bỏ theo các nét liền như hình vẽ để có được hình chữ thập $ABNCDPEFQGHM$ rồi gấp lại theo các nét đứt MN,NP,PQ,QM tạo thành một khối hộp không nắp. Thể tích của khối hộp thu được là:



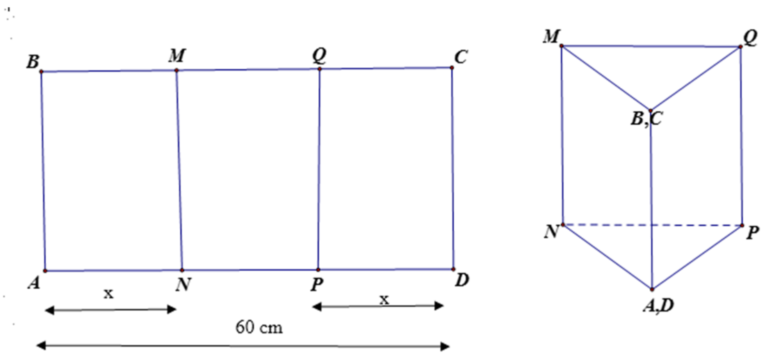
A. $\dfrac{4000\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4000\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^3}{\sqrt{2}}$.

C. $4000\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. **D.** $4000\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^3$.

Câu 8: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD=60cm$, $AB=40cm$. Ta gập tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ bên để dược một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi đó có thể tạo được khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng

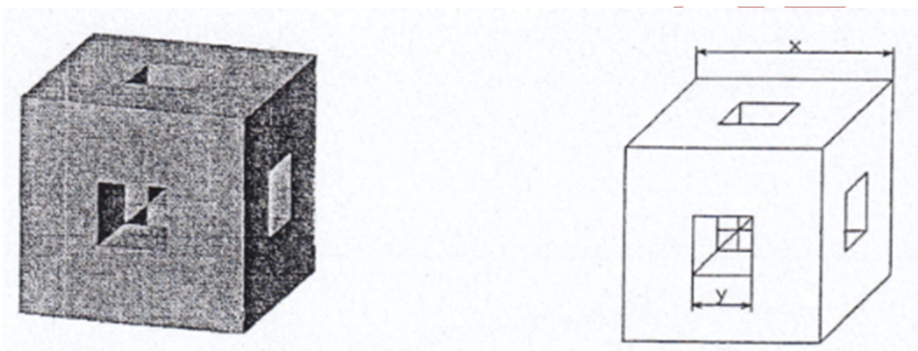
A. $4000\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **B.** $2000\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **C.** $400\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **D.** $4000\sqrt{2}\ \left(cm^3\right)$

Câu 9: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD=60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



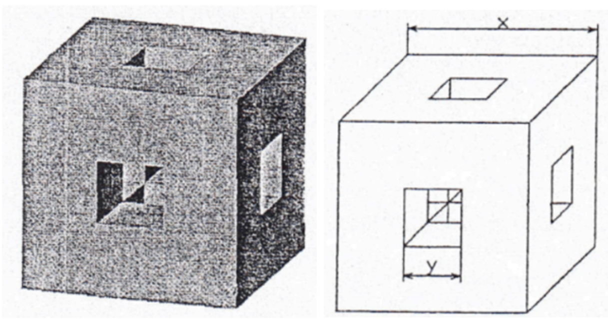
A. $x=20$.   **B.** $x=15$.   **C.** $x=25$.   **D.** $x=30$.

Câu 10: Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng $x(cm)$. Ở chính giữa mỗi mặt của hình lập phương, người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh lỗ hình vuông song song với các cạnh của hình lập phương và có độ dài $y(cm)$ như hình vẽ bên. Tìm thể tích V của khối gỗ sau khi đục biết rằng $x=80\,cm; y=20\,cm$.



A. $490000\,cm^3$.   **B.** $432000\,cm^3$.   **C.** $400000\,cm^3$.   **D.** $390000\,cm^3$.

Câu 11: Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng $x(cm)$.Ở chính giữa mỗi mặt của hình lập phương, người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện,tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương,các cạnh lỗ hình vuông song song với cạnh của hình lập phương và có độ dài $y(cm)$(như hình vẽ bên).Tính tỉ số $\frac{S}{V}$,trong đó V của khối gỗ sau khi đục và S là tổng diện tích mặt (trong và ngoài)khối gỗ sau khi đục.



A. $\frac{S}{V}=\frac{6(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$.   **B.** $\frac{S}{V}=\frac{3(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$.

C. $\frac{S}{V}=\frac{2(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$. **D.** $\frac{S}{V}=\frac{9(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$.

Câu 12: Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V\left(m^3\right)$, hệ số k cho trước (k - tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy). Gọi $x, y, h>0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hố ga. Hãy xác định $x, y, h>0$ xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất. x, y, h lần lượt là

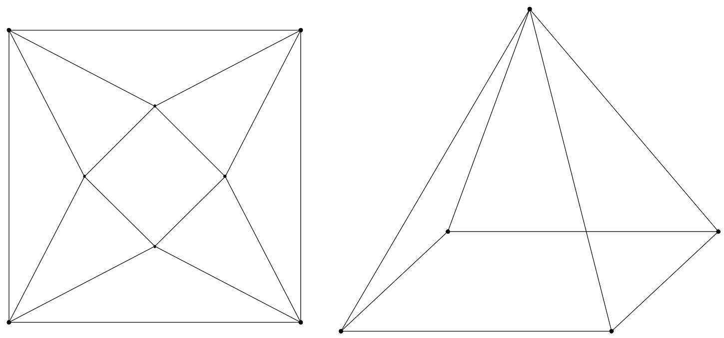
A. $x=2\sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y=\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h=\sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

B. $x=\sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y=\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h=2\sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

C. $x=\sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y=2\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h=\sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

D. $x=\sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y=6\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h=\sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

Câu 13: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt bỏ các tam giác cân bên ngoài của tấm nhôm, phần còn lại gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x(m)$, sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.

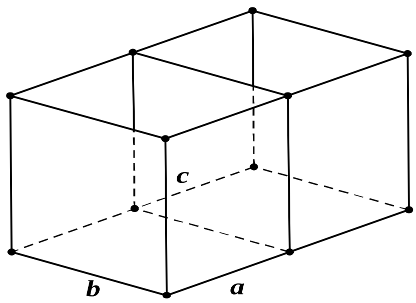


A. $x=\frac{2\sqrt{2}}{5}$ **B.** $x=\frac{1}{2}$ **C.** $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 14: Một viên đá có dạng khối chóp tứ diện đều và tất cả các cạnh đều bằng a, người ta cưa viên đá theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện của viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

A. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **C.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **D.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 15: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với ba kích thước a,b,c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a,b,c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dày của kính không đáng kể.



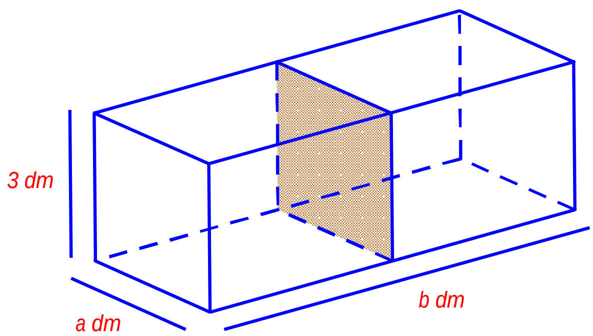
A. $a=3,6m;b=0,6m;c=0,6m$ **B.** $a=2,4m;b=0,9m;c=0,6m$

C. $a=1,8m;b=1,2m;c=0,6m$ **D.** $a=1,2m;b=1,2m;c=0,9m$

Câu 16: Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một hồ nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là h và có thể tích là . Hãy tính chiều cao của hồ nước sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. m **B.** $h=2\ m$ **C.** $h=\frac{3}{2}\ m$ **D.** $h=\frac{5}{2}\ m$

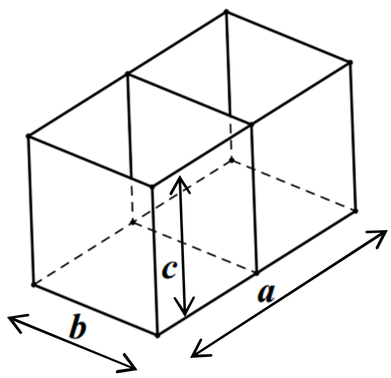
Câu 17: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72dm^3$ và chiều cao là $3dm$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) như hình vẽ.



Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.

A. $a=\sqrt{24},\ b=\sqrt{24}$. **B.** $a=3,\ b=8$. **C.** $a=3\sqrt{2},\ b=4\sqrt{2}$. **D.** $a=4,\ b=6$.

Câu 18: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích 1,296 m^3. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước *a*, *b*, *c* như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước *a*, *b*, *c* bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể.



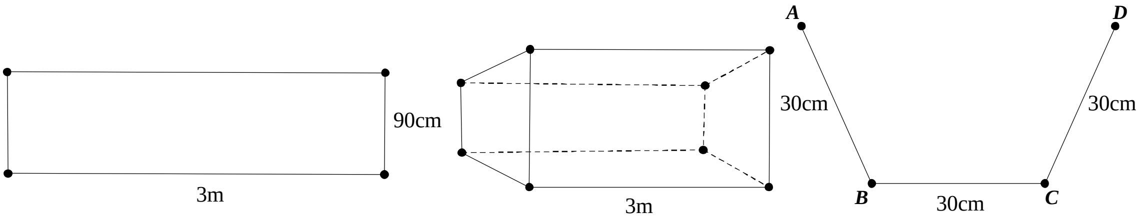
A. $a=3,6m;\ b=0,6m;\ c=0,6m$

B. $a=2,4m;\ b=0,9m;\ c=0,6m$

C. $a=1,8m;\ b=1,2m;\ c=0,6m$

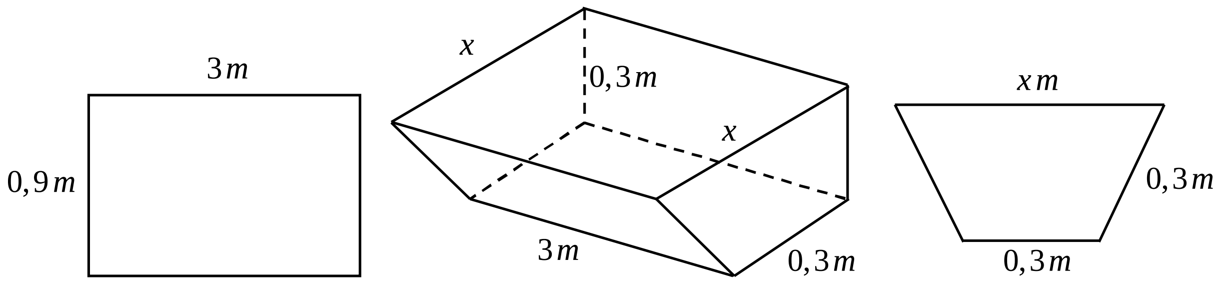
D. $a=1,2m;\ b=1,2m;\ c=0,9m$

Câu 19: Từ một tấm tôn có kích thước 90cmx3m người ta làm một máng xối nước trong đó mặt cắt là hình thang *ABCD* có hinh dưới. Tính thể tích lớn nhất của máng xối.



A. $40500\sqrt{3}cm^3$ **B.** $40500\sqrt{2}cm^3$ **C.** $40500\sqrt{6}cm^3$ **D.** $40500\sqrt{5}cm^3$

Câu 20: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m\times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (bị cắt bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt

A. $x=0,5m$. **B.** $x=0,65m$. **C.** $x=0,4m$. **D.** $x=0,6m$.

Câu 21: Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài $d(m)$ và chiều rộng $r(m)$ với $d=2r$. Chiều cao bể nước là $h(m)$ và thể tích bể là $2m^3$. Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(m)$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(m)$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(m)$. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(m)$.

Câu 22: Một người dự định làm một thùng đựng đồ hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V. Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng

A. $x=V^{\frac{2}{3}}$ **B.** $x=\sqrt[3]{V}$ **C.** $x=V^{\frac{1}{4}}$ **D.** $x=\sqrt{V}$

Câu 23: Nhân ngày quốc tế phụ nữ 8-3 năm 2017, ông A quyết định mua tặng vợ một món quà và đặt nó vào trong một chiếc hộp có thể tích là 32 (đvtt) có đáy hình vuông và không có nắp. Để món quà trở nên thật đặc biệt và xứng đáng với giá trị của nó ông quyết định mạ vàng cho chiếc hộp, biết rằng độ dạy lớp mạ tại mọi điểm trên hộp là như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h;x$. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của $h;x$ phải là?

A. $x=2;h=4$ **B.** $x=4;h=2$ **C.** $x=4;h=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $x=1;h=2$

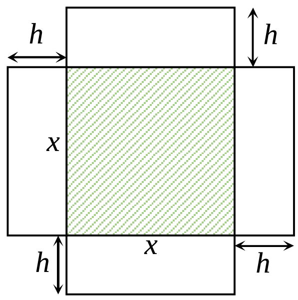
Câu 24: Một ngôi nhà có nền dạng tam giác đều ABC cạnh dài $10(m)$ được đặt song song và cách mặt đất $h(m)$. Nhà có 3 trụ tại A, B, C vuông góc với (ABC). Trên trụ A người ta lấy hai điểm M, N sao cho $AM = x, AN = y$ và góc giữa (MBC) và (NBC) bằng $90°$ để là mái và phần chứa đồ bên dưới. Xác định chiều cao thấp nhất của ngôi nhà.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 25: Một nhà sản xuất sữa có hai phương án làm hộp sữa. Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt(tức diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất), nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định là V cho trước. Khi đó diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất trong hai phương án là

A. $\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **B.** $6\sqrt[3]{V^2}$. **C.** $3\sqrt[3]{6V^2}$. **D.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Câu 26: Một bác thợ gò hàn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thể tích $665,5\ dm^3$. Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh $x(dm)$, chiều cao $h(dm)$. Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm x để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất.



A. $10,5(dm)$. **B.** $12(dm)$. **C.** $11(dm)$. **D.** $9(dm)$.

Câu 27: Một người dự định làm một thùng đựng đồ hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V. Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng

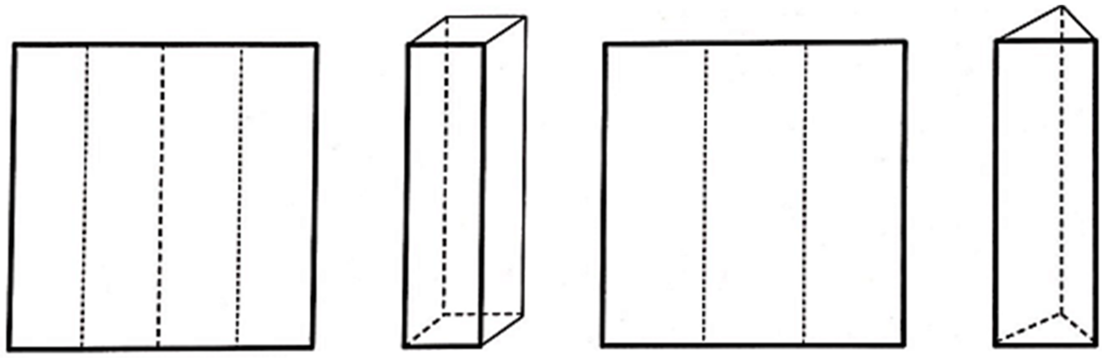
A. $x = V^{\frac{2}{3}}$ **B.** $x = \sqrt[3]{V}$ **C.** $x = V^{\frac{1}{4}}$ **D.** $x = \sqrt{V}$

Câu 28: Người ta muốn xây một bồn chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 5m, 1m, 2m (hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20cm, chiều rộng 10cm, chiều cao 5cm. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bồn đó và thể tích thực của bồn chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể)

A. 1180 viên, 8820 lít **B.** 1180 viên, 8800 lít

C. 1182 viên, 8820 lít **D.** 1180 viên, 8800 lít

Câu 29: Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh là *a*, người ta gấp nó thành 4 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tứ giác đều (như hình vẽ). Từ một mảnh giấy hình vuông khác cũng có cạnh là *a*, người ta gấp nó thành 3 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tam giác đều (như hình vẽ). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của lăng trụ tứ giác đều và lăng trụ tam giác đều. So sánh V_1 và V_2.



A. $V_1 > V_2$ **B.** $V_1 = V_2$ **C.** $V_1 < V_2$ **D.** Không so sánh được

B – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Kim tự tháp Cheops (có dạng hình chóp) là kim tự tháp cao nhất ở Ai Cập. Chiều cao của kim tự tháp này là $144m$, đáy của kim tự tháp là hình vuông có cạnh dài $230m$. Các lối đi và phòng bên trong chiếm 30% thể tích của kim tự tháp. Biết một lần vận chuyển gồm 10 xe, mỗi xe chở 6 tấn đá, và khối lượng riêng của đá bằng $2,5.10^3 kg/m^3$. Số lần vận chuyển đá để xây đủ dựng kim tự tháp là:

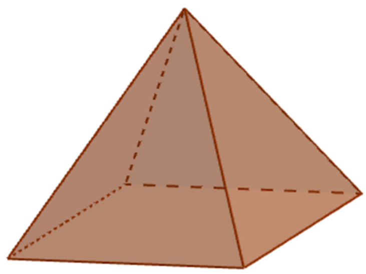
A. 740600. **B.** 76040. **C.** 7406. **D.** 74060.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi cạnh của hình chóp là $a = 230$,chiều cao $h = 144$

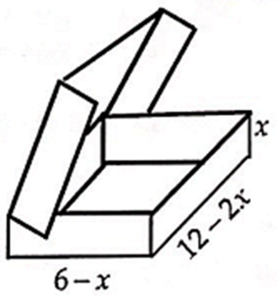
Thể tích kim tự tháp: $V = \frac{1}{3}ha^2 = 2\,539\,200m^3$



Thể tích khối đá cần vận chuyển $0.7V = 1\,777\,440m^3$.

Gọi x là số lần vận chuyển. Để đủ đá xây dựng kim tự tháp thì

Câu 2: Một hộp đựng chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hộp được dải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị là V_0. Tìm V_0.



A. 48 đvtt **B.** 16 đvtt **C.** 64 đvtt **D.** $\frac{64}{3}$ đvtt

Hướng dẫn giải:

Phân tích: Đây là một dạng bài toán ứng dụng thực thể kết hợp với cả phần tính thể tích khối đa diện ở hình học và phần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một đa thức đã học ở chương I phần giải thích.

Trước tiên ta nhận thấy

$$V = (6-x)(12-2x)x = 2x(x-6)^2$$

$$= 2x(x^2 - 12x + 36) = 2x^3 - 24x^2 + 72x$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 72x$ trên $(0;6)$

$f'(x)=6x^2-48x+72;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=2\end{array}\right.$

Khi đó $\max\limits_{(0;6)} f(x)=f(2)=64$ đvtt. Đến đây nhiều quý độc gỉ vội vã khoanh C mà không đắn đo gì. Tuy nhiên, nếu vội vã như vậy là bạn đã sai, bởi đề bài yêu cầu tìm thể tích chocolate nguyên chất mà không phải là thể tích hộp do đó ta cần. Tức là $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ thể tích hộp. tức là $\frac{3}{4}.64=48$ đvtt

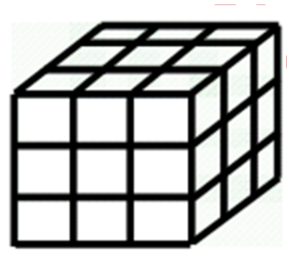
Câu 3: Tính thể tích khối rubic mini (mỗi mặt của rubic có 9 ô vuông), biết chu vi mỗi ô (ô hình vuông trên một mặt) là 4cm.

A. 27 cm^3. **B.** 1728 cm^3. **C.** 1 cm^3. **D.** 9 cm^3.

Hướng dẫn giải:

Đây là một bài toán ăn điểm, nhưng nếu đọc không kĩ từng câu chữ trong đề bài các độc giả rất có thể sai

Ta có khối rubic như sau:



Hướng sai 1: Nghĩ rằng mỗi cạnh của ô vuông là 4 nên chiều dài mỗi cạnh của khối rubic là

$a=4.3=12\Rightarrow V=12^3=1728\Rightarrow B$

Hướng sai 2: Nghĩ rằng chu vi mỗi ô vuông là tổng độ dài của cả 12 cạnh nên chiều dài mỗi cạnh là $\frac{1}{3}$, nên độ dài của khối rubik là $a=\frac{1}{3}.3=1\Rightarrow V=1^3=1\Rightarrow C$

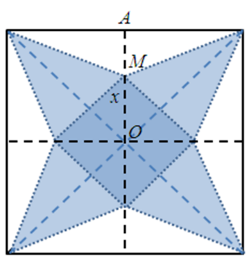
Hướng sai 3: Nhầm công thức thể tích sang công thức tính diện tích nên suy ra ý **D.**

Cách làm đúng: Chu vi của một ô nhỏ là 4 cm nên độ dài mỗi cạnh nhỏ là 1cm, vậy độ dài cạnh của khối rubic là

$a=3.1=3cm\Rightarrow V=3.3.3=27\,cm^3$.

Chọn A.

Câu 4: Cắt một miếng giấy hình vuông ở hình 1 và xếp thành một hình chóp tứ giác đều như hình 2. Biết cạnh hình vuông bằng $20cm$, $OM=x(cm)$. Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất?



A. $x=9cm$. **B.** $x=8cm$.

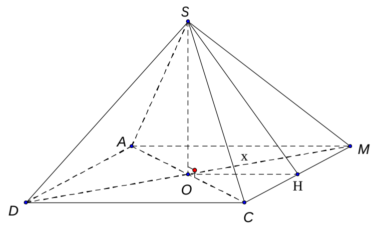
C. $x=6cm$. **D.** $x=7cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có: $OM = x \Rightarrow AC = 2x$, $AM = \sqrt{2}x$.

Suy ra: $OH = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $MH = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $SH = 10\sqrt{2} - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.



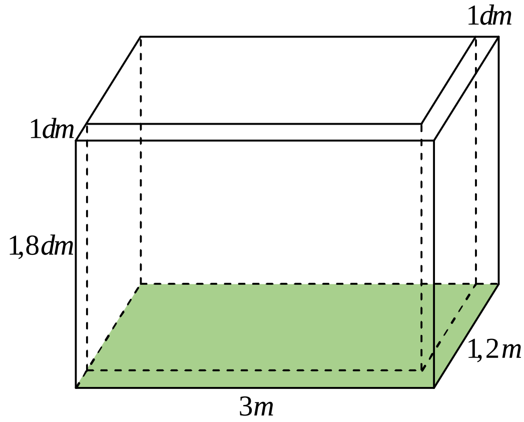
$$SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{20(10-x)}$$

$$V = \frac{1}{3}SO.S_{đáy} = \frac{1}{3}\sqrt{20(10-x)}.2x^2 = \frac{\sqrt{20}}{3}\sqrt{40-4x}.x^2$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\sqrt{20}}{3}\sqrt{(40-4x).x.x.x.} \le \frac{\sqrt{20}}{3}\sqrt{\left(\frac{40-4x+x+x+x+x}{5}\right)^5} = \frac{\sqrt{20}}{3}.2^{\frac{15}{2}}$$

Dấu "=" xảy ra khi $40 - 4x = x \Leftrightarrow x = 8$.

Câu 5: Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là $3m$; $1,2m$; $1,8m$ (người ta chỉ xây hai mặt thành bể như hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài $20cm$, chiều rộng $10cm$, chiều cao $5cm$. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bể đó và thể tích thực của bể chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể).



A. 738 viên, 5742 lít. **B.** 730 viên, 5742 lít.

C. 738 viên, 5740 lít. **D.** 730 viên, 5740 lít.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Thể tích của bể là $V = 18.11.29 = 5742(l)$.

Thể tích của 1 viên gạch là $1dm^3$, thể tích cần xây dựng là $(30+11).18 = 738dm^3$, suy ra số viên ít nhất cần dùng là 738 viên.

Câu 6: Cho một cây nến hình lăng trụ lục gác đều có chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là 15cm và 5cm. Người ta xếp cây nến trên vào trong một hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho cây nến nằm khít trong hộp. Thể tích của chiếc hộp đó bằng

A. 1500 ml. **B.** $600\sqrt{6}$ ml. **C.** 1800 ml. **D.** $750\sqrt{3}$ ml.

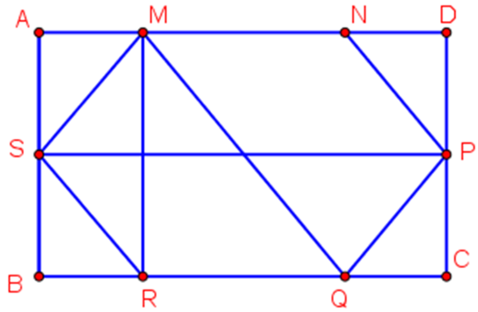
Hướng dẫn giải:

Ta có $AB = 10$ cm, $AD = 5\sqrt{3}$ cm

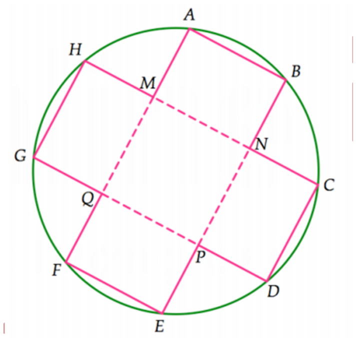
$S_{ABCD} = 50\sqrt{3}$

$V = S_{ABCD}.h = 750\sqrt{3}$

Chọn D



Câu 7: Một miếng bìa hình tròn có bán kính là $20cm$. Trên biên của miếng bìa, ta xác định 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H theo thứ tự chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau. Cắt bỏ theo các nét liền như hình vẽ để có được hình chữ thập $ABNCDPEFQGHM$ rồi gấp lại theo các nét đứt MN, NP, PQ, QM tạo thành một khối hộp không nắp. Thể tích của khối hộp thu được là:



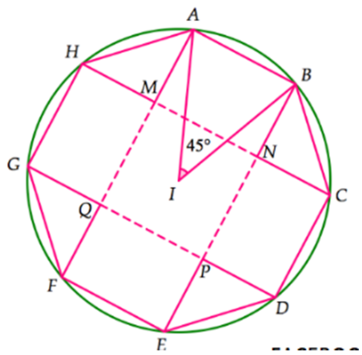
A. $\dfrac{4000\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

B. $\dfrac{4000\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^3}{\sqrt{2}}$.

C. $4000\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

D. $4000\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^3$.

Hướng dẫn giải:



Chọn C.

Theo giả thuyết ta có

$$AB = CD = EF = GH = MN = NP = PQ = QM = 2r\sin\frac{2\pi}{8.2}$$

$$= 40\sin\frac{\pi}{8} = 40\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = 20\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Và

$$MH = MA = NB = NC = PD = PE = QG = QH = \frac{AH}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

Vì vậy $V = MN.MQ.MA = \left(\sqrt{20\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^2 .10\sqrt{4-2\sqrt{2}} = 4000\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Câu 8: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60cm$, $AB = 40cm$. Ta gập tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi đó có thể tạo được khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng

A. $4000\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **B.** $2000\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **C.** $400\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **D.** $4000\sqrt{2}\ \left(cm^3\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

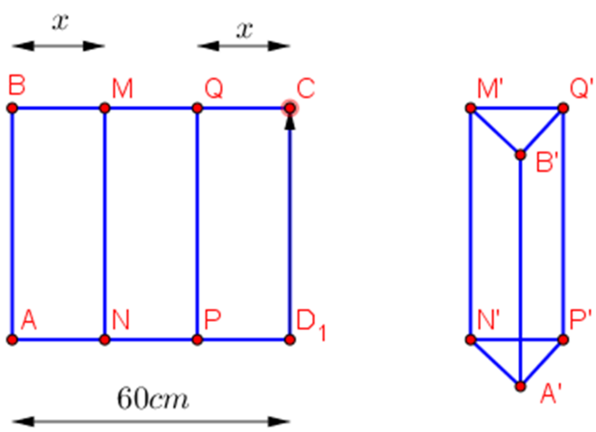
Đáy của lăng trụ là tam giác cân có cạnh bên bằng x, cạnh đáy bằng $60-2x$

Đường cao tam giác đó là

$$AH = \sqrt{x^2 - \left(\frac{60-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{60x-900},$$

với H là trung điểm NP

Diện tích đáy là

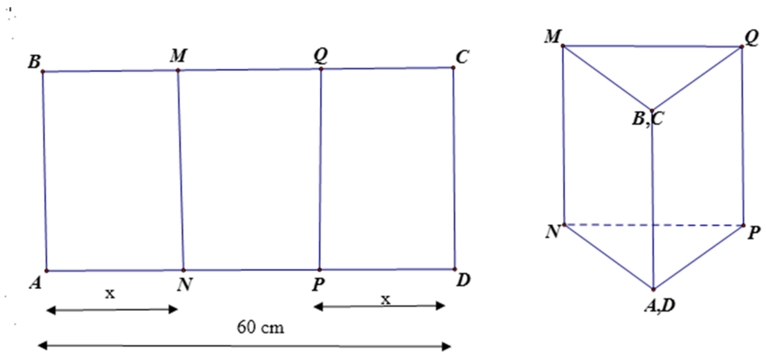


$$S = S_{ANP} = \frac{1}{2}AH.NP = \sqrt{60x-900}.(30-x) = \frac{1}{30}\sqrt{(60x-900)(900-30x)(900-30x)}$$

$$\Rightarrow S \le \frac{1}{30}\sqrt{\left(\frac{900}{3}\right)^3} = 100\sqrt{3}\left(cm^2\right)$$

Diện tích đáy lớn nhất là $100\sqrt{3}cm^2$ nên thể tích lớn nhất là $V = 40.100\sqrt{3} = 4000\sqrt{3}\left(cm^3\right)$.

Câu 9: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



A. $x = 20$. **B.** $x = 15$. **C.** $x = 25$. **D.** $x = 30$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

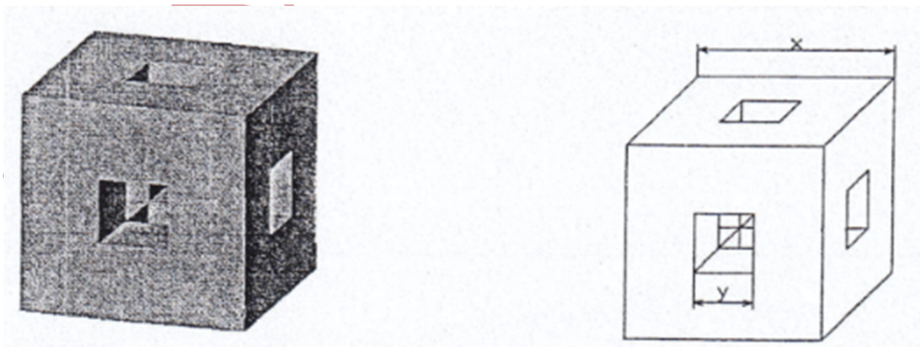
Ta có $PN = 60 - 2x$, gọi H là trung điểm của PN suy ra $AH = \sqrt{60x - 900}$

$S_{\Delta ANP} = \frac{1}{2}.(60-2x)\sqrt{60x-900} = (60-2x)\left(\sqrt{15x-225}\right) = f(x)$, do chiều cao của khối lăng trụ không đổi nên thể tích khối lăng trụ max khi $f(x)$ max.

$f'(x) = \frac{-45(x-20)}{\sqrt{15x-225}} = 0 \Leftrightarrow x = 20,\ f(20) = 100\sqrt{3},\ f(15) = 0$

$\max f(x) = 100\sqrt{3}$ khi $x = 20$

Câu 10: Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng $x(cm)$. Ở chính giữa mỗi mặt của hình lập phương, người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh lỗ hình vuông song song với các cạnh của hình lập phương và có độ dài $y(cm)$ như hình vẽ bên. Tìm thể tích V của khối gỗ sau khi đục biết rằng $x = 80\,cm; y = 20\,cm$.



A. $490000\,cm^3$. **B.** $432000\,cm^3$. **C.** $400000\,cm^3$. **D.** $390000\,cm^3$.

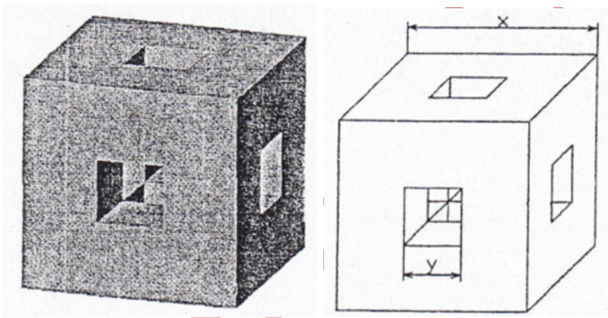
Hướng dẫn giải:

Chọn B

Thể tích cần tìm bằng thể tích khối lập phương ban đầu trừ đi 6 khối hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh $y(cm)$, chiều cao $\frac{x-y}{2}(cm)$; rồi trừ đi thể tích khối lập phương có độ dài cạnh bằng $y(cm)$. Vì vậy,

$$V = x^3 - 6\left(\frac{x-y}{2}\right)y^2 - y^3 = 80^3 - 6.\frac{80-20}{2}.20^2 - 20^3 = 432000\left(cm^3\right).$$

Câu 11: Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng $x(cm)$.Ở chính giữa mỗi mặt của hình lập phương, người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện,tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương,các cạnh lỗ hình vuông song song với cạnh của hình lập phương và có độ dài $y(cm)$(như hình vẽ bên).Tính tỉ số $\frac{S}{V}$,trong đó V của khối gỗ sau khi đục và S là tổng diện tích mặt (trong và ngoài)khối gỗ sau khi đục.



A. $\frac{S}{V} = \frac{6(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$.   **B.** $\frac{S}{V} = \frac{3(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$.

C. $\frac{S}{V} = \frac{2(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$.   **D.** $\frac{S}{V} = \frac{9(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Thể tích hình cần tính bằng thể tích khối lập phương ban đầu trừ đi 6 khối hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh $y\,cm$,chiều cao $\frac{x-y}{2}\,cm$,rồi trừ đi thể tích khối lập phương có độ dài cạnh bằng $y\,cm$.

Vì vậy: $V = x^3 - 6\left(\frac{x-y}{2}\right)y^2 - y^3 = (x-y)^2(x+2y)$.

Tổng diện tích các mặt của khối gỗ sau khi đục là $V = 6\left(x^2 - y^2\right) + 6.4.\frac{y(x-y)}{2} = 6(x-y)(x+3y)$

Vậy $\frac{S}{V} = \frac{6(x+3y)}{(x-y)(x+2y)}$.

Chọn A

Câu 12: Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V\left(m^3\right)$, hệ số k cho trước (k - tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy). Gọi $x, y, h > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hố ga. Hãy xác định $x, y, h > 0$ xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất. x, y, h lần lượt là

A. $x = 2\sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = \sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

B. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = \sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = 2\sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

C. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = 2\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

D. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = 6\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

Hướng dẫn giải:

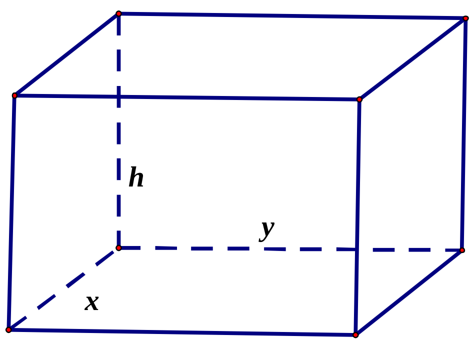
Chọn C.

Gọi $x, y, h\,(x, y, h > 0)$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hố ga.

Ta có: $k = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = kx$ và $V = xyh \Leftrightarrow y = \frac{V}{xh} = \frac{V}{kx^2}$.

Nên diện tích toàn phần của hố ga là:

$$S = xy + 2yh + 2xh = \frac{(2k+1)V}{kx} + 2kx^2$$

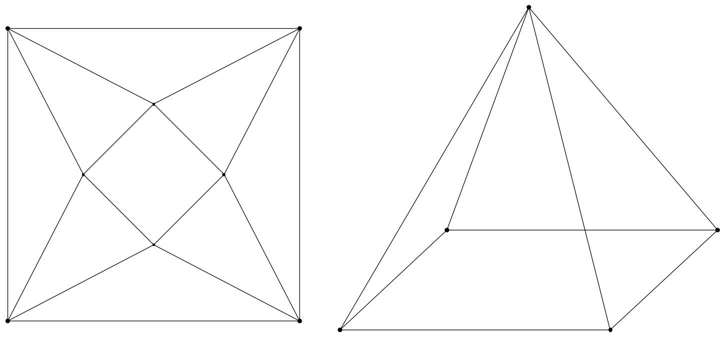


Áp dụng đạo hàm ta có S nhỏ nhất khi

$$x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}$$

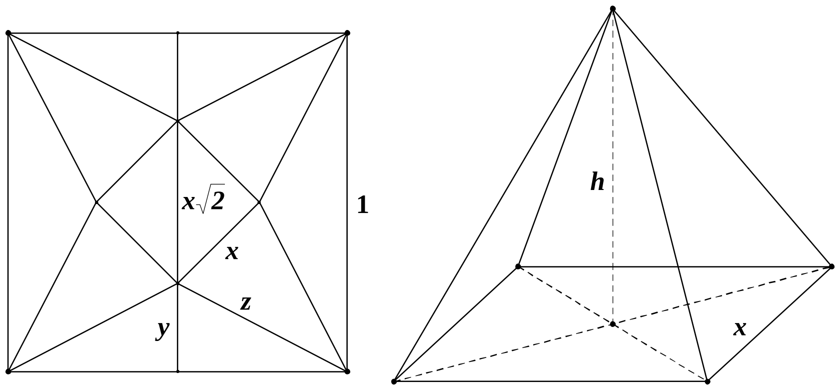
Khi đó $y = 2\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}, h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

Câu 13: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt bỏ các tam giác cân bên ngoài của tấm nhôm, phần còn lại gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x\,(m)$, sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ **B.** $x=\dfrac{1}{2}$ **C.** $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải:



Ta có: $y=\dfrac{1-\sqrt{2}x}{2}\Rightarrow z=\sqrt{\dfrac{1}{4}+y^2}$

Chiều cao của hình chóp: $h=\sqrt{z^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+y^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x}$

$\Rightarrow V_{chop}=\dfrac{1}{3}x^2.\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x}$

V_{chop} lớn nhất khi hàm số $y=x^2\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x}$ đạt GTLN

$y'=\dfrac{-5\sqrt{2}x^2+4x}{4\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x}}$

$y'=0\Leftrightarrow -5\sqrt{2}x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\end{array}\right.$

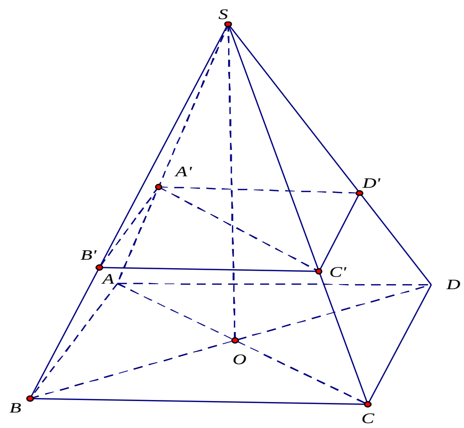
Chọn A.

Câu 14: Một viên đá có dạng khối chóp tứ diện đều và tất cả các cạnh đều bằng a, người ta cưa viên đá theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện của viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

A. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **C.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **D.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Hướng dẫn giải:

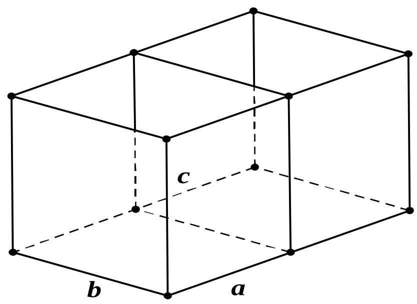
Chọn D.



Từ giả thiết $\Rightarrow V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{2}V_{S.ABC}$ (Do khối chóp tứ giác đều)

$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} = \left(\frac{SA'}{SA}\right)^3 \Rightarrow SA' = \frac{SA}{\sqrt[3]{2}} = \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow A'B' = SA' = \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow S_{td} = A'B'^2 = \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}.$$

Câu 15: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với ba kích thước a,b,c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a,b,c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dày của kính không đáng kể.



A. $a = 3,6m; b = 0,6m; c = 0,6m$ **B.** $a = 2,4m; b = 0,9m; c = 0,6m$

C. $a = 1,8m; b = 1,2m; c = 0,6m$ **D.** $a = 1,2m; b = 1,2m; c = 0,9m$

Hướng dẫn giải:

Với a là chiều dài của cả 2 ngăn của bể cá. Ta có: $V = abc = 1,296$ (1)

$$S = 2\left(\frac{a}{2}c + bc\right) + \frac{a}{2}b + 2\frac{a}{2}c + bc + \frac{a}{2}b = 2ac + 3bc + ab = 2\frac{abc}{b} + 3\frac{abc}{a} + \frac{abc}{c} \geq abc3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{2}{a}=\frac{3}{a}=\frac{1}{c}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}b\\c=\frac{b}{2}\end{cases}$

Thay vào $(1):\frac{3}{4}b^3=1,296\Leftrightarrow b^3=\frac{1,296.4}{3}\Rightarrow b=\frac{6}{5};a=1,8;c=0,6.$

Chọn C.

Câu 16: Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một hồ nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là h và có thể tích là . Hãy tính chiều cao của hồ nước sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. m **B.** $h=2\ m$ **C.** $h=\frac{3}{2}\ m$ **D.** $h=\frac{5}{2}\ m$

Hướng dẫn giải:

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hình hộp

Theo đề bài ta có $y=3x$ và $V=hxy\Rightarrow h=\frac{V}{xy}=\frac{V}{3x^2}$

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của hồ

nước là nhỏ nhất.

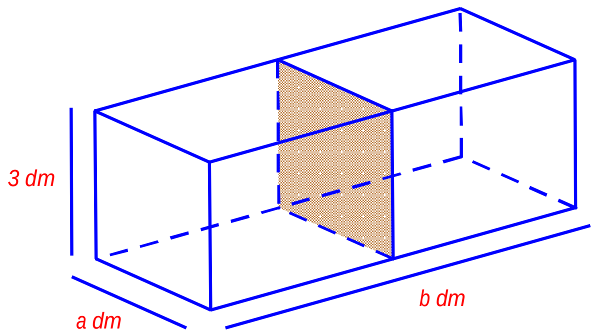
Khi đó ta có: $S_{tp}=2xh+2yh+xy=2x\frac{V}{3x^2}+2.3x.\frac{V}{3x^2}+x.3x=\frac{8V}{3x}+3x^2$

Ta có $S_{tp}=\frac{8V}{3x}+3x^2=\frac{4V}{3x}+\frac{4V}{3x}+3x^2\overset{Cauchy}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{16V^2}{3}}=36$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4V}{3x}=3x^2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{4V}{9}}=2\Rightarrow h=\frac{V}{3x^2}=\frac{3}{2}$.

Vậy chọn **C.**

Câu 17: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72dm^3$ và chiều cao là $3dm$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước $a,\ b$ (đơn vị dm) như hình vẽ.



Tính $a,\ b$ để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.

A. $a=\sqrt{24},\ b=\sqrt{24}$. **B.** $a=3,\ b=8$. **C.** $a=3\sqrt{2},\ b=4\sqrt{2}$. **D.** $a=4,\ b=6$.

Chọn D.

Có: $V=72 \Leftrightarrow 3.ab=72 \Leftrightarrow a=\dfrac{24}{b}$ (1)

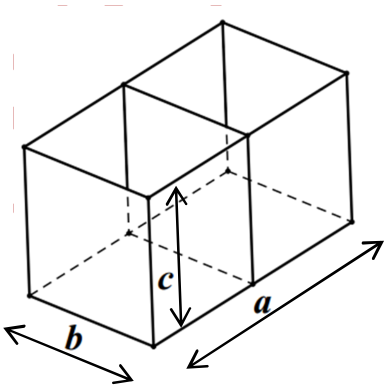
Bể cá tốn ít nguyên liệu nhất nghĩa là diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có diện tích toàn phần của bể cá là: $S_{tp}=3.3a+ab+2.b3=\dfrac{216}{b}+6b+24$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $S_{tp}=\dfrac{216}{b}+6b+24\geq 2\sqrt{\dfrac{216}{b}.6b}+24=96$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{216}{b}=6b \Leftrightarrow b=6\left(b>0\right)$. Từ (1), ta suy ra: $a=4$.

Câu 18: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích 1,296 m³. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước *a, b, c* như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước *a, b, c* bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể.



A. $a=3,6m;\ b=0,6m;\ c=0,6m$

B. $a=2,4m;\ b=0,9m;\ c=0,6m$

C. $a=1,8m;\ b=1,2m;\ c=0,6m$

D. $a=1,2m;\ b=1,2m;\ c=0,9m$

Hướng dẫn giải:

Thể tích bể cá là: $V=abc=1,296$

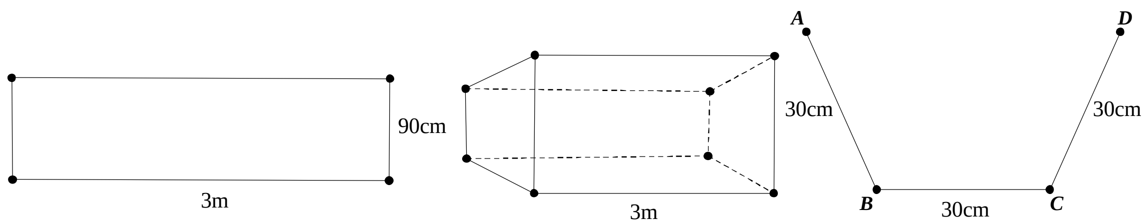
Diện tích tổng các miếng kính là $S=ab+2ac+3bc$ (kể cả miếng ở giữa)

Ta có: $\dfrac{S}{abc}=\underbrace{\dfrac{1}{c}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{a}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{c}.\dfrac{2}{b}.\dfrac{3}{a}}}_{Cauchy\ cho\ 3\ so\ \frac{1}{c},\frac{2}{b},\frac{3}{a}}=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt{abc}}=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt{1,296}}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{3}{a}\\ abc=1,296\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1,8\\ b=1,2\\ c=0,6\end{cases}$.

Chọn C.

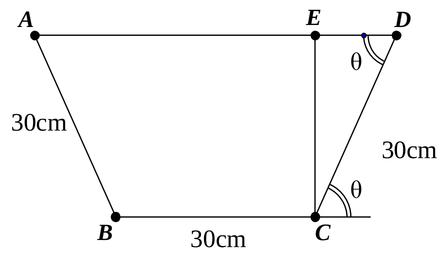
Câu 19: Từ một tấm tôn có kích thước 90cmx3m người ta làm một máng xối nước trong đó mặt cắt là hình thang *ABCD* có hinh dưới. Tính thể tích lớn nhất của máng xối.



A. $40500\sqrt{3}cm^3$ **B.** $40500\sqrt{2}cm^3$ **C.** $40500\sqrt{6}cm^3$ **D.** $40500\sqrt{5}cm^3$

Thể tích máng xối: $V = S_{ABCD}.300\ (cm^2)$.

Vậy thể tích lớn nhất khi diện tích hình thang là lớn nhất.



$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD).CE$

$CE = CD\sin\theta = 30.\sin\theta$

$AD = BC + 2ED = 30 + 60\cos\theta$

$S_{ABCD} = 90\sin\theta + \frac{90}{2}\sin 2\theta$

Đặt $f(\theta) = 90\sin\theta + \frac{90}{2}\sin 2\theta \qquad ,\theta \in [0;\pi]$

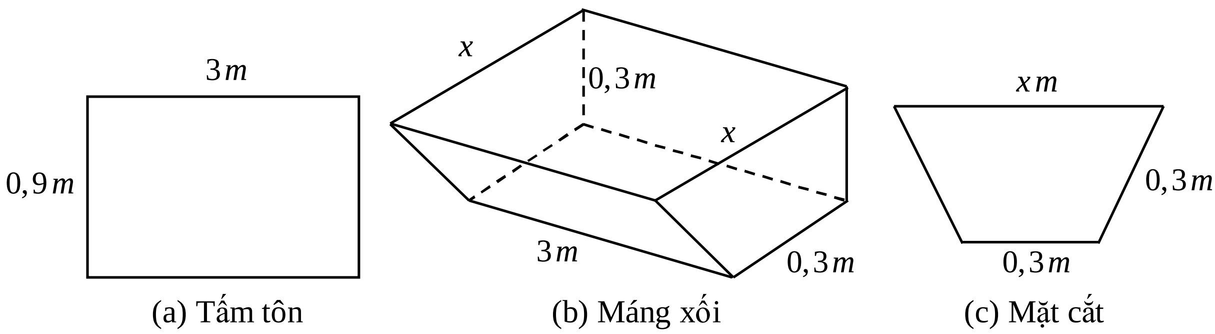
$f'(\theta) = 90\cos\theta + \frac{90}{2}.2\cos 2\theta$

$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos\theta + \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \cos\theta = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \theta = \pi \end{array}\right.$.

$f(0) = f(\pi) = 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 135\sqrt{3}$. Vậy GTLN của diện tích $ABCD$ là $135\sqrt{3}cm^2$.

Vậy thể tích máng xối lớn nhất bằng $40500\sqrt{3}cm^3$ khi ta cạnh CD tạo với BC góc 60^0.

Câu 20: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m \times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (bị cắt bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt

A. $x = 0,5m$. **B.** $x = 0,65m$. **C.** $x = 0,4m$. **D.** $x = 0,6m$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn D.

Gọi h là chiều cao của lăng trụ

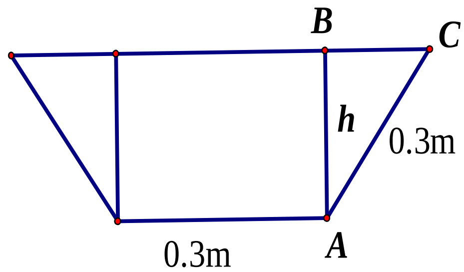
Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân (mặt cắt) lớn nhất

Ta có $S = \frac{h}{2}(x + 0,3)$

$BC = \dfrac{x-0,3}{2}\left(x > 0,3\right)$

$\Rightarrow h = \sqrt{\left(0,3\right)^2 - \dfrac{\left(x-0,3\right)^2}{4}}$

ĐK: $\left(0,3\right)^2 - \dfrac{\left(x-0,3\right)^2}{4} > 0; \left(0,3 < x < 0,9\right)$



Khi đó:

$S = \dfrac{1}{4}\left(x+0,3\right)\sqrt{4.\left(0,3\right)^2 - \left(x-0,3\right)^2}$

Xét hàm số

$f\left(x\right) = \left(x+0,3\right)\sqrt{4.\left(0,3\right)^2 - \left(x-0,3\right)^2}; \left(0,3 < x < 0,9\right)$

$\Rightarrow f'\left(x\right) = \sqrt{4.\left(0,3\right)^2 - \left(x-0,3\right)^2} + \left(x+0,3\right)\dfrac{-2\left(x-0,3\right)}{\sqrt{4.\left(0,3\right)^2 - \left(x-0,3\right)^2}}$

$= \dfrac{4.\left(0,3\right)^2 - \left(x-0,3\right)^2 - \left(x+0,3\right)\left(x-0,3\right)}{\sqrt{4.\left(0,3\right)^2 - \left(x-0,3\right)^2}} = \dfrac{0,36 - 2x\left(x-0,3\right)}{\sqrt{4.\left(0,3\right)^2 - \left(x-0,3\right)^2}}$

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 0,3x + 0,18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -0,3 \\ x = 0,6 \end{array}\right.$

x	$0,3$		$0,6$		$0,9$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(x\right)$ lớn nhất khi $x = 0,6$

Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi $x = 0,6m$.

Câu 21: Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài $d\left(m\right)$ và chiều rộng $r\left(m\right)$ với $d = 2r$. Chiều cao bể nước là $h\left(m\right)$ và thể tích bể là $2\,m^3$. Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\left(m\right)$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\left(m\right)$. **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\left(m\right)$. **D.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(m\right)$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $x\left(x > 0\right)$ là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước bằng

$$V = 2x^2.h = 2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là

$$S = 6x.h + 2x^2 = \frac{6}{x} + 2x^2\ \left(x > 0\right)$$

Xét hàm số $f\left(x\right) = \frac{6}{x} + 2x^2$ với $x > 0.$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$

Vậy chiều cao cần xây là $h = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(m\right).$

Câu 22: Một người dự định làm một thùng đựng đồ hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V. Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng

A. $x = V^{\frac{2}{3}}$ **B.** $x = \sqrt[3]{V}$ **C.** $x = V^{\frac{1}{4}}$ **D.** $x = \sqrt{V}$

Hướng dẫn giải:

Gọi a là độ dài cạnh đáy, x là độ dài đường cao của thùng đựng đồ $\left(a, x > 0\right)$

Khi đó, $V = a^2x \Rightarrow a = \sqrt{\frac{V}{x}} \Rightarrow S_{tp} = 2a^2 + 4ax = 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$

Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì S_{tp} nhỏ nhất $\Rightarrow 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$ nhỏ nhất.

Cách 1 : Xét hàm số $f\left(x\right) = 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$ trên $\left(0; +\infty\right)$

Ta có $f'\left(x\right) = \frac{-2V}{x^2} + \frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{x}}$; $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x^2\sqrt{V} = V\sqrt{x} \Leftrightarrow x = V^{\frac{1}{3}}$

x	0		$V^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)		$\searrow$	$f\left(V^{\frac{1}{3}}\right)$	$\nearrow$	

Từ BBT ta thấy để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng $V^{\frac{1}{3}}$.

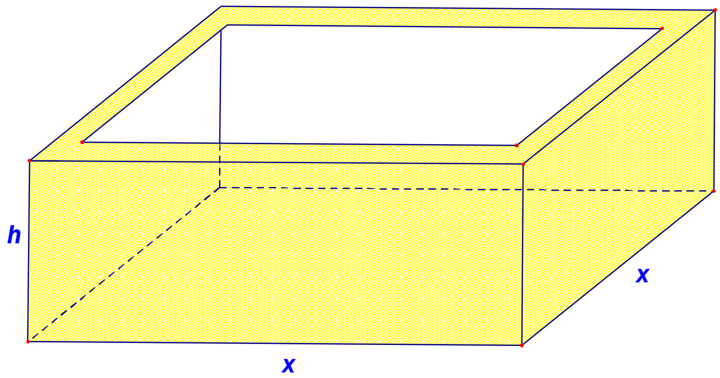
Cách 2: ta có $2\dfrac{V}{x}+4\sqrt{Vx}=2\dfrac{V}{x}+2\sqrt{Vx}+2\sqrt{Vx}\geq 6\sqrt[3]{V^2}$

Dấu "=" xảy ra tại $\dfrac{V}{x}=\sqrt{Vx}\Leftrightarrow x^3=V\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{V}$

Chọn B.

Câu 23: Nhân ngày quốc tế phụ nữ 8-3 năm 2017, ông A quyết định mua tặng vợ một món quà và đặt nó vào trong một chiếc hộp có thể tích là 32 (đvtt) có đáy hình vuông và không có nắp. Để món quà trở nên thật đặc biệt và xứng đáng với giá trị của nó ông quyết định mạ vàng cho chiếc hộp, biết rằng độ dạy lớp mạ tại mọi điểm trên hộp là như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h;x$. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của $h;x$ phải là?

A. $x=2;h=4$ **B.** $x=4;h=2$ **C.** $x=4;h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $x=1;h=2$



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $\begin{cases} S=4xh+x^2 \\ V=x^2h\to h=\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{32}{x^2}\end{cases}\Rightarrow S=4x.\dfrac{32}{x^2}+x^2=\dfrac{128}{x}+x^2$, để lượng vàng cần dùng là nhỏ nhất thì Diện tích S phải nhỏ nhất ta có

$S=\dfrac{128}{x}+x^2=f\left(x\right)\to f'\left(x\right)=2x-\dfrac{128}{x^2}=0\Rightarrow x=4$,

Câu 24: Một ngôi nhà có nền dạng tam giác đều ABC cạnh dài $10\left(m\right)$ được đặt song song và cách mặt đất $h\left(m\right)$. Nhà có 3 trụ tại A, B, C vuông góc với $\left(ABC\right)$. Trên trụ A người ta lấy hai điểm M, N sao cho $AM=x, AN=y$ và góc giữa $\left(MBC\right)$ và $\left(NBC\right)$ bằng $90°$ để là mái và phần chứa đồ bên dưới. Xác định chiều cao thấp nhất của ngôi nhà.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 12.

Hướng dẫn giải:

Đáp án B

Để nhà có chiều cao thấp nhất ta phải chọn N nằm trên mặt đất. Chiều cao của nhà là $NM = x + y$.

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có ΔABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$, vì $MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp BC$, từ đó suy ra $\Rightarrow BC \perp (MNI) \Rightarrow \begin{cases} MI \perp BC \\ NI \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{MIN} = 90^0$

ΔIMN vuông tại I nhận AI là đường cao nên $\Rightarrow AM.AN = AI^2 \Rightarrow xy = \left(\dfrac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 75$

Theo bất đẳng thức Côsi: $x + y \ge 2\sqrt{xy} = 2.\sqrt{75} = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = 5\sqrt{3}$

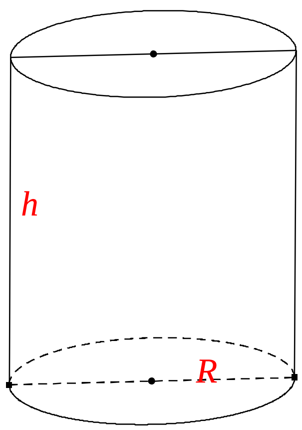
Do đó chiều cao thấp nhất của nhà là $10\sqrt{3}$.

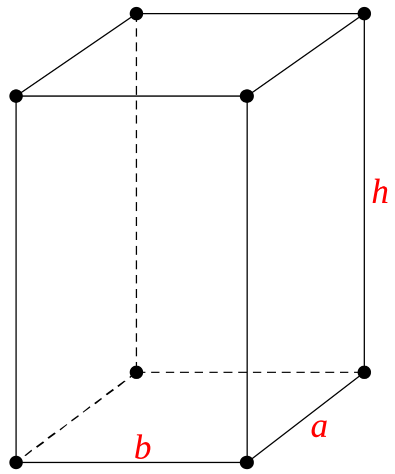
Câu 25: Một nhà sản xuất sữa có hai phương án làm hộp sữa. Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt(tức diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất), nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định là V cho trước. Khi đó diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất trong hai phương án là

A. $\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **B.** $6\sqrt[3]{V^2}$. **C.** $3\sqrt[3]{6V^2}$. **D.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D





Trường hợp 1: Hộp sữa hình trụ

Thể tích không đổi $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}, S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \dfrac{2V}{R}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bộ ba số dương $2\pi R^2, \dfrac{V}{R}, \dfrac{V}{R}$

Ta có $S_{tp} = 2\pi R^2 + \dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R} \ge 3\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{V}{R}.\dfrac{V}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ (*)

Trường hợp 2: Hộp sữa hình hộp chữ nhật

Thể tích không đổi

$V = abh \Rightarrow h = \frac{V}{ab}; S_{tp} = 2ab + 2(a+b)h = 2ab + 2a.\frac{V}{ab} + 2b.\frac{V}{ab} = 2\left(ab + \frac{V}{b} + \frac{V}{a}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cau chy cho bộ ba số dương $ab; \frac{V}{a}; \frac{V}{b}$

Ta có $S_{tp} \geq 2.3\sqrt[3]{ab.\frac{V}{a}.\frac{V}{b}} = 6\sqrt[3]{V^2}$ (**)

Xét hai kết quả ta thấy (*) nhỏ hơn

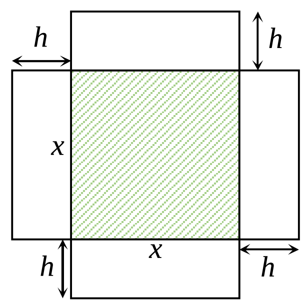
Vậy diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất là $S_{tp} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ (đvdt)

Câu 26: Một bác thợ gò hàn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thể tích $665,5\ dm^3$. Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh $x(dm)$, chiều cao $h(dm)$. Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm x để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất.

A. $10,5(dm)$. **B.** $12(dm)$. **C.** $11(dm)$. **D.** $9(dm)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có thể tích hình hộp là: $V = x^2h = 665,5 \Rightarrow h = \frac{665,5}{x^2}$

Diện tích toàn phần là $S = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2662}{x} \Rightarrow S' = 2x - \frac{2662}{x^2}$;

$S' = 0 \Leftrightarrow x = 11$

Lập bảng biến thiên ta thấy khi $x = 11$ thì S đạt giá trị nhỏ nhất

Vậy để sử dụng ít nguyên liệu nhất thì bác thợ xây phải cắt một miếng tôn có đáy là hình vuông cạnh $11(dm)$.

Câu 27: Một người dự định làm một thùng đựng đồ hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V. Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng

A. $x = V^{\frac{2}{3}}$ **B.** $x = \sqrt[3]{V}$ **C.** $x = V^{\frac{1}{4}}$ **D.** $x = \sqrt{V}$

Hướng dẫn giải:

Gọi a là độ dài cạnh đáy, x là độ dài đường cao của thùng đựng đồ $(a, x > 0)$

Khi đó, $V = a^2x \Rightarrow a = \sqrt{\frac{V}{x}} \Rightarrow S_{tp} = 2a^2 + 4ax = 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$

Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì S_{tp} nhỏ nhất $\Rightarrow 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$ nhỏ nhất.

Cách 1 : Xét hàm số $f(x) = 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x)=\frac{-2V}{x^2}+\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{x}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2\sqrt{V}=V\sqrt{x}\Leftrightarrow x=V^{\frac{1}{3}}$

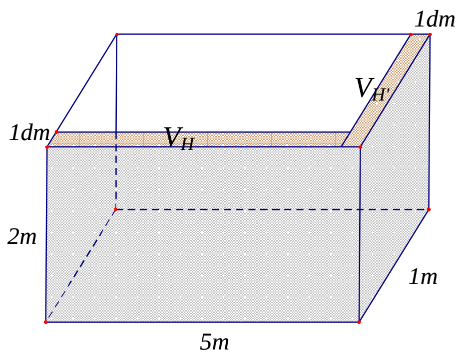
x	0		$V^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)		$\searrow$	$f\left(V^{\frac{1}{3}}\right)$	$\nearrow$	

Từ BBT ta thấy để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng $V^{\frac{1}{3}}$.

Cách 2: ta có $2\frac{V}{x}+4\sqrt{Vx}=2\frac{V}{x}+2\sqrt{Vx}+2\sqrt{Vx}\ge 6\sqrt[3]{V^2}$

Dấu $"="$ xảy ra tại $\frac{V}{x}=\sqrt{Vx}\Leftrightarrow x^3=V\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{V}$

Câu 28: Người ta muốn xây một bồn chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 5m, 1m, 2m (hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20cm, chiều rộng 10cm, chiều cao 5cm. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bồn đó và thể tích thực của bồn chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể)



A. 1180 viên, 8820 lít **B.** 1180 viên, 8800 lít

C. 1182 viên, 8820 lít **D.** 1180 viên, 8800 lít

Hướng dẫn giải:

Phân tích:

* Theo mặt trước của bể:

Số viên gạch xếp theo chiều dài của bể mỗi hàng là $x=\frac{500}{20}=25$ viên

Số viên gạch xếp theo chiều cao của bể mỗi hàng là: $\frac{200}{5}=40$. Vậy tính theo chiều cao thì có 40 hàng gạch mỗi hàng 25 viên. Khi đó theo mặt trước của bể. $N=25.40=1000$ viên.

* Theo mặt bên của bể: ta thấy, nếu hàng mặt trước của bể đã được xây viên hoàn chỉnh đoạn nối hai mặt thì ở mặt bên viên gạch còn lại sẽ được cắt đi còn $\frac{1}{2}$ viên. Tức là mặt bên sẽ có

$\frac{1}{2}.40+\frac{100-20}{20}.40=180$ viên.

Vậy tổng số viên gạch là 1180 viên.

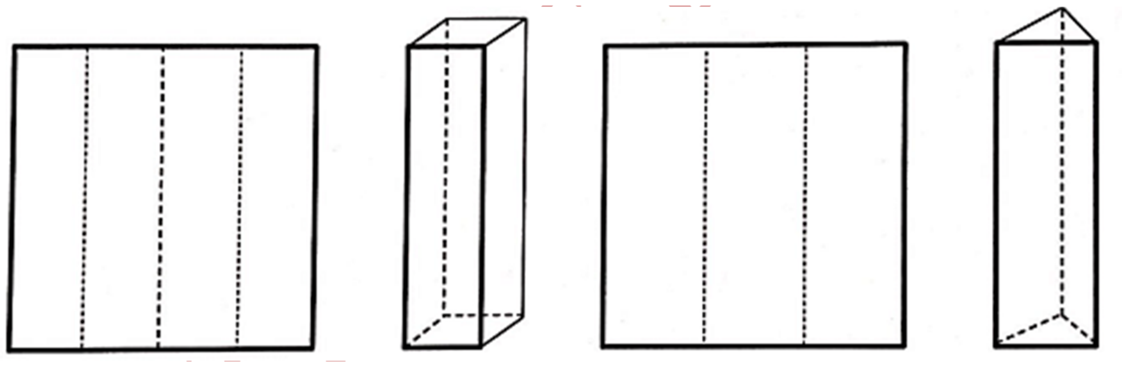
Khi đó thể tích bờ tường xây là

$1180.2.1.0,5=1180$ lít

Vậy thể tích bốn chứa nước là:

$50.10.20-1180=8820$ lít

Câu 29: Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh là a, người ta gấp nó thành 4 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tứ giác đều (như hình vẽ). Từ một mảnh giấy hình vuông khác cũng có cạnh là a, người ta gấp nó thành 3 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tam giác đều (như hình vẽ). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của lăng trụ tứ giác đều và lăng trụ tam giác đều. So sánh V_1 và V_2.



A. $V_1 > V_2$ **B.** $V_1 = V_2$ **C.** $V_1 < V_2$ **D.** Không so sánh được

Hướng dẫn giải:

Ta có $V_1 = a.\frac{a}{4}.\frac{a}{4}=\frac{a^3}{16}$

và $V_2 = a.\frac{1}{2}.\frac{a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. Do đó $V_1 > V_2$.

Ta chọn phương án **C.**