



Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 01

KHOİ ĐA DIỆN - HÌNH ĐA DIỆN

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHOİ 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM



Mục lục

Chương 01

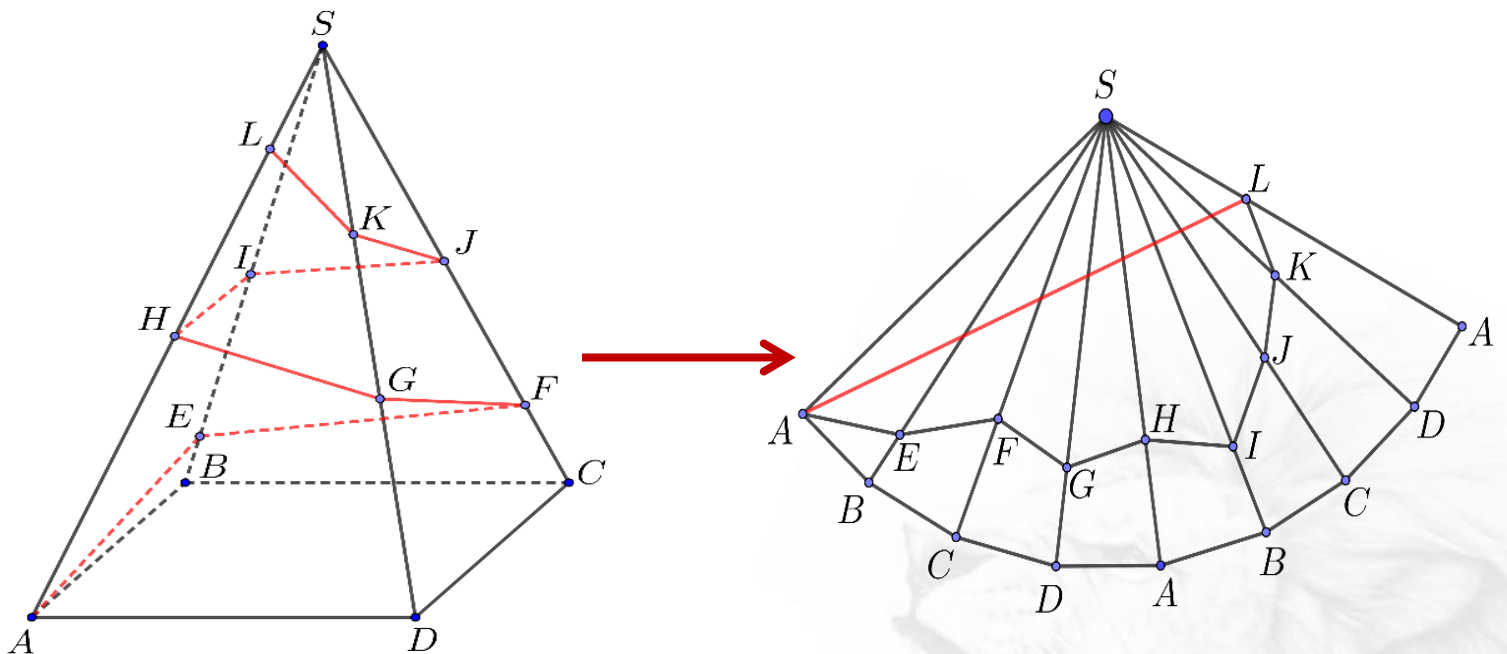
Chủ đề 01. HÌNH ĐA DIỆN – KHỐI ĐA DIỆN

Chủ đề 02. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

➤ Dạng 1.1. Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy	9
➤ Dạng 1.2. Chóp có mặt bên vuông góc với đáy	10
➤ Dạng 1.3. Chóp đều	11
➤ Dạng 1.4. Tỷ số thể tích	13
➤ Dạng 1.5. Tổng hiệu thể tích	16

Chủ đề 03. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

➤ Dạng 2.1. Thể tích lăng trụ đứng	19
➤ Dạng 2.2. Thể tích lăng trụ xiên	20
➤ Dạng 2.3. Thể tích khối lập phương – khối hộp	21
➤ Dạng 2.4. Khối đa diện được cắt ra từ khối lăng trụ	22
➤ Dạng 2.5. Max – min thể tích	25



Hình học

Chủ đề 01

KHỐI ĐA DIỆN

HÌNH ĐA DIỆN – KHỐI ĐA DIỆN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Khái niệm về hình đa diện – khối đa diện.

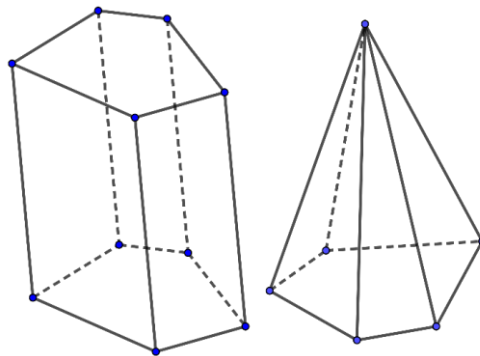
⇒ **Hình lăng trụ, hình chóp** ta thấy chúng là những hình không gian được tạo bởi hữu hạn đa giác.

Các đa giác ấy có tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể:
hoặc không giao nhau, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.
Mỗi đa giác như thế được gọi là một mặt của hình đa diện (H).

Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện (H)

2. Khái niệm về khối đa diện.



⇒ Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi 1 hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

⇒ Những điểm **không thuộc** khối đa diện được gọi là **điểm ngoài** của khối đa diện.

⇒ Điểm trong:

Những điểm **thuộc** khối đa diện nhưng **không thuộc** hình đa diện giới hạn khối đa diện ấy.

⇒ Miền trong khối đa diện:

Là tập hợp các **điểm trong**.

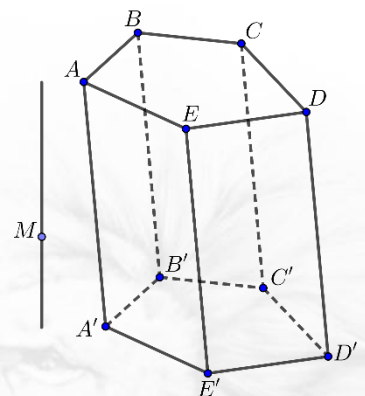
⇒ Miền ngoài khối đa diện:

Là tập hợp các **điểm ngoài**.

⇒ Mỗi đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau: **miền trong** và **miền ngoài**.

⇒ Trong đó chỉ có duy nhất miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng d nào đấy.

Khối đa diện (H) là hợp của hình đa diện (H) và miền trong của nó.



3. Phép biến hình.

➤ *Phép biến hình trong không gian:*

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

➤ *Phép dời hình :*

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

📖 **Nhận xét:**

➤ Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.

➤ Phép dời hình biến:

(+) Một đa diện (H) thành một đa diện (H') ,

(+) Các đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H') .

① **Phép dời hình tịnh tiến theo vector $\vec{v}$:** là phép biến hình

biến điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

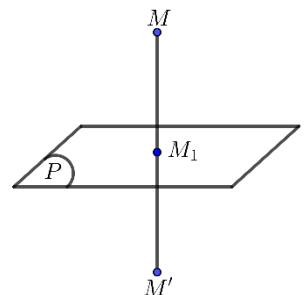
② **Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) :** là phép biến hình

biến mọi điểm thuộc (P) thành chính nó,

biến điểm $M \notin (P)$ thành điểm M'

sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' .

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H) .



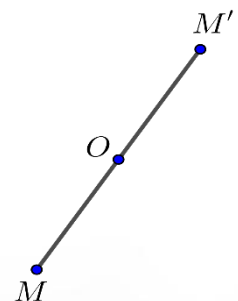
③ **Phép đối xứng tâm O :** là phép biến hình

biến điểm O thành chính nó,

biến điểm M khác O thành điểm M'

sao cho O là trung điểm của MM' .

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H) .



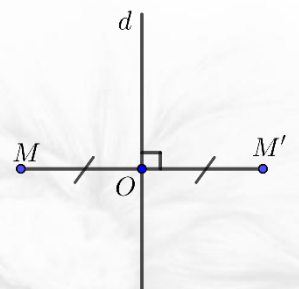
④ **Phép đối xứng qua đường thẳng d :** là phép biến hình

biến mọi điểm thuộc d thành chính nó,

biến điểm $M \notin d$ thành điểm M'

sao cho d là trung trực của MM' .

Nếu phép đối xứng qua đường thẳng d biến hình (H) thành chính nó thì d được gọi là trục đối xứng của (H) .



Phép đối xứng qua đường thẳng d còn được gọi là phép đối xứng qua trục d .

4. Hai hình bằng nhau.

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

📖 **Nhận xét:**

➤ Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình đa diện này thành hình đa diện kia.

➤ Hai tứ diện có các cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

5. Phân chia và lắp ghép khối đa diện.

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện $(H_1); (H_2)$, sao cho (H_1) và (H_2) không có điểm trong chung thì ta nói:

(+) có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) ,

(+) có thể lắp ghép được hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H) .

→ Ví dụ.

Xét khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

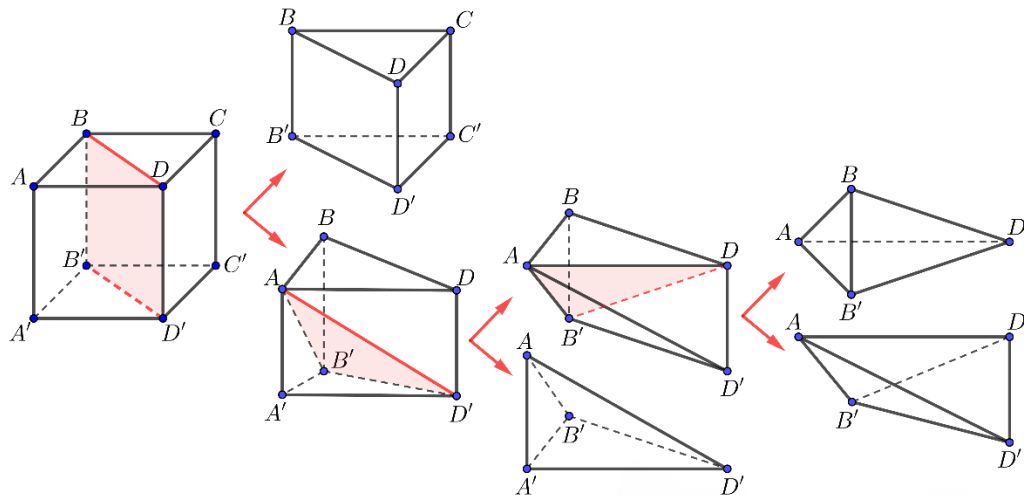
Mặt $(BDD'B')$ cắt khối lập phương đó theo một thiết diện là hình chữ nhật $BDD'B'$.

Thiết diện này chia các điểm còn lại của khối lập phương ra làm hai phần.

Mỗi phần cùng với hình chữ nhật $BDD'B'$ tạo thành khối lăng trụ, như vậy có hai khối lăng trụ: $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.

→ Khi đó ta nói mặt phẳng (P) chia khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.

Tương tự trên ta có thể chia tiếp khối trụ $ABD.A'B'D'$ thành ba khối tứ diện: $ADBB'$, $ADB'D'$ và $AA'B'D'$.



📖 Nhận xét:

Một khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành các khối tứ diện.

6. Khối đa diện lồi.

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H) . Khi đó đa diện giới hạn (H) được gọi là **đa diện lồi**.

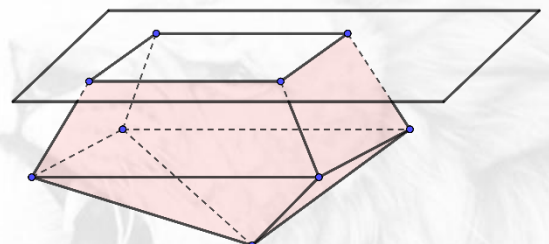
🔍 Lưu ý:

Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó. (Hình 6.1)

🔍 Công thức OLE:

Trong một đa diện lồi nếu gọi D là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt

Tức là: $D - C + M = 2$



Hình 6.1

7. Khối đa diện đều.

Định nghĩa:

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có các tính chất sau:

- (1) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- (2) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p;q\}$.

Nhận xét:

Các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều và bằng nhau.

Định lý:

Chỉ có năm loại khối đa diện đều.

loại $\{3;3\}$, loại $\{3;4\}$, loại $\{4;3\}$, loại $\{5;3\}$, và loại $\{3;5\}$.

Nhận xét:

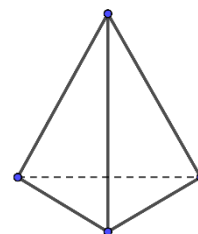
Hai khối đa diện đều có cùng số mặt và có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

Hai khối đa diện đều có cùng số mặt thì đồng dạng với nhau.

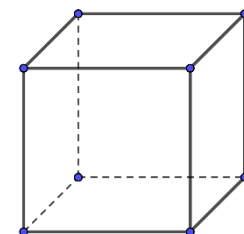
→ Ví dụ.

- Quan sát khối tứ diện đều (Hình 7.1),
ta thấy các mặt của nó là những tam giác đều,
mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng 3 mặt.

- Quan sát khối lập phương (Hình 7.2),
ta thấy các mặt của nó là những hình vuông,
mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung đúng 3 mặt.



Hình 7.1



Hình 7.2

Những khối đa diện nói trên được gọi là khối đa diện đều

Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều		Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Ký hiệu $\{p;q\}$
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$
Khối Lập Phương		8	12	6	$\{4;3\}$
Khối Tám Mặt Đều		6	12	8	$\{3;4\}$
Khối Mười Hai Mặt Đều		20	30	12	$\{5;3\}$
Khối Hai Mười Mặt Đều		12	30	20	$\{3;5\}$

Hình học

Chủ đề 01

KHỐI ĐA DIỆN

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa:

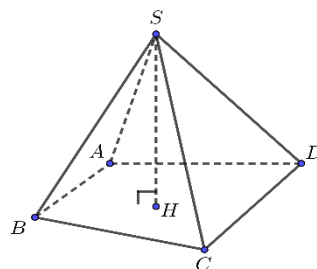
|| **Hình chóp** là hình có đáy là một đa giác, các mặt bên là tam giác có chung một đỉnh.

2. Thể tích khối chóp.

|| **Công thức tính thể tích khối chóp:**

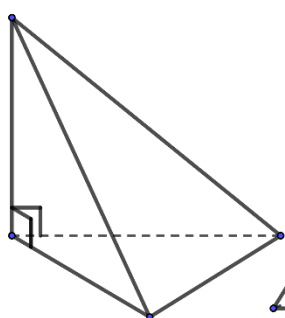
$$V = \frac{1}{3} S.h$$

Trong đó:
 S là diện tích đáy
 h là chiều cao khối chóp
 (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

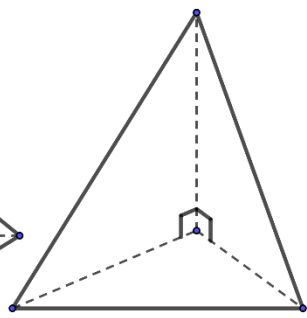


Cách xác định đường cao khối chóp:

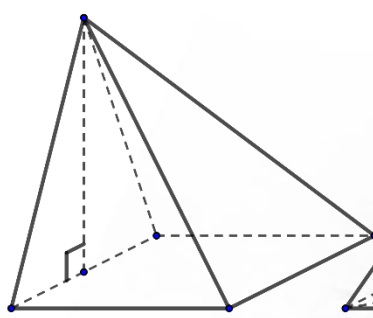
Loại	Đường cao
Cạnh bên vuông đáy Hình 1.1	Đường cao chính là cạnh bên.
Hai mặt bên vuông đáy Hình 1.2	Đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.
Mặt bên vuông đáy Hình 1.3	Đường cao của mặt bên vuông góc đáy.
Chóp đều Hình 1.4	Đường cao hạ từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.



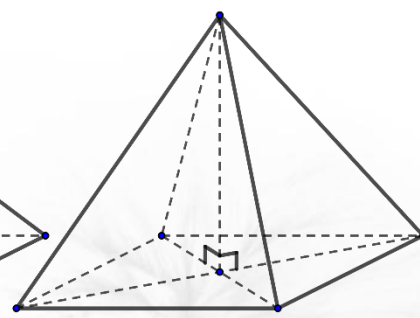
Hình 1.1



Hình 1.2



Hình 1.3

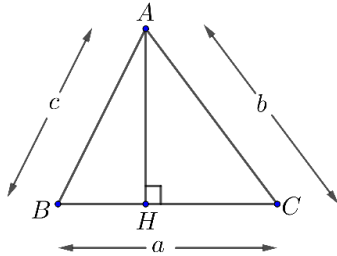


Hình 1.4

4. Công thức tính diện tích đáy.

☞ Ta có các đa giác thường gặp sau:

Tam giác



$$S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2} ba.\sin A = \frac{1}{2} ca.\sin B = \frac{1}{2} ba.\sin C$$

$$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$$

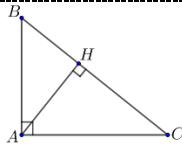
với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$S = p.r$$

với p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

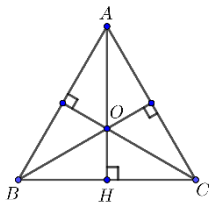
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{hoặc } S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b)^2 - c^2} \left[c^2 - (a-b)^2 \right]$$



Tam giác vuông $\triangle ABC$ vuông tại A :

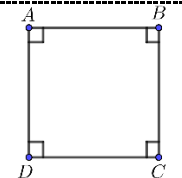
$$S = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} BC.AH.$$



Tam giác đều

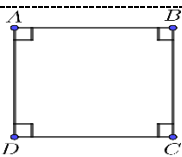
$$\triangle ABC \text{ đều, cạnh } AB: S = (AB)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$\text{Chiều cao tam giác đều } h = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



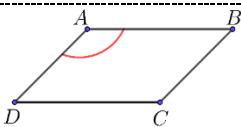
Hình vuông cạnh AB

$$\text{Diện tích hình vuông } ABCD: S = (AB)^2$$



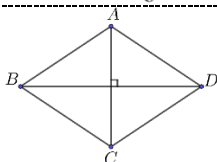
Hình chữ nhật

$$\text{Diện tích hình chữ nhật } ABCD: S = AB.CD$$



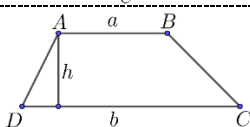
Hình bình hành

$$\text{Diện tích hình bình hành } ABCD: S = AB.AD.\sin BAD$$



Hình thoi

$$\text{Diện tích hình thoi } ABCD: S = AB.AD.\sin BAD = \frac{1}{2} AC.BD$$



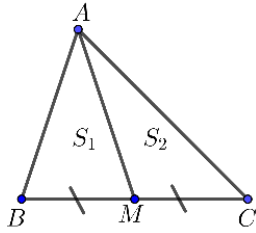
Hình thang

$$\text{Diện tích hình thang } ABCD: S = \frac{1}{2} (AB + CD).h$$

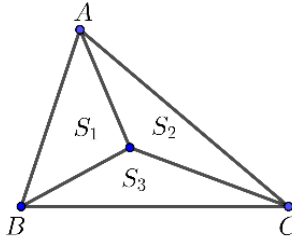
$$\text{Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: } S = \frac{1}{2} AC.BD$$

5. Tỷ số diện tích.

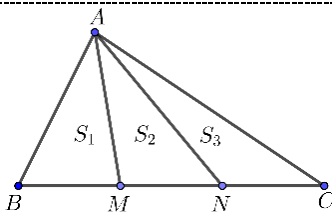
☞ Ta có các tỷ số thường gặp sau:



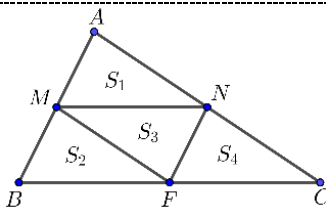
AM trung tuyến,
đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = \frac{S}{2}$.



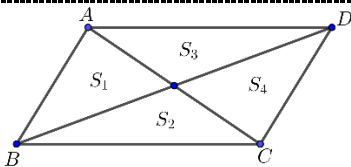
G là trọng tâm,
đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$.



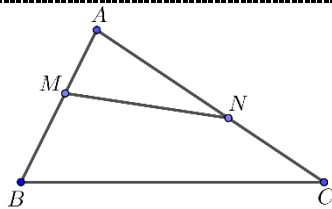
$BM = MN = NC$
đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$.



M; N; F lần lượt là trung điểm AB; AC; BC
đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S}{4}$.



$S_{ABCD} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S}{4}$



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 1.1. Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

☑ Đây là dạng dễ xác định được đường cao (h).

☑ Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3}S.h$

➤ Ví dụ 1.1.1

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $a^3\sqrt{3}$.

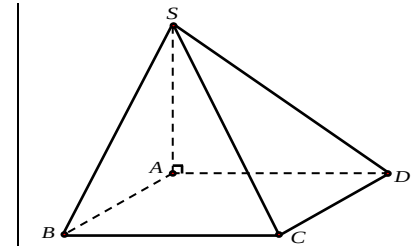
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $3a^3$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$



➤ Ví dụ 1.1.2

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $a^3 2\sqrt{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

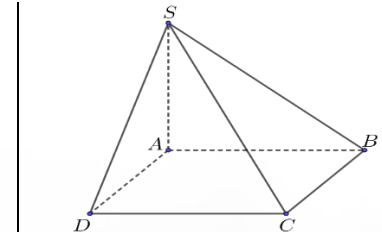
D. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích đáy: $S_{ABCD} = AD.BC = 2a^2$.

Thể tích: $V = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.



➤ Ví dụ 1.1.3

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Thể tích của khối chóp $S.BCD$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

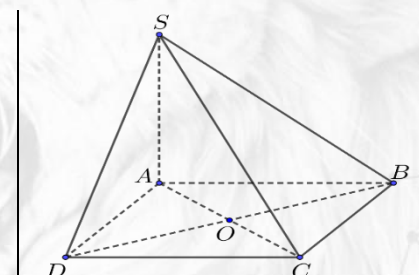
D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$.

Suy ra $V = \frac{1}{3}.S_{BCD}.SA = \frac{a^3}{3}$.



Dạng 1.2. Chóp có mặt bên vuông góc với đáy

☑ Khối chóp có mặt bên vuông góc mặt phẳng đáy.

→ Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3} S.h$.

→ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh của chóp ta kẻ vuông góc vào giao tuyến của mặt bên và mặt đáy.

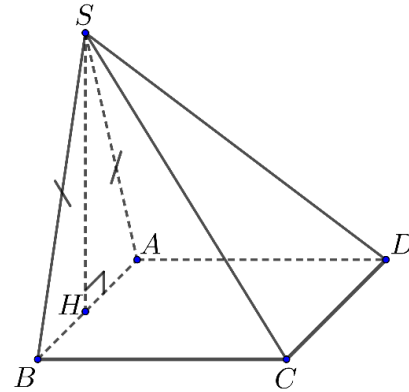
☑ Một số kiểu thường gặp:

① Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác

đều cạnh $x \rightarrow SH \perp (ABCD) \rightarrow h = SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ với H là trung điểm AB .

② Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác

cân tại $S \rightarrow SH \perp (ABCD) \rightarrow h = SH$ với H là trung điểm AB .



Ví dụ 1.2.1

Hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}$; $AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là Δ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối $S.ABD$ là.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

B. $4\sqrt{3}a^3$.

C. $4a^3$.

D. $2\sqrt{3}a^3$.

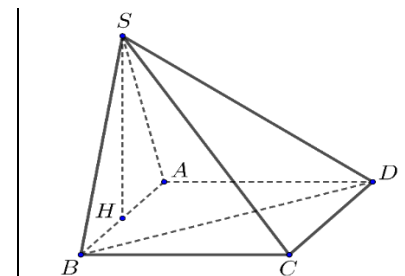
Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

ΔSAB là Δ đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên $SH = \frac{2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3a$.

Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2\sqrt{3}a^3$.



Ví dụ 1.2.2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a ; hình chiếu của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB ; cạnh bên $SD = \frac{3a}{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ tính theo a bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

B. $2\sqrt{2}a^3$.

C. a^3 .

D. $\frac{1}{3}a^3$.

Lời giải

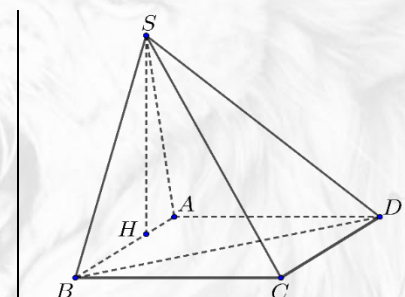
Chọn D

Gọi H là trung điểm của AB nên $SH \perp (ABCD)$.

Lại có $DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét ΔSDH : $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = a$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3}a^3$



Dạng 1.3. Chóp đều

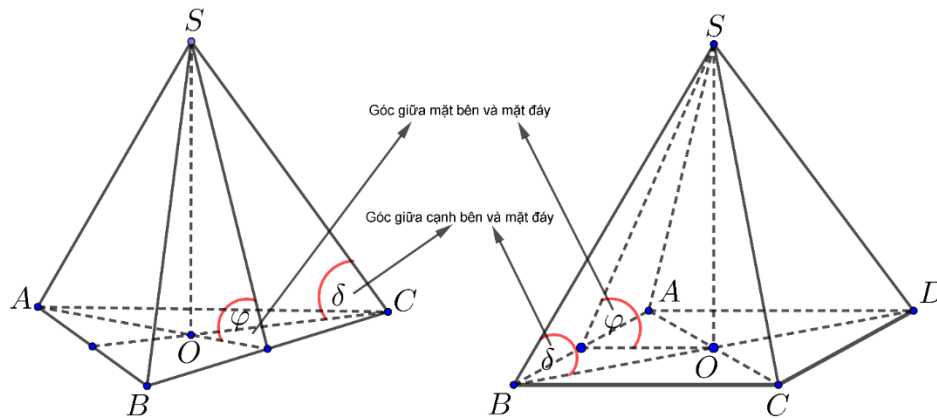
☑ Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

→ Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3} S.h$.

→ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh chóp hạ vuông góc xuống tâm mặt đáy.

☑ Một số kiểu thường gặp:

- ① Chóp đều $S.ABCD$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ .
- ② Chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ .



Một số công thức tính nhanh:

Chóp đều cạnh x , đáy là tam giác	$V = (x)^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}$
Chóp đều cạnh x , đáy là tứ giác	$V = (x)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}$
Chóp đều, cạnh bên bằng x , đáy là tam giác cạnh y .	$V = \frac{(y)^2 \sqrt{3(x)^2 - (y)^2}}{12}$
Chóp đều, cạnh bên bằng x , đáy là tứ giác cạnh y .	$V = \frac{(y)^2 \sqrt{4(x)^2 - 2(y)^2}}{6}$
Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc φ , đáy là tam giác cạnh x .	$V = \frac{(x)^3 \tan \varphi}{24}$
Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc φ , đáy là tứ giác cạnh x .	$V = \frac{(x)^3 \tan \varphi}{6}$

Ví dụ 1.3.1

Tính chiều cao của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b ?

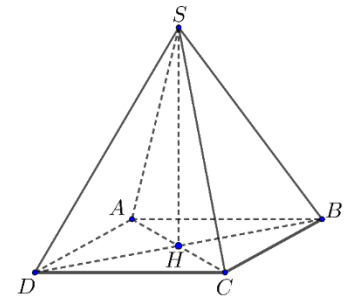
A. $\frac{\sqrt{4b^2 + 2a^2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{2}$

Lời giải

Chọn B

Gọi H là tâm hình vuông $ABCD$,
Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}.$$



Ví dụ 1.3.2

Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b là:

A. $\frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$. B. $\frac{a^2 \sqrt{b^2 - 2a^2}}{6}$. C. $\frac{a^2 \sqrt{4b^2 + 2a^2}}{6}$. D. $\frac{a^2 \sqrt{4b^2 + a^2}}{6}$.

Lời giải

Chọn A

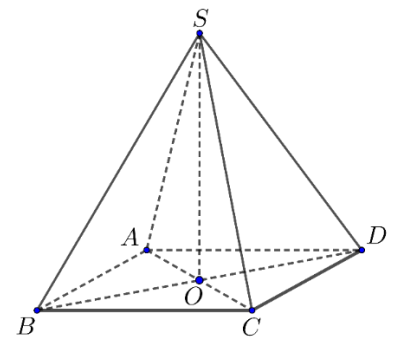
$S.ABCD$ là chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

BD là đường chéo hình vuông cạnh a nên

$$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}.$$



Ví dụ 1.3.3

Một hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc α . Thể tích của hình chóp đó là

A. $\frac{\sqrt{3}}{4} b^3 \cos \alpha \sin \alpha$. B. $\frac{3}{4} b^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$.
C. $\frac{3}{4} b^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4} b^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$.

Lời giải

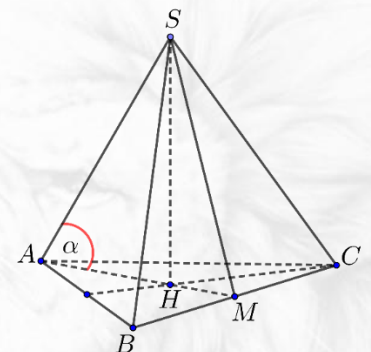
Chọn D

$$\text{Xét } \triangle SHA \text{ vuông tại } H : \begin{cases} SH = SA \sin \alpha = b \sin \alpha \\ AH = SA \cos \alpha = b \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{3}{2} AH = \frac{3}{2} b \cos \alpha.$$

$$\text{Mà: } AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = \frac{2AM}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} \\ &= \frac{1}{3} \cdot b \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3} (\sqrt{3} b \cos \alpha)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} b^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$



Dạng 1.4. Tỷ số thể tích

☑ Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

→ Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3} S.h$.

A. Cho khối chóp $S.ABC$ có $A';B';C'$ lần lượt là nằm trên $SA;SB;SC$ khi đó:

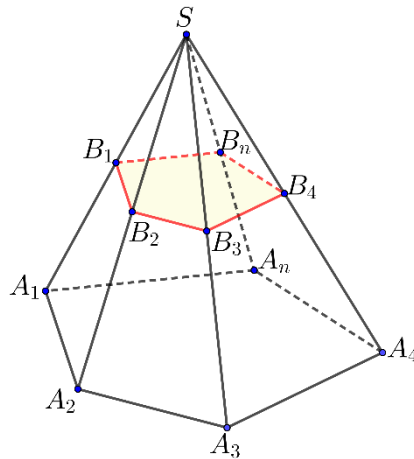
1. Nếu $A \equiv A'; B \equiv B'; C \equiv C'$ thì

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} \quad (\text{Hai khối chóp chung đỉnh và chung mặt đáy}).$$

2. Định lý SIMSON cho khối chóp tam giác

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

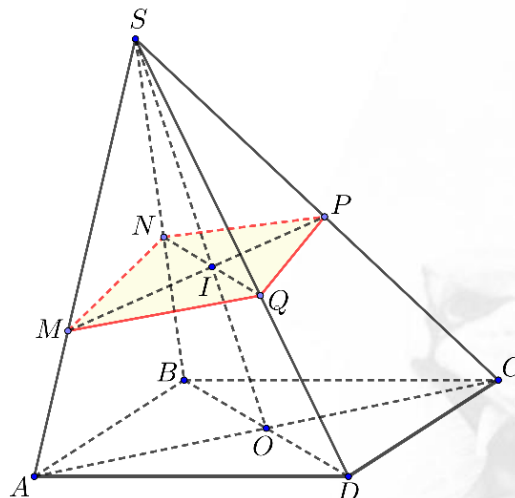
3. Cắt khối chóp bởi mặt phẳng song song với đáy sao cho $\frac{SB_1}{SA_1} = k$ thì



$$\frac{V_{S.B_1B_2...B_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}} = k^3$$

B. Mặt phẳng cắt các cạnh của khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành

lần lượt tại $M;N;P;Q$: $\frac{SM}{SA} = \alpha; \frac{SN}{SB} = \beta; \frac{SP}{SC} = \gamma; \frac{SQ}{SD} = \lambda$:



$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \lambda}{4} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{và} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\lambda}.$$

Ví dụ 1.4.1

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $SA; SB; SC$. Tỉ số thể tích $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}}$ bằng

A. 12.

B. 2.

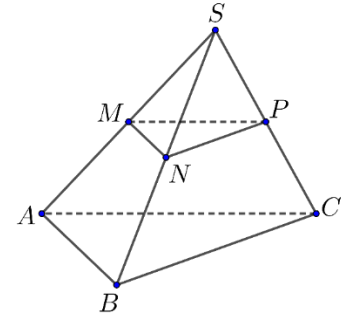
C. 8.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}} = \frac{SA}{SM} \cdot \frac{SB}{SN} \cdot \frac{SC}{SP} = 2.2.2 = 8.$



Ví dụ 1.4.2

Cho khối tứ diện có thể tích bằng V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a .

Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V'' = 4 \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

Vậy $V' = \frac{V}{2} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Cách 2.

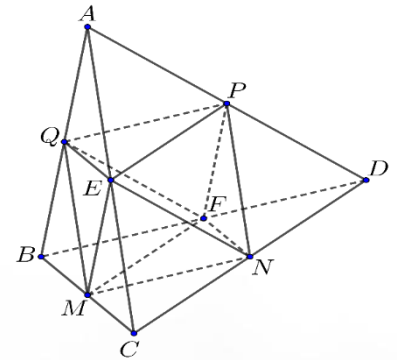
Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác có cùng đáy là hình bình hành úp lại.

Suy ra $V' = 2V_{N.MEPF} = 4.V_{N.MEP} = 4.V_{P.MNE} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} V = \frac{1}{2} V$

Cách 3.

Ta có $\frac{V'}{V} = \frac{V - V_{A.QEP} - V_{B.QMF} - V_{C.MNE} - V_{D.NPF}}{V}$

$= 1 - \frac{V_{A.QEP}}{V} - \frac{V_{B.QMF}}{V} - \frac{V_{C.MNE}}{V} - \frac{V_{D.NPF}}{V} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$



Ví dụ 1.4.3

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$

- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{2}$.

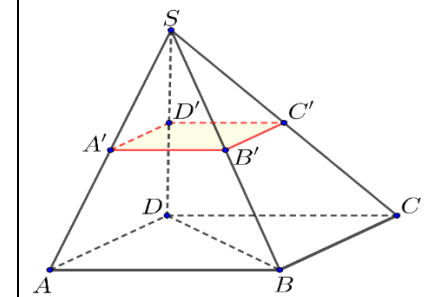
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{Và } \frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.BDC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}.$$



Ví dụ 1.4.4

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Gọi O là điểm bất kỳ trên mặt phẳng đáy $ABCD$. Biết thể tích khối chóp $OMNPQ$ bằng V . Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

- A. $\frac{27}{8}V$. B. $\frac{27}{2}V$. C. $\frac{9}{4}V$. D. $\frac{27}{4}V$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(MNPQ) \parallel (ABCD)$

$$\Rightarrow d(S, (MNPQ)) = 2d(O, (MNPQ))$$

$$\Rightarrow V_{S.MNPQ} = 2V_{O.MNPQ} = 2V$$

$$\frac{V_{SMNQ}}{V_{SEFK}} = \frac{SM}{SE} \cdot \frac{SN}{SF} \cdot \frac{SQ}{SK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{SMNQ} = \frac{8}{27} V_{SEFK}.$$

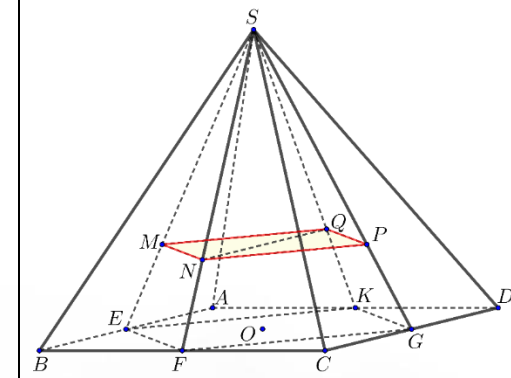
$$\frac{V_{SNPQ}}{V_{SFGK}} = \frac{SN}{SF} \cdot \frac{SP}{SG} \cdot \frac{SQ}{SK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{SNPQ} = \frac{8}{27} V_{SFGK}.$$

$$\Rightarrow V_{SMNQ} + V_{SNPQ} = \frac{8}{27} V_{SEFK} + \frac{8}{27} V_{SFGK} \Leftrightarrow V_{SMNPQ} = \frac{8}{27} V_{SEFGK} \Rightarrow V_{SEFGK} = \frac{27}{8} V_{SMNPQ} = \frac{27}{4} V.$$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} BE \cdot BF \cdot \sin B}{\frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin B} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{EBF} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{8} S_{ABCD}.$$

$$\text{Khi đó, } S_{EFGK} = S_{ABCD} - (S_{ABF} + S_{FCG} + S_{GDK} + S_{KAE}) = S_{ABCD} - 4S_{EBF} \Rightarrow S_{EFGK} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\text{Nên } \frac{V_{SEFGK}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{3} d(S, (EFGK)) S_{EFGK}}{\frac{1}{3} d(S, (ABCD)) S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SABCD} = 2V_{SEFGK} = \frac{27}{2} V.$$



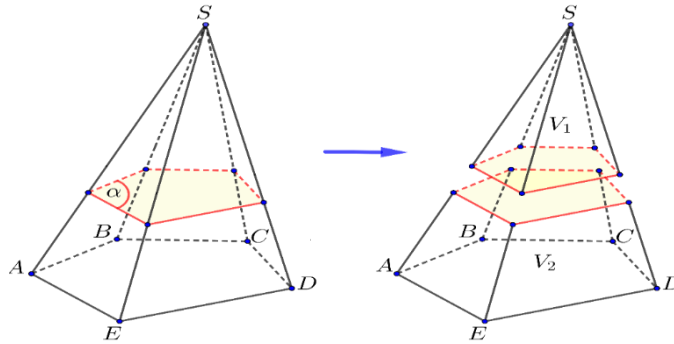
Dạng 1.5. Tổng hiệu thể tích

☑ Trong quá trình tính thể tích một khối đa diện lồng ghép trong khối chóp ta gặp khó khăn với cách tính thực tiếp thì khi đó:

- Ta có thể tách khối chóp ra thành các khối nhỏ và tính trực tiếp từng khối đã tách.
- Phần cần tính sẽ là phần khối chóp bỏ đi những khối nhỏ đã tính.

→ **Ví dụ:** Cho khối chóp $S.ABCD$, (α) chia khối chóp thành $V_1; V_2$. Tính thể tích khối V_2 .

→ **Giải:**



Để tính trực tiếp thể tích khối V_2 ta sẽ khó áp dụng công thức vì thế ta sẽ cắt khối chóp thành hai phần:

- + V_1 là phần chứa đỉnh S .
- + V_2 là phần dưới mặt phẳng (α) .

Gọi thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V , vậy $V = V_1 + V_2 \Rightarrow V_2 = V - V_1$.

Ví dụ 1.5.1

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V . Tính V .

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{18}$. B. $V = \frac{11\sqrt{2}}{216}$. C. $V = \frac{7\sqrt{2}}{216}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}}{108}$.

Lời giải

Chọn B

Từ N kẻ $NP \parallel AC$, $N \in AD$

M kẻ $MQ \parallel AC$, $Q \in BC$. Mặt phẳng (P) là $MPNQ$

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

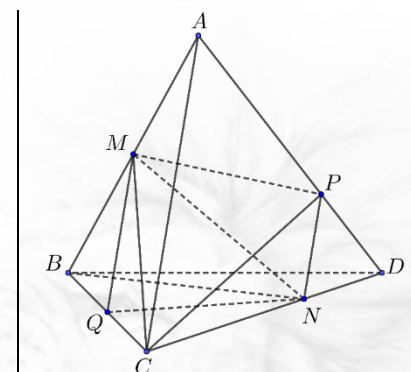
$$V = V_{ACMPNQ} = V_{AMPC} + V_{MQNC} + V_{MPNC}$$

$$\text{Ta có } V_{AMPC} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AD} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{ABCD}$$

$$V_{MQNC} = \frac{1}{2} V_{AQNC} = \frac{1}{2} \frac{CQ}{CB} \cdot \frac{CN}{CD} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{ABCD}$$

$$V_{MPNC} = \frac{2}{3} V_{MPCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} V_{MACD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \frac{AM}{AB} \cdot V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{ABCD} = \frac{1}{9} V_{ABCD}$$

$$\text{Vậy } V = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) V_{ABCD} \Rightarrow V = \frac{11}{18} V_{ABCD} = \frac{11\sqrt{2}}{216}.$$



Ví dụ 1.5.2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm SB , N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính thể tích V của tứ diện $ACMN$.

A. $V = \frac{a^3}{12}$.

B. $V = \frac{a^3}{6}$.

C. $V = \frac{a^3}{8}$.

D. $V = \frac{a^3}{36}$.

Lời giải

Chọn A

M là trung điểm SB , N là điểm thuộc cạnh SD : $SN = 2ND$

nên $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$, $\frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$

Ta có:

$$V_{C.AMN} = 2V_{O.AMN} = 2(V_{S.ABD} - V_{S.AMN} - V_{M.AOB} - V_{N.AOD})$$

Lại có:

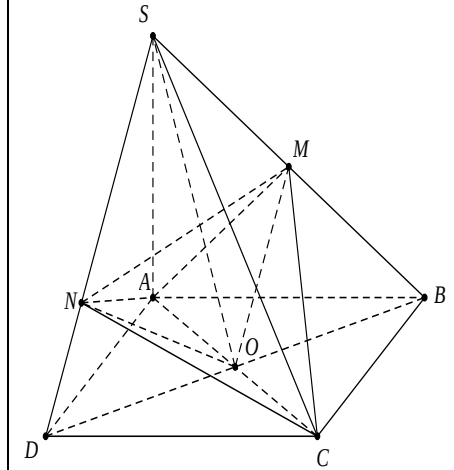
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot AB \cdot AD = \frac{a^3}{3} \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{a^3}{6}; V_{S.AOB} = V_{S.AOD} = \frac{a^3}{12}$$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{3} V_{S.ABD} = \frac{a^3}{18}$$

$$\frac{V_{M.AOB}}{V_{S.AOB}} = \frac{MB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{M.AOB} = \frac{1}{2} V_{S.AOB} = \frac{a^3}{24}$$

$$\frac{V_{N.AOD}}{V_{S.AOD}} = \frac{ND}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{N.AOD} = \frac{1}{3} V_{S.AOD} = \frac{a^3}{36}$$

Do đó: $V_{C.AMN} = 2V_{O.AMN} = 2\left(\frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{18} - \frac{a^3}{24} - \frac{a^3}{36}\right) = \frac{a^3}{12}$.



Hình học

Chủ đề 02

KHỐI ĐA DIỆN

THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa:

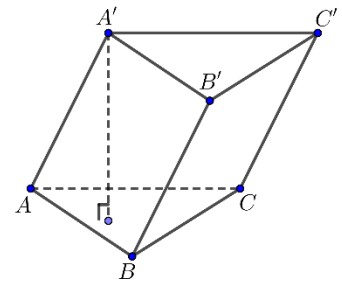
- **Hình lăng trụ** là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.
- **Hình hộp** là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

2. Thể tích khối lăng trụ.

- **Công thức tính thể tích khối chóp:**

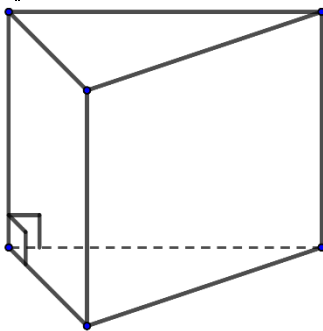
$$V = S.h$$

Trong đó:
 S là diện tích đáy
 h là chiều cao khối chóp
 (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

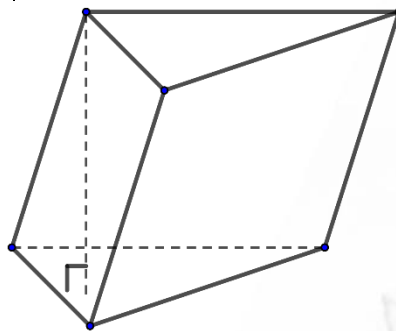


Cách xác định đường cao lăng trụ:

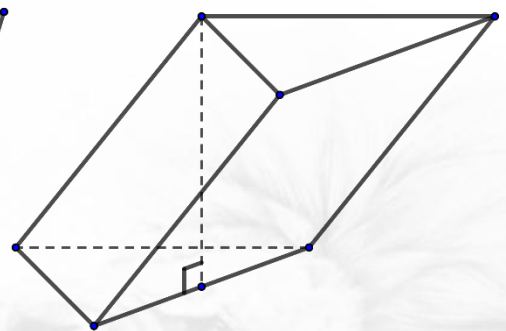
Loại	Đường cao
Cạnh bên vuông đáy Hình 2.1	Đường cao chính là cạnh bên.
Lăng trụ đứng Hình 2.1	Đường cao chính là cạnh bên.
Lăng trụ xiên Hình 2.2	Đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đáy.
Lăng trụ có hình chiếu Hình 2.3	Đường cao là hình chiếu vuông góc của 1 đỉnh xuống đáy.



Hình 2.1



Hình 2.2



Hình 2.3

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 2.1. Thể tích lăng trụ đứng

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

○ Tính được diện tích đáy ta xem lại “Công thức tính diện tích đáy”

○ Lăng trụ đứng sẽ có các đường cao song song nhau, tùy vào trường hợp đề ra ta sẽ sử dụng đường cao hợp lý.

	Định nghĩa	Tính chất
Hình lăng trụ đứng	Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.	Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều	Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.	Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

➤ Ví dụ 2.1.1

Khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a , đường cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $2a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $V = S.h = a^2.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

➤ Ví dụ 2.1.2

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = \frac{a^3}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

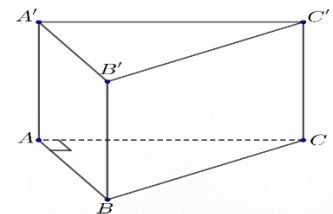
Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A .

Suy ra thể tích của khối lăng trụ là

$$V = AA'.S_{ABC} = AA' \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{a^3}{2}.$$



➤ Ví dụ 2.1.3

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại A ; $BC = 2a$; $\angle ABC = 30^\circ$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ là.

- A. $2a^3\sqrt{3}$. B. $3a^3$. C. $3a^3$. D. $6a^3$.

Lời giải

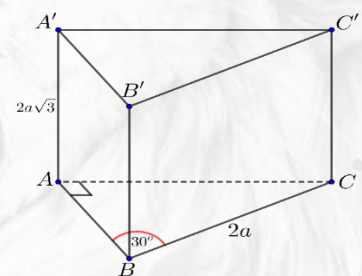
Chọn C

Xét $\triangle ABC$: $AC = 2a \cdot \sin 30^\circ = a$; $AB = 2a \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có: $V_{lt} = h \cdot S$.

Trong đó $h = AA' = 2a\sqrt{3}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2.$$



Dạng 2.2. Thể tích lăng trụ xiên

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

○ Tính được diện tích đáy ta xem lại “Công thức tính diện tích đáy”

○ Lăng trụ xiên sẽ có các đường cao đều ra cụ thể.

Ví dụ 2.2.1

Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của lăng trụ đã cho.

- A. $h = 9a$. B. $h = \frac{a}{3}$. C. $h = a$. D. $h = 3a$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.h \Leftrightarrow h = \frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{3a^3}{a^2} = 3a.$$

Ví dụ 2.2.2

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a . Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $B'BC = 30^\circ$. Thể tích khối $A.CC'B'$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của B' trên BC .

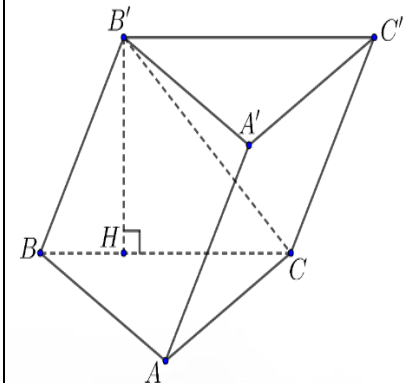
Từ giả thiết suy ra: $B'H \perp (ABC)$.

$$S_{BB'C} = \frac{1}{2} BB'.BC.\sin B'BC = \frac{1}{2} 4a.a.\sin 30^\circ = a^2.$$

$$\text{Mặt khác: } S_{BB'C} = \frac{1}{2} B'H.BC \Rightarrow B'H = \frac{2S_{BB'C}}{BC} = \frac{2a^2}{a} = 2a.$$

$$V_{LT} = B'H.S_{ABC} = 2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{A.CC'B'} = \frac{1}{2} V_{A.CC'B'B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{LT} = \frac{1}{3} V_{LT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$



Ví dụ 2.2.3

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a có H là trọng tâm, biết $A'A = A'B = A'C = a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

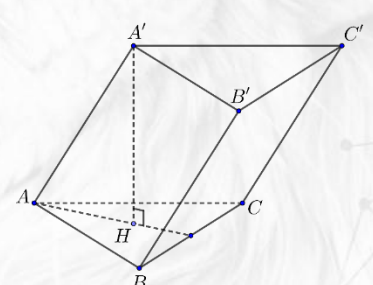
Chọn B

Ta có ABC là Δ đều cạnh a và $A'A = A'B = A'C = a$

Nên $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

$$\text{Xét } \Delta A'HA: A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a.a.\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$



Dạng 2.3. Thể tích khối lập phương - khối hộp

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

	Định nghĩa	Tính chất
Hình hộp đứng	Là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy	Có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.
Hình hộp chữ nhật	Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.	Có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.
Hình lập phương	Là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông	Có 6 mặt đều là hình vuông.

○ Đường chéo hình hộp $= \sqrt{d^2 + r^2 + c^2}$ với $d; r; c$ là ba kích thước của hình hộp.

Hệ quả: Đường chéo hình lập phương $= a\sqrt{3}$ với a là cạnh của hình lập phương.

Ví dụ 2.3.1

Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 150. Thể tích của khối lập phương đó là.

- A. 200. B. 100. C. 625. D. 125.

Lời giải

Chọn D

Gọi cạnh hình lập phương là a . Ta có $6a^2 = 150 \Leftrightarrow a = 5 \rightarrow V = a^3 = 125$.

Ví dụ 2.3.2

Tính theo a thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC' = a$.

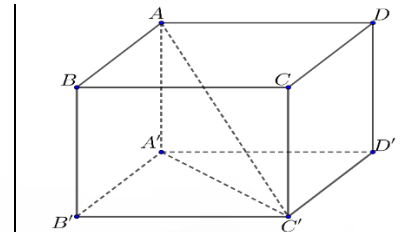
- A. $V = \frac{a^3}{27}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $AC' = AB\sqrt{3} \Rightarrow AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$$V = AB^3 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$$



Ví dụ 2.3.3

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích tam giác ACD' bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích V của hình lập phương.

- A. $V = 3\sqrt{3}a^3$. B. $V = 2\sqrt{2}a^3$. C. $V = a^3$. D. $V = 8a^3$.

Lời giải

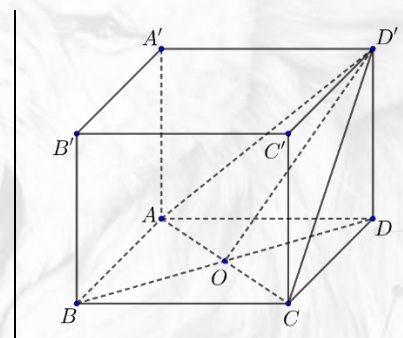
Chọn B

Giả sử cạnh của hình lập phương có độ dài là x .

$$\text{Ta có } AC = x\sqrt{2}, OD' = \sqrt{OD^2 + A'D^2} = \frac{x\sqrt{6}}{2}$$

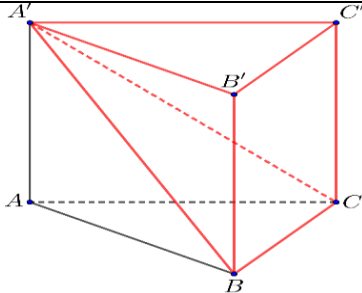
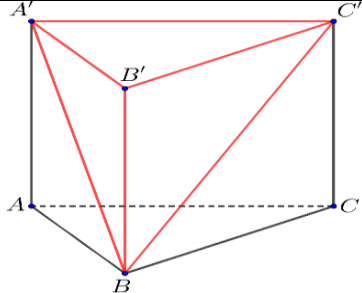
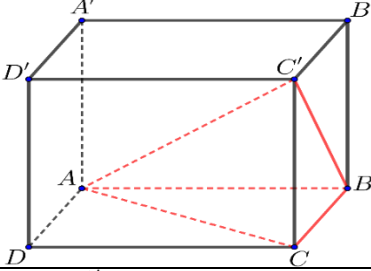
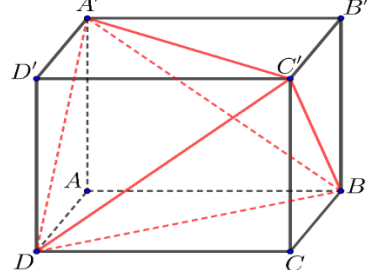
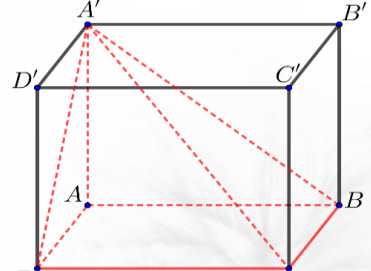
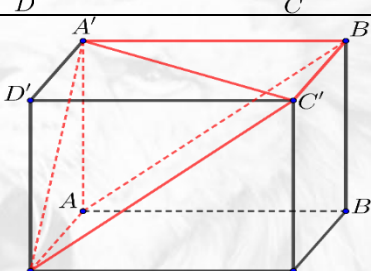
$$S_{ACD'} = \frac{1}{2}OD'.AC = \frac{1}{2}x\sqrt{2} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\rightarrow a^2\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2} \rightarrow V = x^3 = 2a^3\sqrt{2}.$$



➤ Dạng 2.4. Khối đa diện được cắt ra từ khối lăng trụ

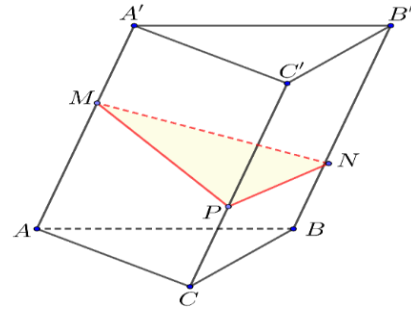
A. Một số mối liên hệ thường gặp giữa chóp – lăng trụ và chóp – thể tích:

Mối liên hệ giữa	Công thức	Hình minh họa
Chóp	Lăng trụ	
		
Chóp	Hình hộp	
		
		
		

B. Mặt phẳng cắt các cạnh của khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ lần lượt tại $M;N;P$ sao cho

$$\frac{AM}{AA'} = \alpha; \frac{BN}{BB'} = \beta; \frac{CP}{CC'} = \gamma;$$

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

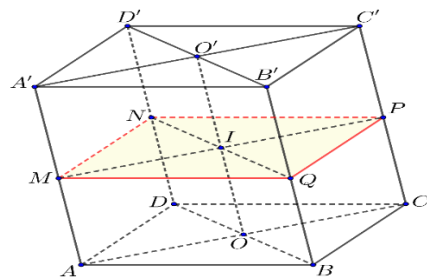


C. Mặt phẳng cắt các cạnh của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lần lượt tại $M;N;P;Q$ sao cho

$$\frac{AM}{AA'} = \alpha; \frac{BN}{BB'} = \beta; \frac{CP}{CC'} = \gamma; \frac{DQ}{DD'} = \lambda;$$

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \lambda}{4}$$

và $\alpha + \gamma = \beta + \lambda$.



Ví dụ 2.4.1

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

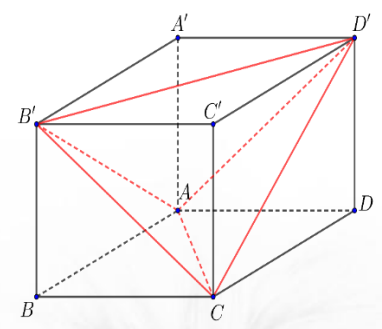
$$V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - (V_{B'.ABC} + V_{C'.B'C'D'} + V_{D'.ACD} + V_{A'.A'B'D'}).$$

$$\text{Mà } V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$$

$$V_{B'.ABC} = V_{C'.B'C'D'} = V_{D'.ACD} = V_{A'.A'B'D'}$$

$$\frac{1}{3} AA' \cdot S_{A'B'D'} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{6} a^3.$$

$$V_{ACB'D'} = a^3 - \frac{4}{6} a^3 = \frac{a^3}{3}. V_{B'.ABC} = V_{C'.B'C'D'} = V_{D'.ACD} = V_{A'.A'B'D'}$$



Ví dụ 2.4.2

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Thể tích của tứ diện $OA'BC$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$

B. $\frac{a^3}{4}$

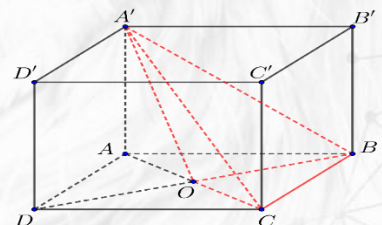
C. $\frac{a^3}{12}$

D. $\frac{a^3}{24}$

Lời giải

Chọn C

$$V_{O.A'BC} = V_{A'.OBC} = \frac{1}{6} AA' \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{12}$$



Ví dụ 2.4.3

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{2V}{3}$

B. $\frac{V}{2}$

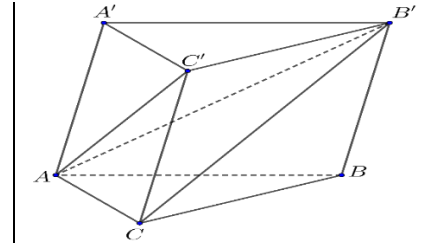
C. $\frac{V}{4}$

D. $\frac{3V}{4}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } V_{ABCB'C'} = V_{B'ABC} + V_{C'B'AC} = \frac{V}{3} + \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$$



Ví dụ 2.4.4

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Gọi M là điểm bất kỳ trên đường thẳng CC' . Tính thể tích khối chóp $V_{M.ABB'A'}$ theo V .

A. $\frac{V}{2}$

B. $\frac{2V}{9}$

C. $\frac{2V}{3}$

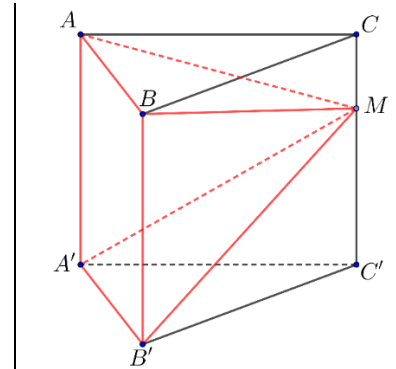
D. $\frac{V}{3}$

Lời giải

Chọn A

Gọi h_1, h_2 là đường cao của $M.ABC, M.A'B'C'$ thì $h_1 + h_2 = h$ là đường cao của $ABC.A'B'C'$.

$$\begin{aligned} V &= V_{M.ABC} + V_{M.ABB'A'} + V_{M.A'B'C'} \\ &= \frac{1}{3}h_1.S_{ABC} + V_{M.ABB'A'} + \frac{1}{3}S_{A'B'C'}h_2 \\ &= \frac{1}{3}S_{ABC}(h_1 + h_2) + V_{M.ABB'A'} = \frac{1}{6}a^3 \rightarrow V_{M.ABB'A'} = \frac{2V}{3} \end{aligned}$$



Ví dụ 2.4.5

Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $V = 36 \text{ cm}^3$. Mặt $(AB'C')$ và $(A'BC)$ chia khối lăng trụ thành 4 khối đa diện. Tính thể tích khối chứa mặt là hình bình hành $BCC'B'$

A. 15 cm^3

B. 9 cm^3

C. 12 cm^3

D. 18 cm^3

Lời giải

Chọn A

Gọi $I = AB' \cap A'B, J = A'C \cap AC'$.

$$\text{Ta có } V_{IJB'B'C'C} = V_{A.BB'C'C} - V_{A.BCII}.$$

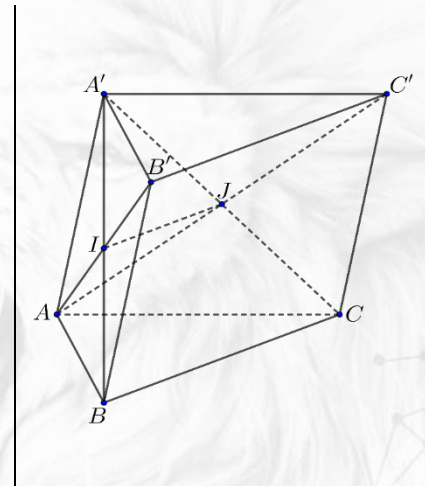
$$V_{A.A'B'C'} + V_{A.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Leftrightarrow V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V = 24.$$

$$\text{Lại có } \frac{V_{A.IJA'}}{V_{A.A'B'C'}} = \frac{AI}{AB'} \cdot \frac{AJ}{AC'} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{A.IJA'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 36 = 3.$$

$$V_{A.IJBC} = V_{A'.ABC} - V_{A.IJA'} = \frac{1}{3} \cdot 36 - 3 = 9.$$

$$\text{Vậy } V_{IJB'B'C'C} = 24 - 9 = 15 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



➤ Dạng 2.5. Max - min thể tích

	Dạng	Dấu "=" xảy ra khi
BĐT Bunyakovsky	$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
	$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$
BĐT AM - GM	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$a = b$
	$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (n \geq 1)$	$a_1 = a_2 = \dots = a_n$
Khảo sát hàm số trên khoảng xác định	Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán.	

➤ Ví dụ 2.5.1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 4$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SC = 6$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

- A. $V_{\max} = \frac{40}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{80}{3}$. C. $V_{\max} = \frac{20}{3}$. D. $V_{\max} = 24$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Đặt cạnh $BC = x > 0$.

ΔABC , có $AC^2 = 16 + x^2$.

ΔSAC , có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{20 - x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4x$.

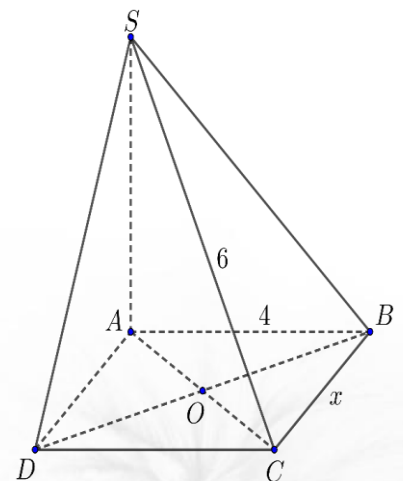
Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{4}{3} x \sqrt{20 - x^2}$.

Áp dụng BĐT Côsi: $x \cdot \sqrt{20 - x^2} \leq \frac{x^2 + (\sqrt{20 - x^2})^2}{2} = 10$.

Suy ra $V_{S.ABCD} \leq \frac{4}{3} \cdot 10 = \frac{40}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{20 - x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$. Vậy $V_{\max} = \frac{40}{3}$

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{3} x \sqrt{20 - x^2}$ trên $(0; 2\sqrt{5})$.



➤ Ví dụ 2.5.2

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC = 1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

- A. $V_{\max} = \frac{1}{6}$. B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. D. $V_{\max} = \frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .
Vì $S.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Đặt $AB = x > 0$. Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$.

Gọi M là trung điểm BC

$$\Rightarrow AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{2}{3} AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta SOA: SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} \cdot x^2 \sqrt{3-x^2}$$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{12} \cdot x^2 \sqrt{3-x^2}$ trên $(0; \sqrt{3})$, ta được $\max_{(0; \sqrt{3})} f(x) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{6}$.

Cách 2. Ta có $x^2 \sqrt{3-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot (6-2x^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{x^2 + x^2 + 6-2x^2}{3}\right)^3} = 2$.

Ví dụ 2.5.3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 4$, $SC = 6$ và mặt bên (SAD) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{40}{3}$. B. $V_{\max} = 40$. C. $V_{\max} = 80$. D. $V_{\max} = \frac{80}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp AD$.

Mà $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Giả sử $AD = x > 0$. Suy ra $HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + 16}$.

Tam giác vuông SHC , có $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{20 - \frac{x^2}{4}}$.

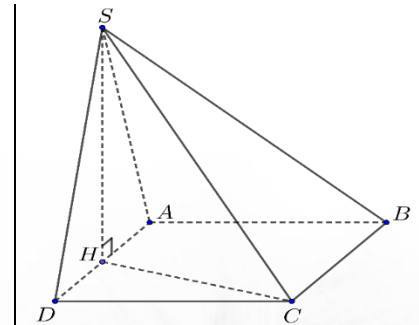
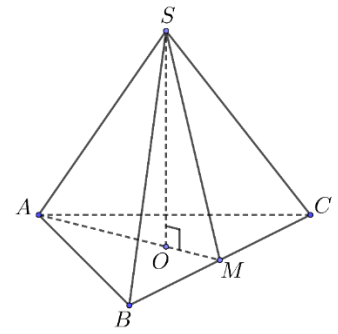
Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SH$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot x \sqrt{20 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{3} (2x \sqrt{80 - x^2}) \leq \frac{1}{3} (x^2 + 80 - x^2) = \frac{80}{3}.$$

Ví dụ 2.5.4

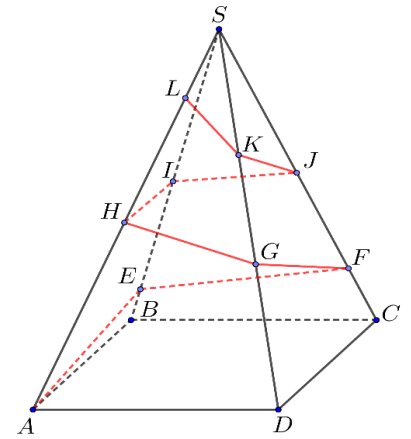
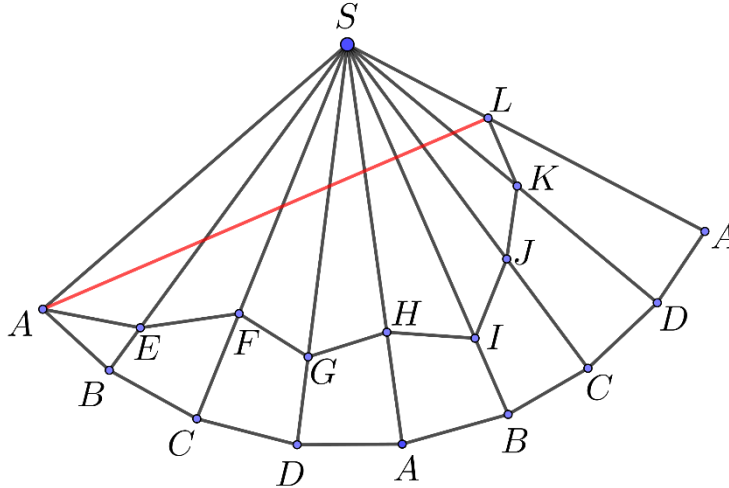
Người ta cần trang trí một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng 200m, góc $ASB = 15^\circ$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$. Trong đó điểm L cố định và $LS = 40$ m (tham khảo hình vẽ). Hỏi khi đó cần dùng ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí?

A. $40\sqrt{67} + 40$ mét. B. $20\sqrt{111} + 40$ mét.
C. $40\sqrt{31} + 40$ mét. D. $40\sqrt{111} + 40$ mét.



Lời giải

Chọn C



Ta sử dụng phương pháp trải đa diện

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải ra mặt phẳng hai lần, ta có hình vẽ sau

Từ đó suy ra chiều dài dây đèn led ngắn nhất là bằng $AL + LS$.

Từ giả thiết về hình chóp đều $S.ABCD$ ta có $ASL = 120^\circ$.

Ta có $AL^2 = SA^2 + SL^2 - 2SA \cdot SL \cdot \cos ASL = 200^2 + 40^2 - 2 \cdot 200 \cdot 40 \cdot \cos 120^\circ = 49600$.

Nên $AL = \sqrt{49600} = 40\sqrt{31}$.

Vậy, chiều dài dây đèn led cần ít nhất là $40\sqrt{31} + 40$ mét.

Ví dụ 2.5.5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm P là trung điểm của SC . Một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{8}$

Lời giải

Chọn A

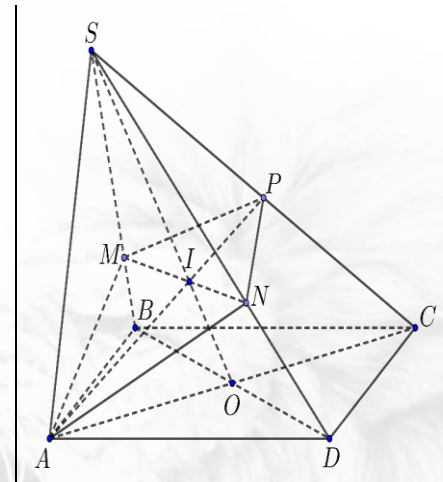
Đặt $x = \frac{SM}{SB}$, $y = \frac{SN}{SD}$, ($0 < x, y \leq 1$).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{V_1}{V} &= \frac{V_{S.AMP} + V_{S.ANP}}{V} = \frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{1}{4} (x + y) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } \frac{V_1}{V} &= \frac{V_{S.AMN} + V_{S.PMN}}{V} = \frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.PMN}}{2V_{S.CBD}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} + \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{3}{4} xy \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{4} (x + y) = \frac{3}{4} xy \Rightarrow x + y = 3xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x - 1}.$$

$$\text{Từ điều kiện } 0 < y \leq 1, \text{ ta có } \frac{x}{3x - 1} \leq 1, \text{ hay } x \geq \frac{1}{2}.$$



Thay vào (2) ta được tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{3x-1}$.

Đặt $f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{3x-1}, x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, ta có $f'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (L) \\ x=\frac{2}{3} & (N) \end{cases}$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{3}{8}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$, do đó $\min \frac{V_1}{V} = \min_{x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.5.6

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}, AA' = a\sqrt{3}$. Gọi G là trung điểm của BD' , mặt phẳng (P) đi qua G và cắt các tia $AD', CD', D'B'$ tương ứng tại ba điểm phân biệt H, I, K . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{D'H^2} + \frac{1}{D'I^2} + \frac{1}{D'K^2}$$

A. $T = \frac{1}{3a^2}$

B. $T = \frac{4}{a^2}$

C. $T = \frac{4}{3a^2}$

D. $T = \frac{1}{12a^2}$

Lời giải

Chọn C

Đặt $\frac{D'H}{D'A} = x, \frac{D'I}{D'C} = y, \frac{D'K}{D'B'} = z$.

ta có $\overrightarrow{D'G} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{D'C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{D'D}$

Ta có $\overrightarrow{D'H} = x\overrightarrow{D'A} = x(\overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'A}) \Rightarrow \frac{1}{x}\overrightarrow{D'H} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'A}$

$\overrightarrow{D'I} = y\overrightarrow{D'C} = y(\overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'C'}) \Rightarrow \frac{1}{y}\overrightarrow{D'I} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'C'}$

$\overrightarrow{D'K} = z\overrightarrow{D'A} = z(\overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{D'C'}) \Rightarrow \frac{1}{z}\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{D'C'}$

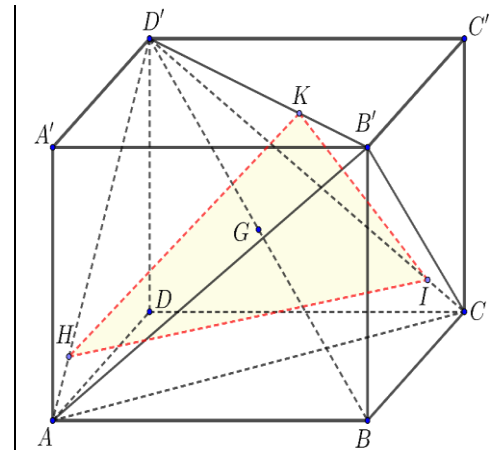
$\Rightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{1}{4x}\overrightarrow{D'H} + \frac{1}{4y}\overrightarrow{D'I} + \frac{1}{4z}\overrightarrow{D'K}$

Do $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DK}$ không đồng phẳng nên $\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} = 1$.

$\Rightarrow \frac{D'A}{D'H} + \frac{D'C}{D'I} + \frac{D'B}{D'K} = 4$

$\Rightarrow 4^2 = \left(\frac{D'A}{D'H} + \frac{D'C}{D'I} + \frac{D'B}{D'K}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{D'H^2} + \frac{1}{D'I^2} + \frac{1}{D'K^2}\right)(D'A^2 + D'C^2 + D'B'^2)$

$\Rightarrow T \geq \frac{16}{D'A^2 + D'C^2 + D'B'^2} = \frac{16}{12a^2} = \frac{4}{3a^2}$



Ví dụ 2.5.7

Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng song song mặt đáy cắt các cạnh $SA; SB; SC; SD$ lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q lên mặt đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ lớn nhất.

A. $\frac{SM}{SA} = \frac{3}{4}$

B. $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$

C. $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$

D. $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\frac{SM}{SA} = x$. Suy ra $\frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = x$.

Gọi h, h' là chiều cao $S.ABCD$ và $MNPQ.M'N'P'Q'$.

Do $MN \parallel AB$ nên $\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} \Leftrightarrow x = \frac{MN}{AB} \Leftrightarrow MN = xAB$.

Tương tự ta có $BC = x.NP$

Ta có $S_{MNP} = x^2.S_{ABC} \Leftrightarrow S_{MNPQ} = x^2.S_{ABCD}$ ($\Delta MNP \sim \Delta ABC$)

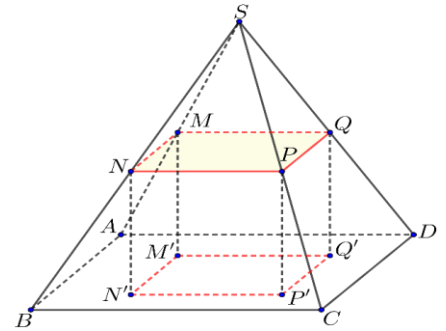
Mặt khác $\frac{AM}{AS} = \frac{h'}{h} \Leftrightarrow \frac{SA - SM}{SA} = \frac{h'}{h} \Leftrightarrow 1 - x = \frac{h'}{h} \Leftrightarrow h' = (1 - x)h$

Ta có $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = h'.S_{MNPQ} = (1 - x)h.x^2.S_{ABCD} = (1 - x)x^2.h.S_{ABCD}$

Do h, S_{ABCD} không thay đổi nên $[V_{MNPQ.M'N'P'Q'}]_{\max} \Leftrightarrow [(1 - x)x^2]_{\max}$.

Ta có $(1 - x)x^2 = 4.(1 - x)\frac{x}{2}\frac{x}{2} \leq 4.\frac{\left(1 - x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)^3}{27} = \frac{4}{27}$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $1 - x = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.



-----Hết-----

