

Chương 1. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn
Bài 1: Khái niệm phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

A. LÝ THUYẾT.

1) Phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 1: Một hình chữ nhật có chiều dài là x (cm) và chiều rộng y (cm). Biết nửa chu vi của hình chữ nhật là 16 cm. Hãy lập hệ thức thể hiện mối quan hệ của ba đại lượng trên.

Bài làm:

Ta có hệ thức $x + y = 16$

Hệ thức $x + y = 16$ là những ví dụ về phương trình bậc nhất hai ẩn.

Kết luận:

♣ Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức dạng: $ax + by = c$ (1)

Trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

♣ Nếu $x = x_0$ và $y = y_0$, ta có $ax_0 + by_0 = c$ là một khẳng định đúng thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình (1).

Ví dụ 2: Trong các hệ thức sau, đâu là phương trình bậc nhất hai ẩn.

- | | | |
|--|---|-------------------------------|
| a) $3x - 4y = 5$ | b) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$ | c) $0 \cdot x + 4y = 0$ |
| d) $\frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{1}{4}$ | e) $\frac{1}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y = 0$ | f) $2x^2 - 4y = -\frac{1}{5}$ |

Bài làm:

- a) $3x - 4y = 5$ là phương trình bậc nhất hai ẩn.
 b) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$ không là phương trình bậc nhất hai ẩn vì hệ số cả x và y đều bằng 0.
 c) $0 \cdot x + 4y = 0$ là phương trình bậc nhất hai ẩn.
 d) $\frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{1}{4}$ không là phương trình bậc nhất hai ẩn vì không phải dạng $ax + by = c$.
 e) $\frac{1}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y = 0$ là phương trình bậc nhất hai ẩn.
 f) $2x^2 - 4y = -\frac{1}{5}$ không là phương trình bậc nhất hai ẩn vì x có bậc 2.

Ví dụ 3: Biết rằng cặp số $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $x + 2y = 6$. Hãy hoàn thành bảng sau

x	1		-2		6
y		2		-1	

Chú ý:

♣ Mỗi phương trình bậc hai có vô số nghiệm.

Ví dụ 4: Viết nghiệm và biểu diễn hình học tất cả các nghiệm của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau

- | | | |
|------------------|-----------------|--------------------------|
| a) $-2x + y = 4$ | b) $0x + y = 3$ | c) $-2x + 0 \cdot y = 4$ |
|------------------|-----------------|--------------------------|

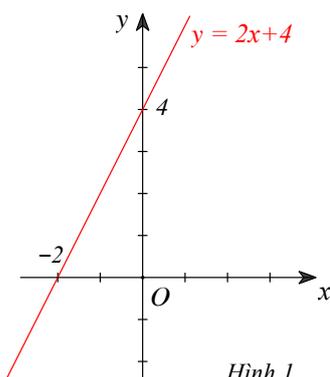
Bài làm:

a) Xét phương trình $-2x + y = 4$ (1)

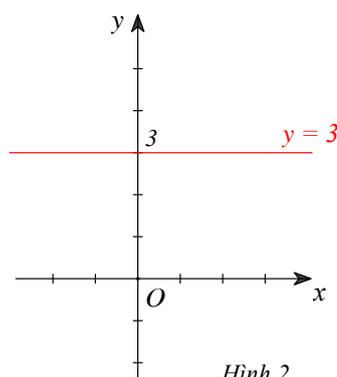
Ta viết phương trình (1) thành $y = 2x + 4$

Như vậy mỗi cặp số $(x; y)$ hay $(x; 2x + 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là một nghiệm của phương trình (1).

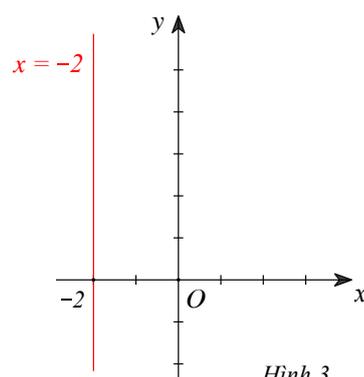
Khi đó ta nói rằng, phương trình (1) có nghiệm tổng quát là $(x; 2x+4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tập hợp nghiệm của phương trình (1) được biểu diễn bởi các điểm thuộc đường thẳng $y = 2x+4$ (Hình 1)



Hình 1



Hình 2



Hình 3

b) Xét phương trình $0x + y = 3$ (2)

Ta viết phương trình (2) thành $y = 3$.

Phương trình (2) có nghiệm tổng quát là $(x; 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tập hợp nghiệm của phương trình (2) được biểu diễn bởi các điểm thuộc đường thẳng $y = 3$ (Hình 2)

c) Xét phương trình $-2x + 0 \cdot y = 4$ (3)

Ta viết phương trình (3) thành $-2x = 4 \Rightarrow x = -2$.

Phương trình (3) có nghiệm tổng quát là $(-2; y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Tập hợp nghiệm của phương trình (3) được biểu diễn bởi các điểm thuộc đường thẳng $x = -2$ (Hình 3)

2) Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

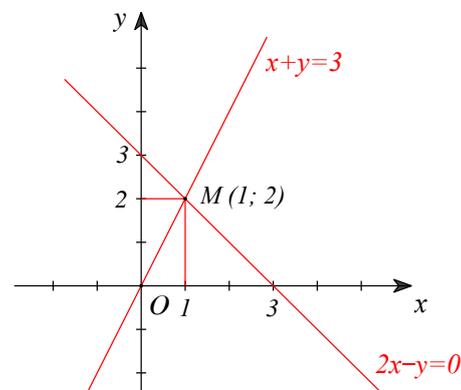
Kết luận:

- ♣ Mỗi cặp gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (1) được gọi là một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
- ♣ Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (1) nếu nó đồng thời là nghiệm của hai phương trình của hệ (1).

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

Nhận thấy cặp số $(1; 2)$ vừa là nghiệm của phương trình $2x - y = 0$ vừa là nghiệm của phương trình $x + y = 3$ nên cặp $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình trên.

Biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình trên mặt phẳng tọa độ như Hình 4.



Hình 4

Ví dụ 6: Trong các cặp số $(1; -3)$, $(-1; 3)$ cặp nào là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$

Bài làm:

Thay cặp số $(1; -3)$ vào hệ phương trình ta được $\begin{cases} 4.1 - (-3) = 7 \\ 5.1 + (-3) = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Nên $(1; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Thay cặp số $(-1; 3)$ vào hệ phương trình, ta được $\begin{cases} 4.(-1) - 3 = 7 \\ 5.(-1) + 3 = 2 \end{cases}$ (vô lý)

Nên $(-1; 3)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - y = 3$.

a) Tính giá trị của y tương ứng trong bảng sau

x	1	2	3	4	0
$y = 2x - 3$					

b) Viết nghiệm tổng quát của phương trình $2x - y = 3$.

Bài 2: Cho phương trình bậc nhất hai ẩn $-x + \frac{1}{3}y = 6$.

a) Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình trên

$(1; 3)$, $(-4; 6)$, $(-6; 0)$ và $\left(\frac{-17}{3}; 1\right)$

b) Viết nghiệm tổng quát của phương trình $-x + \frac{1}{3}y = 6$.

Bài 3: Viết nghiệm tổng quát và biểu diễn hình học của các phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $3x + y = 1$

b) $0.x + y = -2$

c) $2x - 0.y = 5$

Bài 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$. Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình trên

a) $(5; 1)$

b) $(1; -5)$

c) $(2; -3)$

Bài 5: Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$. Hãy tìm nghiệm của hệ phương trình trên.

Bài 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x = -2 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$. Hãy tìm nghiệm của hệ phương trình trên.

Bài 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

A. LÝ THUYẾT

1) Phương pháp thế.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai $x - y = 6 \Rightarrow y = x - 6$ rồi thế lên phương trình thứ nhất ta được

$$2x + (x - 6) = 3 \Rightarrow 3x - 6 = 3 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3.$$

Sau khi tìm được $x = 3$, thay $x = 3$ trở lại phương trình thứ nhất hoặc thứ hai ta tìm được $y = -3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(3; -3)$.

Kết luận:

- ♣ Các giải hệ phương trình bằng phương pháp thế:

Bước 1: Từ một phương trình của hệ, biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình chỉ còn chứa một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

Bài làm:

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = -2y + 5$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $3(-2y + 5) + 4y = 5 \Rightarrow -2y + 15 = 5 \Rightarrow y = 5$.

Từ đó $x = -2 \cdot 5 + 5 = -5$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(-5; 5)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Bài làm:

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $3x - y = 5 \Rightarrow y = 3x - 5$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $x + 2(3x - 5) = 4 \Rightarrow 7x - 10 = 4 \Rightarrow x = 2$.

Từ đó $y = 3 \cdot 2 - 5 = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2; 1)$.

2) Phương pháp cộng đại số.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

Nhận thấy hệ số của x trong hai phương trình bằng nhau (trừ nhau sẽ bằng 0).

Trừ theo vế hai phương trình, ta được $(2x - 2x) + (2y + 3y) = 9 - 4 \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1$

Thế $y = 1$ vào phương trình thứ nhất ta được $2x + 2 \cdot 1 = 9 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $\left(\frac{7}{2}; 1\right)$

Kết luận:

- ♣ Các giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.

Bước 1: Cộng hay trừ từng vế của hai phương trình trong hệ để được phương trình chỉ còn chứa một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} -4x + 3y = 0 \\ 4x - 5y = -8 \end{cases}$$

Bài làm:

Cộng từng vế của hai phương trình, ta được $(-4x + 4x) + (3y - 5y) = 0 - 8 \Rightarrow -2y = -8 \Rightarrow y = 4$

Thế $y = 4$ vào phương trình thứ nhất ta được $-4x + 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x = 3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(3; 4)$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ -5x + 2y = 4 \end{cases}$$

Bài làm:

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 và nhân hai vế của phương trình thứ hai với 3,

ta được:
$$\begin{cases} 8x + 6y = 12 \\ -15x + 6y = 12 \end{cases}$$

Trừ từng vế của hai phương trình, ta được $(8x + 15x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Thế $x = 0$ vào phương trình thứ nhất, ta được $4 \cdot 0 + 3y = 6 \Rightarrow y = 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(0; 2)$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế.

1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$	2) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$	3) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$
4) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$	5) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$	6) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$
7) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -3x + y = 7 \end{cases}$	8) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$	9) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x - 4y = 3 \end{cases}$
10) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$	11) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$	12) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 2y = 1 \end{cases}$
13) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$	14) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$	15) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$
16) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 5y = 19 \end{cases}$	17) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$	18) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$
19) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$	20) $\begin{cases} x + 4y = 11 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases}$	21) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$
22) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$	23) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$	24) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$
25) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$	26) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$	27) $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$
28) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$	29) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$	30) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số.

1) $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$	2) $\begin{cases} 4x-3y-15=0 \\ 4x+y=19 \end{cases}$	3) $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x-4y=17 \\ 5x+2y=11 \end{cases}$	5) $\begin{cases} 4x-3y=21 \\ 2x-5y=21 \end{cases}$	6) $\begin{cases} 2x+5y=8 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$
7) $\begin{cases} 7x+4y=2 \\ 5x-2y=16 \end{cases}$	8) $\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 3x-2y=-3 \end{cases}$	9) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x-8y=3 \end{cases}$
10) $\begin{cases} 5x+7y=17 \\ x-5y=-3 \end{cases}$	11) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$	12) $\begin{cases} -5x+2y=4 \\ 6x-3y=-7 \end{cases}$
13) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 6x+7y=8 \end{cases}$	14) $\begin{cases} 5x-6y=4 \\ 2x-5y=-1 \end{cases}$	15) $\begin{cases} 2x-5y=-3 \\ 5x+4y=-2 \end{cases}$
16) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$	17) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$	18) $\begin{cases} x-2y+6=0 \\ 5x-3y-5=0 \end{cases}$
19) $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ 2x+3y=-7 \end{cases}$	20) $\begin{cases} 3x+5y=10 \\ 3x-2y=-4 \end{cases}$	

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} 0,5x-0,5y=0,5 \\ 1,2x-1,2y=1,2 \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x-3y=11 \\ -0,8x+1,2y=1 \end{cases}$	3) $\begin{cases} 4x-3y=6 \\ 0,4x+0,2y=0,8 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x=-2(y-5) \\ 5x+3y=-5 \end{cases}$	5) $\begin{cases} 5(x+2)=2(y+7) \\ 3(x+y)=17-x \end{cases}$	6) $\begin{cases} 3(x+1)-y=6-2y \\ 2x-y=7 \end{cases}$
7) $\begin{cases} 2(x+y)=3x-y+7 \\ 3(x-2y)=x+y+8 \end{cases}$	8) $\begin{cases} -x+2y=-4(x-1) \\ 5x+3y=-x+y+8 \end{cases}$	9) $\begin{cases} 6(x+y)=8+2x-3y \\ 5(y-x)=5+3x+2y \end{cases}$
10) $\begin{cases} 2(x+y)+3(x-y)=4 \\ (x+y)+2(x-y)=5 \end{cases}$	11) $\begin{cases} 2(x+1)+3(x+y)=15 \\ 4(x-1)-(x+2y)=0 \end{cases}$	12) $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases}$
13) $\begin{cases} 2(x-2)+3(1+y)=-2 \\ 3(x-2)-2(1+y)=-3 \end{cases}$	14) $\begin{cases} 9(x-1)+(2y-3)=-2 \\ 3(x-1)-2(2y-3)=-3 \end{cases}$	15) $\begin{cases} 5(x+4)+3(y-2)=7 \\ (x+4)-3(y-2)=-1 \end{cases}$
16) $\begin{cases} (x+3)(y-1)=xy+2 \\ (x-1)(y+3)=xy-2 \end{cases}$	17) $\begin{cases} (x-1)(y+1)=xy+4 \\ (x+2)(y-1)=xy-10 \end{cases}$	18) $\begin{cases} (x+2)(y-5)=xy-50 \\ (x+4)(y+4)=xy+216 \end{cases}$
19) $\begin{cases} (x-3)(y+4)=xy-4 \\ (x+1)(y+2)=xy+6 \end{cases}$	20) $\begin{cases} (x+20)(y-1)=xy \\ (x-10)(y+1)=xy \end{cases}$	

Bài 4: Giải các hệ phương trình sau (*phương pháp đặt ẩn phụ*)

1) $\begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{1}{y+1} = 3 \\ \frac{4}{x-2} - \frac{3}{y+1} = 1 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$	3) $\begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y+3} = 7 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+3} = 1 \end{cases}$
---	---	---

4) $\begin{cases} \frac{1}{x-3} - \frac{4}{y+1} = 5 \\ \frac{3}{x-3} + \frac{4}{y+1} = -1 \end{cases}$	5) $\begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{1}{y+1} = 3 \\ \frac{3}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 8 \end{cases}$	6) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-2} = 8 \\ \frac{2}{x+1} - \frac{3}{y-2} = 1 \end{cases}$
7) $\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 2 \\ \frac{8}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1 \end{cases}$	8) $\begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$	9) $\begin{cases} \frac{1}{x-5} + \frac{3}{y-2} = 2 \\ \frac{3}{x-5} - \frac{5}{y-2} = \frac{-3}{2} \end{cases}$
10) $\begin{cases} \frac{1}{x+2} - \frac{5}{y-2} = -11 \\ \frac{3}{x+2} + \frac{2}{y-2} = 1 \end{cases}$	11) $\begin{cases} \frac{1}{x-2} + 3(y+3) = 7 \\ \frac{-3}{x-2} + 2(y+3) = 1 \end{cases}$	12) $\begin{cases} \frac{1}{2x-y} + x + 3y = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{2x-y} - 5(x+3y) = -3 \end{cases}$

Bài 5: Giải các hệ phương trình sau (*phương pháp đặt ẩn phụ*)

1) $\begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 1 \\ \frac{10}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases}$	3) $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{-3}{8} \end{cases}$
4) $\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{5}{2y+3} = 6 \\ \frac{6}{x-1} - \frac{1}{2y+3} = 2 \end{cases}$	5) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{3}{y+2} = -2 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{1}{y+2} = 3 \end{cases}$	6) $\begin{cases} \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{y+2x} = 3 \\ \frac{4}{x+2y} - \frac{3}{y+2x} = 1 \end{cases}$
7) $\begin{cases} \frac{1}{x-3} - \frac{2}{y+1} = 9 \\ \frac{3}{x-3} + \frac{1}{y+1} = 6 \end{cases}$	8) $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + 3(y+1) = 5 \\ \frac{2}{x+y} - 5(y+1) = -1 \end{cases}$	9) $\begin{cases} 2(x+1) - \frac{5}{y-3} = 9 \\ (x+1) - \frac{2}{y-3} = 5 \end{cases}$
10) $\begin{cases} \frac{7}{x-y+2} - \frac{5}{x+y-1} = \frac{9}{2} \\ \frac{3}{x-y+2} + \frac{2}{x+y-1} = 4 \end{cases}$	11) $\begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y-1} = -1 \end{cases}$	12) $\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$
13) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \\ \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+2} = 2 \end{cases}$		

Bài 6: Giải các hệ phương trình sau (*phương pháp đặt ẩn phụ*)

1) $\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+2} = 7 \\ 5(x+y) - 2\sqrt{x+2} = 4 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sqrt{x-2} + 2(x-y) = 8 \\ 2\sqrt{x-2} + 5(x-y) = 19 \end{cases}$	3) $\begin{cases} 5(x-y) + 2\sqrt{y+2} = 23 \\ 3(x-y) - \sqrt{y+2} = 5 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+1} = 4 \\ (x+y) - 3\sqrt{x+1} = -5 \end{cases}$	5) $\begin{cases} 2(x+y) + 3\sqrt{y-2} = 5 \\ 4(x+y) - \sqrt{y-2} = 3 \end{cases}$	6) $\begin{cases} 2(x^2 - 2x) + \sqrt{y+1} = 0 \\ 3(x^2 - 2x) - 2\sqrt{y+1} = -7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+2 +4\sqrt{y-1}=5 \\ 3 x+2 -2\sqrt{y-1}=1 \end{cases}$	8) $\begin{cases} x+2 +4\sqrt{y-1}=6 \\ 3 x+2 -2\sqrt{y-1}=4 \end{cases}$	9) $\begin{cases} 3 x+1 +2(x+2y)=4 \\ 4 x+1 -(x+2y)=9 \end{cases}$
10) $\begin{cases} 4 x+2 -\frac{3}{y-1}=1 \\ x+2 +\frac{1}{y-1}=\frac{5}{6} \end{cases}$	11) $\begin{cases} \frac{30}{x+1}-4 y-1 =22 \\ \frac{9}{x+1}+6 y-1 =21 \end{cases}$	12) $\begin{cases} \frac{1}{x+3}+2\sqrt{y-2}=5 \\ \frac{4}{x+3}-\sqrt{y-2}=2 \end{cases}$
13) $\begin{cases} \frac{1}{x+1}-\sqrt{y-1}=-1 \\ \frac{3}{x+1}+2\sqrt{y-1}=7 \end{cases}$	14) $\begin{cases} \frac{3}{x-4}+2\sqrt{y+1}=\frac{15}{2} \\ \frac{2}{x-4}-\sqrt{y+1}=-2 \end{cases}$	15) $\begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\frac{1}{y-3}=5 \\ 5\sqrt{x-1}+\frac{3}{y-3}=13 \end{cases}$
16) $\begin{cases} \frac{1}{x-2}+3\sqrt{y+3}=7 \\ \frac{-3}{x-2}+2\sqrt{y+3}=1 \end{cases}$	17) $\begin{cases} \frac{3}{x-y}-2\sqrt{y+1}=1 \\ \frac{1}{x-y}+\sqrt{y+1}=2 \end{cases}$	18) $\begin{cases} \frac{1}{3x-4}+3\sqrt{y+1}=2 \\ \frac{3}{3x-4}+5\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$
19) $\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{y-3}=\frac{5}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{2}{y-3}=-\frac{3}{2} \end{cases}$	20) $\begin{cases} 3\sqrt{x+1}-\frac{2}{y-2}=4 \\ 2\sqrt{x+1}+\frac{1}{y-2}=5 \end{cases}$	21) $\begin{cases} \frac{1}{x+2}+2\sqrt{y-3}=7 \\ \frac{2}{x+2}-3\sqrt{y-3}=-7 \end{cases}$
22) $\begin{cases} \frac{1}{x+1}+3\sqrt{y-2}=5 \\ \frac{2}{x+1}-5\sqrt{y-2}=-1 \end{cases}$	23) $\begin{cases} 4\sqrt{x+1}+\frac{1}{y-2}=9 \\ \sqrt{x+1}+\frac{2}{y-2}=4 \end{cases}$	24) $\begin{cases} 3\sqrt{x+1}-\frac{2}{y-2}=4 \\ 2\sqrt{x+1}+\frac{1}{y-2}=5 \end{cases}$
25) $\begin{cases} \sqrt{x-5}+\frac{6}{y-2}=4 \\ 4\sqrt{x-5}-\frac{2}{y-2}=3 \end{cases}$	26) $\begin{cases} 2\sqrt{x}+\frac{3}{y+1}=7 \\ \sqrt{x}+\frac{4}{y+1}=6 \end{cases}$	27) $\begin{cases} \frac{1}{x+2}+\frac{3}{\sqrt{y+1}}=2 \\ \frac{5}{x+2}-\frac{6}{\sqrt{y+1}}=3 \end{cases}$
28) $\begin{cases} \frac{3}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{y+2}}=4 \\ \frac{2}{x-1}+\frac{3}{\sqrt{y+2}}=5 \end{cases}$	29) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{y+2}=3 \\ \frac{3}{\sqrt{x-1}}+\frac{2}{y+2}=-1 \end{cases}$	30) $\begin{cases} \frac{1}{x+2}+\frac{3}{2\sqrt{y-3}}=4 \\ \frac{4}{x+2}-\frac{1}{2\sqrt{y-3}}=3 \end{cases}$
31) $\begin{cases} \frac{1}{x-5}+\frac{6}{\sqrt{y-2}}=2 \\ \frac{2}{x-5}-\frac{1}{\sqrt{y-2}}=-9 \end{cases}$	32) $\begin{cases} \sqrt{x-3}+\frac{2}{\sqrt{y-2}}=4 \\ 2\sqrt{x-3}-\frac{3}{\sqrt{y-2}}=1 \end{cases}$	33) $\begin{cases} \frac{1}{x+1}+\frac{4}{\sqrt{y-2}}=3 \\ \frac{3}{x+1}-\frac{1}{\sqrt{y-2}}=\frac{5}{2} \end{cases}$
34) $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\frac{1}{2x-y}=1 \\ \sqrt{x-1}+\frac{7}{2x-y}=8 \end{cases}$	35) $\begin{cases} \frac{2}{x-y}+\sqrt{y+1}=4 \\ \frac{1}{x-y}-3\sqrt{y+1}=-5 \end{cases}$	36) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\frac{1}{x-y}=1 \\ \sqrt{x+1}-\frac{2}{x-y}=4 \end{cases}$

$37) \begin{cases} \frac{1}{x+1} + 3\sqrt{y-2} = 5 \\ \frac{2}{x+1} - 5\sqrt{y-2} = -1 \end{cases}$	$38) \begin{cases} 2\sqrt{x-2} + \frac{y}{y+3} = 1 \\ 4\sqrt{x-2} - \frac{3y}{y+3} = 7 \end{cases}$	$39) \begin{cases} 3\sqrt{2x-1} - \frac{y}{y+1} = 1 \\ \sqrt{2x-1} + \frac{2y}{y+1} = 5 \end{cases}$
$40) \begin{cases} 2\sqrt{x-2y} - \frac{3}{2x-1} = 1 \\ 3\sqrt{x-2y} + \frac{1}{2x-1} = 7 \end{cases}$	$41) \begin{cases} \sqrt{y+1} - \frac{1}{x-1} = 1 \\ 2\sqrt{y+1} + \frac{1}{x-1} = 5 \end{cases}$	

Bài 3. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

A. LÝ THUYẾT.

1) Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

- ♣ Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình là:

Bước 1: Lập hệ phương trình:

- + Chọn ẩn số (*thường chọn hai ẩn*) và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số.
- + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- + Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình.

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra các nghiệm vừa tìm được của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn, nghiệm nào không thỏa mãn, rồi kết luận.

Ví dụ 1: (*Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình*)

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 50 m . Nếu chiều dài tăng thêm 5 m và chiều rộng giảm đi 5 m thì diện tích của mảnh vườn giảm đi 50 m^2 . Tính diện tích của mảnh vườn đó.

Bài làm:

Gọi chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là $x(m)$, $y(m)$. ĐK: $x > y$, $y > 5$

Vì mảnh vườn có chu vi là 50 m , nên ta có $2(x + y) = 50 \Rightarrow x + y = 25$ (1)

Chiều dài tăng thêm 5 m nên chiều dài là $x + 5(m)$.

Chiều rộng giảm đi 5 m nên chiều rộng là $y - 5(m)$. Khi đó diện tích mảnh vườn giảm đi 50 m^2 ,

nên ta có $(x + 5)(y - 5) = xy - 50 \Rightarrow -5x + 5y = -25$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 25 \\ -5x + 5y = -25 \end{cases}$$

Chia hai vế của phương trình thứ hai với 5, ta được hệ
$$\begin{cases} x + y = 25 \\ -x + y = -5 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới ta có $2y = 20 \Rightarrow y = 10$ (*thỏa mãn*)

Thế $y = 10$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $x + 10 = 25 \Rightarrow x = 15$ (*thỏa mãn*)

Vậy diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là $15 \cdot 10 = 150\text{ m}^2$

Ví dụ 2: (*Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình*)

Một đoàn xe cần vận chuyển hàng hóa thiết yếu tới các vùng có dịch. Nếu xếp mỗi xe 15 tấn thì còn thừa lại 5 tấn, còn nếu xếp mỗi xe 16 tấn thì chở được thêm 3 tấn nữa. Hỏi đoàn xe phải chở bao nhiêu tấn hàng và có mấy xe?

Bài làm:

Gọi số xe của đoàn là x (xe), $x \in \mathbb{N}$ và số tấn hàng cần vận chuyển là y (tấn), $y > 5$

Xếp mỗi xe 15 tấn còn thừa lại 5 tấn, thì số hàng trở được là $15x$ tấn,

ta có phương trình $15x = y - 5 \Rightarrow 15x - y = -5$ (1)

Xếp mỗi xe 16 tấn thì chở được thêm 3 tấn nữa, thì số hàng trở được là $16x$ tấn

ta có phương trình $16x = y + 3 \Rightarrow 16x - y = 3$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 15x - y = -5 \\ 16x - y = 3 \end{cases}$$

Trừ theo vế của hai phương trình của hệ phương trình ta được $x = 8$ (*thỏa mãn*)

Thế $x = 8$ vào phương trình thứ nhất ta được $15.8 - y = -5 \Rightarrow y = 125$ (thỏa mãn)

Vậy đoàn xe có 8 xe, và phải chở 125 tấn hàng.

Ví dụ 3: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định với một vận tốc xác định. Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 15 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 2 giờ so với dự định. Nếu ô tô giảm vận tốc đi 5 km/h thì sẽ đến B muộn 1 giờ so với dự định. Tính chiều dài quãng đường AB .

Bài làm:

Gọi vận tốc của ô tô theo dự định là x (km/h) và thời gian dự định đi từ A đến B là y (giờ).

ĐK: $x > 5, y > 2$

Khi đó quãng đường AB là $x.y$ (km).

ô tô tăng vận tốc thêm 15 km/h thì vận tốc của ô tô là $x + 15$ (km/h).

Khi đó ô tô đến B sớm hơn dự định là 2 giờ nên thời gian ô tô đi là $y - 2$ giờ.

Nên ta có phương trình $(x + 15)(y - 2) = xy \Rightarrow -2x + 15y = 30$ (1)

ô tô giảm vận tốc đi 5 km/h thì vận tốc của ô tô là $x - 5$ (km/h)

Khi đó ô tô đến B muộn hơn dự định là 1 giờ nên thời gian ô tô đi là $y + 1$ giờ.

Nên ta có phương trình $(x - 5)(y + 1) = xy \Rightarrow x - 5y = 5$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -2x + 15y = 30 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 2, ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} -2x + 15y = 30 \\ 2x - 10y = 10 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ phương trình mới, ta được $5y = 40 \Rightarrow y = 8$ (thỏa mãn)

Thế $y = 8$ vào phương trình thứ hai ta được $x - 5.8 = 5 \Rightarrow x = 45$ (thỏa mãn)

Vậy quãng đường AB là $x.y = 45.8 = 360 \text{ km}$

Ví dụ 4: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe tăng vận tốc thêm 10 km/h thì đến B sớm hơn dự định 3 giờ. còn nếu xe giảm vận tốc đi 10 km/h thì đến B chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc dự định và thời gian dự định của ô tô đi hết quãng đường AB .

Bài làm:

Gọi vận tốc dự định lúc đầu của xe ô tô là x (km/h) với $x > 10$

Thời gian dự định để xe đi hết quãng đường AB là y (h) với $y > 3$

Độ dài quãng đường AB là xy (km)

Vận tốc của xe đi lần thứ nhất là $x + 10$ (km), thời gian xe đi là $y - 3$ (giờ)

Khi đó quãng đường AB là $(x + 10)(y - 3)$ (km).

Khi đó ta có phương trình $(x + 10)(y - 3) = xy \Rightarrow -3x + 10y = 30$ (1)

Vận tốc của xe đi lần thứ hai là $x - 10$ (km), thời gian xe đi là $y + 5$ (giờ)

Độ dài quãng đường AB là $(x - 10)(y + 5)$ (km).

Khi đó ta có phương trình $(x - 10)(y + 5) = xy \Rightarrow 5x - 10y = 50$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -3x + 10y = 30 \\ 5x - 10y = 50 \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ phương trình ta được $2x = 80 \Rightarrow x = 40$ (thỏa mãn)

Thế $x = 40$ vào phương trình thứ nhất ta được $-3 \cdot 40 + 10y = 30 \Rightarrow y = 15$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc dự định là 40 km/h và thời gian dự định đi hết quãng đường AB là 15 giờ

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Dạng 1.

Bài 1: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Cho hình chữ nhật cho chu vi 48 m . Nếu tăng chiều rộng thêm 2 m và tăng chiều dài thêm 3 m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 64 m^2 . Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật ban đầu.

Bài 2: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một vườn trường hình chữ nhật trước đây có chu vi 120 m , nhà trường đã mở rộng chiều dài thêm 5 m và chiều rộng thêm 3 m , do đó diện tích vườn trường đã tăng thêm 245 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của vườn trường lúc đầu.

Bài 3: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 56 m . Nếu tăng chiều rộng thêm 2 m , giảm chiều dài đi 1 m thì diện tích mảnh đất tăng thêm 18 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Bài 4: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một sân phòng hội trường của trường X có dạng hình chữ nhật. Nhà trường muốn sửa lại căn phòng cho rộng rãi hơn. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3 m , phòng hội trường sẽ rộng thêm 90 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng thêm 2 m , phòng hội trường sẽ rộng thêm 87 m^2 . Tính diện tích ban đầu của hội trường.

Bài 5: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Tính các kích thước của một hình chữ nhật biết rằng, nếu tăng chiều dài thêm 3 cm và giảm chiều rộng đi 2 cm thì diện tích giảm 12 cm^2 . Còn nếu giảm chiều dài 2 cm và tăng chiều rộng 2 cm thì diện tích tăng thêm 8 cm^2

Bài 6: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng là 5 m . Nếu giảm chiều rộng đi 4 m và giảm chiều dài đi 5 m thì diện tích mảnh đất giảm đi 180 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

Bài 7: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 34 m . Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng thêm 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m^2 . Tính chiều dài, chiều rộng mảnh vườn đó.

Bài 8: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một hình chữ nhật, nếu tăng độ dài mỗi cạnh thêm 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật tăng thêm 13 cm^2 . Nếu giảm chiều dài đi 2 cm , chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm 15 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho.

Dạng 2.

Bài 1: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai người thợ cùng xây một bức tường trong 3 giờ 45 phút thì xong. Nhưng họ chỉ làm chung trong ba giờ thì người thứ nhất được điều đi làm việc khác, người thứ hai xây tiếp bức tường còn lại trong 2 giờ nữa thì xong. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người xây xong bức tường trong bao lâu?

Bài 2: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai người thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm trong 6 ngày thì xong công việc. Hai người làm cùng nhau trong 3 ngày thì người thứ nhất được chuyển đi làm công việc khác, người thứ hai làm một mình trong 4 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài 3: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì 12 ngày sẽ xong. Nếu đội 1 làm một mình trong 5 ngày rồi nghỉ, đội 2 làm tiếp trong 15 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 75% công việc. Hỏi làm một mình thì mỗi đội làm xong công việc đó trong bao lâu?

Bài 4: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 2 giờ làm xong. Nếu hai người làm riêng thì thời gian người thứ hai làm xong công việc đó nhiều hơn thời gian người thứ nhất làm là 3 giờ. Hỏi mỗi người làm riêng thì sau bao nhiêu giờ mới xong công việc trên.

Bài 5: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai nhân viên vệ sinh được phân công dọn dẹp thư viện trường. Nếu hai người cùng làm thì trong 8 giờ công việc sẽ hoàn thành. Nhưng cả hai người cùng làm 3 giờ thì người thứ nhất phải đi làm công việc khác và người thứ hai làm tiếp 3 giờ chỉ hoàn thành được 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài 6: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai tổ công nhân cùng làm một công việc sau 12 giờ thì xong. Họ làm chung trong 4 giờ thì tổ một phải đi làm việc khác. Tổ hai làm xong công việc còn lại trong 10 giờ. Tính thời gian mỗi tổ làm một mình xong công việc đó.

Bài 7: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 15 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi người thứ hai làm tiếp trong 5 giờ thì được 25% công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu để xong công việc.

Bài 8: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai công nhân cùng làm một công việc thì 6 ngày sẽ xong. Nhưng nếu người thứ nhất làm 4 ngày rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp 6 ngày thì mới hoàn thành được $\frac{4}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc.

Bài 9: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai người làm chung một công việc thì sau 16 giờ sẽ xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 15 giờ và người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Tính thời gian mỗi người làm một mình xong công việc.

Bài 10: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai tổ sản xuất cùng nhận chung một đơn hàng. Nếu hai tổ cùng làm thì sau 15 ngày sẽ xong. Tuy nhiên sau khi cùng làm được 6 ngày thì tổ một có việc bận phải chuyển công việc khác, do đó tổ hai làm một mình 24 ngày nữa thì xong. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi tổ làm xong công việc trên trong bao nhiêu ngày?

Bài 11: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu họ làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người cần bao nhiêu giờ để xong công việc đó?

Bài 12: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì xong trong 4 giờ. Nếu mỗi đội làm riêng xong được công việc ấy thì đội thứ nhất cần nhiều thời gian hơn đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi mỗi đội làm riêng thì hoàn thành công việc trong bao lâu.

Bài 13: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai công nhân cùng làm chung một công việc thì trong 8 giờ sẽ xong công việc. Nếu mỗi người làm một mình, để hoàn thành công việc đó thì người thứ nhất cần nhiều hơn người thứ hai là 12 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc đó.

Bài 14: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai người cùng làm chung một công việc trong 4 giờ 48 phút thì xong. Biết rằng thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc trên nhiều hơn thời gian để người thứ hai làm một mình xong công việc là 4 giờ. Hỏi mỗi người làm một mình thì trong bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

Bài 15: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai người thợ cùng làm một công việc trong 9 ngày thì xong. Mỗi ngày lượng công việc của người thợ thứ hai làm được nhiều gấp ba lần lượng công việc người thứ nhất. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người làm xong công việc đó trong bao lâu.

Bài 16: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 12 giờ sẽ đầy bể. Nếu mở vòi 1 chảy trong 4 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi 2 chảy trong 3 giờ thì được $\frac{3}{10}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể.

Bài 17: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mở vòi 1 chảy một mình trong 3 giờ rồi khóa lại, mở vòi 2 chảy tiếp trong 4 giờ thì lượng nước trong bể chiếm 60% bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu sẽ đầy bể.

Bài 18: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 45 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ hai trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{3}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì sẽ đầy bể trong bao lâu?

Bài 19: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 6 giờ sẽ đầy bể. Cùng chảy được 2 giờ thì khóa vòi thứ nhất lại và vòi thứ hai tiếp tục chảy thêm 12 giờ nữa thì đầy bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu mới đầy bể?

Bài 20: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn, sau 1 giờ 30 phút thì đầy bể, nếu mở vòi thứ nhất trong 15 phút. Rồi khóa lại và mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 20 phút thì sẽ chảy được 20% bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể.

Bài 21: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 12 giờ đầy bể. Nếu người ta mở cả hai vòi chảy trong 4 giờ rồi khóa vòi thứ hai lại và để vòi thứ nhất chảy tiếp 14 giờ nữa thì mới đầy bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài 22: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hãy tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài 23: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước sau 4 giờ thì đầy bể. Nếu chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai chảy đầy bể là 6 giờ. Hỏi nếu chảy một mình thì mỗi vòi cần vào lâu để đầy bể.

Dạng 3.

Bài 1: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 500 sản phẩm, sang tháng thứ hai do cải tiến kỹ thuật, tổ 1 làm vượt mức 10% , tổ hai làm vượt mức 15% so với tháng thứ nhất. Vì vậy tháng thứ hai cả hai tổ đã làm được 564 sản phẩm. Hỏi trong tháng thứ nhất, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

Bài 2: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hưởng ứng phong trào của hội đồng đội làm tấm kính chắn giọt bắn gửi các y bác sĩ chống dịch. Hai lớp 9A, 9B trong đợt một đã làm được 1500 chiếc tấm kính chắn giọt bắn. Để đáp ứng nhu cầu với tình hình dịch bệnh, nên trong đợt hai lớp 9A vượt mức 75% , lớp 9B vượt mức 68% nên cả hai lớp đã làm được 2583 chiếc tấm kính chắn giọt bắn. Hỏi trong đợt một mỗi lớp làm được bao nhiêu tấm kính chắn giọt bắn?

Bài 3: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Theo kế hoạch, hai tổ sản xuất phải làm 700 sản phẩm. Nhưng do tổ một vượt mức 15% so với kế hoạch và tổ hai vượt mức 20% nên cả hai tổ đã làm được 820 sản phẩm. Tính số sản phẩm mà mỗi tổ làm theo kế hoạch.

Bài 4: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải hoàn thành tổng cộng 360 dụng cụ. Thực tế xí nghiệp một vượt mức kế hoạch 10% còn xí nghiệp hai vượt mức 15% . Do đó cả hai xí nghiệp đã làm được 404 dụng cụ. Tính số lượng dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Bài 5: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Theo kế hoạch hai tổ được giao sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian đã định. Do cải tiến kỹ thuật nên tổ một đã sản xuất vượt mức kế hoạch 18% và tổ hai sản xuất vượt mức 21% . Vì vậy trong cùng thời gian quy định hai tổ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Tính số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch.

Bài 6: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai đội công nhân làm chung một công việc và dự định 12 ngày thì hoàn thành xong. Nhưng khi làm chung được 8 ngày thì đội một được điều động đi làm việc khác. Đội hai tiếp tục làm nốt phần việc còn lại. Khi làm một mình, do cải tiến cách làm nên năng suất đội hai tăng gấp đôi, nên đội hai đã hoàn thành xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì sau thời gian bao lâu sẽ hoàn thành công việc trên.

Bài 7: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Tháng giêng hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy, tháng hai do cải tiến kỹ thuật, tổ một đã vượt mức 15% và tổ hai vượt mức 10% so với tháng riêng nên hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng riêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Bài 8: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hai tổ sản xuất trong tháng thứ nhất làm được 1000 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, do cải tiến kỹ thuật nên tổ một vượt mức 20% , tổ hai vượt mức 15% so với tháng thứ nhất, vì vậy cả hai tổ sản xuất được 1170 sản phẩm. Hỏi tháng thứ nhất, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

Bài 9: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Bạn Bình mua một quyển từ điển và một món đồ chơi với tổng số tiền theo giá niêm yết là 750 nghìn đồng. Vì Bình mua đúng dịp cửa hàng có chương trình khuyến mại nên khi thanh toán giá quyển từ điển được giảm 20%, giá món đồ chơi được giảm 10%. Do đó Bình chỉ phải trả 630 nghìn đồng. Hỏi Bình mua mỗi thứ giá bao nhiêu tiền.

Bài 10: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Giá tiền một chiếc bếp từ đôi và một chiếc nồi chiên hơi nước ban đầu tổng cộng là 21 triệu. Nhân dịp sắp tết nguyên đán Giáp Thìn 2024, cửa hàng giảm giá bếp từ đôi 15% và giảm giá nồi chiên hơi nước 10% so với giá ban đầu nên bác An đi mua hai sản phẩm này chỉ hết 18,3 triệu. Tính giá tiền một chiếc bếp từ đôi và một chiếc nồi chiên hơi nước lúc ban đầu chưa giảm giá?

Bài 11: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một người mua một cái bàn là và một cái quạt điện với tổng số tiền theo giá niêm yết là 750 nghìn đồng. Khi trả tiền người đó được khuyến mại 10% đối với bàn là và 20% đối với quạt điện so với giá niêm yết. Vì vậy người đó phải trả tổng cộng 625 nghìn đồng. Tính giá tiền bàn là và quạt điện theo giá niêm yết.

Bài 12: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Bác Xuân đến siêu thị mua một máy hút ẩm và một cái quạt cây với tổng số tiền theo niêm yết giá 9 triệu đồng. Tuy nhiên do siêu thị khuyến mại để tri ân khách hàng nên giá của máy hút ẩm và quạt cây đã lần lượt được giảm 20% và 10% so với giá niêm yết. Do đó bác Xuân đã được giảm 1,6 triệu đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi giá niêm yết của máy hút ẩm, quạt cây là bao nhiêu?

Dạng 4.

Bài 1: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Để hoàn thành một công việc theo dự định thì cần một số công nhân làm trong một số ngày nhất định. Nếu tăng thêm 10 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 2 ngày. Nếu bớt đi 10 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày nữa mới hoàn thành công việc. Hỏi theo dự định thì cần bao nhiêu người công nhân.

Bài 2: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Để hoàn thành một công việc theo dự định cần một số công nhân làm trong một số ngày định trước. Nếu bớt đi hai công nhân thì phải mất thêm 4 ngày mới hoàn thành công việc. nếu tăng thêm 3 công nhân thì công việc hoàn thành sớm 3 ngày. Hỏi theo dự định, cần bao nhiêu công nhân và làm bao nhiêu ngày?

Bài 3: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Nhà bạn Mai có một mảnh vườn được chia thành nhiều luống, mỗi luống trồng số lượng cây cải bắp như sau. Mai tính rằng nếu tăng thêm 7 luống nhưng mỗi luống trồng ít đi hai cây thì số cây bắp cải toàn vườn giảm 9 cây. Còn nếu giảm đi 5 luống nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì số cây bắp cải toàn vườn tăng thêm 15 cây. Hỏi hiện vườn nhà mai đang trồng bao nhiêu cây cải bắp.

Bài 4: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Một phòng học có 200 ghế được xếp thành từng dãy, số ghế ở mỗi dãy như nhau. Nếu kê thêm 2 dãy và mỗi dãy tăng thêm 1 ghế thì kê được 242 ghế. Tính số dãy và số ghế trong một dãy lúc ban đầu.

Bài 5: (Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình)

Hội trường của trường THCS Ngọc Thụy có đúng 250 ghế được chia đều vào các dãy. Nhằm giãn cách xã hội, trong đợt phòng chống dịch, để mỗi dãy bớt đi 5 ghế mà số ghế trong hội trường không đổi thì nhà trường phải kê thêm 25 dãy ghế như thế nữa. Hỏi ban đầu, số ghế trong hội trường được chia thành bao nhiêu dãy?

Chương 2. Phương trình và bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bài 4. Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn.

A. LÝ THUYẾT.

1) Phương trình tích.

- ♣ Để giải phương trình tích $(ax+b)(cx+d)=0$, ta giải hai phương trình $ax+b=0$ và $cx+d=0$.

Sau đó lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Ví dụ 1: Giải phương trình $(3x-1)(2-4x)=0$.

Bài làm:

Ta có $(3x-1)(2-4x)=0$, ta giải hai phương trình sau:

$$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$2-4x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}. \text{ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là } x=\frac{1}{3} \text{ và } x=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình $x^2-3x=2x-6$.

Bài làm:

Biến đổi phương trình ta có:

$$x^2-3x=2x-6 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x^2-2x-3x+6=0 \Rightarrow x(x-2)-3(x-2)=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3)=0. \text{ Ta giải hai phương trình sau}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3. \text{ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là } x=2 \text{ và } x=3.$$

2) Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

- ♣ Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thường đặt điều kiện cho ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 và gọi đó là điều kiện xác định của phương trình (*viết tắt là ĐKXD*).

Ví dụ 3: Tìm ĐKXD của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{3x+1}{2x-1}=1$	b) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x}=2$	c) $\frac{1}{(x-1)}+\frac{x}{(x-2)(x-1)}=2$
--------------------------	------------------------------------	---

Bài làm:

a) ĐKXD: $2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

b) ĐKXD: $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ và $x \neq 0$.

c) ĐKXD: $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ và $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.

- ♣ Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Bước 1: Tìm ĐKXD của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa tìm được.

Bước 4: Trong các giá trị vừa tìm được, giá trị nào thỏa mãn ĐKXD chính là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4: Giải phương trình $\frac{1}{x-1}-\frac{4x}{x^3-1}=\frac{x}{x^2+x+1}$ (1)

Bài làm:

ĐKXD: $x \neq 1$.

Quy đồng và khử mẫu ta được $\frac{x^2+x+1-4x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \Rightarrow x^2-3x+1=x^2-x$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 1 - x^2 + x = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXD).}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $(x+2)(x-1) = 0$	2) $(x+2)(x-3) = 0$	3) $(x-1)(3x-6) = 0$
4) $(x-7)(2x-8) = 0$	5) $(2x-7)(7+x) = 0$	6) $(x-5)(5x-1) = 0$
7) $(2x+5)(1-3x) = 0$	8) $(2x+3)(1-4x) = 0$	9) $(3x+2)(4x-5) = 0$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $(x+1)^2(x+2) = 0$	2) $(6-x)(x+6)^2 = 0$	3) $(5-x)^2(3x-1) = 0$
4) $(3x-1)(3-x)^2 = 0$	5) $(x-2)^2(3x-4) = 0$	6) $(2x-3)^2(x-4) = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1) $5x^2 - 8x = 0$	2) $8x^2 - 4x = 0$	3) $4x^2 + 3x = 0$
4) $-3x^2 - 6x = 0$	5) $-6x + 9x^2 = 0$	6) $-9x^2 - 8x = 0$
7) $2x(x-3) = x-3$	8) $4x(x-3) - 3x + 9 = 0$	9) $x(x-4) - 3x + 12 = 0$
10) $2x(x-3) + 5x - 15 = 0$	11) $5x(x-6) - 2x + 12 = 0$	12) $7x(x+2) - 6(x+2) = 0$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

1) $(x-1)(x+7) = (1-x)(3-2x)$	2) $(2-x)(x+1) = (x-2)(3x+5)$
3) $(x+6)(5-x) = (x-5)(7x+8)$	4) $(2x+5)(x-4) = (x-4)(5-x)$
5) $(x-2)(7-3x) = (x-2)(4x-3)$	6) $3x^2 - 3x = (x-1)(x+3)$
7) $x(x+3) = (2x-1)(x+3)$	8) $(3x-2)(2x+1) = (2x+1)^2$
9) $(2x-3)(5x+1) = (3-2x)(x-5)$	10) $(6x-7)(3x+4) = (7-6x)(x-1)$
11) $(2-3x)(x+11) = (3x-2)(2-5x)$	

Bài 5: Giải các phương trình sau:

1) $(1+x)^2 - (x-1)^2 = 0$	2) $(3x+1)^2 - (2x+3)^2 = 0$	3) $(5x-4)^2 - (3x-2)^2 = 0$
4) $(x-2)^2 = (3x+5)^2$	5) $(x-3)^2 = (3x-2)^2$	6) $(2x+7)^2 = (x+3)^2$
7) $(6-9x)^2 = (5x-7)^2$	8) $(4x-6)^2 = (6+4x)^2$	9) $(13x-7)^2 = (3x-4)^2$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

1) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{5}{x} = \frac{8}{x^2-2x}$	2) $\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x}$	3) $\frac{x-7}{x} = \frac{49}{x(x-7)} + \frac{3x}{x-7}$
4) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-x} = \frac{1}{x}$	5) $\frac{5+x}{3x-6} - \frac{2x-3}{2x-4} = \frac{1}{2}$	6) $\frac{6x-x^2}{x^2-2x} + \frac{x}{x-2} = \frac{3}{x}$
7) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2-2x}$	8) $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{3x+3}$	9) $\frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{5}{2x+6}$
10) $\frac{6}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{5}{2x+6}$	11) $\frac{7}{2x-3} + \frac{1}{2x-2} = \frac{3}{x-1}$	12) $\frac{1}{2x-1} + \frac{3}{12x-8} = \frac{2}{3x-2}$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

1) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{3x+5}{x^2-9}$	2) $\frac{3x-1}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3}$	3) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{2-x} = \frac{2x-3}{x^2-4}$
4) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{-12}{x^2-4}$	5) $\frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{20}{x^2-25}$	6) $\frac{3}{x-7} + \frac{2}{x+7} = \frac{5}{x^2-49}$
7) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{6}{x+2} = \frac{x^2}{x^2-4}$	8) $\frac{x}{x+3} - \frac{2x-1}{3-x} = \frac{2x^2+4x}{x^2-9}$	9) $\frac{x-5}{x+5} - \frac{2x}{x-5} = \frac{x(x+10)}{25-x^2}$
10) $\frac{5}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{x-5}{x^2-9}$	11) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{48}{9-x^2}$	12) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$
13) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{2x-22}{x^2-4}$	14) $\frac{3}{1-3x} = \frac{2}{1+3x} - \frac{7+5x}{9x^2-1}$	15) $\frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{x^2+9}{x^2-9}$
16) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{7x-6}{4-x^2}$	17) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{2x-1}{x-3} = \frac{13x-9}{x^2-9}$	18) $\frac{x^2-4x-8}{x^2-4} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}$

Bài 8: Giải các phương trình sau:

1) $\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-2} = \frac{3x}{(x+1)(x-2)}$	2) $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{3x-11}{(x+1)(x-2)}$
3) $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{3-x} = \frac{3x-20}{(x-3)(x-2)}$	4) $\frac{x}{2x-6} - \frac{x}{2x+2} = \frac{3x+1}{(x+1)(x-3)}$
5) $\frac{x+3}{x+1} - \frac{x-1}{x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)}$	6) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{5}{(x-1)(x-2)}$
7) $\frac{2}{(x-4)(x-2)} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{x-1}{2-x}$	8) $\frac{7}{x+2} + \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x^2+5x+6}$
9) $\frac{x}{x+2} - \frac{x^2+1}{x^2-2x-8} = \frac{3}{x-4}$	10) $\frac{4}{x+6} + \frac{1}{x-3} = \frac{9}{x^2+3x-18}$
11) $\frac{2}{3x+1} - \frac{15}{6x^2-x-1} = \frac{3}{2x-1}$	12) $\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$
13) $\frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+3} = \frac{3x+11}{x^2+2x-3}$	14) $\frac{2}{x+6} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x+8}{x^2+7x+6}$
15) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}$	16) $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+4} = \frac{3x}{x^2+2x-8}$
17) $\frac{3}{2x-1} + \frac{1}{x+4} = \frac{5x+11}{2x^2+7x-4}$	18) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{x^2-11}{x^2-4}$
19) $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} = \frac{2}{x^2-1}$	20) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{5}{x-2} = \frac{4}{x^2-4} + 1$
21) $\frac{x}{2x-6} + \frac{x}{2x+2} = \frac{-2x}{(3-x)(x+1)}$	22) $\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x}$
23) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} = \frac{3}{2x+2}$	24) $\frac{2x}{x^2+x+1} - \frac{1}{1-x} = \frac{3x^2}{x^3-1}$
25) $\frac{9x^2}{x^3-8} + \frac{6}{x^2+2x+4} = \frac{3}{x-2}$	26) $\frac{1}{x+2} - \frac{2x-9}{x^3+8} = \frac{2}{x^2-2x+4}$
27) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x^2+2}{x^3-1} = 0$	

Bài 5. Bất đẳng thức và tính chất.

A. LÝ THUYẾT.

1) Bất đẳng thức.

- ♣ Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) là các bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.
- ♣ Hai bất đẳng thức $a > b$ và $c > d$ gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều.
Hai bất đẳng thức $a > b$ và $c < d$ gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.
- ♣ Tính chất bắc cầu của bất đẳng thức. Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.

Ví dụ 1: Hệ thức $(a-b)^2 \geq 0$ gọi là một bất đẳng thức. trong đó vế trái là $(a-b)^2$, vế phải là 0.

Ví dụ 2: Hệ thức $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$ là một bất đẳng thức, trong đó $3(a^2 + b^2 + c^2)$ là vế trái, còn $(a+b+c)^2$ là vế phải.

Ví dụ 3: Ta có bất đẳng thức $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$ và $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Theo tính chất bắc cầu ta có $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab+bc+ca)$.

2) Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng.

- ♣ Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho:

Cụ thể: $a < b \Rightarrow a+c < b+c$ hoặc $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$
 $a > b \Rightarrow a+c > b+c$ hoặc $a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$

Ví dụ 4: Cho $a-2 > b-2$. Hãy so sánh a với b .

Bài làm:

Ta có $a-2 > b-2 \Rightarrow a-2+2 > b-2+2 \Rightarrow a > b$. Vậy $a > b$.

3) Liên hệ giữa thứ tự với phép nhân.

- ♣ Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.
- ♣ Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

Cụ thể: với $c > 0$ $a < b \Rightarrow a.c < b.c$ hoặc $a \geq b \Rightarrow a.c \geq b.c$
với $c < 0$ $a < b \Rightarrow a.c > b.c$ hoặc $a \geq b \Rightarrow a.c \leq b.c$

Ví dụ 5: Cho bất đẳng thức $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab+bc+ca)$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+bc+ca$.

Bài làm:

Từ $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow \frac{1}{3}.3(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{3}.3(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+bc+ca$ (đpcm)

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: So sánh hai số a và b , nếu

1) $a+1954 < b+1954$	2) $a-7 \geq b-7$	3) $a-(-4) \leq b+4$
4) $11+a < 11+b$	5) $-6+a \leq b-6$	6) $3-(-a) > b+3$

Bài 2: So sánh hai số a và b , nếu

1) $6a \leq 6b$	2) $3a+1 \geq 3b+1$	3) $5a-1 > 5b-1$
4) $8-a < 8-b$	5) $-3a \geq -3b$	6) $-2a+3 \geq 3-2b$

Bài 3: Cho $a < b$. Chứng minh rằng

1) $2a+1 < 2b+2$	2) $-2a-5 > -2b-7$	3) $4a+2 < 4b+3$
------------------	--------------------	------------------

Bài 4: Cho $a > b$. Chứng minh rằng

1) $1-3a < 1-3b$	2) $6a-5 > -5+6b$	3) $-3a-4 < -3b-4$
4) $-1+2a > -1+2b$	5) $-2a+3 < -2b+5$	6) $4a+1 > 4b-7$

Bài 5: Cho $2a+1 \geq 2b-3$. Chứng minh rằng $a+2 \geq b$.

Bài 6: Cho $3-4a \geq 3-4b$. Chứng minh rằng $4a+3 \leq 4b+3$.

Bài 7: Cho $2a+3 \geq 2b+4$. Chứng minh rằng $2a+1 > 2b$.

Bài 8: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Bài 9: Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a+b+c)$ với mọi a, b, c .

Bài 10: Chứng minh rằng $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$ với mọi a, b, c .

Bài 11: Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ với mọi a, b

Bài 12: Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Bài 13: Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ với mọi a, b, c .

Bài 14: Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$.

Bài 6. Bất phương trình bậc nhất một ẩn.

A. LÝ THUYẾT.

1) Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn.

- ♣ Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .
- ♣ Trong bất phương trình $ax + b > 0$ thì $ax + b$ là vế trái, còn 0 gọi là vế phải.

Ví dụ 1: Trong các bất phương trình sau, đâu là bất phương trình một ẩn x .

a) $3x + 16 \leq 0$	b) $5 - 5x > 0$	c) $x^2 - 5 > 0$	d) $-3x \leq 4$
---------------------	-----------------	------------------	-----------------

Bài làm:

Các bất phương trình trong câu a), b), d) là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .

Bất phương trình $x^2 - 5 > 0$ không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

- ♣ Số x_0 là một nghiệm của bất phương trình $A(x) < B(x)$ nếu $A(x_0) < B(x_0)$ là khẳng định đúng.
- ♣ Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

2) Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.

- ♣ Bất phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b < 0$ ($a \neq 0$) được giải như sau:

$$ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b.$$

$$\text{Nếu } a > 0 \text{ thì } x < \frac{-b}{a} \quad \text{Nếu } a < 0 \text{ thì } x > \frac{-b}{a}.$$

- ♣ Ta cũng có thể giải được các bất phương trình một ẩn đưa được về dạng $ax + b < 0$.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $6x + 5 < 0$	b) $-2x - 7 > 0$	c) $5x + 7 > 8x - 5$
-----------------	------------------	----------------------

Bài làm:

a) $6x + 5 < 0 \Rightarrow 6x < -5 \Rightarrow x < \frac{-5}{6}$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{-5}{6}$.

b) $-2x - 7 > 0 \Rightarrow -2x > 7 \Rightarrow x < \frac{-7}{2}$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{-7}{2}$.

c) $5x + 7 > 8x - 5 \Rightarrow 5x - 8x > -5 - 7 \Rightarrow -3x > -12 \Rightarrow x < 4$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 4$.

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $x - 5 \geq 0$	b) $-x - 5 \leq 0$	c) $-4x + 12 \leq 0$
-------------------	--------------------	----------------------

Bài làm:

a) $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 5$.

b) $-x - 5 \leq 0 \Rightarrow -x \leq 5 \Rightarrow x \geq -5$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -5$.

c) $-4x + 12 \leq 0 \Rightarrow -4x \leq -12 \Rightarrow x \geq 3$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 3$.

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $3x + 2 > 2x + 3$	b) $5x + 4 < -3x - 2$	c) $-4x + 3 \leq 3x - 1$
----------------------	-----------------------	--------------------------

Bài làm:

a) $3x + 2 > 2x + 3 \Rightarrow 3x - 2x > 3 - 2 \Rightarrow x > 1$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 1$.

b) $5x + 4 < -3x - 2 \Rightarrow 8x < -6 \Rightarrow x < \frac{-3}{4}$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{-3}{4}$.

c) $-4x + 3 \leq 3x - 1 \Rightarrow -7x \leq -4 \Rightarrow x \geq \frac{4}{7}$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{4}{7}$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.**Bài 1:** Giải các bất phương trình sau:

1) $x+3 > 5$	2) $3x-1 > 0$	3) $3x+2 > 8$	4) $2x-7 > 0$
5) $3-2x \leq 4$	6) $3x+5 \leq 14$	7) $-x-3 \geq -4$	8) $-x+3 \geq -6$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

1) $x+2 < 3x+4$	2) $2x-7 > 8-x$	3) $3x+5 < 2x-1$	4) $5x-3 > 3x-4$
5) $7x+4 \geq 5x-8$	6) $5x-2 \leq 2x+8$	7) $-3x-1 \leq -3+x$	8) $4-x \geq -5-2x$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

1) $3(2+x) \leq x-8$	2) $4x-3 > 3(x-2)$	3) $10x+1 > 3(5x+2)$
4) $2(x-3)+12 \leq x+2$	5) $-3(x+1) \geq x-2$	6) $4(3-x) \geq -3x+5$
7) $3+2(x-1) < 3(x+1)-5$	8) $4x-8 \geq 3(3x-2)+4-2x$	9) $3(x-2)+7x \leq 4(x+1)+14$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

1) $2x+3(x+1) > 5x-(2x-4)$	2) $(x+1)(2x-1) < 2x^2-4x+1$
----------------------------	------------------------------

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

1) $\frac{x-6}{3} \leq \frac{2x+1}{4}$	2) $\frac{4x-5}{3} > \frac{7-x}{5}$	3) $\frac{2x-3}{2} < \frac{1-3x}{-5}$
4) $\frac{2x-3}{2} > \frac{8x-11}{6}$	5) $\frac{3x-1}{3} \geq \frac{4-2x}{2}$	6) $\frac{5-2x}{6} > \frac{5x-2}{3}$
7) $\frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{4} \leq \frac{x-2}{6}$	8) $\frac{x-1}{2} + \frac{2-x}{3} \leq \frac{3x-3}{4}$	9) $\frac{x-5}{2} - \frac{x-3}{6} < \frac{2x+1}{3}$
10) $\frac{x-1}{5} - \frac{4x+3}{10} < \frac{1-5x}{25}$	11) $\frac{x+2}{4} + \frac{2x-3}{3} \leq \frac{x-12}{6}$	12) $\frac{3x+5}{4} - \frac{x-4}{6} \leq \frac{3x+7}{3}$
13) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x}{2} \leq \frac{7}{6}$	14) $\frac{x+2}{3} \geq \frac{2x-1}{4} - 1$	15) $\frac{1-2x}{4} - 2 \leq \frac{1-5x}{8}$
16) $\frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{5} < -2$	17) $\frac{x-1}{4} - 1 > \frac{x+1}{3} + 8$	18) $\frac{x+2}{3} - 1 \geq 2x + \frac{x}{2}$

Bài 6: Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu? (*làm tròn đến triệu đồng*).

Bài 7: Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 100 nghìn đồng thì khách hàng có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (*làm tròn đến hàng đơn vị*).

Bài 8: Chứng minh rằng $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ với mọi a, b

Bài 9: Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b+c+d)$ với mọi a, b, c, d .

c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2 = \sqrt{(3a^2)^2} + 3a^2 = 3a^2 + 3a^2 = 6a^2$ (vì $3a^2 \geq 0$ với mọi a)

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau

1) $\sqrt{4x}$	2) $\sqrt{-6x}$	3) $\sqrt{-3x}$	4) $\sqrt{7x}$
5) $\sqrt{3x+1}$	6) $\sqrt{6x-1}$	7) $\sqrt{4-2x}$	8) $\sqrt{-3a-4}$
9) $\sqrt{4-x^2}$	10) $\sqrt{x^2-16}$	11) $\sqrt{4x^2-1}$	12) $\sqrt{1+3a^2}$

Bài 2: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau

1) $\sqrt{\frac{x+3}{5-x}}$	2) $\sqrt{\frac{x-3}{2-x}}$	3) $\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}$
4) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$	5) $\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-4}}$	6) $\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x+3}}$
7) $\sqrt{x^2-3x+2}$	8) $\sqrt{x^2+4x+5}$	9) $\sqrt{9x^2-6x+1}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{3^2} + \sqrt{5^2}$	2) $\sqrt{4^2} + \sqrt{(-2)^4}$	3) $\sqrt{2^2} + \sqrt{(-7)^2}$
4) $\sqrt{(-6)^2} + \sqrt{6^2}$	5) $\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-1)^4}$	6) $\sqrt{(-11)^2} - \sqrt{(-9)^2}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{(4-\sqrt{9})^2}$	2) $\sqrt{(4-\sqrt{6})^2}$	3) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$
4) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$	5) $\sqrt{(10-\sqrt{10})^2}$	6) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$
7) $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$	8) $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}$	9) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$
10) $\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}$	11) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$	12) $\sqrt{(3+\sqrt{8})^2}$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$	2) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$	3) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$
4) $\sqrt{(5-\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+\sqrt{6})^2}$	5) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}$	6) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$
7) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+3)^2}$	8) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$	9) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2} - \sqrt{(\sqrt{10}-5)^2}$
10) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$	11) $\sqrt{(3+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-6)^2}$	12) $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \cdot (\sqrt{5}+1)$

Bài 6: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}$	2) $\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}$	3) $\sqrt{1-2\sqrt{2}+2}$
4) $\sqrt{4-4\sqrt{5}+5}$	5) $\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}$	6) $\sqrt{5-6\sqrt{5}+9}$
7) $\sqrt{7-4\sqrt{7}+4}$	8) $\sqrt{6-8\sqrt{6}+16}$	9) $\sqrt{25-10\sqrt{5}+5}$
10) $\sqrt{x^2+8x+16}$	11) $\sqrt{x-4\sqrt{x}+4}$	12) $\sqrt{x^2+2x+1}$

13) $\sqrt{x-8\sqrt{x}+16}$	14) $\sqrt{x^2-10x+25}$	15) $\sqrt{4x^2+4x+1}$
-----------------------------	-------------------------	------------------------

Bài 7: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$	2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$	3) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$
4) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$	5) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$	6) $\sqrt{30-10\sqrt{5}}$

Bài 8: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$	2) $A = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$
3) $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$	4) $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$
5) $A = \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}}$	6) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$
7) $A = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$	8) $A = \sqrt{8-2\sqrt{7}} - \sqrt{8+2\sqrt{7}}$
9) $A = \sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}$	10) $A = \sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}$

Bài 9: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $B = 2\sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$	2) $B = \sqrt{(\sqrt{7}-4)^2} + \sqrt{7}$
3) $B = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$	4) $B = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$
5) $B = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$	6) $B = \sqrt{(4-3\sqrt{2})^2} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}$
7) $B = (1-\sqrt{3})^2 - \sqrt{4-2\sqrt{3}} + 3\sqrt{3}$	8) $B = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{19+8\sqrt{3}}$

Bài 10: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $C = \sqrt{5-2\sqrt{3}} - 2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$	2) $C = \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}$
---	--

Bài 11: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x-2} = 4$	2) $\sqrt{2x+1} = 3$	3) $\sqrt{4-5x} = 12$
4) $\sqrt{6x-2} = 4$	5) $4\sqrt{x+5} = 8$	6) $\sqrt{3x-5} = 4$
7) $\sqrt{7x-3} = 5$	8) $\sqrt{x+3} = 7$	9) $\sqrt{x+5} - 2 = 4$
10) $\sqrt{9(x-1)} = 21$	11) $\sqrt{9x-18} - 15 = 0$	12) $\sqrt{4x+9} - 3 = 0$
13) $3\sqrt{x-2} - 5 = 4$	14) $4 + \sqrt{x-5} = 5$	15) $\sqrt{4x+5} = 2$

Bài 12: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x^2+1} = 2$	2) $\sqrt{x^2+2} = 3$	3) $\sqrt{x^2+1} = 3$
4) $\sqrt{(x-3)^2} = 4$	5) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$	6) $\sqrt{(2x-3)^2} = 9$
7) $\sqrt{4(x+2)^2} = 8$	8) $\sqrt{4(x-1)^2} - 6 = 0$	9) $\sqrt{(1-4x)^2} = 5$

Bài 13: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x^2-12x+36} = 5$	2) $\sqrt{x^2-14x+49} = 2$	3) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$
4) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 5$	5) $\sqrt{4x^2-4x+9} = 3$	6) $\sqrt{x^2+10x+25} = 1$
7) $\sqrt{9-12x+4x^2} = 4$	8) $\sqrt{9x^2-24x+16} = 1$	9) $\sqrt{x^2+2x+1} = 7$

10) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3$	11) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$	12) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 5$
13) $\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4$	14) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 2 = 5$	15) $2\sqrt{9x^2 + 6x + 1} = 14$
16) $2\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 18$		

Bài 14: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{1 - 2x^2} = x - 1$	2) $\sqrt{5x + 4} = x + 2$	3) $\sqrt{x^2 - 4} - x + 2 = 0$
4) $\sqrt{x^2 - 2x} = 2 - x$	5) $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1$	6) $\sqrt{4x^2 - 8x + 1} = x - 1$
7) $\sqrt{5x^2 - 2x + 2} = x + 1$	8) $\sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x = 3$	9) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + 3$
10) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 4 - x$	11) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 5 = 0$	12) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - 5x = 2$
13) $\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 4x$	14) $\sqrt{25 - 10x + x^2} - 2x = 1$	15) $2x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = -5$
16) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 5x - 2$	17) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 5 = 3x$	18) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3x + 1$
19) $\sqrt{x^2 - 4x + 1} = x$	20) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = x + 3$	21) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} - 2x = 3$
22) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2$	23) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1$	24) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x - 1$
25) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 2 = x$	26) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2x = 1$	27) $\sqrt{25x^2 - 30x + 9} = x + 7$
28) $\sqrt{25x^2 - 10x + 1} = 3x - 2$	29) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2x = 5$	

Bài 8. Khai căn bậc hai với phép nhân và phép chia.

A. LÝ THUYẾT.

1) Khai căn bậc hai và phép nhân.

- ♣ Với A, B là các biểu thức không âm, ta có $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$.
- ♣ Với A, B, C là các biểu thức không âm, ta có $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C}$.

Ví dụ 1: Tính

a) $\sqrt{36 \cdot 64}$ b) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$ c) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{12}$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$

Bài làm:

a) $\sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48$ b) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50 \cdot 2} = \sqrt{100} = 10$
c) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{27 \cdot 12} = \sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{(9 \cdot 2)^2} = 18$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 45} = \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{(5 \cdot 3)^2} = 15$

Ví dụ 2: Tính

a) $\sqrt{5}(\sqrt{20} - 3) + \sqrt{45}$ b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

Bài làm:

a) $\sqrt{5}(\sqrt{20} - 3) + \sqrt{45} = \sqrt{100} - 3\sqrt{5} + \sqrt{9 \cdot 5} = 10 - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 10$.
b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$.

2) Khai căn bậc hai và phép chia.

- ♣ Với A, B là các biểu thức với $A \geq 0, B > 0$ thì $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

Ví dụ 3: Tính

a) $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$ b) $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}}$ c) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$

Bài làm:

a) $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{99}{11}} = \sqrt{9} = 3$ b) $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4}$
c) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$ d) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$

Ví dụ 4: Tính

a) $\left(\frac{\sqrt{7}}{7} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{\frac{9}{7}}\right) : \sqrt{7}$ b) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$. c) $\frac{y}{x} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$.

Bài làm:

a) $\left(\frac{\sqrt{7}}{7} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{\frac{9}{7}}\right) : \sqrt{7} = \left(\frac{\sqrt{7}}{7} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{\frac{9}{7}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{7} - \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 0$.
b) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{2a}{3} \cdot \frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a}{2}$ (vì $a \geq 0$)
c) $\frac{y}{x} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^4}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y}$ (vì $x > 0$)

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - \sqrt{144} : \sqrt{36}$	2) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{25}$
3) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{72} : \sqrt{2}$	4) $\sqrt{48} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{45} : \sqrt{5}$
5) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$	6) $(\sqrt{32} + 3\sqrt{18}) : \sqrt{2}$
7) $(\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15}$	8) $(\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}) : \sqrt{3}$
9) $(\sqrt{48} - \sqrt{75} + 6\sqrt{3}) : \sqrt{3}$	10) $\sqrt{12} \cdot (5\sqrt{3} - \sqrt{27})$
11) $\sqrt{2} \cdot (4\sqrt{2} - 6) + \sqrt{72}$	12) $(3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}$
13) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{60}$	14) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5}$
15) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$	16) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{14} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + 7\sqrt{8}$
17) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{18} + 5\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{6}$	18) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11}) \cdot \sqrt{11} + 3\sqrt{22}$
19) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5}$	20) $(\sqrt{24} - \sqrt{48} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} + 12\sqrt{2}$
21) $(2\sqrt{112} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 2\sqrt{28})\sqrt{7}$	22) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$
23) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7}\right) \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{21}$	24) $10\sqrt{27} - \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}} - 5\sqrt{24} \cdot \sqrt{2}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{8} - 2\sqrt{15}$	2) $A = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} - \sqrt{7} + 2\sqrt{10}$
3) $A = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{9} - 4\sqrt{2}$	4) $A = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$
5) $A = \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7} - 4\sqrt{3}$	6) $A = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5} - 2\sqrt{6}$
7) $A = \sqrt{24 + 8\sqrt{5}} + \sqrt{9} - 4\sqrt{5}$	8) $A = \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$
9) $A = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22} - 12\sqrt{2}$	10) $A = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{9} + 4\sqrt{2}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$	2) $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
3) $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$	4) $A = \sqrt{6 - \sqrt{11}} + \sqrt{6 + \sqrt{11}}$
5) $A = \sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}$	6) $A = \sqrt{5 - \sqrt{21}} - \sqrt{5 + \sqrt{21}}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

1) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$	2) $(\sqrt{10} + \sqrt{6})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$	3) $(5 + 2\sqrt{3})\sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$
4) $(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$	5) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	6) $(\sqrt{10} - \sqrt{14})(\sqrt{6} + \sqrt{35})$
7) $(\sqrt{6} + \sqrt{10})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$	8) $\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$	9) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$
10) $\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - \sqrt{20}}}$	11) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$	12) $\sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

1) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$	2) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} - \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})$
3) $(3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$	4) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$
5) $(\sqrt{14} - \sqrt{6})(5 + \sqrt{21})\sqrt{5 - \sqrt{21}}$	6) $(4 - \sqrt{15})(\sqrt{6} + \sqrt{10})\sqrt{4 + \sqrt{15}}$
7) $2(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$	8) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(4 - 2\sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
9) $\sqrt{6 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$	10) $\sqrt{2\sqrt{5} + 10} - \sqrt{25 + 4\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$

Bài 6: Rút gọn các biểu thức sau

1) $(\sqrt{19} - 3)(\sqrt{19} + 3)$	2) $(10 - 3\sqrt{11})(3\sqrt{11} + 10)$
3) $\sqrt{4 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{7}}$	4) $\sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}}$
5) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$	6) $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$

Bài 7: Rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{4 - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$	2) $\sqrt{6 - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$	3) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$
4) $\sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$	5) $\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}$	6) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$

Bài 8: Rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{45} - \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} + \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}}$	2) $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$	3) $\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{24} + \sqrt{\frac{50}{3}}\right) \cdot \sqrt{12}$
4) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{(-7)^2}$	5) $6\sqrt{3} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 1$	

Bài 9: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x + 5} = \sqrt{2x}$	2) $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{x - 1}$	3) $\sqrt{2x + 5} = \sqrt{1 - x}$
4) $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{3 - x}$	5) $\sqrt{3x + 1} = \sqrt{4x - 3}$	6) $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{3x - 5}$
7) $\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{4x - 3}$	8) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$	

Bài 10: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x^2 - 25} - \sqrt{x - 5} = 0$	2) $\sqrt{x^2 - 4} - 3\sqrt{x - 2} = 0$	3) $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x + 2} = 0$
4) $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$	5) $\sqrt{9 - 4x^2} = 5\sqrt{3 - 2x}$	6) $\sqrt{x - 2} - 3\sqrt{x^2 - 4} = 0$
7) $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x^2 + x - 6} = 0$	8) $\sqrt{x^2 + x - 20} = \sqrt{x - 4}$	9) $3\sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{x + 1} = 0$

Bài 11: Giải các phương trình sau

1) $x - \sqrt{x - 2} = 4$	2) $x + 2\sqrt{x + 2} = 1$	3) $x + 4 = 5\sqrt{x - 2}$
4) $x - 1 - \sqrt{x + 5} = 0$	5) $x - 3\sqrt{x - 2} - 12 = 0$	6) $x - 7\sqrt{x - 2} + 10 = 0$
7) $\sqrt{2x + 1} - x + 1 = 0$	8) $\sqrt{2x + 27} - 6 = x$	

Bài 12: Giải các phương trình sau

1) $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7$	2) $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3x$
3) $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$	4) $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

$$5) 4x^2 - 12x - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 15 = 0$$

$$6) 3\sqrt{x^2 + 3x} = (x + 5)(2 - x)$$

$$7) (x + 1)(x + 4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$$

$$a) \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3.5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

$$b) \frac{a^2 - 2a}{\sqrt{a} + \sqrt{2}} = \frac{(a^2 - 2a)(\sqrt{a} - \sqrt{2})}{a - 2}.$$

$$c) \frac{a}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{a(3 + 2\sqrt{2})}{9 - 4.2} = \frac{a(3 + \sqrt{8})}{1}.$$

4) Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

- ♣ Rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (Cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài, vào trong dấu căn, khử mẫu, trục căn thức ở mẫu.

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức sau $A = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{3 - \sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 9$

Bài làm:

$$\text{Ta có } A = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{3 - \sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x} - 3} \right) = \sqrt{x} \left[\frac{\sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \right] = \frac{2x}{x - 9}.$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Đưa thừa số ra ngoài rồi rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{180}$	2) $5\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$	3) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - \sqrt{48}$
4) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$	5) $3\sqrt{5} + \sqrt{20} - 7\sqrt{5}$	6) $\sqrt{32} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}$
7) $5\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{72}$	8) $2\sqrt{32} - 3\sqrt{98} - 6\sqrt{200}$	9) $3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{50}$
10) $5\sqrt{5} + \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$	11) $2\sqrt{32} + 4\sqrt{8} - 5\sqrt{18}$	12) $2\sqrt{18} - 7\sqrt{2} + \sqrt{162}$
13) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$	14) $2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - \sqrt{50}$	15) $5\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{48}$
16) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{50} + 5\sqrt{32}$	17) $\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 15\sqrt{5}$	18) $4\sqrt{5} - 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$
19) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$	20) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{45} + \sqrt{500}$	21) $3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$
22) $\sqrt{98} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8} + \sqrt{18}$	23) $\sqrt{5} - \sqrt{48} + 5\sqrt{27} - \sqrt{45}$	24) $2\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{75} - \sqrt{243}$
25) $\sqrt{50} + \sqrt{32} - 3\sqrt{18} + 4\sqrt{8}$	26) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$	

Bài 2: Đưa thừa số ra ngoài rồi rút gọn các biểu thức sau

1) $2\sqrt{75} - 5\sqrt{27} - \sqrt{192} + 4\sqrt{48}$	2) $2\sqrt{48} + 4\sqrt{27} + \sqrt{75} + 2\sqrt{3}$
3) $5\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{108} - \sqrt{192}$	4) $4\sqrt{12} + \sqrt{108} - 8\sqrt{3} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$
5) $3\sqrt{45} - 7\sqrt{125} + \sqrt{500} + 16\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$	6) $5\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \frac{1}{5}\sqrt{50}$

Bài 3: Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}}$	2) $\frac{5}{\sqrt{10}}$	3) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$	4) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$
5) $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$	6) $\frac{3}{\sqrt{3} + 2}$	7) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$	8) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 3}$

9) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$	10) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	11) $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$	12) $\frac{-\sqrt{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$
13) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$	14) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$	15) $\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}$	16) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2}$
17) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$	18) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$	19) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$	20) $\frac{10+\sqrt{5}}{2\sqrt{15}+\sqrt{3}}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

1) $A = \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$	2) $A = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
3) $A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$	4) $A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
5) $A = \frac{2}{\sqrt{10}-3} + \frac{2}{\sqrt{10}+3}$	6) $A = \frac{1}{5+2\sqrt{3}} + \frac{1}{5-2\sqrt{3}}$
7) $A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$	8) $A = \frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$
9) $A = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \sqrt{20}$	10) $A = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-1} + \frac{12}{\sqrt{7}-1}$
11) $A = \frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{2}}$	12) $A = \frac{\sqrt{27}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{6}{3+\sqrt{3}}$
13) $A = \sqrt{5} - \frac{8}{\sqrt{5}+1} + \frac{2\sqrt{5}-5}{2-\sqrt{5}}$	14) $A = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$
15) $A = \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \frac{4}{\sqrt{5}-3}$	16) $A = \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$
17) $A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$	18)
19) $A = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$	20) $A = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{3}$
21) $A = \sqrt{48} - \frac{\sqrt{21}-\sqrt{15}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{3}+1}$	22) $A = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}-1}$
23) $A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}}$	24) $A = \frac{2}{\sqrt{6}-2} + \frac{2}{\sqrt{6}+2} + \frac{5}{\sqrt{6}}$
25) $A = \frac{4}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{6}{\sqrt{3}-3}$	26) $A = \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{6}{\sqrt{3}+3}$
27) $A = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3} - (2+\sqrt{3})$	28) $A = \frac{6+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}}$
29) $A = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{16}}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$	30) $A = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{27} + (\sqrt{3}+1)^2$
31) $A = \frac{9}{\sqrt{10}-1} + \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{11-2\sqrt{10}}$	32) $A = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-3\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}$

33) $A = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \frac{2}{1-\sqrt{3}} - \frac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$	34) $A = \frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}} + \frac{3}{2-\sqrt{5}} + \frac{6\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}}$
35) $A = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \frac{6}{\sqrt{3}} - 15\sqrt{\frac{1}{3}} + 1$	36) $A = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$
37) $A = \sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{8}{\sqrt{5}-1} - \sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$	38) $A = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{2}{\sqrt{6}-2} - \frac{6}{3-\sqrt{6}} \right) (2\sqrt{6}+7)$
39) $A = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$	40) $A = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
41) $A = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$	42) $A = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

1) $A = \frac{6}{4+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \frac{6}{4-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$	2) $A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$
3) $A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$	4) $A = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Bài 6: Đặt điều kiện xác định rồi rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}}$	2) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-4}$
3) $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - 2 \right) \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} + 1 \right)$	4) $A = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right)^2$
5) $A = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right)$	6) $A = \frac{5\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x^2+2\sqrt{x}+8}{x-4}$
7) $A = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	8) $A = \left(\frac{2x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$
9) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$	10) $A = \frac{5-5\sqrt{x}}{x-16} - \frac{2}{4-\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}+4}$
11) $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1}$	12) $A = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3} + \frac{15-4\sqrt{x}}{9-4x}$
13) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}+1}$	

Bài 7: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{4(x-3)} + \sqrt{9x-27} = 10$	2) $\sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} = 1$
3) $\sqrt{4x-8} = 6 - \sqrt{x-2}$	4) $\sqrt{4x-12} = 10 - \sqrt{9x-27}$
5) $5\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} = 16$	6) $\sqrt{4(1-3x)} + \sqrt{9(1-3x)} = 10$
7) $\sqrt{4x-8} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-18} = 15$	8) $\sqrt{x-1} - \sqrt{4x-4} + \sqrt{9x-9} = 5$
9) $5\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} - \sqrt{4x-20} = 18$	10) $6\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} - 2\sqrt{4x-20} = 25$

11) $\sqrt{4x+4} - 2\sqrt{9x+9} = \sqrt{x+1} - 15$	12) $7\sqrt{x-5} - 6\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{9x-45} = 12$
13) $3\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+16} = 15 - \sqrt{16x+64}$	14) $7\sqrt{x-5} - \sqrt{9x-45} + \sqrt{4x-20} = 6$
15) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} - \sqrt{25x-25} + 2 = 0$	16) $\sqrt{9x+27} + 4\sqrt{x+3} - \frac{3}{4}\sqrt{16x+48} = 0$
17) $\sqrt{4x-20} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} + \sqrt{x-5} = 4$	18) $\sqrt{1-x} + \sqrt{4-4x} - \frac{1}{3}\sqrt{16-16x} + 5 = 0$
19) $3\sqrt{4x+4} - \sqrt{9x+9} - 8\sqrt{\frac{x+1}{16}} = 5$	20) $\sqrt{9x-45} - \sqrt{x-5} = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{4x-20}$
21) $\sqrt{4x-8} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-18} = 3\sqrt{x-2} - 1$	22) $\sqrt{9x+18} + \frac{1}{4}\sqrt{16x+32} - 2\sqrt{x+2} = 4$
23) $\sqrt{4x-12} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-27} = 4 + \sqrt{x-3}$	24) $\sqrt{4x-8} - 5\sqrt{x-2} + \frac{2}{3}\sqrt{9x-18} + 1 = 0$
25) $5\sqrt{4x-16} - \frac{7}{3}\sqrt{9x-36} = 36 - 3\sqrt{x-4}$	26) $\sqrt{x-3} + \sqrt{9x-27} - \frac{1}{2}\sqrt{4x-12} = 6$
27) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} = 4 + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}}$	28) $\sqrt{16x+48} - 7\sqrt{x+3} + \frac{3}{4}\sqrt{4x+12} = -6$
29) $\sqrt{4x-12} - \sqrt{9x-27} + \sqrt{\frac{25x-75}{4}} - 3 = 0$	30) $\sqrt{16x-48} - 8\sqrt{4x-12} + \frac{2}{3}\sqrt{9x-27} = -20$
31) $\sqrt{9x-9} - 3\sqrt{x-1} + \frac{5}{2}\sqrt{16x-16} = 30$	32) $\frac{3}{2}\sqrt{4+8x} - \frac{5}{3}\sqrt{9+18x} - \frac{1}{4}\sqrt{16+32x} = 1$
33) $\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{4x-4} + \sqrt{\frac{18x-18}{2}} = 6$	

Bài 8: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$	2) $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 1$	3) $\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$
4) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2$	5) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x+3} = 5$	6) $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$
7) $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 5$	8) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$	9) $\sqrt{3x-5} = 3 - \sqrt{x-2}$
10) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1$	11) $\sqrt{x-5} - \sqrt{x+4} = 2$	12) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} = 4$

Bài 9: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 9, x \neq 25$

Bài 10: Rút gọn biểu thức sau $C = \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

Bài 11: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị của x để giá trị của biểu thức A bằng 9.

Bài 12: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}-x}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 13: Cho biểu thức $A = \frac{x-7}{x-3\sqrt{x}} - \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tính $A: \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ khi $x = \frac{2}{10-3\sqrt{11}}$.

Bài 14: Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị của x để $A = \frac{9}{2}$.

Bài 15: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

- Rút gọn biểu thức A
- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức $A = \frac{13}{3}$.

Bài 16: Cho biểu thức $A = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

- Rút gọn biểu thức A .
- So sánh giá trị của biểu thức A với 6.

Bài 17: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq \pm 4$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm x để $A > \frac{1}{2}$.

Bài 18: Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức $A = 3$.

Bài 19: Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài 20: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{9}$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị của x để biểu thức $A = \frac{6}{5}$.

Bài 21: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 2$.

Bài 22: Cho biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài 23: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm các giá trị của x để $P = 7$.

Bài 24: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Chứng minh rằng $A + B = 3$.

Bài 25: Cho $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Rút gọn B .
- Tìm các số hữu tỉ x để $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+4}{6-3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Rút gọn biểu thức $M = A \cdot B$

Bài 27: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$.

- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức P được xác định.
- Rút gọn biểu thức P .
- Tính giá trị của P khi $x = 4$.

Bài 10. Căn bậc ba và căn thức bậc ba.

A. LÝ THUYẾT.

1) Căn bậc ba.

- ♣ Căn bậc ba của số thực a là số thực x thỏa mãn $x^3 = a$.
- ♣ Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba, căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$
- ♣ Ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

Ví dụ 1: căn bậc ba của các số sau

a) $\sqrt[3]{64} = 4$	b) $\sqrt[3]{1} = 1$	c) $\sqrt[3]{-27} = -3$
-----------------------	----------------------	-------------------------

Ví dụ 2: Tính

a) $\sqrt[3]{0}$	b) $-\sqrt[3]{-8}$	c) $-\sqrt[3]{125}$
------------------	--------------------	---------------------

Bài làm:

2) Căn thức bậc ba.

- ♣ Căn thức bậc ba là biểu thức có dạng $\sqrt[3]{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số.
- ♣ Ta có $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức sau $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

Bài làm:

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$	b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^3}$	c) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})^3$
-------------------------------	--------------------------------	-------------------------------

Bài làm:

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Tính

1) $\sqrt[3]{-64}$	2) $-\sqrt[3]{216}$	3) $-\sqrt[3]{0}$
4) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{125}$	5) $\sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{6}$	6) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64}$
7) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128}$	8) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{-27}$	9) $-\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{(-1)^3}$

Bài 2: Tính

1) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$	2) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$	3) $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(9+4\sqrt{5})}$
4) $(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$	5) $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$	

Các bài toán ôn thi vào 10 khu vực Hà Nội

Dạng 1. Tìm x nguyên hoặc x để biểu thức nhận giá trị nguyên

Bài 1: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ và $B = \left(\frac{2}{\sqrt{x+3}} - \frac{\sqrt{x-5}}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm các giá trị nguyên của x để hiệu $A - B$ có giá trị nguyên.

Bài 2: Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x+\sqrt{x+2}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài 3: Cho biểu thức $A = \frac{x-8}{\sqrt{x+3}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{5\sqrt{x+3}}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$.
- Với $M = \frac{A}{B}$. Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức M đạt giá trị nguyên.

Bài 4: Cho biểu thức $A = \frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ với $x > 0$.

- Tính giá trị của B khi $x = 4$.
- Chứng minh $P = A + B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 36$.
- Rút gọn A .
- Tìm tất cả các số nguyên x để $P = A \cdot B$ là số nguyên.

Bài 6: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+6}}{x-4}$ và $B = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

- Tìm giá trị của B khi $x = \frac{4}{9}$.
- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức B nhận giá trị nguyên
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = A - B$.

Bài 7: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$
- So sánh B với 1.
- Tìm số nguyên x để $P = A \cdot B$ nhận giá trị là số tự nhiên.

Bài 8: Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm giá trị nguyên của x để $P = A \cdot B$ có giá trị là số tự nhiên.

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} + \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm giá trị x nguyên lớn nhất để biểu thức $P = A + B$ nhận giá trị nguyên.

Bài 10: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-6} - \frac{2}{\sqrt{x}+6} - \frac{9\sqrt{x}+6}{x-36}$ với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 36$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên nhỏ nhất.

Bài 11: Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{18}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = 36$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm tất cả các giá trị của x nguyên để P có giá trị nguyên.

Bài 12: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 49$
- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các giá trị của x để $P = A \cdot B$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 13: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+10}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$
- Tìm x để biểu thức $P = \frac{A}{B}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 14: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} - \frac{2}{\sqrt{x}-4} - \frac{4\sqrt{x}}{16-x}$ với $x \geq 0, x \neq 16$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}$
- Tìm x để biểu thức $Q = A \cdot B$ nhận giá trị nguyên.

Bài 15: Cho biểu thức $A = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}} - \frac{9\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm x để biểu thức $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài 16: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+4}{x-1} + \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.
- Tìm giá trị của x để $Q = \frac{2B}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 17: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị của x để P có giá trị nguyên.

Bài 18: Cho hai biểu thức $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$ với $x > 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức $P = B \cdot A$
- Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 19: Cho hai biểu thức $A = \frac{9}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{x+16}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{5}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$
- Tìm x để biểu thức $Q = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Bài 20: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{4\sqrt{x}+6}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $M = A(B-1)$ có giá trị là số nguyên.

Bài 21: Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x+8}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2}{\sqrt{x+3}} - \frac{18}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $M = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Bài 22: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{3\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{8}{\sqrt{x-2}} - \frac{3\sqrt{x+26}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{5}{\sqrt{x+2}}$
- Tìm giá trị x để $P = A \cdot B$ đạt giá trị nguyên nhỏ nhất.

Bài 23: Cho các biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ và $C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức B và C .
- Tìm x để $B \cdot C = \frac{1}{3}$.
- Chứng minh rằng với $x > 0, x \neq 1$ thì tích $B \cdot C$ không thể nhận giá trị nguyên.

Bài 24: Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 100$
- Chứng minh biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$
- Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để biểu thức $3M$ có giá trị là một số nguyên với $M = A \cdot B$

Bài 25: Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức $P = \frac{A}{B}$
- Tìm số tự nhiên x để $P < 0$

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$
- Tìm các giá trị x nguyên để $B : A < \frac{1}{2}$

Bài 27: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$
- Đặt $P = A - 6B$. Tìm giá trị x nguyên lớn nhất để $P < 0$

Bài 28: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{2\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $P^2 > P$

Bài 29: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{5}{\sqrt{x}-2} - \frac{16+2\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$
- Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $5A + B \leq 3$

Dạng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức.

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x=1$
- Chứng minh rằng $B = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$
- Gọi $P = A + B$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài 2: Cho hai biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ và $N = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{8}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức M khi $x=9$
- Chứng minh $N = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{M}{N}$.

Bài 3: Cho biểu thức $P = \frac{3x+12}{\sqrt{x}+3}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+3}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của P khi $x=4$
- Chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{P}{Q}$.

Bài 4: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3x+3}{9-x}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Rút gọn biểu thức B và tính $P = \frac{B}{A}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+10}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 4$
- Rút gọn biểu thức $M = \frac{A}{B}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của M

Bài 6: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$
- Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7: Cho hai biểu thức $M = \frac{x+15}{\sqrt{x}+3}$ và $N = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

- Tính giá trị của M khi $x = 81$
- Rút gọn biểu thức N
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = M + N$

Bài 8: Cho biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm giá trị của x để $C = \frac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 10: Cho biểu thức $P = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 4$.
- Chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = P \cdot Q$.

Bài 11: Cho hai biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+15}{x-9}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức $M = P \cdot Q$
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức M .

Bài 12: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x+3\sqrt{x}+9}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Bài 13: Cho hai biểu thức $P = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \sqrt{3} + 66$
- Rút gọn biểu thức $P-1$
- Với $x \in \mathbb{N}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = Q \cdot (P-1)$

Bài 14: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $P = A \cdot B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 15: Cho $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$
- Rút gọn B .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A \cdot B$

Bài 16: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{1+\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-21}{x-\sqrt{x}-6} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A \cdot B$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

Bài 17: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x+3\sqrt{x}+9}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Bài 18: Cho hai biểu thức $P = \frac{x-9}{\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} - \frac{2\sqrt{x+5}}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 4$
- Chứng minh $Q = \frac{x+2}{x-9}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $A = P \cdot Q$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 19: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x+2}} + \frac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x+2}}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tìm các giá trị của x để $A = \frac{-3}{5}$
- Rút gọn biểu thức $P = B : A$
- Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Dạng 3. Các bài toán tổng hợp

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x+2}} + \frac{x+4}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A \cdot B$. Tìm giá trị của x khi $|P| = P$

Bài 2: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{3x}{x-3\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 49$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $|P| > P$

Bài 3: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Rút gọn B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị nguyên của x để $|P| > P$

Bài 4: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$ và $B = \frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A : B$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $2\sqrt{P} < 1$

Bài 5: Cho $A = \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25} + \frac{3}{\sqrt{x+5}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-5}}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

- Tính giá trị của B khi $x = 49$.
- Rút gọn A .

c) Tính giá trị của x để $\frac{B}{A} = |x-4|$.

Bài 6: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} + \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{x-25}{x-9}$

c) Đặt $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{3}$

Bài 7: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

c) Đặt $P = A : B$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Bài 8: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \frac{x+20}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{6}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$

c) Tìm x để $\sqrt{AB} < \frac{1}{2}$.

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4x}{x-4}$ và $B = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 196$

b) Rút gọn biểu thức A

c) Xét biểu thức $P = A : B$. So sánh P và \sqrt{P}

Bài 10: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

a) Tính giá trị của A khi $x = 169$

b) Chứng minh biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

c) Với biểu thức $P = A \cdot B$. Hãy so sánh biểu thức P với \sqrt{P}

Bài 11: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 16$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Đặt $P = A \cdot B$. So sánh giá trị của biểu thức P với 1.

Bài 12: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của A khi $x=9$.
- Rút gọn B
- Đặt $P = A \cdot B$. So sánh P với 1.

Bài 13: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{12}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}-15}{x-25} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $C = \frac{B}{A}$. Tìm giá trị của x để biểu thức C có giá trị bằng 2

Bài 14: Cho hai biểu thức $A = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3x+1}{x-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x=36$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho biểu thức $P = A \cdot B$. Tìm x để $P = \frac{10}{3}$

Bài 15: Cho hai biểu thức $A = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+5} - \frac{\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x}+30}{x-25} \right) : \frac{x}{\sqrt{x}-5}$ với $x > 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của A khi $x=1$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A \cdot B$. Tìm x để $P=4$

Bài 16: Cho hai biểu thức và $B = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1-x}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm tất cả các giá trị của x để $A \cdot B = A$

Bài 17: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x=9$.
- Chứng minh $P=Q$.
- Tính giá trị của x để biểu thức $P = \frac{1}{4}$.

Bài 18: Cho hai biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của Q tại $x=9$
- Rút gọn biểu thức $M = P \cdot Q$
- Tìm các giá trị của x để $M < \frac{-1}{3}$

Bài 19: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A với $x=1$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

c) Tìm x để $A.B \geq 0$

Bài 20: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x+4}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

c) Đặt $P = A.B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài 21: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$

c) Cho biểu thức $P = A.B$, tìm x để $P > \frac{1}{2}$

Bài 22: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x-6}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm x để $A.B < \frac{1}{2}$

Bài 23: Cho hai biểu thức $A = \frac{5-x}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{6}{\sqrt{x+3}} - \frac{2x+18}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Biết $P = A.B$. Tìm các giá trị của x để $P \geq 2$

Bài 24: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$

c) Tìm giá trị x nguyên lớn nhất thỏa mãn $A.B \leq -1$

Bài 25: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-3}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x+6}}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của A khi $x=16$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Cho $P = A.B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}-2} + \frac{16}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=1$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm các giá trị x là số chẵn để $A.B \geq 1$

Bài 27: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x-3}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{A}{B} < 1$.

Bài 28: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$
- Tìm các giá trị nguyên của x để $P < 0$ với $P = A.B$.

Bài 29: Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2x+\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$.

- Tính giá trị của A khi $x=9$.
- Rút gọn B .
- Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P có giá trị âm.

Bài 30: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$.

- Nêu điều kiện xác định và rút gọn P .
- Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{4}$.
- Tìm x để $P < 2$.

Bài 31: Cho hai biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.
- Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để $P > \frac{1}{4}$.

Bài 32: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2-3\sqrt{x}}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị của A khi $x=9$.
- Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{B}{A} > \frac{5}{4}$.

Bài 33: Cho biểu thức $A = 5\sqrt{5} - \sqrt{80} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3-11\sqrt{x}}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức A và B

b) Hãy tìm các giá trị của x để biểu thức A và B thỏa mãn $B > A$

Bài 34: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - \frac{4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Đặt $P = B : A$. So sánh P với 2.

Bài 35: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm các giá trị của x để $P = 3$. AB đạt giá trị nguyên âm.

Bài 36: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \left(\frac{x+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$

b) Chứng minh biểu thức $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$.

c) Đặt $P = A \cdot B$. Tìm tất cả các giá trị của m để có giá trị x thỏa mãn $P = m$

Bài 37: Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

c) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{2}{x+2}$

Bài 38: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả các số nguyên tố x để $A > B(2\sqrt{x}+5)$

Bài 39: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức B khi $4x^2 + x - 5 = 0$

c) Tìm m để có giá trị x thỏa mãn $2A + mB = 0$

Bài 40: Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm x để $P \geq \frac{\sqrt{x}+9}{8}$

Bài 41: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x=16$
- Rút gọn biểu thức $P = A \cdot B$
- Tìm tất cả các giá trị của x để $(6x+18) \cdot P \geq x+9$

Chương 4. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Bài 1. Tỷ số lượng giác của góc nhọn.

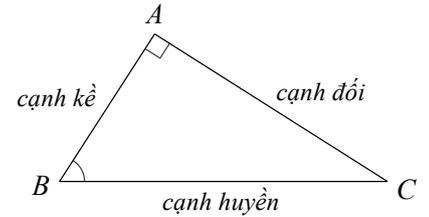
A. LÝ THUYẾT.

1) Khái niệm tỷ số lượng giác của góc nhọn.

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , với góc nhọn B thì

Cạnh BC gọi là cạnh huyền.

Cạnh AC là cạnh đối và cạnh AB là cạnh kề.



♣ Khi đó ta có 4 tỷ số lượng giác của góc nhọn B như sau:

$$+ \sin B = \frac{AC}{BC} \quad (\text{tỷ số cạnh đối và cạnh huyền}) \qquad + \cos B = \frac{AB}{BC} \quad (\text{tỷ số cạnh kề và cạnh huyền})$$

$$+ \tan B = \frac{AC}{AB} \quad (\text{tỷ số cạnh đối và cạnh kề}) \qquad + \cot B = \frac{AB}{AC} \quad (\text{tỷ số cạnh kề và cạnh đối})$$

♣ Chú ý: Giá trị \sin và \cos của một góc nhọn luôn nhỏ hơn 1 (vì trong tam giác vuông, cạnh huyền là cạnh lớn nhất).

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $BC = 10 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Tính tỷ số lượng giác của góc nhọn C .

Bài làm

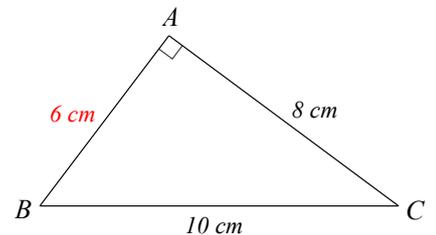
Áp dụng định lý Pythagore ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 = 6 \text{ cm}$$

Khi đó ta có các tỷ số lượng giác của góc C là:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \qquad \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \qquad \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

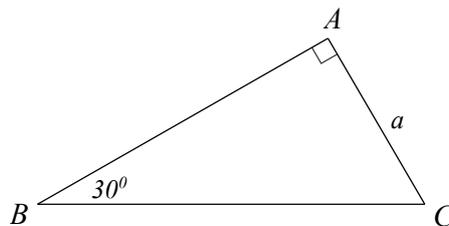


♣ Giá trị lượng giác của các góc 30° ; 45° ; 60° .

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$ và $AC = a$

Tính cạnh AB , BC theo a .

Bài làm



$$\text{Ta có } \tan B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{AB} \Rightarrow AB \cdot \sqrt{3} = 3a \Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{và } \sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{BC} \Rightarrow BC = 2a.$$

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

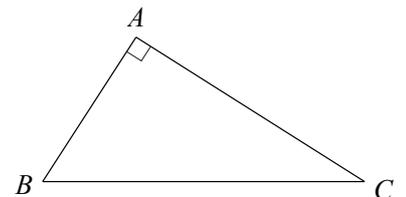
Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Khi đó \widehat{B} và \widehat{C} là hai góc phụ nhau

♣ **Định lý:**

Nếu hai góc phụ nhau thì \sin góc này bằng \cos góc kia và \tan góc này bằng \cot góc kia.

$$\sin B = \cos C \qquad \cos B = \sin C$$

$$\tan B = \cot C \qquad \cot B = \tan C$$



Chú ý:

Một số công thức biến đổi

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Ví dụ 5: Tính $\frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ}$ và $\tan 80^\circ - \cot 10^\circ$

Bài làm

Vì góc 32° và góc 58° là hai góc phụ nhau, nên $\frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ} = \frac{\cos 58^\circ}{\cos 58^\circ} = 1$.

Vì góc 80° và góc 10° là hai góc phụ nhau, nên $\tan 80^\circ - \cot 10^\circ = \cot 10^\circ - \cot 10^\circ = 0$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Tính các biểu thức sau

a) $A = \tan 76^\circ - \cot 14^\circ$

b) $B = \sin 33^\circ - \cos 57^\circ$

c) $C = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$

d) $D = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$

e) $E = \tan 30^\circ + \cot 60^\circ$

f) $F = 2 \cdot \tan 45^\circ - \cot 60^\circ$

Bài 2: Tính các biểu thức sau

a) $A = \frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$

b) $B = \frac{\tan 50^\circ}{\cot 40^\circ}$

c) $C = \frac{\sin 70^\circ}{\tan 70^\circ}$

Bài 3: Tính biểu thức

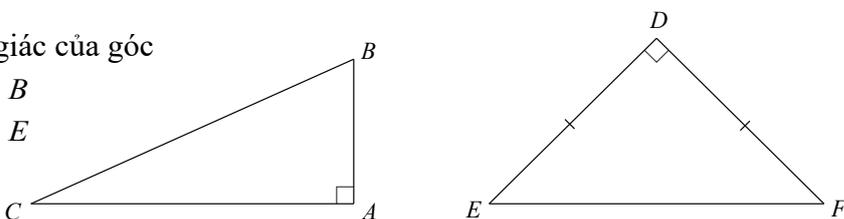
a) $M = \sin 10^\circ \cdot \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \cdot \sin 80^\circ$

b) $N = \frac{\sin 58^\circ}{\cos 32^\circ} - \cos 60^\circ + \tan 37^\circ \cdot \tan 53^\circ + \sin 30^\circ$

Bài 4: Cho Hình 1. Viết tỉ số lượng giác của góc

a) Viết tỉ số lượng giác của góc B

b) Viết tỉ số lượng giác của góc E

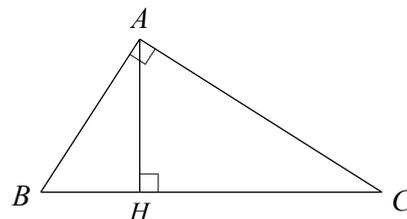


Hình 1

Bài 5: Cho Hình 2.

a) Viết tỉ số lượng giác của góc B trong ΔABC và ΔABH .

b) Chứng minh hệ thức $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.

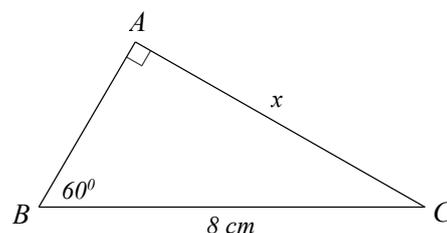


Hình 2

Bài 6: Cho Hình 3.

a) Tìm x.

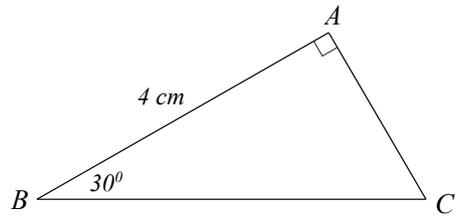
b) Tính cạnh AB.



Hình 3

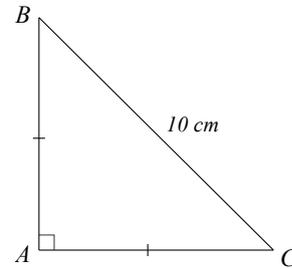
Bài 7: Cho Hình 4.

- Tính cạnh AC và BC
- Chứng minh rằng $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$.



Hình 4

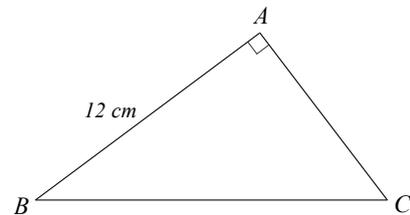
Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , biết $BC = 10 \text{ cm}$. Tính cạnh AB . (Hình 5).



Hình 5

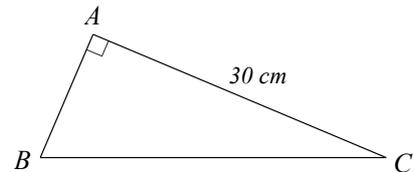
Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 12 \text{ cm}$ và $\tan B = \frac{3}{4}$ (Hình 6).

- Tính AC và BC .
- Tính số đo góc B .



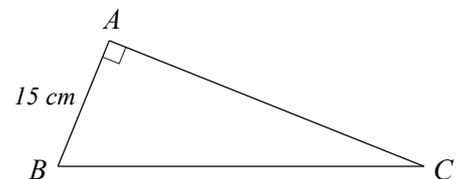
Hình 6

Bài 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AC = 30 \text{ cm}$. Biết $\tan C = \frac{5}{12}$ (Hình 7). Tính AB .



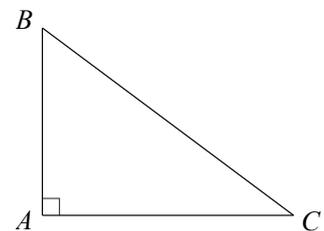
Hình 7

Bài 11: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 15 \text{ cm}$. Biết $\cot B = \frac{5}{13}$ (Hình 8). Tính AC .



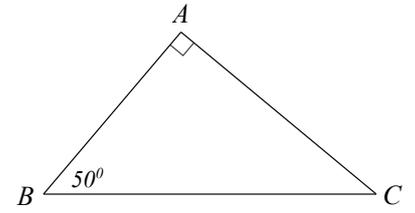
Hình 8

Bài 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\cos C = \frac{4}{5}$. Tính tỉ số lượng giác của góc B . (Hình 9)



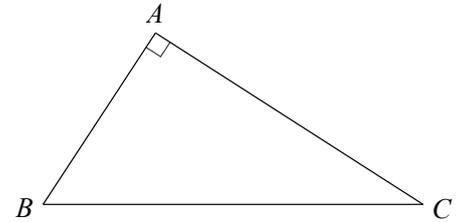
Hình 9

Bài 13: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\widehat{B} = 50^\circ$.
 Tính tỉ số lượng giác của góc C . (Hình 10)
 (Cho biết $\sin 50^\circ \approx 0,766$)



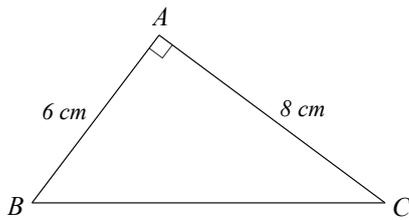
Hình 10

Bài 14: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\cos B = 0,6$
 Tính tỉ số lượng giác của góc C . (Hình 11)

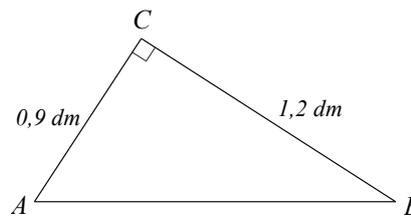


Hình 11

Bài 15: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$.
 Tính tỉ số lượng giác của góc B từ đó suy ra
 tỉ số lượng giác của góc C (Hình 12)



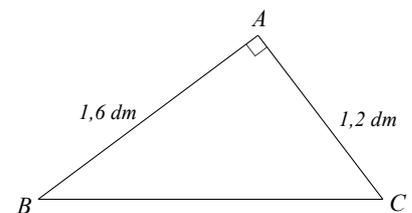
Hình 12



Hình 13

Bài 16: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C có $AC = 0,9\text{ dm}$, $BC = 1,2\text{ dm}$. Tính tỉ số lượng giác của góc A từ đó
 suy ra tỉ số lượng giác của góc B (Hình 13)

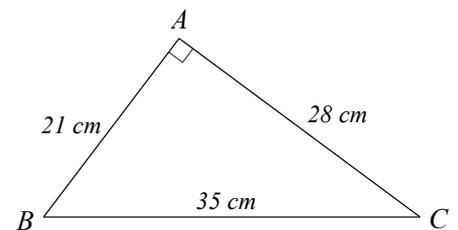
Bài 17: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 1,6\text{ dm}$, $CA = 1,2\text{ dm}$.
 Tính các tỉ số lượng giác của góc C rồi suy ra tỉ số lượng
 giác của góc B . (Hình 14)



Hình 14

Bài 18: Cho $\triangle ABC$ biết $AB = 21\text{ cm}$, $AC = 28\text{ cm}$, $BC = 35\text{ cm}$.

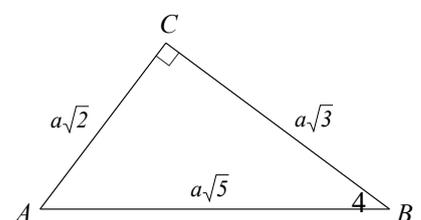
- Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.
- Tính $\sin B$, $\sin C$ (Hình 15)



Hình 15

Bài 19: Cho $\triangle ABC$ có $AB = a\sqrt{5}$, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$.

- Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông. (Hình 16)
- Tính các tỉ số lượng giác của góc B .

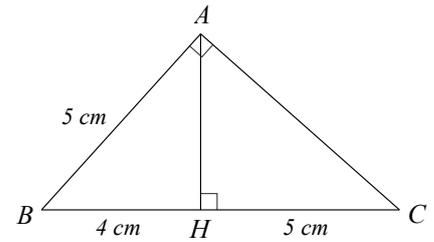


Hình 16

Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A

Bài 20: Cho Hình 17.

- Tính các góc của $\triangle ABC$
- Tính chu vi và diện tích của $\triangle ABC$



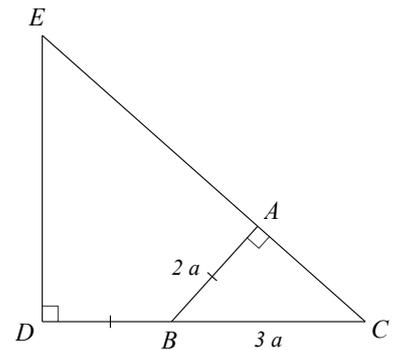
Hình 17

Bài 21: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 2a$, $BC = 3a$

Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = 2a$.

Tại D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E .

- Chứng minh rằng $DE \cdot AC = 10a^2$ (Hình 18)
- Tính \widehat{BCA} và tính AC , DE theo a .

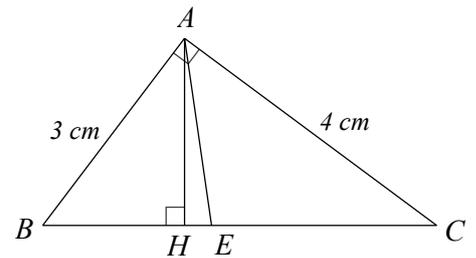


Hình 18

Bài 22: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

Biết $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$ (Hình 19)

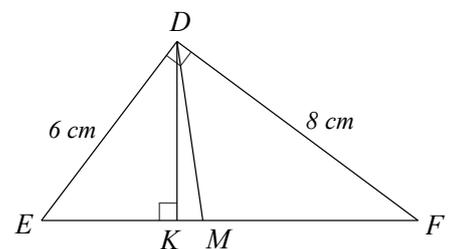
- Tính độ dài BC , AH
- Tính số đo góc B , C
- Đường phân giác trong của góc A cắt BC tại E .
Tính BE , CE



Hình 19

Bài 23: Cho $\triangle DEF$ có $DE = 6\text{ cm}$, $DF = 8\text{ cm}$, $EF = 10\text{ cm}$ (Hình 20)

- Chứng minh rằng $\triangle DEF$ là tam giác vuông.
- Đường cao DK . Tính DK và FK .
- Tính góc E , F .
- Phân giác DM của $\triangle DEF$. Tính ME , MF



Hình 20

Bài 12: Một số hệ thức giữa cạnh, góc trong tam giác vuông và ứng dụng.

A. LÝ THUYẾT.

1) Hệ thức giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông.

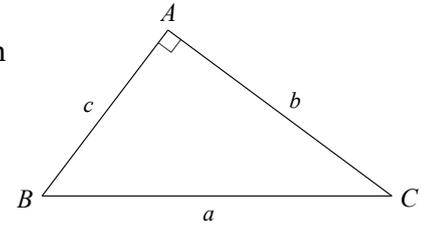
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , cạnh huyền a và hai cạnh góc vuông là b, c như hình bên

♣ Định lí 1:

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc cosin góc kề.

$$+ b = a \cdot \sin B \text{ hoặc } b = a \cdot \cos C$$

$$+ c = a \cdot \sin C \text{ hoặc } c = a \cdot \cos B$$



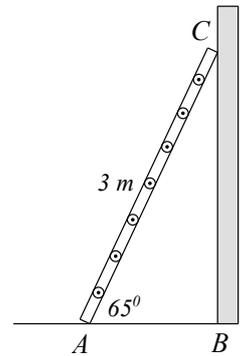
Ví dụ 2: Một chiếc thang dài 3 m , cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bao nhiêu mét (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) để nó tạo với mặt đất một góc “an toàn” 65° (tức là đảm bảo thang chắc chắn khi sử dụng).

Bài làm

Giả sử đoạn AC là chiều dài chiếc thang, AB là khoảng cách chân thang tới chân tường và C là điểm thang tiếp xúc với tường.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên ta có $AB = AC \cdot \cos A = 3 \cdot \cos 65^\circ \approx 1,27\text{ m}$

Vậy cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng $1,27\text{ m}$



2) Hệ thức giữa hai cạnh góc vuông.

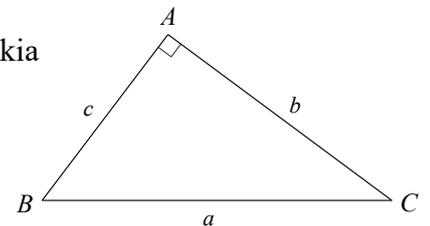
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , cạnh huyền a và hai cạnh góc vuông là b, c như hình bên

♣ Định lí 2:

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc cotang góc kề.

$$+ b = c \cdot \tan B \text{ hoặc } b = c \cdot \cot C$$

$$+ c = b \cdot \tan C \text{ hoặc } c = b \cdot \cot B$$



Ví dụ 2: Bóng trên mặt đất của một cây dài 25 m . Tính chiều cao của cây

(làm tròn đến dm) biết rằng tia nắng tạo với mặt đất một góc 40° .

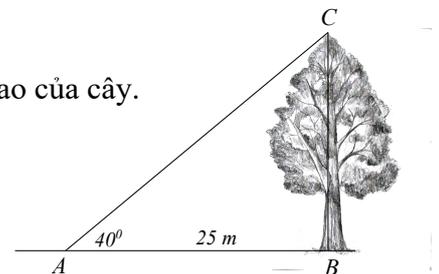
Bài làm

Giả sử AB là độ dài bóng của cây trên mặt đất và BC là chiều cao của cây.

$\triangle ABC$ vuông tại B nên ta có:

$$BC = AB \cdot \tan A = 25 \cdot \tan 40^\circ \approx 21\text{ m}$$

Vậy cây cao gần 21 m .



3) Giải tam giác vuông.

- ♣ Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh (hoặc một góc nhọn và một cạnh) thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và các góc còn lại của tam giác vuông đó. Bài toán này gọi là bài toán giải tam giác vuông.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 4$, $BC = 8$. Tính cạnh AC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) và các góc B, C (làm tròn đến độ)

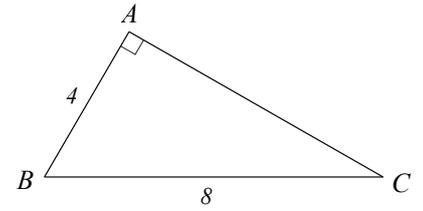
Bài làm

$\triangle ABC$ vuông tại A , nên ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} \approx 6.928$$

$$\text{Ta có } \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$$

$$\text{Khi đó } \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 30^\circ.$$



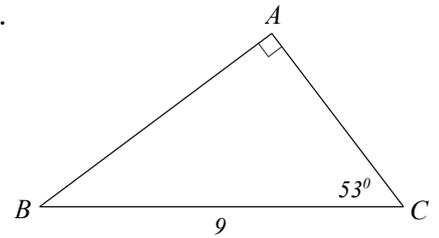
Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $BC = 9$ và $\widehat{C} = 53^\circ$. Giải $\triangle ABC$.

Bài làm

$$\text{Ta có } \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

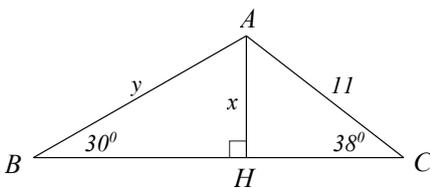
$$AB = BC \cdot \sin C = 9 \cdot \sin 53^\circ \approx 7,2$$

$$AC = BC \cdot \cos C = 9 \cdot \cos 53^\circ \approx 5,4$$

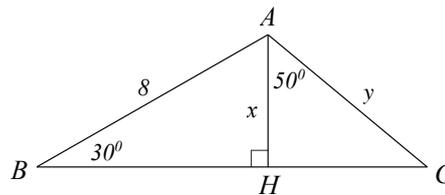


B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

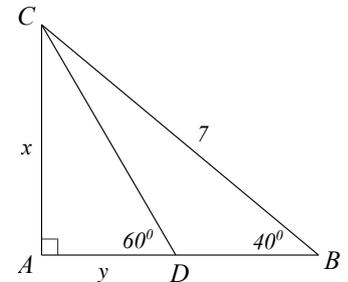
Bài 1: Tìm x, y trong các hình sau



Hình 1

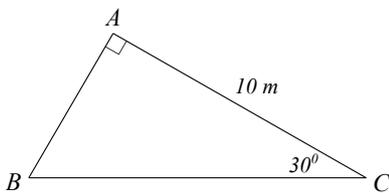


Hình 2

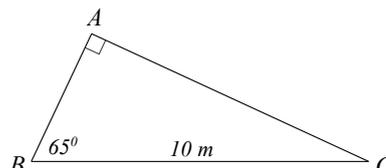


Hình 3

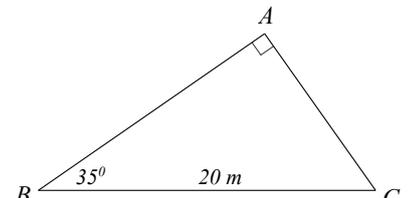
Bài 2: Giải $\triangle ABC$ trong các hình sau



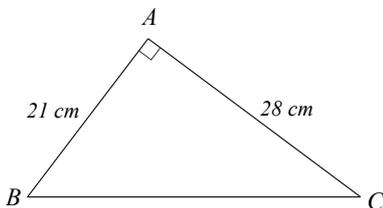
Hình 4



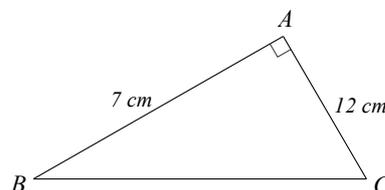
Hình 5



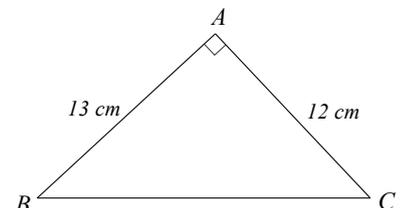
Hình 6



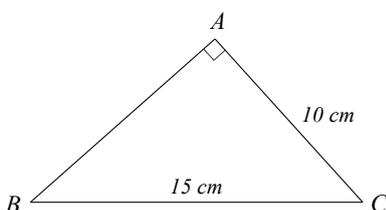
Hình 7



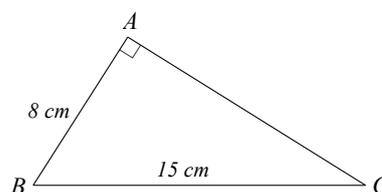
Hình 8



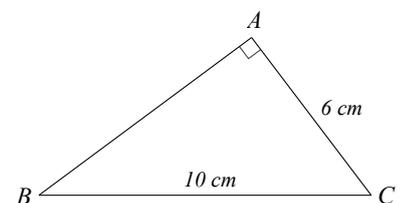
Hình 9



Hình 10

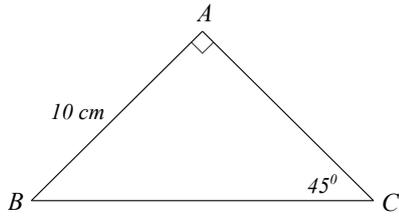


Hình 11

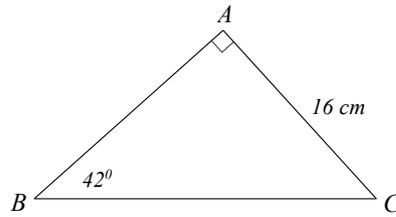


Hình 12

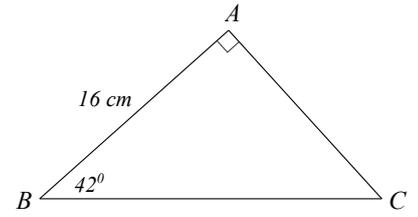
Bài 3: Giải $\triangle ABC$ trong các hình sau



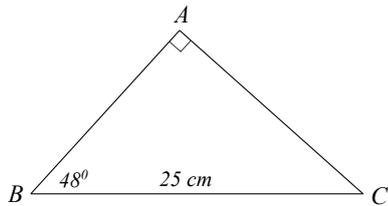
Hình 13



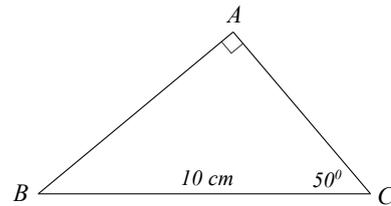
Hình 14



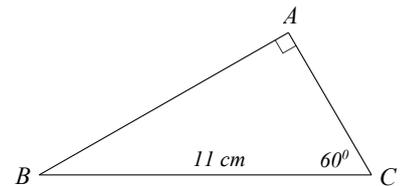
Hình 15



Hình 16

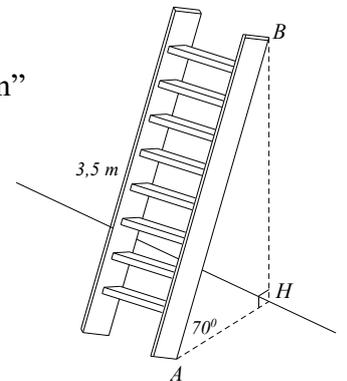


Hình 17

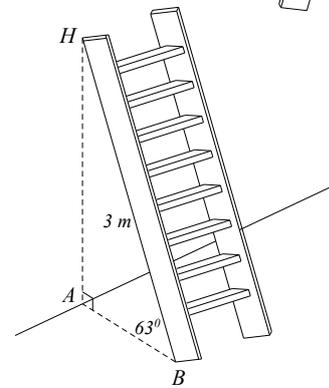


Hình 18

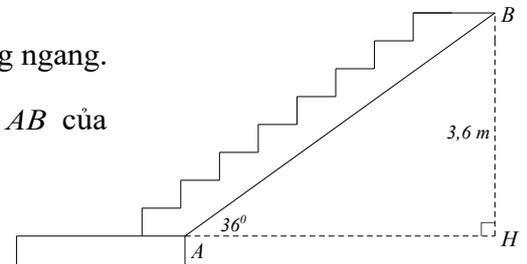
Bài 4: Một chiếc thang dài $3,5\text{ m}$. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc “an toàn” là 70° (để thang không bị đổ khi sử dụng). Kết quả làm tròn đến dm .



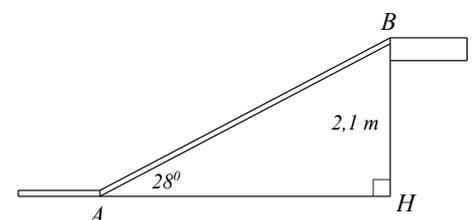
Bài 5: Một chiếc thang dài 3 m được bắc vào một bức tường. Để đảm bảo an toàn thì góc tạo bởi chiếc thang so với mặt đất là 63° . Hỏi phải đặt chân thang cách chân tường bao nhiêu mét? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



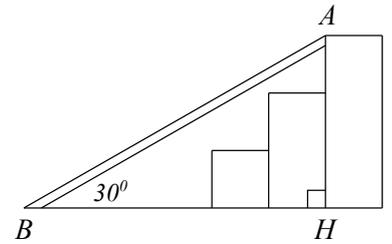
Bài 6: Một gia đình làm cầu thang có độ dốc là 36° so với phương ngang. Chiều cao từ sàn nhà tới trần nhà là $3,6\text{ m}$. Tính chiều dài AB của mặt cầu thang (làm tròn đến hàng đơn vị)



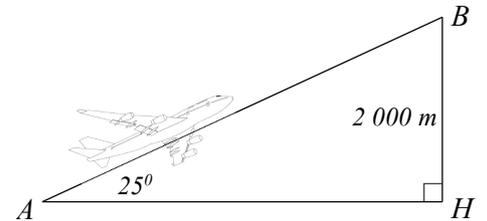
Bài 7: Một cầu trượt trong công viên có độ cao $2,1\text{ m}$ được đặt nghiêng so với mặt đất một góc 28° . Tính độ dài của mặt cầu trượt.



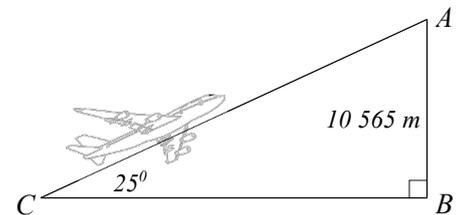
Bài 8: Bậc cửa nhà bác Nam cao 55 cm . Để đưa xe máy vào nhà, bác cần đặt một chiếc cầu sắt để dặt xe sao cho góc giữa mặt cầu và mặt đất khoảng 30° . Hỏi mặt cầu dài bao nhiêu cm



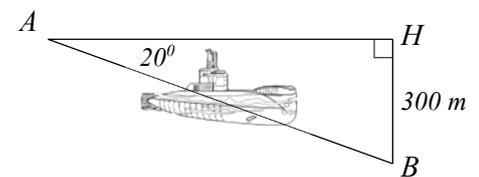
Bài 9: Một chiếc máy bay cất cánh theo một góc 25° so với mặt đất. Hỏi muốn đạt độ cao 2000 m thì máy bay phải bay một đoạn đường là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



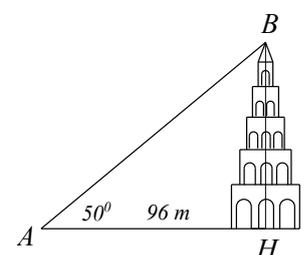
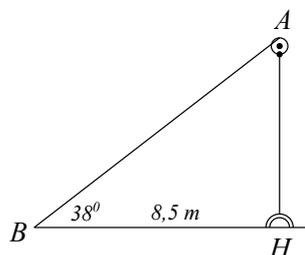
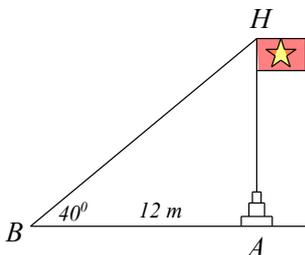
Bài 10: Một chiếc máy bay bay lên. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 25° . Sau 5 phút máy bay bay lên đạt độ cao là $10\,565\text{ m}$. Hỏi vận tốc trung bình của máy bay là bao nhiêu km/h



Bài 11: Một chiếc tàu ngầm đang ở trên mặt biển bắt đầu lặn xuống và di chuyển theo đường thẳng tạo với mặt nước một góc 20° . Một lúc sau, tàu ở độ sâu 300 m so với mặt nước biển. Hỏi tàu đã di chuyển bao nhiêu mét (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)



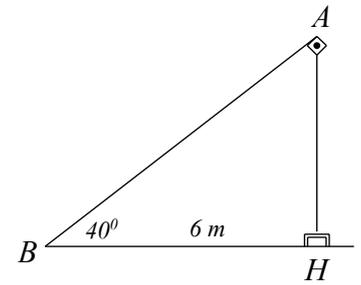
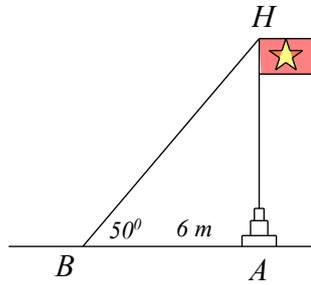
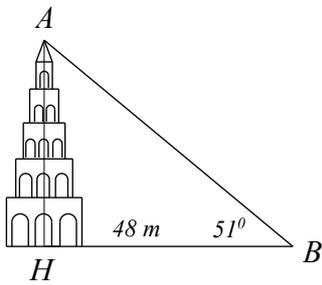
Bài 12: Lúc 10 giờ sáng, bóng của một cột cờ trên sân đo được dài 12 m . Tính chiều cao của cột cờ, biết tại thời điểm đó thì tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc khoảng 40° (làm tròn đến mét)



Bài 13: Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $8,5\text{ m}$. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 38° . Tính chiều cao của cột đèn.

Bài 14: Tính chiều cao của một cột tháp, biết rằng lúc tia sáng của mặt trời tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc bằng 50° thì bóng của nó trên mặt đất dài 96 m

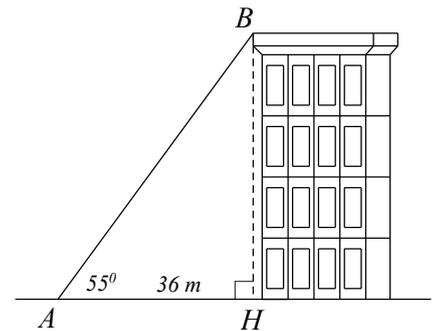
Bài 15: Tính chiều cao của một cột tháp (làm tròn đến mét) biết rằng lúc tia sáng của mặt trời tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc 51° , thì bóng của nó trên mặt đất dài 48 m .



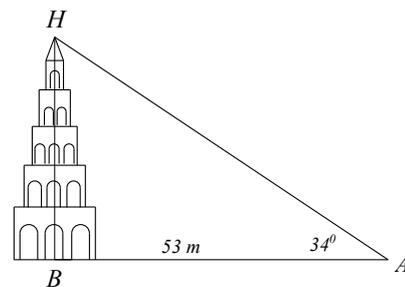
Bài 16: Chiều dài bóng cột cờ trên mặt đất là 6 m . Tại thời điểm đó thì góc mà tia nắng mặt trời tạo với mặt đất là 50° . Hỏi cột cờ cao bao nhiêu mét.

Bài 17: Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 6 m . Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 40° . Tính chiều cao của cột đèn

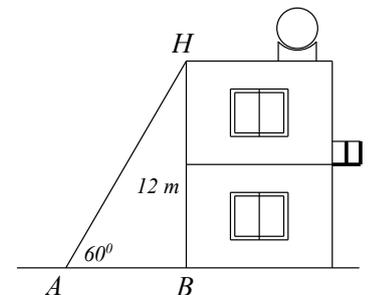
Bài 18: Tại một thời điểm trong ngày, tia nắng mặt trời hợp với mặt đất một góc bằng 55° . Một tòa nhà có bóng xuống mặt đường một đoạn có độ dài 36 m . Tính chiều cao của tòa nhà.



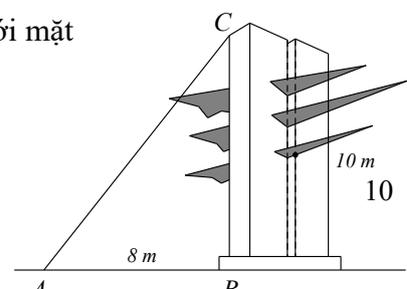
Bài 19: Một tòa tháp có bóng trên mặt đất dài 53 m . Biết rằng các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 34° . Tính chiều cao của tòa tháp (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



Bài 20: Một ngôi nhà cao 12 m . Khi tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 60° thì bóng tòa nhà trên mặt đất dài bao nhiêu mét?

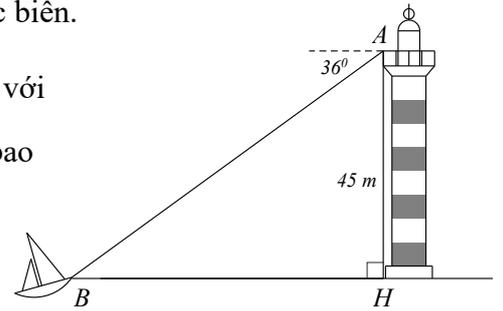


Bài 21: Tượng đài “Ba mũi tên đồng” – tượng đài chiến thắng Ngọc Hồi cao 10 m . Tại một thời điểm trong ngày bóng của tượng đài trên mặt đất dài 8 m . Hỏi lúc đó góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là bao nhiêu (làm tròn đến độ)

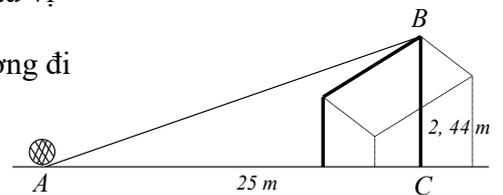


Bài 22: Từ đỉnh A của một ngọn đèn biển cao 45 m so với mặt nước biển.

người ta nhìn thấy một con tàu ở vị trí B dưới góc 36° so với phương nằm ngang. Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân đèn là bao nhiêu mét?

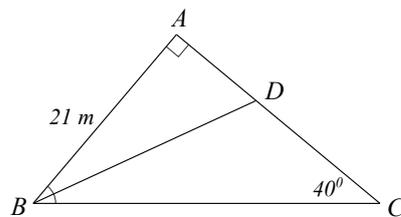
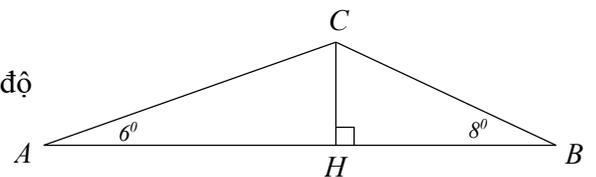


Bài 23: Một cầu thủ sút bóng bị va vào góc trên bên phải của cầu môn và dội ngược trở lại. Biết cầu môn cao $2,44\text{ m}$ và khoảng cách từ vị trí sút bóng đến chân cầu môn là 25 m . Tính góc tạo bởi đường đi của bóng so với mặt đất (số đo góc làm tròn đến độ)



Bài 24: Lúc 7 giờ 10 phút sáng. Bạn Hùng đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải lên và xuống một con dốc (như hình vẽ). Cho biết độ cao dốc $CH = 20\text{ m}$, góc $\widehat{A} = 6^\circ$ và góc $\widehat{B} = 4^\circ$

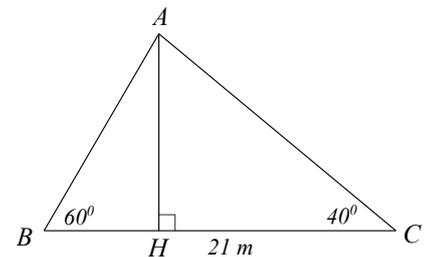
- Tính khoảng cách AB
- Hỏi bạn Hùng đến trường lúc mấy giờ?
Biết rằng tốc độ trung bình lên dốc là 4 km/h và tốc độ trung bình xuống dốc là 10 km/h



Hình 2

Bài 25: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 12\text{ cm}$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

Tính độ dài AC , BC và đường phân giác BD (Hình 2)



Hình 3

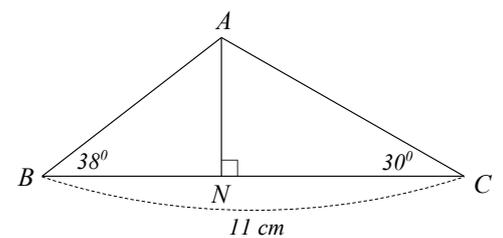
Bài 26: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 21\text{ m}$ và $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ (Hình 3)

- Tính đường cao AH và AC
- Tính diện tích $\triangle ABC$

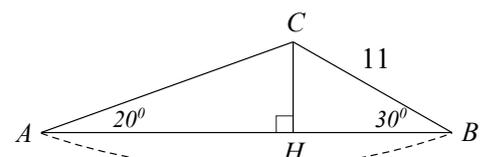
Bài 27: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 11\text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 38^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC .

- Tính AN (Hình 4)
- Tính AC



Hình 4

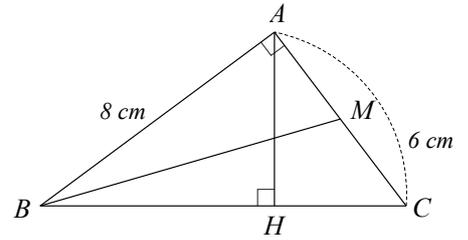


Bài 28: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 20^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$ và $AB = 60 \text{ cm}$.

Đường cao CH . Tính AH , BH và CH . (Hình 5)

Bài 29: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $AC = 6 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$

- Giải $\triangle ABC$ (Hình 6)
- Kẻ đường cao AH . Tính AH , BH
- M là trung điểm của AC . Tính \widehat{AMB} .

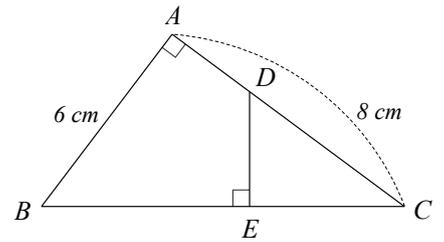


Hình 6

Bài 30: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$

- Giải $\triangle ABC$ (Hình 7)
- Chứng minh rằng $AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C = BC$
- Trên AC lấy điểm D sao cho $DC = 2 \cdot DA$. Vẽ $DE \perp BC$

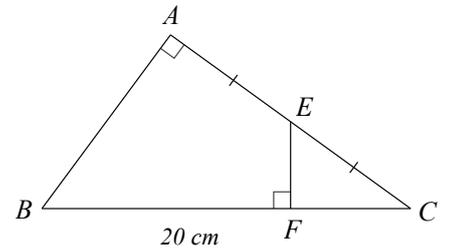
Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{9DE^2}$



Hình 7

Bài 31: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Từ trung điểm E của cạnh AC kẻ $EF \perp BC$

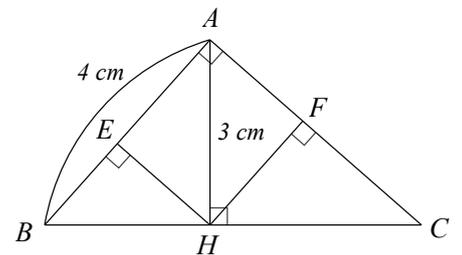
- Cho $BC = 20 \text{ cm}$, $\sin C = 0,6$. Giải $\triangle ABC$ (Hình 8)
- Chứng minh $AC^2 = 2 \cdot CF \cdot CB$
- Chứng minh $AF = BE \cdot \cos C$



Hình 8

Bài 32: Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Từ H kẻ $HE \perp AB$ và $HF \perp AC$

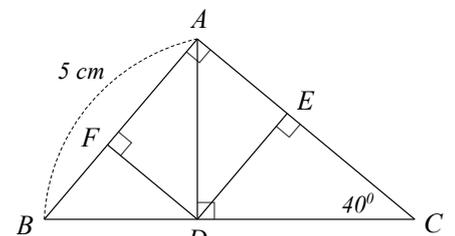
- Chứng minh rằng $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (Hình 9)
- Cho biết $AB = 4 \text{ cm}$, $AH = 3 \text{ cm}$. Tính độ dài AE và BE
- Biết $\widehat{HAC} = 30^\circ$. Tính FC



Hình 9

Bài 33: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 5 \text{ cm}$, $\widehat{C} = 40^\circ$

- Giải $\triangle ABC$. (Hình 10)
- Vẽ đường cao AD , từ D kẻ $DE \perp AC$, $DF \perp AB$
Chứng minh $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.



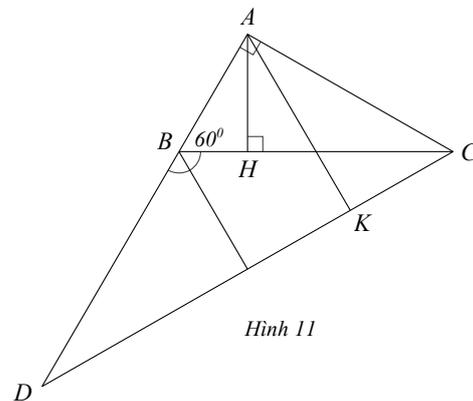
Hình 10

Bài 34: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 6\text{ cm}$ (Hình 11)

- Tính AB , AC .
- Kẻ đường cao AH . Tính HB , HC
- Trên tia đối của tia BA , lấy điểm D sao cho $DB = BC$.

Chứng minh $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$

- Từ A kẻ đường thẳng song song với phân giác \widehat{CBD} cắt CD tại K . Chứng minh $\frac{1}{KD \cdot KC} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$

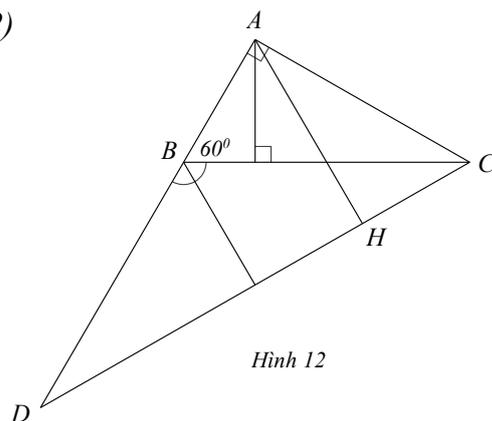


Hình 11

Bài 35: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 6\text{ cm}$ (Hình 12)

- Tính AB , AC
- Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Chứng minh $AB \cdot CD = AC \cdot BD$

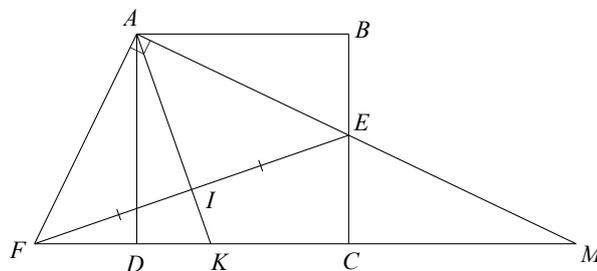
- Đường thẳng song song với tia phân giác \widehat{CBD} kẻ từ A cắt CD tại H . Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$



Hình 12

Bài 36: Cho hình vuông $ABCD$ và điểm E tùy ý trên BC . Tia Ax vuông góc với AE cắt CD tại F . Trung tuyến AI của $\triangle AEF$ và kéo dài cắt CD tại K . (Hình 13)

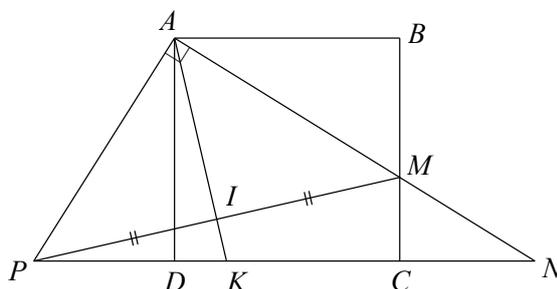
- Chứng minh $AE = AF$
- Chứng minh $\triangle AKF \sim \triangle CAF$ và $AF^2 = KF \cdot CF$
- Cho $AB = 4\text{ cm}$, $BE = \frac{3}{4}BC$. Tính diện tích $\triangle AEF$
- AE cắt CD tại M . Chứng minh $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AM^2}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm E



Hình 13

Bài 37: Cho $\triangle APN$ vuông tại A có $\widehat{P} = 58^\circ$ và $PN = 72\text{ cm}$ (Hình 14)

- Giải $\triangle APN$
- Kẻ đường cao AD . Dựng hình vuông $ABCD$ sao cho C, P khác phía đối với điểm D . AN cắt BC tại M . Chứng minh $\triangle APM$ cân.
- Kẻ trung tuyến AI của $\triangle APM$ cắt CD tại K . Chứng minh rằng $AP^2 = KP \cdot CP$
- Chứng minh rằng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AB^2}$

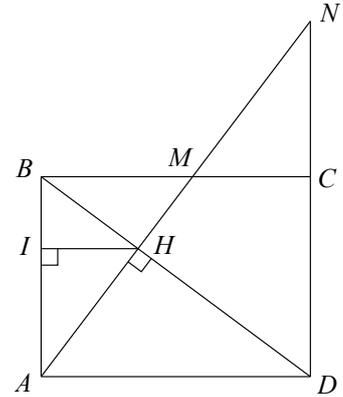
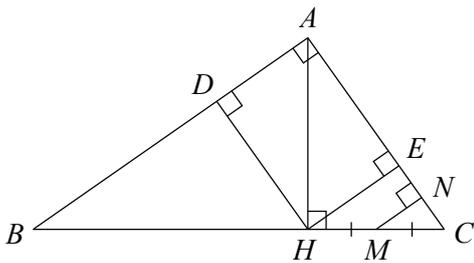


Hình 14

Bài tập ôn tập chương 4.

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- Biết $BH = 4\text{ cm}$, $CH = 2\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AH , AB (làm tròn đến một chữ số thập phân)
- Gọi D, E lần lượt là chân đường vuông góc của H trên AB, AC . Chứng minh $\cos^3 B = \frac{BD}{BC}$
- Gọi M là trung điểm của HC , N là hình chiếu của M trên AC .
Chứng minh $MC^3 = \frac{1}{2} \cdot NC^2 \cdot BC$.



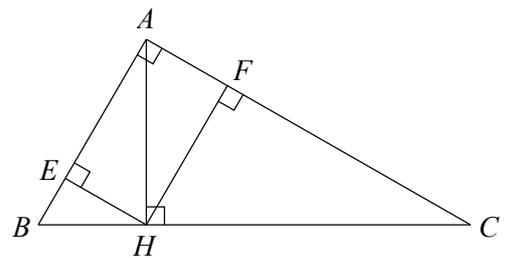
Bài 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9\text{ cm}$, $BC = 12\text{ cm}$. Kẻ $AH \perp BD$ tại H .

- Tính BD , AH , góc \widehat{BDA}
- Kẻ $HI \perp AB$. Chứng minh rằng $AI \cdot AB = DH \cdot HB$
- Đường thẳng AH cắt BC tại M và cắt DC tại N .
Chứng minh $HA^2 = HM \cdot HN$

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$

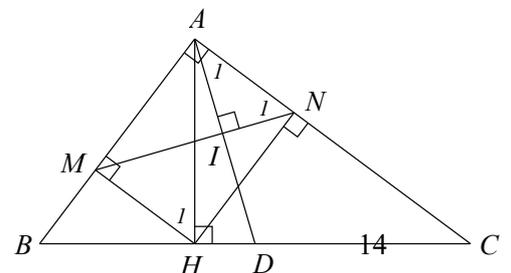
- Giải tam giác vuông $\triangle ABC$.
- Tính HB , HC
- Từ H kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$ ($E \in AB$, $F \in AC$).

Chứng minh rằng $EA \cdot EB + AF \cdot FC = \left(\frac{HE}{\sin \widehat{HAE}} \right)^2$



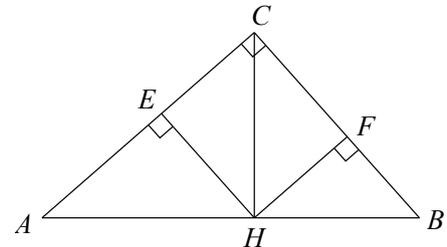
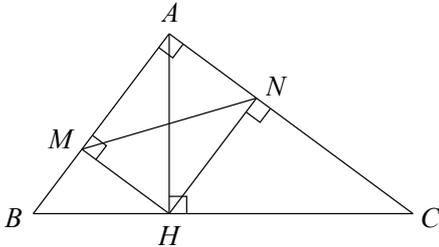
Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH . Vẽ HM vuông góc với AB tại M , HN vuông góc với AC tại N

- Cho biết $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$. Tính độ dài BC , AH và số đo các góc B, C .
- Chứng minh rằng $AM \cdot AB = AN \cdot AC$
- Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt BC tại D .
Chứng minh D là trung điểm của BC .



Bài 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , ($H \in BC$)

- Biết $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$. Tính AC , AH và \widehat{ABC} (làm tròn đến độ)
- Kẻ HM vuông góc với AB tại M , HN vuông góc với AC tại N . Chứng minh $AH = MN$ và $AM \cdot MB + AN \cdot NC = AH^2$
- Chứng minh rằng $\tan^3 \widehat{C} = \frac{BM}{CN}$

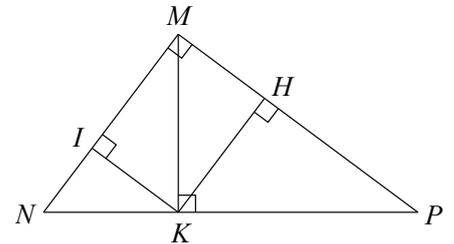


Bài 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C , có độ dài cạnh AC và BC lần lượt là 20 cm , 15 cm . Vẽ đường cao CH , kẻ HE vuông góc với AC tại E , HF vuông góc với BC tại F

- Tính số đo \widehat{A} , độ dài AB , EF
- Chứng minh rằng $AC \cdot EC = BC \cdot FC$

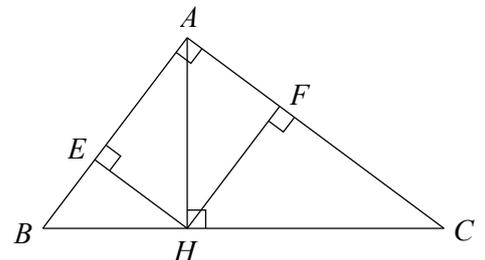
Bài 7: Cho $\triangle MNP$ vuông tại M có độ dài cạnh $MN = 6 \text{ cm}$ và $MP = 8 \text{ cm}$. Vẽ đường cao MK , kẻ KI vuông góc với MN tại I , KH vuông góc với MP tại H

- Tính độ dài NP , IH và số đo góc \widehat{P}
- Chứng minh rằng $MI \cdot MN = MH \cdot MP$



Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH .

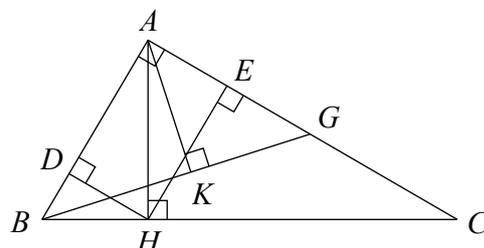
- Cho biết $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BC , HB , AH
- Vẽ HE vuông góc với AB tại E , HF vuông góc với AC tại F . Chứng minh rằng $AE \cdot EB = EH^2$ và $AE \cdot EB + AF \cdot FC = EF^2$
- Chứng minh rằng $BE = BC \cdot \cos^3 \widehat{B}$



Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH .

- Giả sử $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$. Tính độ dài BC , AH và số đo \widehat{ABC}
- Kẻ HD , HE lần lượt vuông góc với AB , AC . Chứng minh rằng $AD \cdot AB = AE \cdot AC$
- Lấy điểm G nằm giữa E và C . Kẻ AK vuông góc với BG tại K . Chứng minh rằng

$$\sin \widehat{AGB} \cdot \cos \widehat{ABC} = \frac{HK}{CG}$$

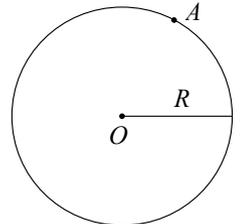


Chương 5. ĐƯỜNG TRÒN
Bài 13. Mở đầu về đường tròn.

A. LÝ THUYẾT.

1) Đường tròn.

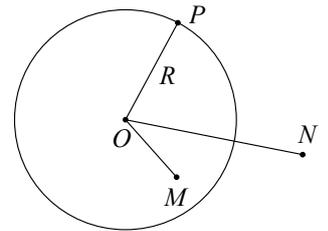
- ♣ Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$ là hình gồm tất cả các điểm cách O một khoảng bằng R . (Hình 1)
- ♣ Khi không cần quan tâm tới bán kính, ta kí hiệu đường tròn tâm O là (O)
- ♣ Nếu A là một điểm của đường tròn (O) , ta viết $A \in (O)$, ta còn nói đường tròn (O) đi qua điểm A hay điểm A nằm trên đường tròn (O) .



Hình 1

Ví dụ 1: Cho đường tròn $(O; R)$ và ba điểm M, N, P như Hình 2.

- a) Hãy cho biết điểm nào thuộc đường tròn, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài?
- b) Hãy so sánh OP, OM, ON với R



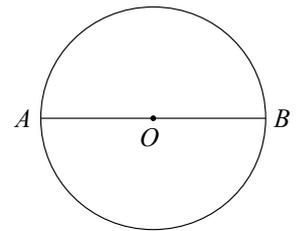
Hình 2

Bài làm:

- a) Điểm P thuộc đường tròn (O) , điểm M nằm trong đường tròn (O) . Điểm N nằm ngoài đường tròn (O) .
- b) Ta có $OP = R, OM < R, ON > R$.

Chú ý:

- ♣ Hình tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm nằm trên và nằm trong đường tròn $(O; R)$.
- ♣ Hình 3. AB được gọi là đường kính của đường tròn (O)



Hình 3

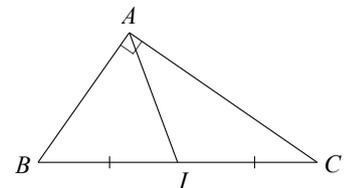
Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn đường kính BC .

Bài làm:

Lấy I là trung điểm của BC

$\triangle ABC$ vuông tại A có AI là trung tuyến nên $AI = \frac{BC}{2} = BI = CI$

Vậy A thuộc đường tròn đường kính BC .



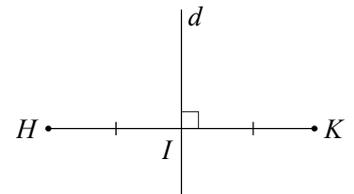
Hình 4

2) Tính đối xứng của đường tròn.

- ♣ Đối xứng tâm: Hai điểm H và K gọi là đối xứng với nhau qua điểm I nếu I là trung điểm của HK . Điểm I gọi là tâm đối xứng (Hình 5)
- ♣ Đối xứng trục: Hai điểm H và K gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của HK . Đường thẳng d gọi là trục đối xứng (Hình 6)



Hình 5



Hình 6

- ♣ Đường tròn là hình có tâm đối xứng, tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó.
- ♣ Đường tròn là hình có trục đối xứng, mỗi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn là một trục đối xứng của nó.

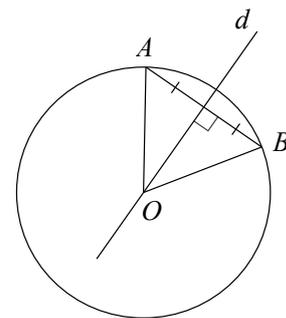
Ví dụ 3: Cho đường tròn (O) và hai điểm $A, B \in (O)$. Gọi d là đường trung trực của đoạn AB . Chứng minh rằng (d) là một trục đối xứng của (O) .

Bài làm:

Ta có $OA = OB = R$ nên O thuộc đường trung trực của AB

Mà d là đường trung trực của AB nên $O \in (d)$

Hay d đi qua O nên d là một trục đối xứng của (O)



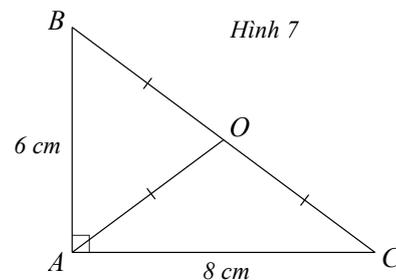
Hình 7

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$.

Chứng minh rằng ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Tính bán kính của đường tròn đó.

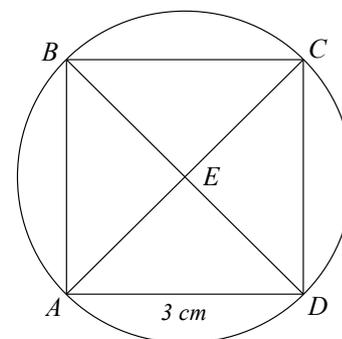


Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D .

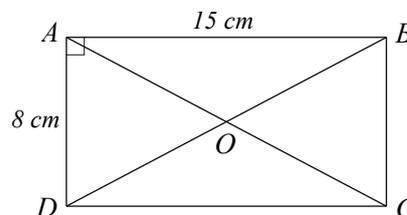
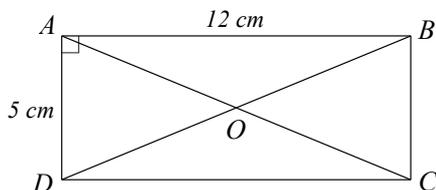
Xác định tâm đối xứng và hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn đó nếu hình vuông có cạnh bằng 3 cm .



Bài 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$.

Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.



Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8\text{ cm}$, $BC = 15\text{ cm}$.

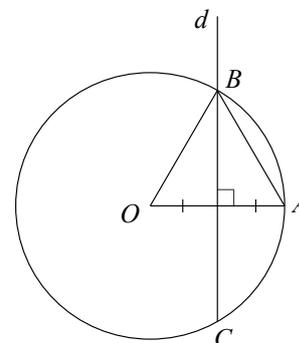
Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 5: Cho đường tròn $(O; 3\text{ cm})$. Điểm $A \in (O)$. Đường thẳng d

vuông góc với OA tại trung điểm của OA cắt đường tròn (O) tại B và C .

a) Chứng minh rằng $\triangle OAB$ là tam giác đều.

b) Tính độ dài đoạn BC .

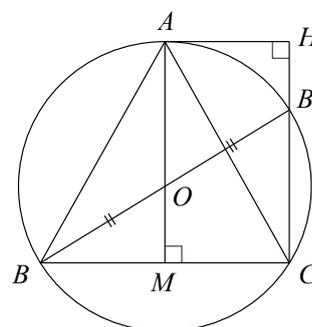


Bài 6: Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C thuộc đường tròn đó sao cho $\triangle ABC$ cân tại A .

a) Giả sử $BC = 6\text{ cm}$, đường cao AM của $\triangle ABC$ bằng 4 cm . Tính AB .

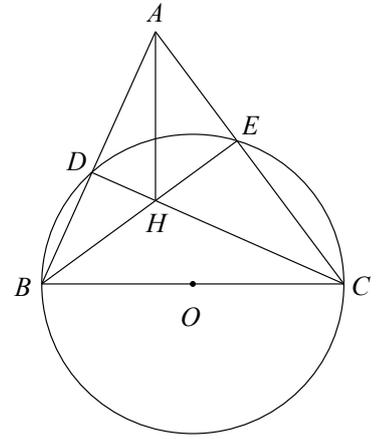
b) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O .

Vẽ $AH \perp CB'$ tại H . Tứ giác $AHCM$ là hình gì?



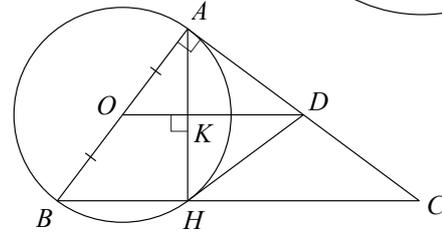
Bài 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC , đường tròn này cắt AB, AC lần lượt tại D và E . Gọi H là giao điểm của BE và CD .

- Chứng minh rằng $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.
- Chứng minh rằng $AH \perp BC$.



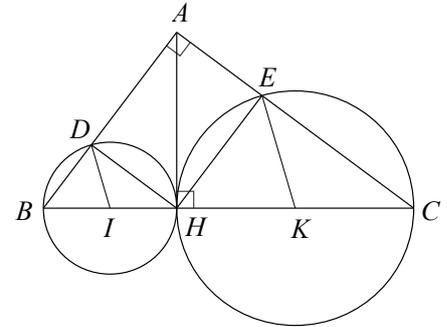
Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB cắt BC tại H .

- Tính AH và CH .
- Kẻ $OK \perp AH$ tại K , tia OK cắt AC tại D . Chứng minh rằng $DH \perp OH$



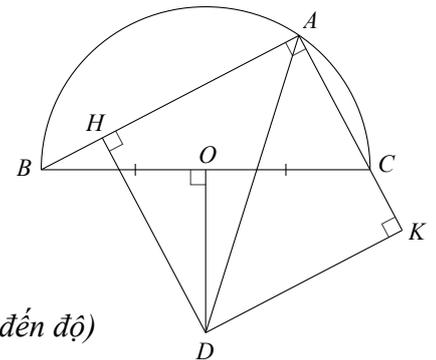
Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn (I) đường kính BH cắt AB tại D , vẽ đường tròn (K) đường kính HC cắt AC tại E .

- Chứng minh $ADHE$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh rằng $AD \cdot AB = AE \cdot AC$
- Giả sử $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$. Tính DE và diện tích tứ giác $DEKI$.



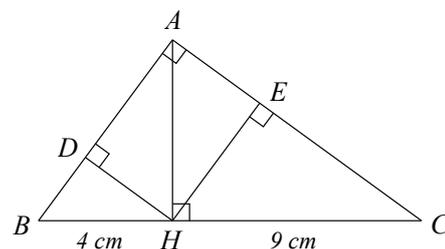
Bài 10: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . A là một điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $AB > AC$. Tia phân giác \widehat{BAC} cắt đường trung trực BC tại D . Hạ DH và DK lần lượt vuông góc với AB và AC .

- Chứng minh rằng $AHDK$ là hình vuông.
- Chứng minh A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



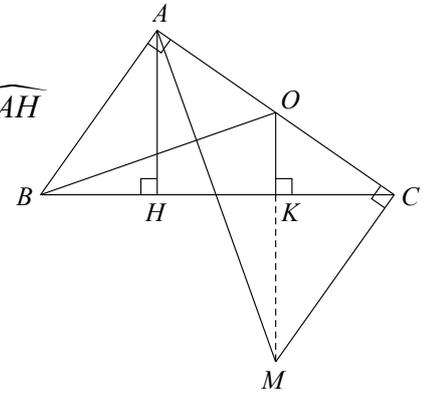
Bài 11: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$, đường cao AH

- Cho $HB = 4 \text{ cm}$, $HC = 9 \text{ cm}$. Tính AH và số đo \widehat{ABC} (làm tròn đến độ)
- Gọi D là hình chiếu của H trên AB , E là hình chiếu của H trên AC . Chứng minh rằng:
 - Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.
 - $AD \cdot AB + AE \cdot AC = 2 \cdot DE^2$
 - $\frac{HC^2}{AC^2} + \frac{BD^2}{BH^2} = 1$.



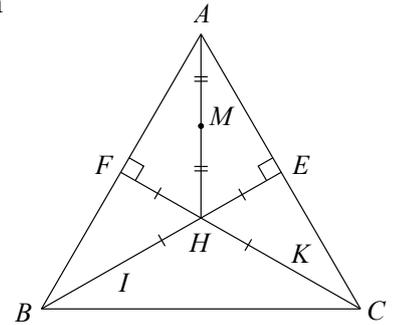
Bài 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- Biết $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 13\text{ cm}$. Tính độ dài cạnh AH và số đo góc \widehat{BAH}
- Gọi O là trung điểm của AC , K là hình chiếu của O trên BC . Chứng minh 4 điểm A, B, O, K cùng nằm trên một đường tròn.
- Đường thẳng qua A và vuông góc với BO cắt đường thẳng qua C vuông góc với AC tại M . Chứng minh $\triangle ABO \sim \triangle CAM$ và ba điểm O, K, M thẳng hàng



Bài 13: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , vẽ hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn và chỉ ra tâm của đường tròn đó.
- Gọi I, K lần lượt là hai điểm trên BH và CH sao cho $HE = HI$, $HF = HK$. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, I, K cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi M là trung điểm của AH . Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để điểm M thuộc đường tròn đi qua bốn điểm E, F, I, K .



Bài 2. Cung và dây của một đường tròn.

A. LÝ THUYẾT.

1) Dây và đường kính của đường tròn.

- ♣ Đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của một đường tròn gọi là một dây (*dây cung*) của đường tròn.
- ♣ Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn.

Ví dụ 1: Hình 1.

MN là một dây của đường tròn (O)

AB là một đường kính của đường tròn (O).

- ♣ Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

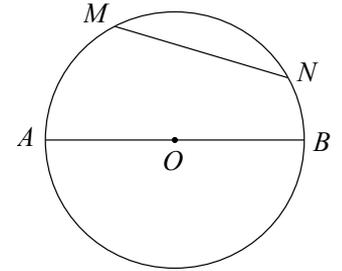
Ví dụ 2: Cho đường tròn đường kính BC . Chứng minh rằng với điểm A bất kì (khác B và C) nằm trên đường tròn thì $BC < AB + AC < 2BC$ (Hình 2)

Bài làm:

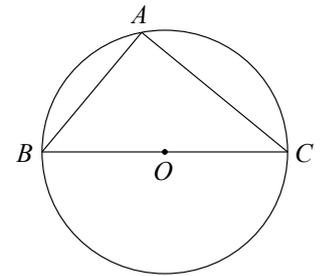
$\triangle ABC$ có $AB + AC > BC$

Mặt khác $AB < BC, AC < BC \Rightarrow AB + AC < 2BC$

Như vậy $BC < AB + AC < 2BC$



Hình 1



Hình 2

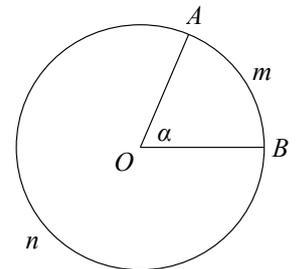
2) Góc ở tâm, cung và số đo của một cung.

- ♣ Hai điểm A và B cùng thuộc một đường tròn, hai điểm ấy chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần là một cung tròn (*hay cung*). Hai điểm A, B gọi là hai đầu mút của mỗi cung.
- ♣ Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

Ví dụ 3: Hình 3:

Hai cung là cung nhỏ \widehat{AmB} và cung lớn \widehat{AnB} .

Một góc ở tâm là $\widehat{AOB} = \alpha$.



Hình 3

Chú ý:

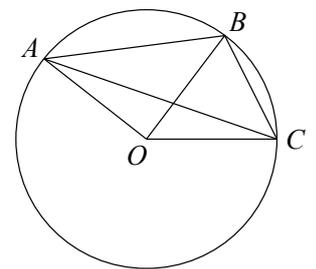
- ♣ Cung nhỏ \widehat{AmB} còn có thể kí hiệu là \widehat{AB} . Khi \widehat{AOB} là góc bẹt thì cung \widehat{AB} còn gọi là một nửa đường tròn.
- ♣ Ta còn nói \widehat{AOB} chắn cung AB hay cung AB bị chắn bởi góc \widehat{AOB} .

Ví dụ 4: Cho Hình 4.

- a) Chỉ ra các cung có trong hình.
- b) Chỉ ra các góc ở tâm có trong hình.

Bài làm:

- a) Ta có các cung nhỏ là $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{AC}$
Và các cung lớn là $\widehat{AC}, \widehat{ACB}, \widehat{BAC}$
- b) Các góc ở tâm là $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{AOC}$.



Hình 4

- ♣ Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0 .
- ♣ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- ♣ Số đo của cung lớn bằng hiệu 360^0 với số đo cung nhỏ có chung hai mút.
- ♣ Kí hiệu số đo cung AB là $sđ \widehat{AB}$
- ♣ Cung có số đo n^0 còn gọi là cung n^0 . Cả đường tròn được coi là cung 360^0 , một điểm là cung 0^0
- ♣ Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo.

Ví dụ 5: Cho Hình 5.

Ta có số đo $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}$.

Ví dụ 6: Cho điểm C nằm trên đường tròn (O) . Đường trung trực của đoạn

OC cắt (O) tại A và B . Tính số đo của các cung \widehat{ACB} và \widehat{ABC} .

Bài làm:

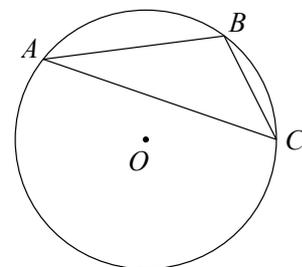
Gọi $AB \perp OC$ tại I

$$\text{Khi đó } OI = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$$

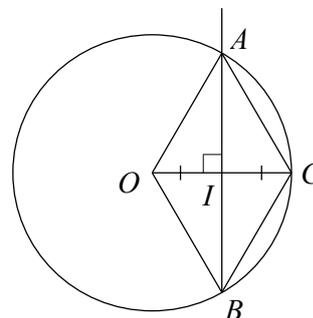
$$\cos \widehat{AOI} = \frac{OI}{OA} = \frac{R}{2 \cdot R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOI} = 60^\circ$$

$$\text{Chỉ ra } \Rightarrow \widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AOI} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 360^\circ - \widehat{AC} = 360^\circ - \widehat{AOC} = 360 - 60 = 300^\circ.$$



Hình 5



Hình 6

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

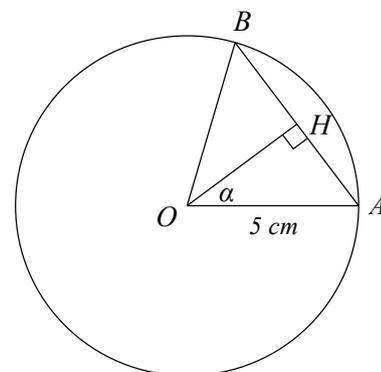
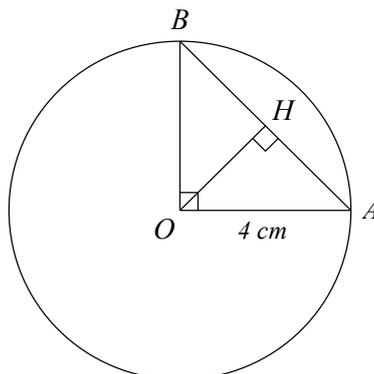
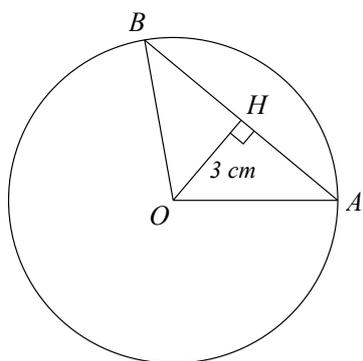
Bài 1: Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6 \text{ cm}$.

- Tính khoảng cách từ O đến dây AB .
- Tính $\tan \alpha$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α .

Bài 2: Tâm O của một đường tròn cách dây AB của nó một khoảng 3 cm .

Tính bán kính của đường tròn (O) , biết rằng cung nhỏ AB có số đo 100°

(làm tròn đến kết hàng phần mười)



Bài 3: Cho đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và dây AB . Biết rằng số đo $\widehat{AB} = 90^\circ$.

- Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .
- Tính độ dài dây AB .

Bài 4: Cho đường tròn (O) đường kính BC , điểm A nằm trên

đường tròn sao cho $\widehat{AOC} = 120^\circ$.

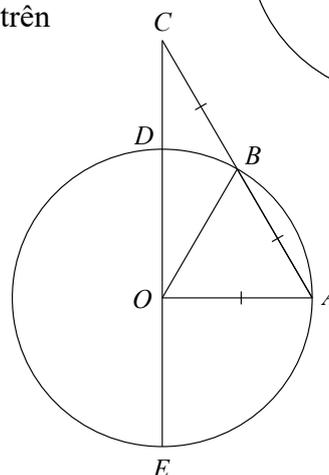
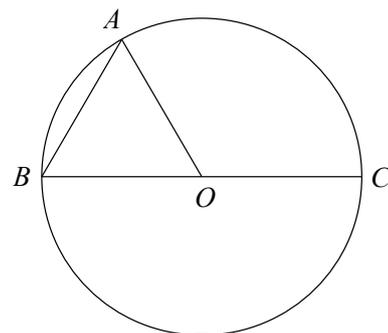
- Chứng minh rằng dây AB bằng bán kính.
- Tính số đo \widehat{AB} .

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R$.

Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = R$.

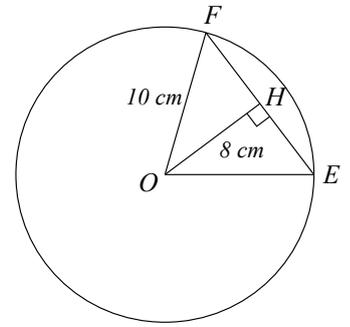
Kéo dài CO cắt (O) lần lượt tại D và E .

- Chứng minh rằng $\widehat{AOD} = 3 \cdot \widehat{ACD}$
- Tính số đo \widehat{BE} , \widehat{AD} .



Bài 6: Cho đường tròn $(O; 10\text{ cm})$ có dây EF , biết khoảng cách từ tâm O tới dây EF bằng 8 cm .

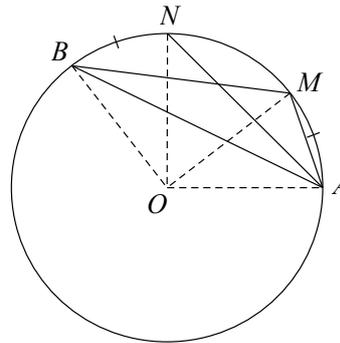
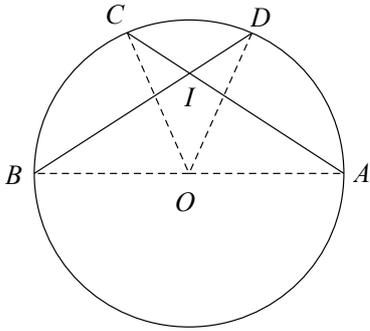
- Tính độ dài dây EF .
- Tính số \widehat{EF}



Bài 7: Cho đường tròn (O) , dây AC bằng dây BD cắt nhau tại I .

(D nằm giữa A và C)

- Chứng minh rằng số $\widehat{AC} = \widehat{BD}$
- Chứng minh rằng số $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



Bài 8: Cho đường tròn (O) , dây AB . Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = BN$ (M nằm trên cung AN).

- Chứng minh rằng số $\widehat{AN} = \widehat{BM}$
- Chứng minh rằng hai dây AN, BM bằng nhau.

Bài 15. Độ dài cung tròn, diện tích hình quạt tròn và hình vành khuyên.

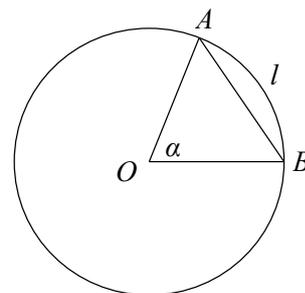
A. LÝ THUYẾT.

1) Độ dài của cung tròn.

- ♣ Cho đường tròn $(O; R)$, dây AB và $\widehat{AOB} = \alpha$.

Chu vi của cả đường tròn (O) là $C = 2\pi R$.

Độ dài cung tròn AB là $l = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi R$



Hình 1

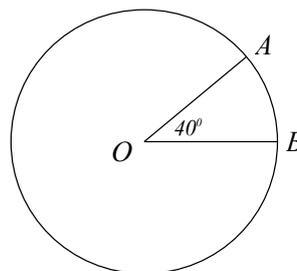
Ví dụ 1: Tính độ dài của cung 40° của một đường tròn có bán kính 9 cm .

Bài làm:

Gọi độ dài cung AB có số đo 40° như Hình 2

Độ dài cung tròn AB là

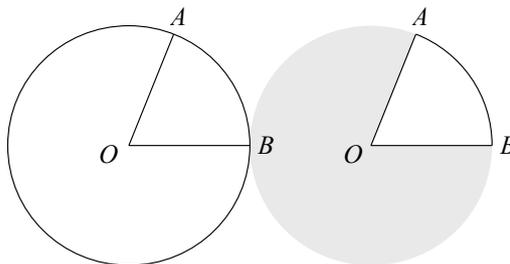
$$l = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi R = \frac{40}{180} \cdot 3,14 \cdot 9 \approx 6,28\text{ cm}$$



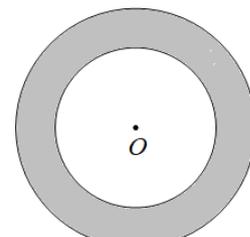
Hình 2

2) Hình quạt tròn và hình vành khuyên.

- ♣ Hình quạt tròn là phần hình tròn giới hạn bởi cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó (Hình 3)
- ♣ Hình vành khuyên (vành khăn) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (hai đường tròn đồng tâm) (Hình 4)



Hình 3



Hình 4

- ♣ Diện tích hình quạt tròn bán kính R ứng với cung n° là $S_n = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{l \cdot R}{2}$
- ♣ Diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r là $S_V = \pi(R^2 - r^2)$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6 cm và 4 cm .

Bài làm:

Diện tích của hình vành khuyên là $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(6^2 - 4^2) = 20\pi\text{ cm}^2$.

Ví dụ 3: Tính diện tích của hình quạt tròn có bán kính 5 cm và có độ dài cung ứng với nó là $4\pi\text{ cm}$

Bài làm:

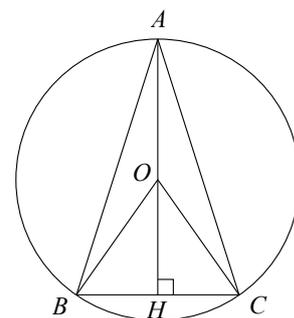
Diện tích hình quạt tròn là $S = \frac{l}{2} \cdot R = \frac{4\pi}{2} \cdot 5 = 10\pi(\text{cm}^2)$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó

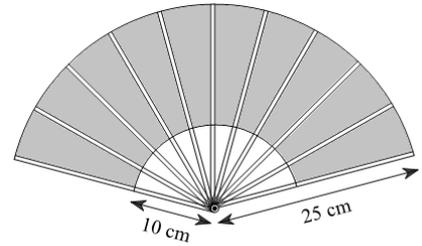
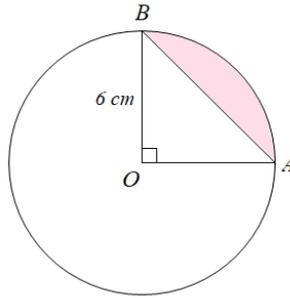
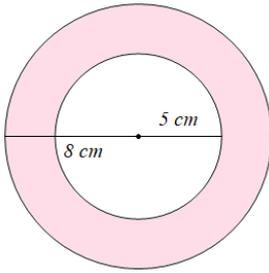
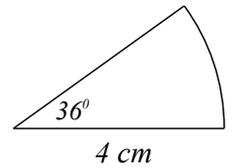
sao cho $\triangle ABC$ cân tại A và số đo cung nhỏ BC bằng 70° .

- Chứng minh rằng cung AB và cung AC bằng nhau.
- Tính độ dài cung BC, AB và AC (làm tròn đến hàng phần mười)



Bài 2: Tính diện tích của hình quạt tròn có bán kính 4 cm , ứng với cung 36°

Bài 3: Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 8 cm và 5 cm



Bài 4: Cho đường tròn $(O; 6\text{ cm})$, hai điểm A, B thuộc đường tròn sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

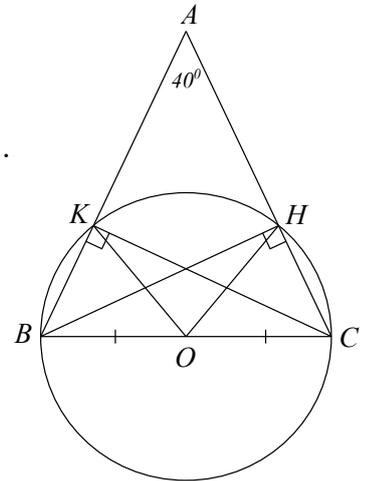
- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AB
- Tính diện tích hình viên phân (hình giới hạn bởi cung AB và dây AB) (Hình bên)

Bài 5: Một chiếc quạt giấy khi xò ra có hình dạng của một hình quạt tròn với bán kính 25 cm và khi xò hết thì góc tạo bởi hai thanh nan ngoài cùng của chiếc quạt là 150° .

- Tính chiều dài cung tròn của chiếc quạt.
- Tính diện tích phần giấy làm quạt, biết rằng phần giấy của quạt là một hình vành khuyên có bán kính đường tròn nhỏ là 10 cm .

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ là tam giác nhọn cân tại A . Kẻ hai đường cao BH và CK .

- Chứng minh rằng đường tròn tâm O đường kính BC đi qua K và H .
- Chứng minh rằng cung BH và cung CK bằng nhau.
- Tính số đo của cung KH nếu $\widehat{BAC} = 40^\circ$.

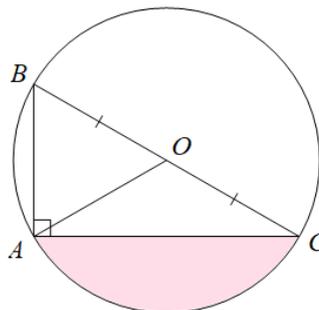
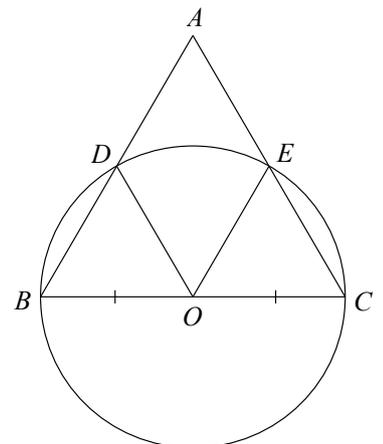


Bài 7: Cho $\triangle ABC$ đều có $AB = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại D và E .

- Chứng minh rằng ba cung BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.
- Tính diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây CE và cung CE .

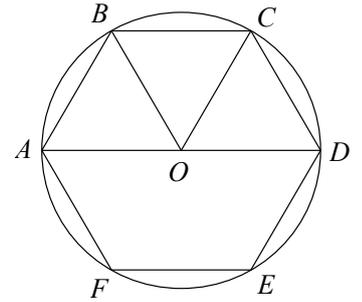
Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}, BC = 6\text{ cm}$, đường tròn đường kính BC .

- Chứng minh rằng đỉnh A thuộc đường tròn.
- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AC và diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây AC và cung AC .



Bài 9: Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và hình lục giác đều $ABCDEF$ sao cho 6 đỉnh của hình lục giác đều đều thuộc đường tròn.

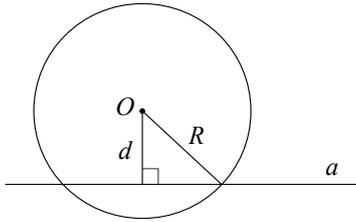
- Chứng minh rằng cung AC và cung BD bằng nhau.
- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung BD và diện tích phần viên phân tạo bởi cung AC và dây AC



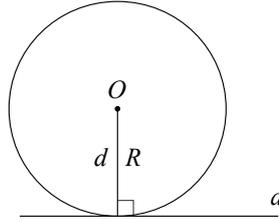
Bài 16. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

A. LÝ THUYẾT.

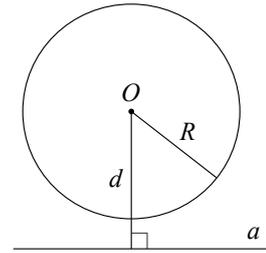
1) Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

- ♣ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là cắt nhau nếu chúng có hai điểm chung (Hình 1)
- ♣ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là tiếp xúc với nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung (Hình 2).
- ♣ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là không giao nhau nếu chúng không có điểm chung (Hình 3).

Nhận xét:

- ♣ Nếu khoảng cách $d < R$ thì đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt.
- ♣ Nếu khoảng cách $d = R$ thì đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.
- ♣ Nếu khoảng cách $d > R$ thì đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng a và điểm O cách đường thẳng a một khoảng 5 cm . Khi đó đường tròn $(O; 4,9\text{ cm})$ như thế nào với đường thẳng a ?

Bài làm:

Nhận thấy $d > R$ ($5\text{ cm} > 4,9\text{ cm}$) nên đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau.

Ví dụ 2: Cho điểm A cách đường thẳng d một khoảng 12 cm . Vẽ đường tròn $(A; 13\text{ cm})$

- a) Cho biết vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (A)
- b) Gọi hai giao điểm là B và C . Tính BC

Bài làm:

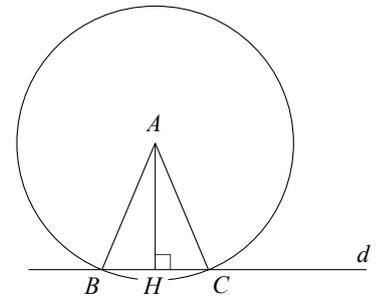
- a) Gọi AH là khoảng cách từ A tới đường thẳng d .

Vì $AH < R$ ($12\text{ cm} < 13\text{ cm}$) nên đường thẳng d cắt đường tròn (A) tại hai điểm phân biệt.

- b) $\triangle ABC$ có $AB = AC = R$ nên cân tại A , lại có AH là đường cao nên AH cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow BH = CH$.

$$\triangle AHC \text{ vuông tại } H \text{ có } AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + HC^2 \Rightarrow HC^2 = 25 \Rightarrow HC = 5\text{ cm}$$

Vì $HC > 0$. Do đó $BC = 2HC = 10\text{ cm}$.



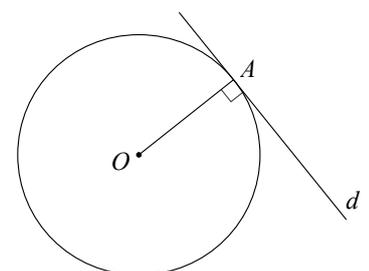
Hình 4

2) Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn.

- ♣ **Định lý 1:** Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn. Điểm đó gọi là tiếp điểm.

Ví dụ 3: Hình 5.

Đường thẳng d vuông góc với bán kính OA nên d là một tiếp tuyến của đường tròn (O) và A gọi là tiếp điểm.



Hình 5

3) Hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn.

- ♣ **Định lý 2:** Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P thì:
 - + Điểm P cách đều hai tiếp điểm.
 - + PO là góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
 - + OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.

Ví dụ 4: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn, từ A kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm). Kẻ dây BC vuông góc với AO tại H .

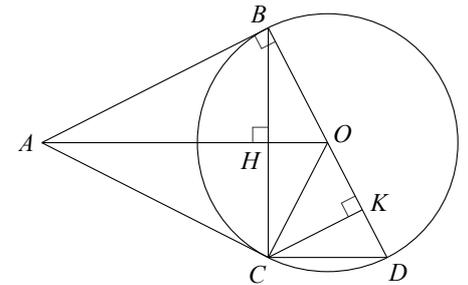
- a) Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O) , kẻ $CK \perp BD$. Chứng minh rằng $BK \cdot BD = BC^2$

Bài làm:

- a) $\triangle OBC$ có $OB = OC = R$ nên $\triangle OBC$ cân tại O
 Có $OH \perp BC$ nên $HB = HC$.
 Do đó AO là trung trực của $BC \Rightarrow AB = AC$
 Chứng minh $\triangle ABO = \triangle ACO$ ($c - c - c$) $\Rightarrow \widehat{ACO} = 90^\circ$
 Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

- b) $\triangle BCD$ có CO là đường trung tuyến, mà $CO = \frac{1}{2}BD$

Nên $\triangle BCD$ vuông tại C . Chứng minh $\triangle BKC \sim \triangle BCD$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BK \cdot BD = BC^2$.

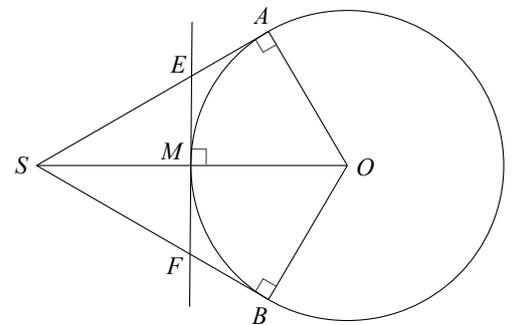


Hình 6

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

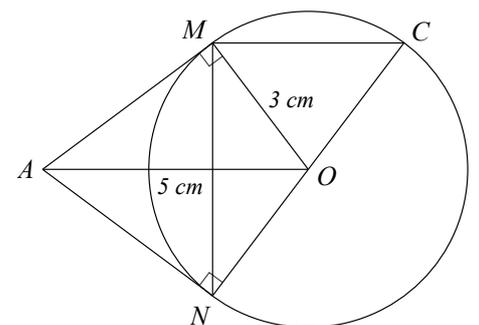
Bài 1: Cho SA, SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AB . Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F .

- a) Chứng minh rằng chu vi của $\triangle SEF$ bằng $SA + SB$
- b) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) .
 Chứng minh $SE = SF$.



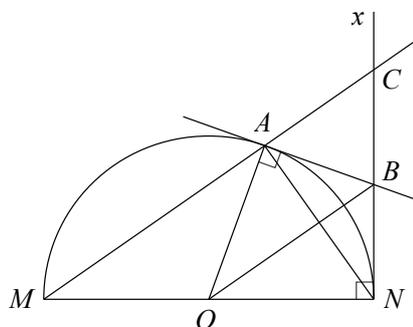
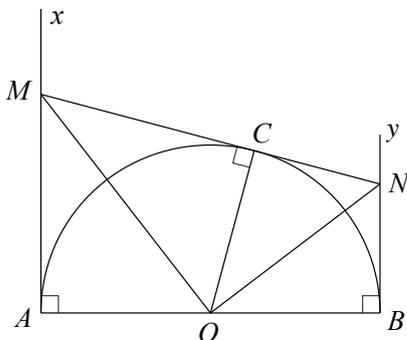
Bài 2: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm)

- a) Chứng minh rằng $OA \perp MN$
- b) Vẽ đường kính NOC . Chứng minh rằng $MC \parallel AO$.
- c) Giả sử $OM = 3 \text{ cm}$, $OA = 5 \text{ cm}$. Tính các cạnh của $\triangle AMN$.



Bài 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Về cùng phía với nửa đường tròn, vẽ hai tia Ax, By vuông góc với AB . Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Ax . Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By tại N .

- Tính \widehat{MON} .
- Chứng minh rằng $MN = AM + BN$
- Chứng minh rằng $AM \cdot BN = R^2$

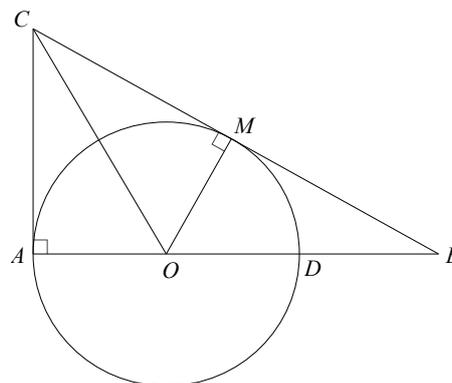
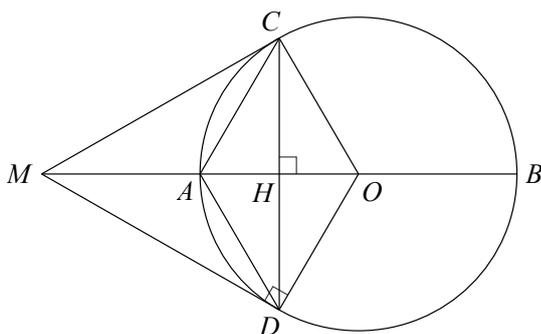


Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN , tiếp tuyến Nx . Qua A trên nửa đường tròn (A không trùng với M, N) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Nx ở B . Tia MA cắt Nx ở C .

- Chứng minh bốn điểm O, A, B, N cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OB \perp AN$
- Chứng minh B là trung điểm của NC .

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi H là trung điểm của OA . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại C và D .

- Tứ giác $ACOD$ là hình gì?
- Qua D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt OA tại M . Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O) và $\triangle MCD$ đều.

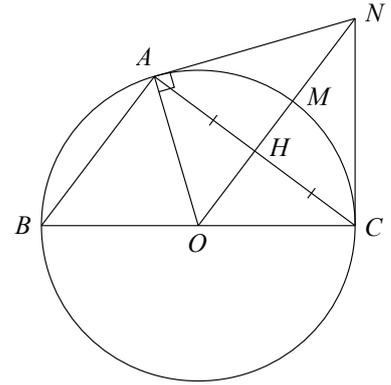
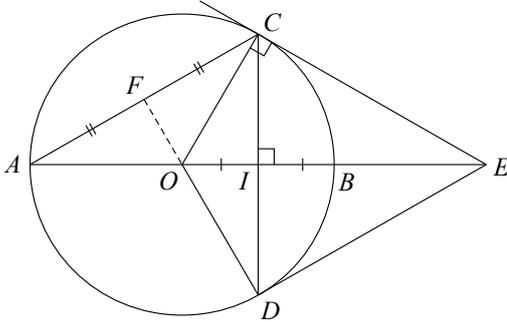


Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AD . Vẽ tiếp tuyến tại A của đường tròn, từ C trên tiếp tuyến đó vẽ tiếp tuyến thứ hai CM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm và M khác A) cắt AD tại B .

- Giả sử $AC = 6 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$. Tính BC và BM .
- Chứng minh rằng $BM \cdot AC = BA \cdot MO$.

Bài 7: Cho $(O; R)$ đường kính BC , lấy điểm $A \in (O)$. Gọi H là trung điểm của AC . Tia OH cắt (O) tại M . Từ A vẽ tiếp tuyến với (O) cắt tia OM tại N .

- Chứng minh rằng $OM \parallel AB$
- Chứng minh rằng CN là tiếp tuyến của (O) .

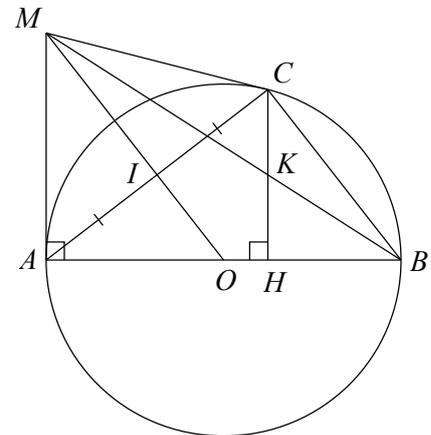
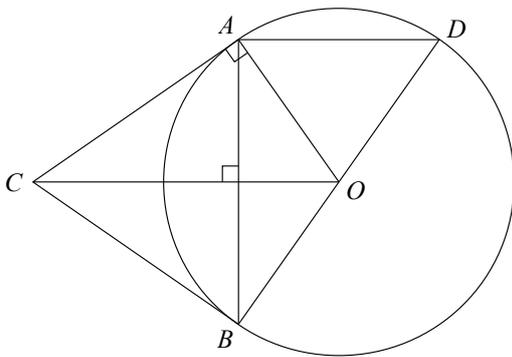


Bài 8: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi I là trung điểm của OB . Qua I kẻ dây CD vuông góc với OB . Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại E .

- Chứng minh $OI \cdot OE = R^2$
- Chứng minh ED là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Gọi F là trung điểm của dây AC . Chứng minh D, O, F thẳng hàng.

Bài 9: Cho đường tròn (O) và dây AB . Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tại C .

- Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.
- Vẽ đường kính BOD . Chứng minh $AD \parallel OC$
- Cho biết bán kính của đường tròn là 15 cm , $AB = 24 \text{ cm}$. Tính OC

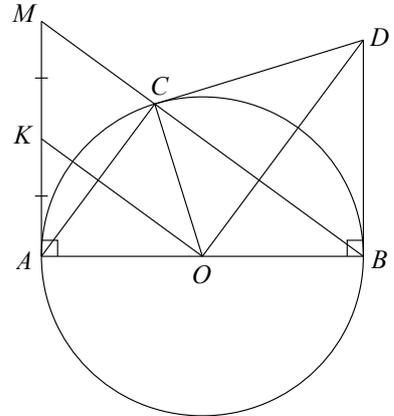
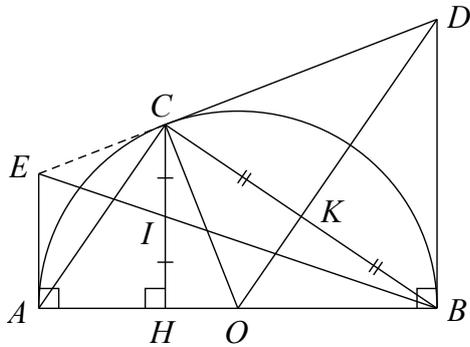


Bài 10: Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là một điểm trên đường tròn (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$. Gọi I là trung điểm của AC , OI cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại M , MB cắt CH tại K .

- Chứng minh $OI \perp AC$ và $\triangle ABC$ vuông tại C .
- Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Chứng minh K là trung điểm của CH .

Bài 11: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C nằm trên đường tròn (O) . Gọi K là trung điểm của dây cung BC . Qua B dựng tiếp tuyến với (O) cắt OK tại D .

- Chứng minh rằng $DO \perp BC$ và $\triangle ABC$ vuông
- Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Vẽ $CH \perp AB$ tại H . Gọi I là trung điểm của CH . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E . Chứng minh E, C, D thẳng hàng.

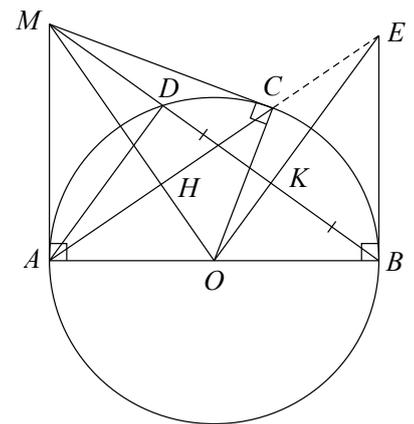
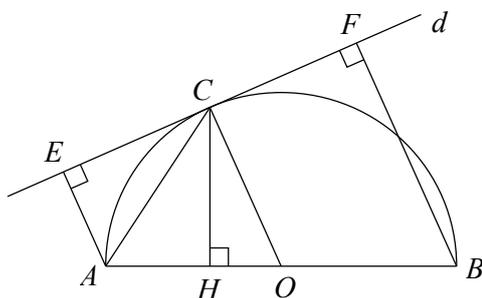


Bài 12: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C thuộc đường tròn (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại M .

- Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông và $AB^2 = BC \cdot BM$
- Gọi K là trung điểm của MA . Chứng minh rằng KC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D . Chứng minh rằng $\triangle AKOD$ vuông.

Bài 13: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Qua A vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) . Trên Ax lấy điểm M (M khác A), từ M vẽ tiếp tuyến MC của đường tròn (C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AC . Đường thẳng MB cắt đường tròn (O) tại D (D nằm giữa M và B)

- Chứng minh $OM \perp AC$ tại H .
- Chứng minh rằng $MD \cdot MB = MH \cdot MO$ và $\widehat{MHD} = \widehat{MBA}$
- Gọi K là trung điểm của BD . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OK tại E . Chứng minh A, E, C thẳng hàng.

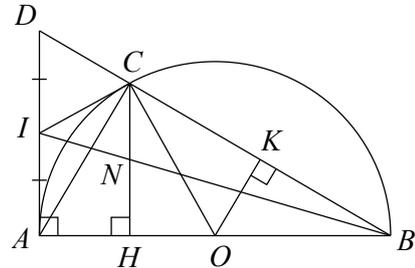
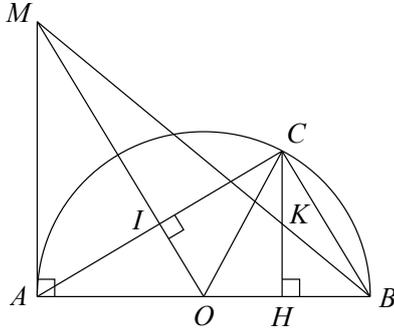


Bài 14: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Qua điểm C thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc từ A và B tới d . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB .

- Chứng minh rằng $CE = CF$.
- Chứng minh AC là tia phân giác \widehat{BAE} .
- Chứng minh rằng $CH^2 = AE \cdot BF$

Bài 15: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , C là điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$ và $OI \perp AC$.

- Chứng minh C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn. Tia OI cắt Ax tại M . Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$
- Gọi giao điểm của BM với CH là K . Chứng minh $\triangle AMO \sim \triangle HCB$ và $CK = KH$

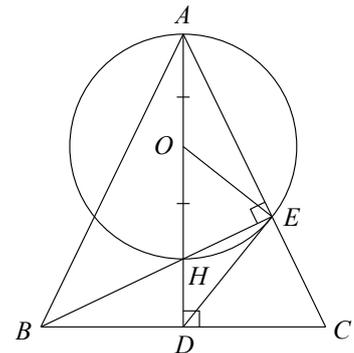
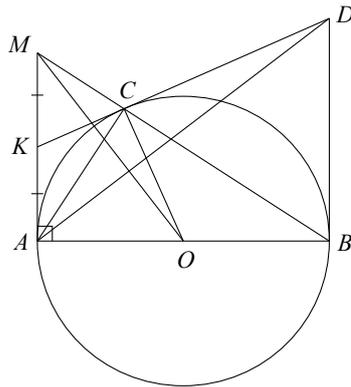


Bài 16: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C (C khác A và B). Kẻ $OK \perp BC$ tại K . Gọi D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn (O) và I là trung điểm của AD .

- Chứng minh $OK \parallel AC$ và $BC \cdot BD = 4R^2$
- Chứng minh IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)
- Từ C kẻ $CH \perp AB$, BI cắt CH tại N . Chứng minh rằng N là trung điểm của CH .

Bài 17: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Lấy C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M .

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông và $BC \cdot BM = 4R^2$
- Gọi K là trung điểm của MA . Chứng minh KC là tiếp tuyến của (O) .
- Tia KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D . Chứng minh $MO \perp AD$.

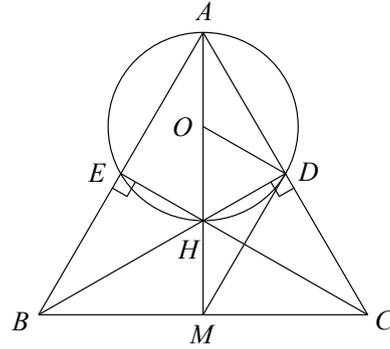
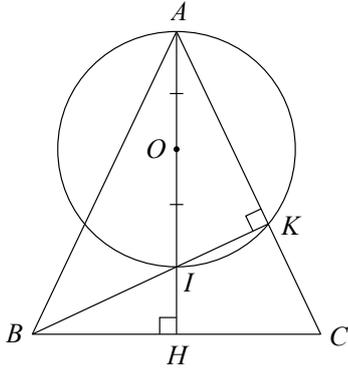


Bài 18: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , các đường cao AD và BE cắt nhau tại H . Vẽ đường tròn (O) đường kính AH .

- Chứng minh E là điểm nằm trên đường tròn (O) .
- Chứng minh DE là tiếp tuyến của (O)

Bài 19: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH và BK cắt nhau tại I .

- Chứng minh đường tròn đường kính AI đi qua K .
- Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

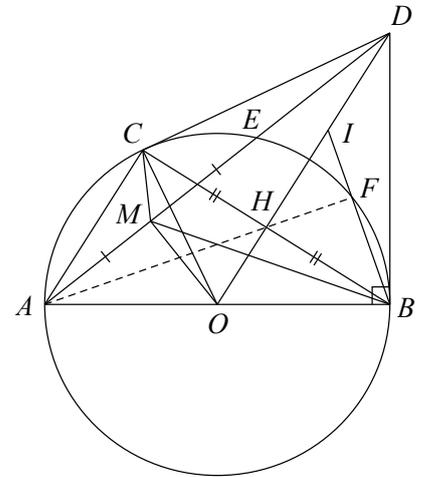
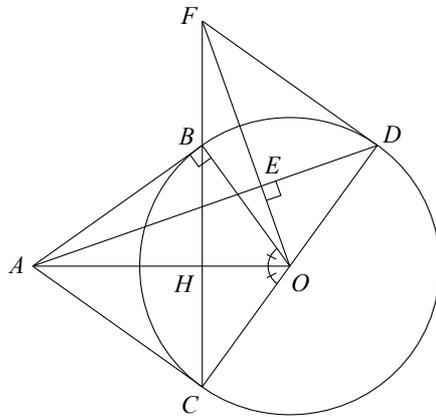


Bài 20: Cho $\triangle ABC$ đều, đường cao BD và CE cắt nhau tại H , AH cắt BC tại M .

- Chứng minh 4 điểm A, D, H, E cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E

Bài 21: Cho B, C là hai điểm trên đường tròn $(O; R)$. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường phân giác \widehat{BOC} tại A . H là giao điểm của OA và BC .

- Chứng minh $\triangle BOH$ vuông và $OB^2 = OH \cdot OA$
- Chứng minh AC là tiếp tuyến của $(O; R)$
- CD là đường kính của $(O; R)$. Qua O dựng đường thẳng vuông góc với AD tại E và cắt CB tại F . Chứng minh $\widehat{ODF} = 90^\circ$.

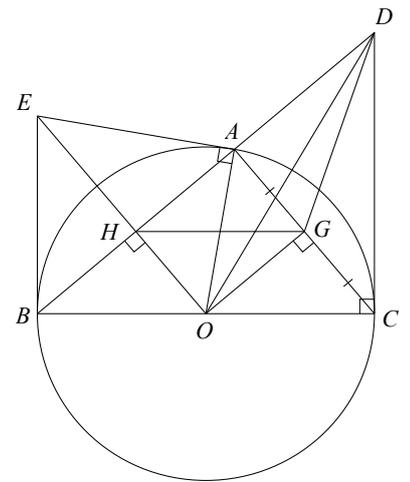
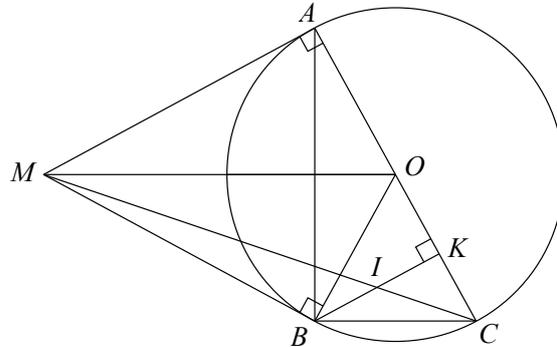


Bài 22: Cho điểm C thuộc đường tròn (O) đường kính AB sao cho $AC < BC$. Gọi H là trung điểm của BC . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OH tại D .

- Chứng minh $DH \cdot DO = DB^2$
- Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Đường thẳng AD cắt (O) tại E . Gọi M là trung điểm của AE . Chứng minh D, B, M, C cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi I là trung điểm của DH , BI cắt (O) tại F . Chứng minh A, H, F thẳng hàng.

Bài 23: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có BC là đường kính. Gọi H và G lần lượt là hình chiếu của điểm O trên AB và AC . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OH tại E .

- 1) Chứng minh $OH \parallel AC$ và EB là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- 2) Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AB tại D . Chứng minh:
 - a) $CD \cdot BC = 2 BD \cdot GC$
 - b) $\widehat{BOD} = \widehat{CGD}$

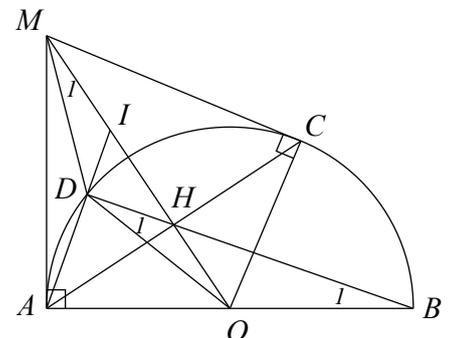


Bài 24: Cho $(O; R)$. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO và dây AB .

- a) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Kẻ đường kính AC của (O) , vẽ BK vuông góc với AC ($K \in AC$). Chứng minh $MB \cdot BC = BK \cdot MO$
- c) MC cắt BK tại I . Chứng minh I là trung điểm của BK .

Bài 25: Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C bất kì (C khác A và B). Tiếp tuyến tại C và tiếp tuyến tại A cắt nhau tại M

- a) Chứng minh bốn điểm O, A, M, C cùng thuộc một đường tròn.
- b) AC cắt OM tại H . Chứng minh AC vuông góc với OM và $OH \cdot OM = R^2$
- c) Tia BH cắt nửa đường tròn tại D . Chứng minh $\triangle ODM \sim \triangle OHD$
- d) Tia AD cắt MH tại I . Chứng minh I là trung điểm của MH



Bài 17. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

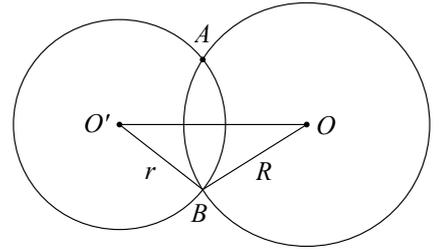
A. LÝ THUYẾT.

1) Hai đường tròn cắt nhau.

- ♣ Hai đường tròn có đúng hai điểm chung thì ta nói đó là Hai đường tròn cắt nhau. Hai điểm chung gọi là hai giao điểm của chúng

Hình 1: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau khi

$$R - r < OO' < R + r.$$



Hình 1

2) Hai đường tròn tiếp xúc nhau.

- ♣ Hai đường tròn có duy nhất một điểm chung thì ta nói Hai đường tròn đó tiếp xúc nhau, điểm chung gọi là tiếp điểm của chúng.

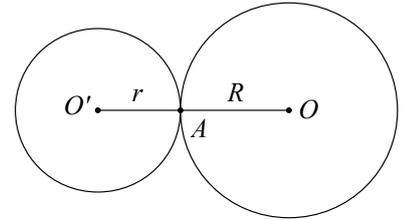
Hình 2: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A .

$$OO' = R + r$$

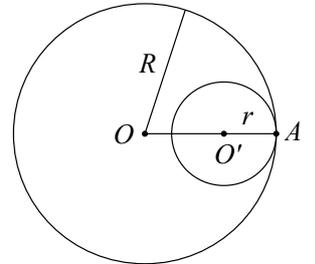
Hình 3: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc trong tại A .

$$OO' = R - r.$$

Hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.



Hình 2



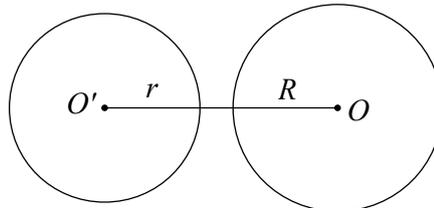
Hình 3

3) Hai đường tròn không giao nhau.

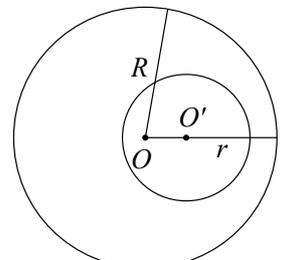
- ♣ Hai đường tròn không có điểm chung nào thì ta nói đó là hai đường tròn không giao nhau.

Hình 4: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ ngoài nhau: $OO' > R + r$

Hình 5: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ đựng nhau: $OO' < R - r$



Hình 4



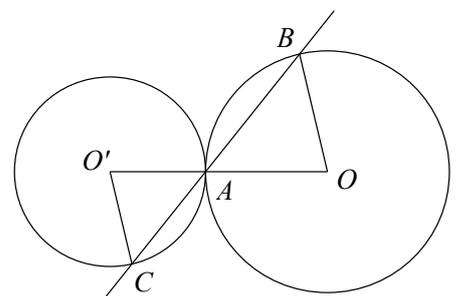
Hình 5

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho đoạn thẳng $OO' = 3 \text{ cm}$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và $(O'; 2 \text{ cm})$.

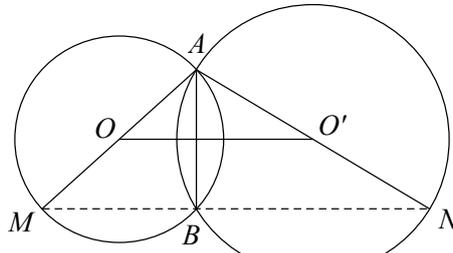
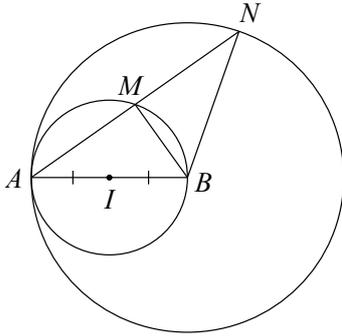
Bài 2: Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5 \text{ cm}$. Giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ và $(O'; 2 \text{ cm})$ tiếp xúc với nhau. Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C . Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.



Bài 4: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Vẽ hai đường tròn $(I; IA)$ và đường tròn $(B; BA)$

- Hai đường tròn (I) và (B) có vị trí như thế nào?
- Kẻ đường thẳng đi qua A , cắt (I) và (B) lần lượt tại M và N . So sánh AM và MN .

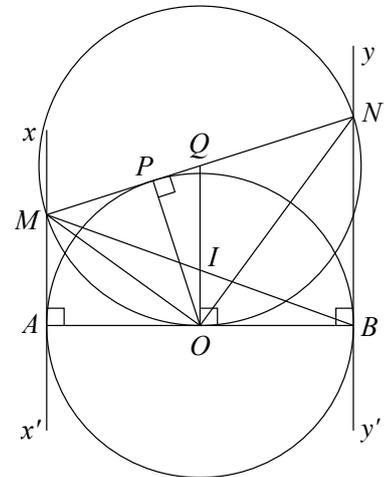
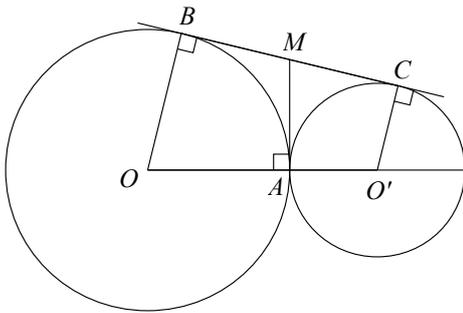


Bài 5: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau tại A và B . Gọi M là điểm đối xứng với A qua O , N là điểm đối xứng với A qua O' .

- Chứng minh rằng $M \in (O)$ và $N \in (O')$ và ba điểm M, B, N thẳng hàng.
- Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB , tiếp tuyến xx' tại A và tiếp tuyến yy' tại B của (O) . Một tiếp tuyến thứ ba của (O) tại điểm P (P khác A và B) cắt xx' tại M và cắt yy' tại N .

- Chứng minh rằng $MN = MA + NB$
- Đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cắt MN tại Q . Chứng minh rằng Q là trung điểm của MN .
- Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .

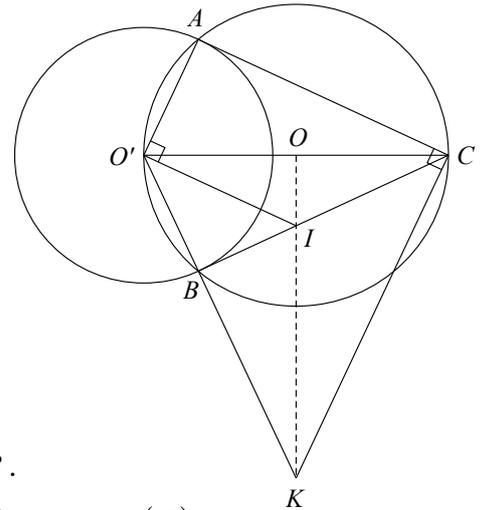
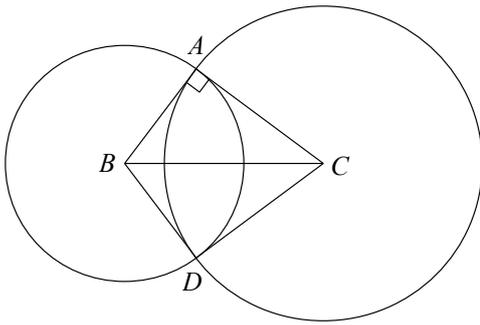


Bài 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d tại B và C ($khác A$), trong đó $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại M .

Chứng minh rằng:

- Đường thẳng MA tiếp xúc với (O')
- Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC từ đó suy ra $\triangle ABC$ vuông.

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , vẽ đường tròn $(B; BA)$ và đường tròn $(C; CA)$ chúng cắt nhau tại D (D khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (B) .



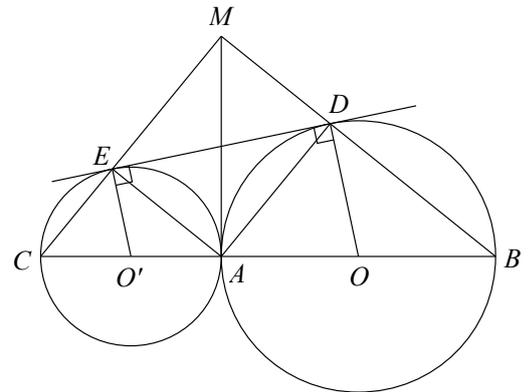
Bài 9: Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại A và B .

Trong đó O' nằm trên đường tròn (O) . Kẻ đường kính $O'OC$ của đường tròn (O) .

- Chứng minh rằng CA, CB là hai tiếp tuyến của (O')
- Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I , đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ tại K . Chứng minh rằng O, I, K thẳng hàng.

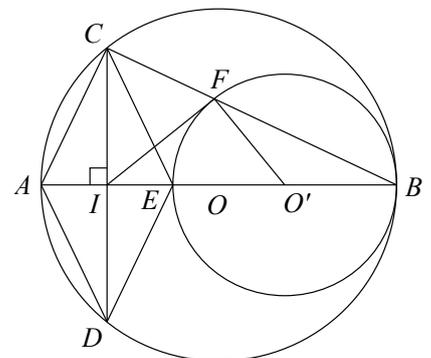
Bài 10: Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB và $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE .

- Tính \widehat{DAE} .
- Tứ giác $ADME$ là hình gì?
- Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.



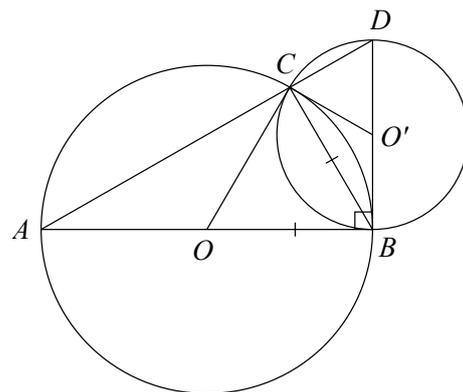
Bài 11: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên OA lấy điểm E . Gọi I là trung điểm của AE , qua điểm I vẽ dây cung $CD \perp AB$, vẽ đường tròn (O') đường kính EB cắt BC tại F .

- Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc tại B .
- Tứ giác $ACED$ là hình gì?
- Chứng minh IF là tiếp tuyến của (O')



Bài 12: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên đường tròn này lấy điểm C sao cho $BC = R$. Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AC tại D .

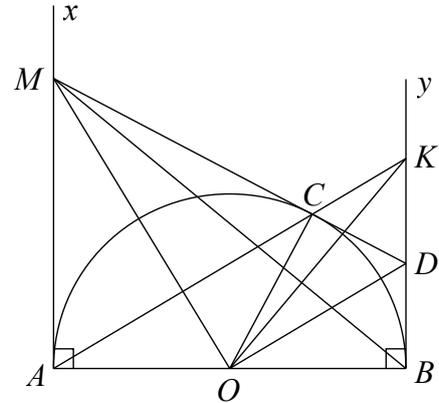
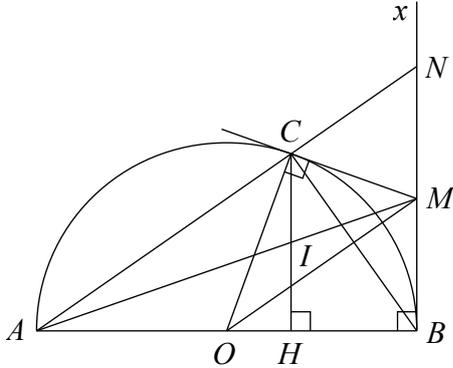
- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại C .
- Tính AC, BD theo R .
- Vẽ đường tròn (O') đường kính BD . Chứng minh $O'C$ là tiếp tuyến của (O) và AB là tiếp tuyến của (O') .



Ôn tập chương 5.

Bài 1: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , tiếp tuyến Bx . Qua điểm C trên nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Bx tại M . Tia AC cắt Bx tại N .

- Chứng minh rằng $OM \perp BC$.
- Chứng minh M là trung điểm của BN .
- Kẻ CH vuông góc với AB , AM cắt CH tại I . Chứng minh I là trung điểm của CH .

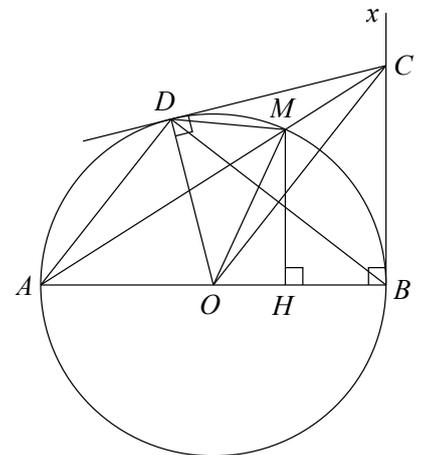


Bài 2: Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn đó. Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ điểm M kẻ tiếp tuyến MC với (O) (C là tiếp điểm). Tia MC cắt By tại D .

- Chứng minh $MD = MA + BD$ và $\triangle OMD$ vuông.
- Cho $AM = 2R$. Tính BD và chu vi tứ giác $ABDM$.
- Tia AC cắt tia By tại K . Chứng minh $OK \perp BM$.

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến Bx của (O) . Lấy điểm $M \in (O)$ (M khác A và B) sao cho AM cắt tiếp tuyến Bx tại C và $MA > MB$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD với (O) (D là tiếp điểm).

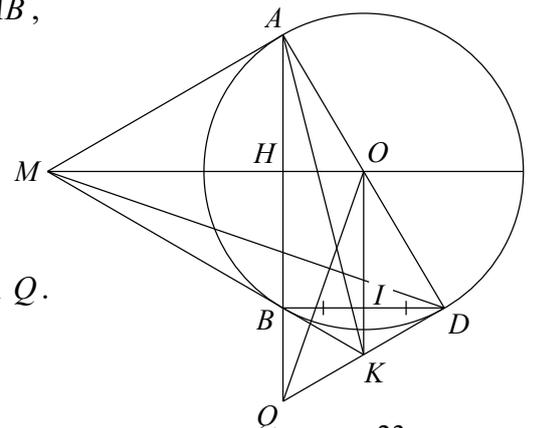
- Chứng minh $OC \perp BD$
- Chứng minh O, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ MH vuông góc với AB tại H . Tìm vị trí của M để chu vi $\triangle OMH$ đạt giá trị lớn nhất.



Bài 4: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Gọi MA, MB là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm).

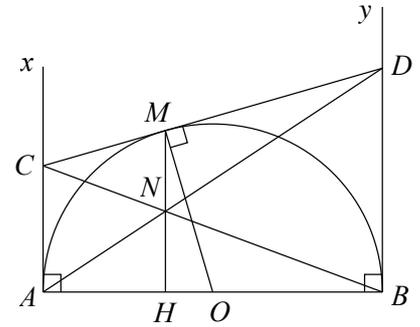
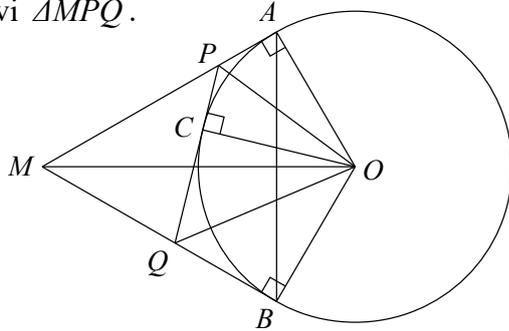
Kẻ đường kính AD của (O) . Gọi H là giao điểm của OM và AB , I là trung điểm của BD .

- Chứng minh $OHBI$ là hình chữ nhật.
- Cho biết OI cắt MB tại K . Chứng minh KD là tiếp tuyến (O) .
- Giả sử $OM = 2R$. Tính chu vi $\triangle AKD$ theo R .
- Đường thẳng qua O và vuông góc với MD cắt tia AB tại Q . Chứng minh K là trung điểm của DQ .



Bài 5: Cho đường tròn $(O; 3\text{ cm})$ và điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMB} = 60^\circ$.

- $\triangle AMB$ là tam giác gì?
- Qua điểm C trên cung nhỏ AB , kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB lần lượt tại P và Q .
Tính \widehat{POQ} .
- Tính chu vi $\triangle MPQ$.

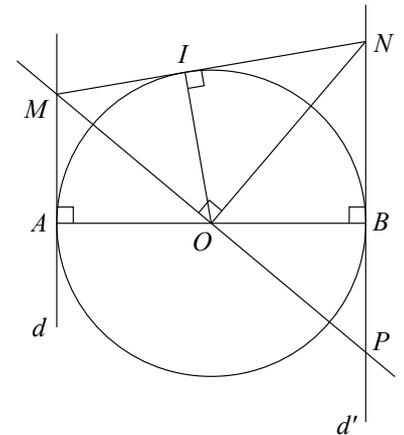


Bài 6: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , vẽ cùng một phía vẽ các tiếp tuyến Ax, By . Qua điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D . Gọi N là giao điểm của AD và BC , H là giao điểm của MN và AB .

- Chứng minh $MN \perp AB$.
- Chứng minh $MN = NH$.

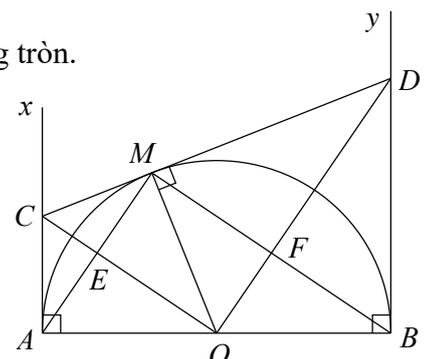
Bài 7: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến (d) và (d') với đường tròn (O) . Một đường thẳng đi qua O cắt (d) ở M và cắt (d') ở P . Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với MP và cắt (d') tại N . Kẻ $OI \perp MN$ tại I .

- Chứng minh $OM = OP$ và $\triangle NMP$ cân.
- Chứng minh $OI = R$ và MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Tính \widehat{AIB} .
- Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $AMNB$ nhỏ nhất.



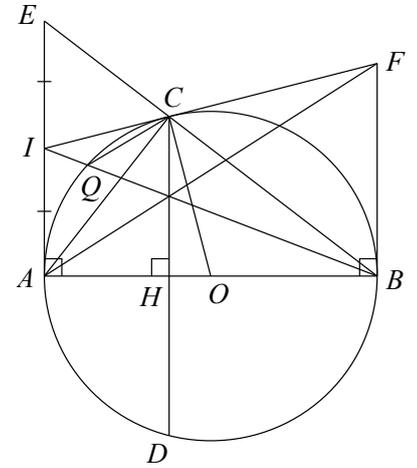
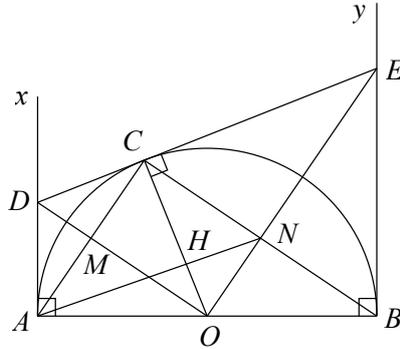
Bài 8: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là AB chứa nửa đường tròn, vẽ hai tiếp tuyến Ax và By . Từ điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) vẽ tiếp tuyến tại M cắt Ax và By lần lượt tại C và D . Gọi E là giao điểm của CO và AM , F là giao điểm của DO và BM .

- Chứng minh A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $AC + BD = CD$ và tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh $AC \cdot BD$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.



Bài 9: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Lấy điểm C tùy ý trên nửa đường tròn. Về cùng một phía với AB vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với đường tròn. Vẽ tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt Ax và By lần lượt tại D và E .

- Chứng minh $AD + BE = DE$
- AC cắt DO tại M , BC cắt OE tại N . Tứ giác $CMON$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh $MO \cdot DM + ON \cdot NE$ không đổi.
- AN cắt OC tại H . Khi C di chuyển trên nửa đường tròn $(O; R)$ thì H di chuyển trên đường nào? Vì sao?

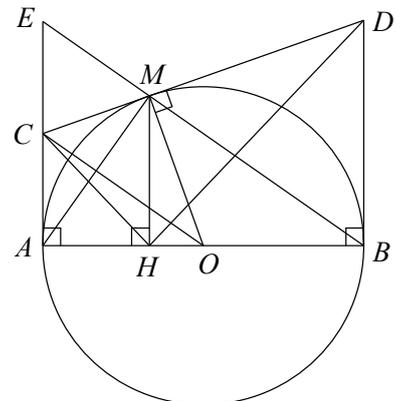
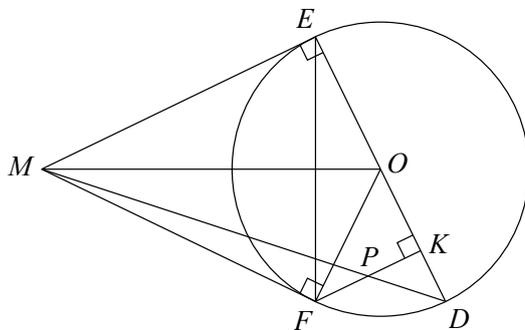


Bài 10: Cho đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ đường kính AB . Lấy điểm H thuộc OA sao cho $OH = 1\text{ cm}$. Kẻ dây cung DC vuông góc với AB tại H .

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại A và tính AC .
- Tiếp tuyến tại A của đường (O) cắt BC tại E . Chứng minh $\triangle CBD$ cân và $\frac{EC}{DH} = \frac{EA}{DB}$
- Gọi I là trung điểm của EA , IB cắt (O) tại Q . Chứng minh CI là tiếp tuyến của (O)
- Tiếp tuyến tại B của (O) cắt IC tại F . Chứng minh ba đường thẳng IB , HC và AF đồng quy.

Bài 11: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M ($MA < MB$). Tiếp tuyến tại M cắt hai tiếp tuyến tại A và B lần lượt là C và D .

- Chứng minh $CD = AC + BD$
- Vẽ đường thẳng BM cắt tia AC tại E và vẽ $MH \perp AB$. Chứng minh $OC \parallel MB$ và $ME \cdot MB = AH \cdot AB$.
- Chứng minh HM là tia phân giác của \widehat{CHD} .



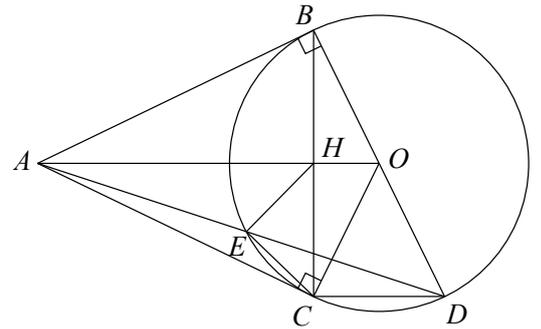
Bài 12: Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến ME và MF đến đường tròn (E, F là các tiếp điểm).

- Chứng minh M, E, O, F cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ đường kính ED của $(O; R)$. Hạ $FK \perp ED$. Gọi P là giao điểm của MD và FK . Chứng minh P là trung điểm của FK .

Bài 13: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

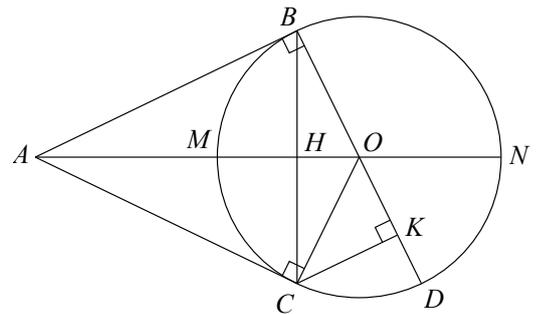
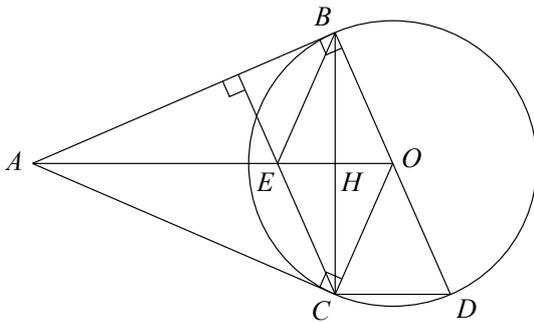
- Chứng minh A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh OA là đường trung trực của BC .
- Lấy D đối xứng với B qua O . Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) (E không trùng với D).

Chứng minh $DE \cdot BA = BD \cdot BE$



Bài 14: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm)

- Chứng minh A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn và $BC \perp OA$ tại H .
- Kẻ đường kính BD của (O) . Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB , cắt OA tại E . Chứng minh $CD \parallel OA$ và tứ giác $OBEC$ là hình thoi.

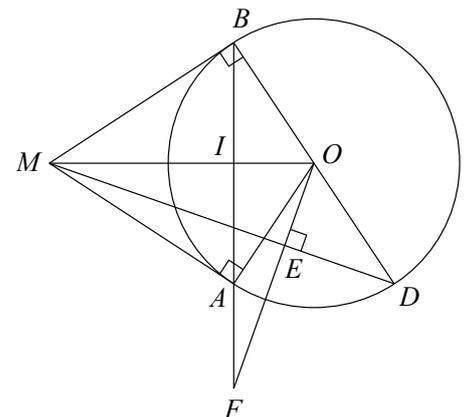


Bài 15: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) .

- Chứng minh $OA \perp BC$ tại H và bốn điểm A, B, C, O cùng nằm trên một đường tròn.
- Vẽ đường kính BD của (O) và $CK \perp BD$ tại K . Chứng minh $AC \cdot CD = CK \cdot AO$

Bài 16: Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OM và AB . Kẻ đường kính BC của đường tròn (O) .

- Chứng minh A, B, O, M cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OI \cdot OM = OA^2$

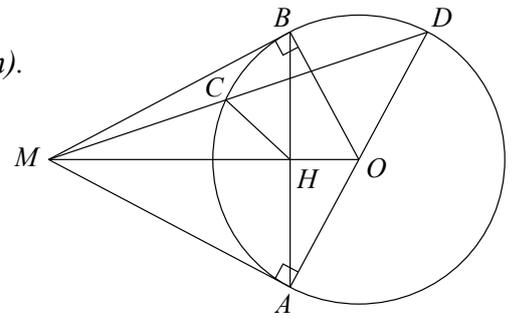


Bài 17: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

Gọi H là giao điểm của MO với AB .

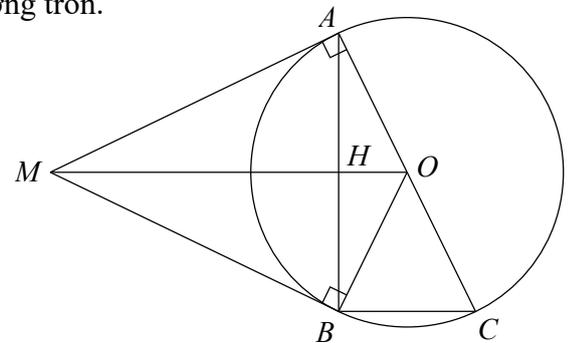
- Chứng minh M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $MO \perp AB$ tại H .
- Nếu $OM = 2R$. Tính MA theo R và số đo \widehat{AMB} .
- Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) , MD cắt (O) tại điểm thứ hai là C .

Chứng minh rằng $\widehat{MHC} = \widehat{ADC}$.



Bài 18: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ sao cho $OM = 2R$. Từ điểm M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) . Gọi H là giao điểm của AB và OM .

- Chứng minh 4 điểm A, O, B, M cùng thuộc một đường tròn.
- Tính tỉ số $\frac{OH}{OM}$.



Chương 1. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn
Bài 1: Khái niệm phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

a) Với $x = 1$ thay vào phương trình ta được $y = 2.1 - 3 = -1$

Tương tự, ta có hoành thành được bảng sau

x	1	2	3	4	0
$y = 2x - 3$	-1	1	3	5	-3

b) Từ phương trình $2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $(x; 2x - 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Bài 2:

a) Cặp số $(-4; 6)$, $(-6; 0)$, $\left(\frac{-17}{3}; 1\right)$ là nghiệm của phương trình $-x + \frac{1}{3}y = 6$

b) Từ phương trình $-x + \frac{1}{3}y = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{3}y - 6$.

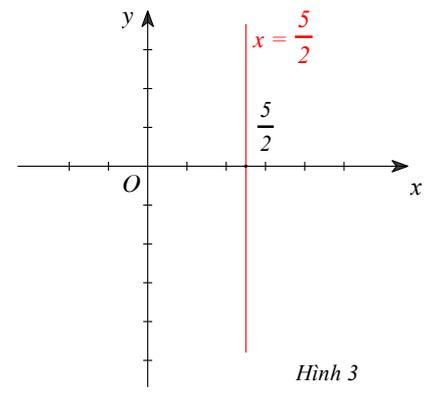
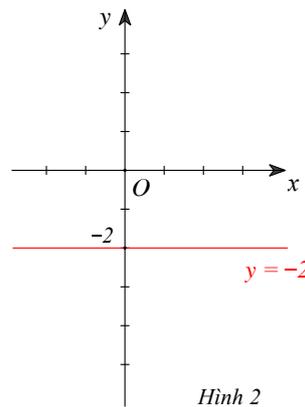
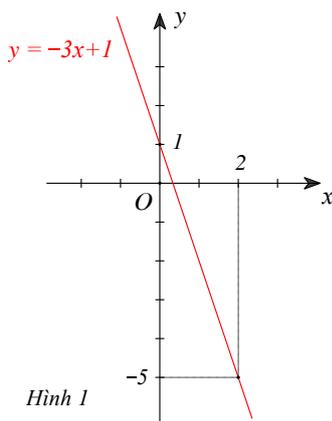
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $\left(\frac{1}{3}y - 6; y\right)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$

Bài 3:

a) Từ phương trình $3x + y = 1 \Rightarrow y = -3x + 1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $(x; -3x + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. (Hình 1)

b) Từ phương trình $0.x + y = -2 \Rightarrow y = -2$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $(x; -2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. (Hình 2)

c) Từ phương trình $2x - 0.y = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $\left(\frac{5}{2}; y\right)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. (Hình 3)



Bài 4:

a) Thay cặp số $(5; 1)$ vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta được $3.5 + 1 = 3$ (vô lý)

Vậy cặp số $(5; 1)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

b) Thay cặp số $(1; -5)$ vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta được $3.1 + (-5) = 3$ (vô lý)

Vậy cặp số $(1; -5)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

c) Thay cặp số $(2; -3)$ vào hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} 3 \cdot 2 + (-3) = 3 \\ 2 \cdot 2 - (-3) = 7 \end{cases}$ (luôn đúng)

Vậy cặp số $(2; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài 5:

Thay $y = 3$ ở phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta được $2x + 3 = 1 \Rightarrow x = -1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 3)$

Bài 6:

Thay $x = -2$ ở phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta được $-(-2) + 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(-2; \frac{-1}{3}\right)$

Bài 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

$$1) \begin{cases} x - y = 3 & (1) \\ 3x - 4y = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $x = y + 3$, thế vào phương trình (2) ta được $3(y + 3) - 4y = 2 \Rightarrow y = 7$.

Từ đó $x = 7 + 3 = 10$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(7; 10)$

$$2) \begin{cases} 3x - y = 6 & (1) \\ 2x + 3y = 4 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $y = 3x - 6$, thế vào phương trình (2) ta được $2x + 3(3x - 6) = 4 \Rightarrow x = 2$

Từ đó $y = 3 \cdot 2 - 6 = 0$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(2; 0)$

$$3) \begin{cases} 2x - y = 5 & (1) \\ 3x + y = 10 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $y = 2x - 5$, thế vào phương trình (2) ta được $3x + 2x - 5 = 10 \Rightarrow x = 3$.

Từ đó $y = 2 \cdot 3 - 5 = 1$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(3; 1)$

4) $(-13; -5)$	5) $(5; 1)$	6) $(1; -2)$
7) $\left(\frac{-10}{7}; \frac{19}{7}\right)$	8) $\left(\frac{25}{19}; \frac{-21}{19}\right)$	9) $\left(\frac{19}{13}; \frac{14}{13}\right)$
10) $(2; 3)$	11) $(-1; 2)$	12) $(x; 4x - 2), \forall x \in \mathbb{R}$
13) $(1; -1)$	14) $(2; -1)$	15) $(1; 1)$
16) $(2; -3)$	17) $(2; -3)$	18) $(3; -2)$
19) $\left(1; \frac{2}{3}\right)$	20) $(3; 2)$	21) $(0; 0)$
22) $(2; 1)$	23) $(1; 2)$	24) $(8; 3)$
25) $(3; 1)$	26) $(3; 2)$	27) $(-3; 1)$
28) $(1; 1)$	29) $(1; -1)$	30) $(3; 4)$

Bài 2:

$$1) \begin{cases} 2x + 2y = 3 & (1) \\ 3x - 2y = 2 & (2) \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được $5x = 5 \Rightarrow x = 1$.

Thế $x = 1$ vào phương trình (1) ta được $2 \cdot 1 + 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

$$2) \begin{cases} 4x - 3y - 15 = 0 \\ 4x + y = 19 \end{cases} \text{ . Biến đổi hệ phương trình thành } \begin{cases} 4x - 3y = 15 & (1) \\ 4x + y = 19 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được $-4y = -4 \Rightarrow y = 1$

Thế $y = 1$ vào phương trình (2) ta được $4x + 1 = 19 \Rightarrow x = 5$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(5; 1)$

$$3) \begin{cases} 2x + 2y = 3 & (1) \\ 3x - 2y = 2 & (2) \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được $5x = 5 \Rightarrow x = 1$

Thế $x = 1$ vào phương trình (1) ta được $2.1 + 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

4) $(3; -2)$	5) $(3; -3)$	6) $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$
7) $(2; -3)$	8) $(-1; 0)$	9) $\left(3; \frac{3}{2}\right)$
10) $(2; 1)$	11) $(2; 3)$	12) $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$
13) $(-1; 2)$	14) $(2; 1)$	15) $\left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$
16) $(2; -1)$	17) $(2; 3)$	18) $(4; 5)$
19) $(1; -3)$	20) $(0; 2)$	

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 0,5x - 0,5y = 0,5 \\ 1,2x - 1,2y = 1,2 \end{cases} \text{ . Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} 5x - 5y = 5 & (1) \\ 12x - 12y = 12 & (2) \end{cases}$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho 5 và chia hai vế của phương trình (2) cho 12 ta được hệ

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ . Trừ theo vế hai phương trình của hệ mới ta được } 0 = 0 \text{ (thỏa mãn với mọi giá trị } x, y)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; x - 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -0,8x + 1,2y = 1 \end{cases} \text{ . Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} 8x - 12y = 44 & (1) \\ 8x + 12y = 10 & (2) \end{cases}$$

Cộng từng vế của hai phương trình, ta được $16x = 54 \Rightarrow x = 4$

Thế $x = 4$ vào phương trình (2) ta được $8.4 + 12y = 10 \Rightarrow y = \frac{-11}{6}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(4; \frac{-11}{6}\right)$

$$3) \begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 0,4x + 0,2y = 0,8 \end{cases} \text{ . Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} 4x - 3y = 6 & (1) \\ 4x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của hai phương trình, ta được $-5y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{5}$

Thế $y = \frac{2}{5}$ vào phương trình (1) ta được $4x - 3 \cdot \frac{2}{5} = 6 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$

4) $\begin{cases} 3x = -2(y-5) \\ 5x + 3y = -5 \end{cases}$. Biến đổi hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 3x + 2y = 10 & (1) \\ 5x + 3y = -5 & (2) \end{cases}$

Nhân phương trình (1) với 3 và phương trình (2) với 2 ta được hệ $\begin{cases} 9x + 6y = 30 \\ 10x + 6y = -10 \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình, ta được $-x = 40 \Rightarrow x = -40$

Thế $x = -40$ vào phương trình (1) ta được $3 \cdot (-40) + 2y = 10 \Rightarrow y = 65$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(-40; 65)$

5) $\begin{cases} 5(x+2) = 2(y+7) \\ 3(x+y) = 17-x \end{cases}$. Biến đổi hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(2; 3)$

6) $\begin{cases} 3(x+1) - y = 6 - 2y \\ 2x - y = 7 \end{cases}$. Biến đổi hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(2; -3)$

7) $\begin{cases} 2(x+y) = 3x - y + 7 \\ 3(x-2y) = x + y + 8 \end{cases}$. Biến đổi hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2x - 7y = 8 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(-73; -22)$

8) $\begin{cases} -x + 2y = -4(x-1) \\ 5x + 3y = -(x+y) + 8 \end{cases}$. Biến đổi hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\left(x; \frac{-3x+4}{2}\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

9) $\begin{cases} 6(x+y) = 8 + 2x - 3y \\ 5(y-x) = 5 + 3x + 2y \end{cases}$. Biến đổi hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 4x + 9y = 8 \\ -8x + 3y = 5 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\left(\frac{-1}{4}; 1\right)$

10) $\begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 4 \\ (x+y) + 2(x-y) = 5 \end{cases}$. Biến đổi hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\left(\frac{-1}{2}; \frac{-13}{2}\right)$

11) $\begin{cases} 2(x+1) + 3(x+y) = 15 \\ 4(x-1) - (x+2y) = 0 \end{cases}$. Biến đổi hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 5x + 3y = 13 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(2; 1)$

$$12) \begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} .$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(1; -1)$

$$13) \begin{cases} 2(x-2) + 3(1+y) = -2 \\ 3(x-2) - 2(1+y) = -3 \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(1; -1)$

$$14) \begin{cases} 9(x-1) + (2y-3) = -2 \\ 3(x-1) - 2(2y-3) = -3 \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} 9x + 2y = 10 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$

$$15) \begin{cases} 5(x+4) + 3(y-2) = 7 \\ (x+4) - 3(y-2) = -1 \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} 5x + 3y = -7 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\left(\frac{-18}{5}; \frac{11}{3}\right)$

$$16) \begin{cases} (x+3)(y-1) = xy + 2 \\ (x-1)(y+3) = xy - 2 \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(1; 2)$

$$17) \begin{cases} (x-1)(y+1) = xy + 4 \\ (x+2)(y-1) = xy - 10 \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} x - y = 5 \\ -x + 2y = -8 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(2; -3)$

$$18) \begin{cases} (x+2)(y-5) = xy - 50 \\ (x+4)(y+4) = xy + 216 \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} -5x + 2y = -40 \\ 4x + 4y = 200 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(20; 30)$

$$19) \begin{cases} (x-3)(y+4) = xy - 4 \\ (x+1)(y+2) = xy + 6 \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} 4x - 3y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(2; 0)$

$$20) \begin{cases} (x+20)(y-1) = xy \\ (x-10)(y+1) = xy \end{cases} . \text{Biến đổi hệ phương trình thành hệ } \begin{cases} -x + 20y = 20 \\ x - 10y = 10 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(-40; -1)$

Bài 4: Giải các hệ phương trình sau (*phương pháp đặt ẩn phụ*)

$$1) \begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{1}{y+1} = 3 \\ \frac{4}{x-2} - \frac{3}{y+1} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 2; y \neq -1 . \text{Đặt } \frac{1}{x-2} = a \text{ và } \frac{1}{y+1} = b .$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 2a+b=3 \\ 4a-3b=1 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$.

Khi đó $\frac{1}{x-2}=1 \Rightarrow x=3$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+1}=1 \Rightarrow y=0$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(3; 0)$

$$2) \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 2; y \neq 1. \text{Đặt } \frac{1}{x-2} = a \text{ và } \frac{1}{y-1} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a-3b=1 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) ta được $a=\frac{7}{5}$ và $b=\frac{3}{5}$.

Khi đó $\frac{1}{x-2}=\frac{7}{5} \Rightarrow x=\frac{19}{7}$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y-1}=\frac{3}{5} \Rightarrow y=\frac{8}{3}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{19}{7}; \frac{8}{3}\right)$

$$3) \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y+3} = 7 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+3} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 1; y \neq -3. \text{Đặt } \frac{1}{x-1} = a \text{ và } \frac{1}{y+3} = b.$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a-2b=7 \\ 3a+4b=1 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{x-1}=3 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+3}=-2 \Rightarrow y=\frac{-7}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{4}{3}; \frac{-7}{2}\right)$

$$4) \begin{cases} \frac{1}{x-3} - \frac{4}{y+1} = 5 \\ \frac{3}{x-3} + \frac{4}{y+1} = -1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 3; y \neq -1. \text{Đặt } \frac{1}{x-3} = a \text{ và } \frac{1}{y+1} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a-4b=5 \\ 3a+4b=-1 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$.

Khi đó $\frac{1}{x-3}=1 \Rightarrow x=4$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+1}=-1 \Rightarrow y=-2$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(4; -2)$

$$5) \begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{1}{y+1} = 3 \\ \frac{3}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 8 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 2; y \neq -1. \text{Đặt } \frac{1}{x-2} = a \text{ và } \frac{1}{y+1} = b.$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 2a+b=3 \\ 3a-2b=8 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{x-2} = 2 \Rightarrow 2x - 4 = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+1} = -1 \Rightarrow y = -2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{5}{2}; -2\right)$

6)
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-2} = 8 \\ \frac{2}{x+1} - \frac{3}{y-2} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq -1; y \neq 2. \text{Đặt } \frac{1}{x+1} = a \text{ và } \frac{1}{y-2} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ
$$\begin{cases} a+b=8 \\ 2a-3b=1 \end{cases} (I). \text{Giải hệ (I) ta được } \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$$

Khi đó $\frac{1}{x+1} = 5 \Rightarrow x = \frac{-4}{5}$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y-2} = 3 \Rightarrow y = \frac{7}{3}$ (thỏa mãn).

7)
$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 2 \\ \frac{8}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 1; y \neq -2. \text{Đặt } \frac{1}{x-1} = a \text{ và } \frac{1}{y+2} = b.$$

Khi đó hệ phương trình thành
$$\begin{cases} 2a+b=2 \\ 8a-3b=1 \end{cases} (I). \text{Giải hệ phương trình (I) được } a = \frac{1}{2} \text{ và } b = 1$$

Khi đó $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+2} = 1 \Rightarrow y = -1$ (thỏa mãn)

8)
$$\begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 1; y \neq -2. \text{Đặt } \frac{1}{x-1} = a \text{ và } \frac{1}{y+2} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ
$$\begin{cases} 10a+b=1 \\ 25a+3b=2 \end{cases} (I). \text{Giải hệ (I) được } a = \frac{1}{5} \text{ và } b = -1$$

Khi đó $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+2} = -1 \Rightarrow y = -3$ (thỏa mãn)

9)
$$\begin{cases} \frac{1}{x-5} + \frac{3}{y-2} = 2 \\ \frac{3}{x-5} - \frac{5}{y-2} = \frac{-3}{2} \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 5; y \neq 2. \text{Đặt } \frac{1}{x-5} = a \text{ và } \frac{3}{y-2} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ
$$\begin{cases} a+3b=2 \\ 3a-5b=\frac{-3}{2} \end{cases} (I). \text{Giải hệ I được } a = \frac{11}{28} \text{ và } b = \frac{15}{28}$$

Khi đó $\frac{1}{x-5} = \frac{11}{28} \Rightarrow x = \frac{83}{11}$ (thỏa mãn) và $\frac{3}{y-2} = \frac{15}{28} \Rightarrow y = \frac{38}{5}$ (thỏa mãn)

$$10) \begin{cases} \frac{1}{x+2} - \frac{5}{y-2} = -11 \\ \frac{3}{x+2} + \frac{2}{y-2} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq -2; y \neq 2 . \text{Đặt } \frac{1}{x+2} = a \text{ và } \frac{1}{y-2} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a - 5b = -11 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} (I)$. Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{x+2} = -1 \Rightarrow x = -3$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y-2} = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn)

$$11) \begin{cases} \frac{1}{x-2} + 3(y+3) = 7 \\ \frac{-3}{x-2} + 2(y+3) = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 2 . \text{Đặt } \frac{1}{x-2} = a \text{ và } y+3 = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a + 3b = 7 \\ -3a + 2b = 1 \end{cases} (I)$. Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{x-2} = 1 \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn) và $y+3 = 2 \Rightarrow y = -1$

$$12) \begin{cases} \frac{1}{2x-y} + x + 3y = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{2x-y} - 5(x+3y) = -3 \end{cases} . \text{ĐK: } 2x \neq y . \text{Đặt } \frac{1}{2x-y} = a \text{ và } x+3y = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a + b = \frac{3}{2} \\ 4a - 5b = -3 \end{cases} (I)$. Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{2x-y} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-y = 2$ và $x+3y = 1$. Khi đó ta có hệ mới $\begin{cases} 2x-y = 2 \\ x+3y = 1 \end{cases} (II)$

Giải hệ (II) ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Bài 5: Giải các hệ phương trình sau (*phương pháp đặt ẩn phụ*)

$$1) \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 1 \\ \frac{10}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq \pm y . \text{Đặt } \frac{1}{x+y} = a \text{ và } \frac{1}{x-y} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 10a - 3b = 1 \end{cases} (I)$. Giải hệ (I) ta được $a = \frac{1}{4}$ và $b = \frac{1}{2}$

Khi đó $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \Rightarrow x+y = 4$ và $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-y = 2$.

Ta có hệ phương trình mới $\begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = 2 \end{cases} (II)$. Giải hệ (II) ta được $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$$2) \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq \pm y . \text{Đặt } \frac{1}{x+y} = a \text{ và } \frac{1}{x-y} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành $\begin{cases} 2a+b=3 \\ a-3b=1 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) ta được $a = \frac{3}{2}$ và $b = \frac{-1}{3}$

Khi đó $\frac{1}{x+y} = \frac{3}{2} \Rightarrow x+y = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x+3y = 2$ và $\frac{1}{x-y} = \frac{-1}{3} \Rightarrow x-y = -3$.

Ta có hệ phương trình mới $\begin{cases} 3x+3y=2 \\ x-y=-3 \end{cases}$ (II).

Giải hệ phương trình (II) ta được $x = \frac{-7}{6}$ và $y = \frac{11}{6}$ (thỏa mãn)

$$3) \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{-3}{8} \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq \pm y . \text{Đặt } \frac{1}{x+y} = a \text{ và } \frac{1}{x-y} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành $\begin{cases} a+b = \frac{5}{8} \\ a-b = \frac{-3}{8} \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) được $a = \frac{1}{8}$ và $b = \frac{1}{2}$

Khi đó $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{8} \Rightarrow x+y = 8$ và $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-y = 2$.

Ta có hệ phương trình mới $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$ (II). Giải hệ (II) được $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$$4) \begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{5}{2y+3} = 6 \\ \frac{6}{x-1} - \frac{1}{2y+3} = 2 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 1; y \neq \frac{-3}{2} . \text{Đặt } \frac{1}{x-1} = a \text{ và } \frac{1}{2y+3} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành $\begin{cases} 2a+5b=6 \\ 6a-b=2 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3$ và $\frac{1}{2y+3} = 1 \Rightarrow y = -1$ (thỏa mãn)

$$5) \begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{3}{y+2} = -2 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{1}{y+2} = 3 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq -1; y \neq -2 . \text{Đặt } \frac{1}{x+1} = a \text{ và } \frac{1}{y+2} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành $\begin{cases} a-3b=-2 \\ 2a+b=3 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) được $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{x+1} = 1 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+2} = 1 \Rightarrow y = -1$ (thỏa mãn)

$$6) \begin{cases} \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{y+2x} = 3 \\ \frac{4}{x+2y} - \frac{3}{y+2x} = 1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq -2y; 2x \neq -y. \text{Đặt } \frac{1}{x+2y} = a \text{ và } \frac{1}{2x+y} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 2a+b=3 \\ 4a-3b=1 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) được $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{x+2y} = 1 \Rightarrow x+2y=1$ và $\frac{1}{2x+y} = 1 \Rightarrow 2x+y=1$.

Ta có hệ phương trình mới $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ (II). Giải hệ (II) được $x=y=\frac{1}{3}$ (thỏa mãn)

$$7) \begin{cases} \frac{1}{x-3} - \frac{2}{y+1} = 9 \\ \frac{3}{x-3} + \frac{1}{y+1} = 6 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq 3; y \neq -1. \text{Đặt } \frac{1}{x-3} = a \text{ và } \frac{1}{y+1} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a-2b=9 \\ 3a+b=6 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) được $\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$

Khi đó $\frac{1}{x-3} = 3 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+1} = -3 \Rightarrow y = \frac{-4}{3}$ (thỏa mãn)

$$8) \begin{cases} \frac{1}{x+y} + 3(y+1) = 5 \\ \frac{2}{x+y} - 5(y+1) = -1 \end{cases} . \text{ĐK: } x \neq -y. \text{Đặt } \frac{1}{x+y} = a \text{ và } y+1 = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a+3b=5 \\ 2a-5b=-1 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) được $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Khi đó $y+1=1 \Rightarrow y=0$ và $\frac{1}{x+y} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

$$9) \begin{cases} 2(x+1) - \frac{5}{y-3} = 9 \\ (x+1) - \frac{2}{y-3} = 5 \end{cases} . \text{ĐK: } y \neq 3. \text{Đặt } x+1 = a \text{ và } \frac{1}{y-3} = b$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 2a-5b=9 \\ a-2b=5 \end{cases}$ (I). Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a=7 \\ b=1 \end{cases}$

Khi đó $x+1=7 \Rightarrow x=6$ và $\frac{1}{y-3} = 1 \Rightarrow y=4$ (thỏa mãn)

$$10) \begin{cases} \frac{7}{x-y+2} - \frac{5}{x+y-1} = \frac{9}{2} \\ \frac{3}{x-y+2} + \frac{2}{x+y-1} = 4 \end{cases} . \text{ĐK: } \begin{cases} x-y+2 \neq 0 \\ x+y-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{-1}{2} \text{ và } y \neq \frac{3}{2}.$$

Đặt $\frac{1}{x-y+2} = a$ và $\frac{1}{x+y-1} = b$. Khi đó hệ phương trình thành hệ
$$\begin{cases} 7a - 5b = \frac{9}{2} \\ 3a + 2b = 4 \end{cases} \quad (I)$$

Giải hệ (I) được
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$
. Khi đó $\frac{1}{x-y+2} = 1 \Rightarrow x-y+2=1$ và $\frac{1}{x+y-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x+y-1=2$

Ta có hệ phương trình mới
$$\begin{cases} x-y+2=1 \\ x+y-1=2 \end{cases} \quad (II)$$
. Giải hệ (II) được
$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$
 (thỏa mãn)

11)
$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y-1} = -1 \end{cases}$$
. ĐK: $x \neq -1$; $y \neq 1$. Đặt $\frac{x}{x+1} = a$ và $\frac{y}{y-1} = b$.

Khi đó hệ phương trình thành hệ
$$\begin{cases} a-b=3 \\ a+3b=-1 \end{cases} \quad (I)$$
. Giải hệ (I) được
$$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Khi đó $\frac{x}{x+1} = 2 \Rightarrow x = -2$ (thỏa mãn) và $\frac{y}{y-1} = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

12)
$$\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$$
. ĐK: $x \neq 1$; $y \neq -2$. Đặt $\frac{x}{x-1} = a$ và $\frac{1}{y+2} = b$.

Khi đó hệ phương trình thành hệ
$$\begin{cases} 3a-2b=4 \\ 2a+b=5 \end{cases} \quad (I)$$
. Giải hệ (I) được
$$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

Khi đó $\frac{x}{x-1} = 2 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+2} = 1 \Rightarrow y = -1$ (thỏa mãn)

13)
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \\ \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+2} = 2 \end{cases}$$
. ĐK: $x \neq -1$; $y \neq -2$. Đặt $\frac{1}{x+1} = a$ và $\frac{1}{y+2} = b$

Khi đó hệ phương trình thành hệ
$$\begin{cases} a-2b=-3 \\ 3a+4b=2 \end{cases} \quad (I)$$
. Giải hệ (I) được
$$\begin{cases} a = \frac{-4}{5} \\ b = \frac{11}{10} \end{cases}$$

Khi đó $\frac{1}{x+1} = \frac{-4}{5} \Rightarrow x = \frac{-9}{4}$ (thỏa mãn) và $\frac{1}{y+2} = \frac{11}{10} \Rightarrow y = \frac{-12}{11}$ (thỏa mãn)

Bài 6: Giải các hệ phương trình sau (*phương pháp đặt ẩn phụ*)

1)
$$\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+2} = 7 \\ 5(x+y) - 2\sqrt{x+2} = 4 \end{cases}$$
. ĐK: $x \geq -2$. Đặt
$$\begin{cases} x+y = a \\ \sqrt{x+2} = b \end{cases}$$
.

Khi đó hệ phương trình thành hệ
$$\begin{cases} 2a+b=7 \\ 5a-2b=4 \end{cases} \quad (I)$$
. Giải hệ (I) được
$$\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$$

Khi đó $\sqrt{x+2} = 3 \Rightarrow x = 7$ (thỏa mãn) và $x + y = 2 \Rightarrow 7 + y = 2 \Rightarrow y = -5$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(7; -5)$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x-2} + 2(x-y) = 8 \\ 2\sqrt{x-2} + 5(x-y) = 19 \end{cases} \text{ . ĐK: } x \geq 2 \text{ . Đặt } \begin{cases} \sqrt{x-2} = a \\ x-y = b \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} a+2b=8 \\ 2a+5b=19 \end{cases} (I)$. Giải hệ (I) được $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Khi đó $\sqrt{x-2} = 2 \Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn) và $x - y = 3 \Rightarrow 6 - y = 3 \Rightarrow y = 3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(6; 3)$

$$3) \begin{cases} 5(x-y) + 2\sqrt{y+2} = 23 \\ 3(x-y) - \sqrt{y+2} = 5 \end{cases} \text{ . ĐK: } y \geq -2 \text{ . Đặt } \begin{cases} x-y = a \\ \sqrt{y+2} = b \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình thành hệ $\begin{cases} 5a+2b=23 \\ 3a-b=5 \end{cases} (I)$. Giải hệ (I) được $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$

Khi đó $\sqrt{y+2} = 4 \Rightarrow y = 14$ (thỏa mãn) và $x - y = 3 \Rightarrow x - 14 = 3 \Rightarrow x = 17$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(17; 14)$

4) $(3; -2)$	5) $(-2; 3)$	6) $(1; 3)$
7) $(-1; 2), (-3; 2)$	8) $(0; 2), (-4; 2)$	9) $(1; -1), (1; 1)$ $(-3; -1), (-3; 1)$
10) $\left(\frac{-5}{2}; 4\right), \left(\frac{-3}{2}; 4\right)$	11) $(0; 3), (0; -1)$	12) $(-2; 6)$
13) $(0; 5)$	14) $(6; 8)$	15) $(5; 4)$
16) $(3; 1)$	17) $(1; 0)$	18) $\left(2; \frac{-3}{4}\right)$
19) $(2; 4)$	20) $(3; 3)$	21) $(-1; 12)$
22) $\left(\frac{-1}{2}; 3\right)$	23) $(3; 3)$	24) $(3; 3)$
25) $(6; 4)$	26) $(4; 0)$	27) $(-1; 4)$
28) $(2; -1)$	29) $\left(2; \frac{-5}{2}\right)$	30) $(-1; 4)$
31) $\left(\frac{19}{4}; 9\right)$	32) $(7; 9)$	33) $(0; 16)$
34) $\left(\frac{289}{64}; \frac{261}{32}\right)$	35) $(4; 3)$	36) $(3; 4)$
37) $\left(\frac{-1}{2}; 3\right)$	38) $\left(3; \frac{-3}{2}\right)$	39) $(1; -2)$
40) $\left(1; \frac{-3}{2}\right)$	41) $(2; 3)$	

Bài 3. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Dạng 1.

Bài 1:

Bài làm

Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là $x(m)$, $y(m)$. ĐK: $x, y > 0, x > y$.

Vì mảnh vườn có chu vi là $48m$ nên $2(x + y) = 48 \Rightarrow x + y = 24$ (1)

Diện tích của hình chữ nhật ban đầu là $xy(m^2)$

Nếu tăng chiều rộng thêm $2m$ thì chiều rộng là $y + 2(m)$ và tăng chiều dài thêm $3m$ thì chiều dài là $x + 3(m)$. Khi đó diện tích hình chữ nhật tăng thêm $64m^2$ nên

$(x + 3)(y + 2) = xy + 64 \Rightarrow 2x + 3y = 58$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 24 \\ 2x + 3y = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 10 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu là $14m$ và $10m$

Bài 2:

Bài làm

Gọi chiều dài, chiều rộng của vườn trường hình chữ nhật lần lượt là $x(m)$, $y(m)$.

ĐK: $x, y > 0, x > y$.

Vì vườn trường có chu vi là $120m$ nên $2(x + y) = 120 \Rightarrow x + y = 60$ (1)

Diện tích của vườn trường ban đầu là $xy(m^2)$

Do mở rộng chiều dài thêm $5m$ nên chiều dài là $x + 5(m)$ và mở rộng chiều rộng thêm $3m$ nên chiều rộng là $y + 3(m)$. Do đó diện tích vườn trường tăng thêm $245m^2$ nên

$(x + 5)(y + 3) = xy + 245 \Rightarrow 3x + 5y = 230$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 60 \\ 3x + 5y = 230 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 25 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài, chiều rộng vườn trường lúc đầu là $35m$ và $25m$.

Bài 3:

Bài làm

Gọi chiều dài, chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật lần lượt là $x(m)$, $y(m)$.

ĐK: $x > y, x > 1, y > 0$

Vì chu vi của mảnh đất là $56m$ nên $2(x + y) = 56 \Leftrightarrow x + y = 28$ (1)

Diện tích của mảnh đất ban đầu là $xy(m^2)$

Nếu tăng chiều rộng thêm $2m$ và giảm chiều dài đi $1m$ thì chiều dài mảnh đất là $x - 1(m)$ và chiều rộng mảnh đất là $y + 2(m)$. Khi đó diện tích mảnh đất tăng thêm $18m^2$ nên

$(x - 1)(y + 2) - xy = 18 \Rightarrow 2x - y = 20$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 28 \\ 2x - y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 12 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó là $16 m$ và $12 m$

Bài 4:

Bài làm

Gọi chiều dài, chiều rộng phòng hội trường trước khi sửa lần lượt là $x(m)$, $y(m)$.

ĐK: $x, y > 0$, $x > y$

Diện tích phòng hội đồng cũ là $xy(m^2)$

Nếu tăng chiều dài thêm $2 m$ và tăng chiều rộng thêm $3 m$ thì diện tích tăng thêm $90 m^2$

Nên ta có phương trình $(x+2)(y+3) = xy + 90 \Rightarrow 3x + 2y = 84$ (1)

Tăng chiều dài thêm $3 m$ và tăng chiều rộng thêm $2 m$ thì diện tích tăng thêm $87 m^2$

Nên ta có phương trình $(x+3)(y+2) = xy + 87 \Rightarrow 2x + 3y = 81$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 84 \\ 2x + 3y = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 84 \\ y = 81 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài, chiều rộng của phòng hội đồng là $84 m$ và $81 m$

Bài 5:

Bài làm

Gọi chiều dài, chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật lần lượt là $x(cm)$, $y(cm)$.

ĐK: $x > y$, $x > 2$, $y > 2$

Thì diện tích ban đầu là $xy(cm^2)$.

Nếu tăng chiều dài thêm $3 cm$ và giảm chiều rộng đi $2 cm$ thì diện tích giảm $12 cm^2$

Ta có phương trình $(x+3)(y-2) = xy - 12 \Rightarrow -2x + 3y = 6$ (1)

Nếu giảm chiều dài $2 cm$ và tăng chiều rộng $2 cm$ thì diện tích tăng thêm $8 cm^2$

Ta có phương trình $(x-2)(y+2) = xy + 8 \Rightarrow 2x - 2y = 12$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ 2x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài ban đầu là $12 cm$, chiều rộng ban đầu là $6 cm$

Bài 6:

Bài làm

Gọi chiều dài, chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật lần lượt là $x(m)$, $y(m)$.

ĐK: $x > y$, $x > 5$, $y > 4$.

Vì chiều dài hơn chiều rộng là $5 m$ nên ta có $x = y + 5$ (1)

Diện tích của mảnh đất hình chữ nhật là $x \cdot y(m^2)$.

Nếu giảm chiều rộng đi $4 m$ và giảm chiều dài đi $5 m$ thì diện tích mảnh đất giảm đi $180 m^2$

Nên ta có $(x-5)(y-4) = xy - 180 \Rightarrow 4x + 5y = 200$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = y + 5 \\ 4x + 5y = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 20 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 25 m , 20 m

Bài 7:

Bài làm

Gọi chiều dài, chiều rộng ban đầu của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là $x(m)$, $y(m)$.

ĐK: $x > y$, $x, y > 0$.

Do mảnh vườn có chu vi là 34 m nên $2(x + y) = 34 \Rightarrow x + y = 17$ (1)

Diện tích của mảnh vườn là $x \cdot y (m^2)$

Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng thêm 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m^2

Nên ta có $(x + 3)(y + 2) = xy + 45 \Rightarrow 2x + 3y = 39$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 17 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài, chiều rộng ban đầu của mảnh vườn là 12 m , 5 m

Bài 8:

Bài làm

Gọi chiều dài, chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật lần lượt là $x(cm)$, $y(cm)$.

ĐK: $x > y$, $x > 2$, $y > 1$.

Diện tích của hình chữ nhật là $x \cdot y (cm^2)$

Nếu tăng độ dài mỗi cạnh thêm 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật tăng thêm 13 cm^2

Ta có phương trình $(x + 1)(y + 1) = xy + 13 \Rightarrow x + y = 12$ (1)

Nếu giảm chiều dài đi 2 cm , chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm 15 cm^2 .

Ta có phương trình $(x - 2)(y - 1) = xy - 15 \Rightarrow x + 2y = 17$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 12 \\ x + 2y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 7 cm , 5 cm

Dạng 2.

Bài 1:

Bài làm

Đổi $3\text{ giờ } 45\text{ phút} = \frac{15}{4}\text{ giờ}$.

Gọi x (giờ) là thời gian để người thứ nhất xây một mình xong bức tường, $\left(x > \frac{15}{4}\right)$

Gọi y (giờ) là thời gian để người thứ hai xây một mình xong bức tường, $\left(y > \frac{15}{4}\right)$

Trong một giờ, người thứ nhất xây được $\frac{1}{x}$ bức tường và người thứ hai xây được $\frac{1}{y}$ bức tường.

Trong một giờ, cả hai người xây được $1: \frac{15}{4} = \frac{4}{15}$ bức tường. ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{15}$.

Trong 3 giờ, người thứ nhất xây được $\frac{3}{x}$ bức tường.

Trong 5 giờ người thứ hai xây được $\frac{5}{y}$ bức tường. Ta có phương trình $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{15} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc là 6 giờ và 10 giờ

Bài 2:

Bài làm

Gọi thời gian người thứ nhất, người thứ hai một mình làm xong công việc lần lượt là x, y (ngày)

Trong một ngày, cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc. Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Người 1 làm trong 3 ngày và người hai làm trong 7 ngày thì hoàn thành công việc

Nên ta có phương trình $\frac{3}{x} + \frac{7}{y} = 1$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{3}{x} + \frac{7}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để người thứ nhất, thứ hai làm một mình xong công việc là 24 ngày và 8 ngày.

Bài 3:

Bài làm

Đội 75% = $\frac{3}{4}$.

Gọi x, y (ngày) là thời gian đội 1, đội 2 lần lượt làm một mình xong công việc. ĐK: $x, y > 0$

Trong một ngày, cả hai đội làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc. Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1)

Nếu đội 1 làm trong 5 ngày, đội 2 làm trong 7 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 75% công việc, nên ta có phương trình $\frac{5}{x} + \frac{15}{y} = \frac{3}{4}$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{5}{x} + \frac{15}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để đội 1, đội 2 làm một mình xong công việc lần lượt là 20 ngày và 30 ngày.

Bài 4:

Bài làm

Gọi thời gian người thứ nhất, người thứ hai một mình làm xong công việc lần lượt là x, y (giờ)

ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ (1)

Nếu hai người làm riêng thì thời gian người thứ hai làm xong công việc đó nhiều hơn thời gian người thứ nhất làm là 3 giờ, nên ta có phương trình $y - x = 3$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ y - x = 3 \end{cases} \quad (I).$$
 Giải hệ phương trình (I) được

$(-2; 1), (3; 6)$. Nhận thấy $x = 3; y = 6$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy thời gian để người thứ nhất và người thứ hai làm riêng hoàn thành công việc là 3 giờ và 6 giờ

Bài 5:

Bài làm

Gọi thời gian người thứ nhất, người thứ hai một mình làm xong công việc lần lượt là x, y (giờ)

ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$ (1)

Trong 3 giờ, người thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ công việc và trong 6 giờ, người thứ hai làm được $\frac{6}{y}$

công việc. ta có phương trình $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{2}$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 24 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy thời gian để người thứ nhất, người thứ hai một mình làm xong công việc là 12 giờ và 14 giờ.

Bài 6:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian tổ một, tổ hai một mình làm xong công việc. ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, cả hai tổ làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1)

Tổ một làm trong 4 giờ nên số công việc làm được là $\frac{4}{x}$ công việc.

Tổ hai làm trong 14 giờ nên số công việc tổ hai làm được là $\frac{14}{y}$ công việc

Ta có phương trình $\frac{4}{x} + \frac{14}{y} = 1$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{4}{x} + \frac{14}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{60} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 15 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy thời gian để tổ một, tổ hai lần lượt làm xong công việc một mình là 60 giờ và 15 giờ.

Bài 7:**Bài làm**

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian người thợ thứ nhất, người thợ thứ hai một mình làm xong công việc. ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, tổ một và tổ hai làm được $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}$ công việc. ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 3 giờ thì làm xong $\frac{3}{x}$ công việc.

Người thứ hai làm trong 5 giờ thì làm xong $\frac{5}{y}$ công việc, ta có phương trình $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 40 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để người thợ thứ nhất, thứ hai làm một mình xong công việc là 24 giờ và 40 giờ.

Bài 8:**Bài làm**

Gọi thời gian người thứ nhất, người thứ hai một mình làm xong công việc lần lượt là x, y (ngày)
ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc. ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 4 ngày làm được $\frac{4}{x}$ công việc, người thứ hai làm trong 6 ngày làm được $\frac{6}{y}$ công việc, nên ta có phương trình $\frac{4}{x} + \frac{6}{y} = \frac{4}{5}$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{4}{x} + \frac{6}{y} = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để người thứ nhất, người thứ hai làm một mình xong công việc là 10 ngày, 15 ngày

Bài 9:**Bài làm**

Gọi thời gian người thứ nhất, người thứ hai một mình làm xong công việc lần lượt là x, y (giờ)
ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc. ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 15 giờ thì được $\frac{15}{x}$ công việc, người thứ hai làm trong 6 giờ thì được $\frac{6}{y}$ công việc, nên ta có phương trình $\frac{15}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4}$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{15}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để người thứ nhất, thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là 24 giờ, 48 giờ

Bài 10:

Bài làm

Gọi x, y (ngày) lần lượt là thời gian tổ một, tổ hai một mình làm xong công việc. ĐK: $x, y > 0$.

Trong một ngày, cả hai tổ làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc. ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$ (1)

Tổ một làm trong 6 ngày làm được $\frac{6}{x}$ công việc, tổ hai làm trong 30 ngày làm được $\frac{30}{y}$ công việc

Ta có phương trình $\frac{6}{x} + \frac{30}{y} = 1$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \\ \frac{6}{x} + \frac{30}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 40 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để tổ một, tổ hai làm riêng xong công việc là 24 giờ, 40 giờ

Bài 11:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian người thợ thứ nhất, người thợ thứ hai một mình làm xong công việc. ĐK: $x, y > 0$.

Trong một ngày, cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Người thứ nhất hoàn thành công việc sớm hơn người thứ hai là 5 giờ nên ta có $y - x = 5$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} y - x = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \text{ (I). Giải hệ (I) ta được } \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

Nhận thấy $\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian để người thứ nhất, thứ hai làm riêng xong công việc lần lượt là 10 giờ, 15 giờ.

Bài 12:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian đội một, đội hai một mình làm xong công việc. ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, cả hai đội làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (1)

Nếu làm riêng thì đội một cần nhiều thời gian hơn đội hai là 6 giờ để hoàn thành công việc

Nên ta có phương trình $x - y = 6$. Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (I)$$

Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases}$. Nhận thấy $\begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian đội một, đội hai làm riêng xong công việc lần lượt là 12 giờ và 6 giờ.

Bài 13:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian công nhân thứ nhất, công nhân thứ hai một mình làm xong công việc. ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$ (1)

Nếu làm riêng thì người thứ nhất cần nhiều hơn người thứ hai là 12 giờ.

Nên ta có phương trình $x - y = 12$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \end{cases} \quad (I)$$
. Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} x = 4 \\ y = -8 \end{cases}$ (không thỏa

mãn) hoặc $\begin{cases} x = 24 \\ y = 12 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy thời gian để công nhân một và công nhân hai làm riêng xong công việc là 24 giờ và 12 giờ.

Bài 14:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian người thứ nhất, người thứ hai một mình làm xong công việc. ĐK: $x, y > 0$.

Trong một giờ, cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc. nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$ (1)

Và nếu làm riêng thì người thứ nhất cần nhiều hơn người thứ hai là 4 giờ

Nên ta có phương trình $x - y = 4$. Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \end{cases} \quad (I)$$
.

Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} y = \frac{-12}{5} \\ x = \frac{8}{5} \end{cases}$ (không thỏa mãn) và $\begin{cases} y = 8 \\ x = 12 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian để người thứ nhất, thứ hai lần lượt làm riêng xong công việc là 12 giờ và 8 giờ.

Bài 15:

Bài làm

Gọi x, y (ngày) lần lượt là thời gian người thứ nhất, người thứ hai một mình làm xong công việc.

ĐK: $x, y > 0$.

Trong một ngày, người thứ nhất và người thứ hai làm được $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}$ công việc.

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$.

Mỗi ngày người thứ hai làm gấp ba lần người thứ nhất, nên ta có phương trình $\frac{1}{y} = \frac{3}{x}$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để người thứ nhất, người thứ hai làm riêng xong công việc là 36 ngày và 12 ngày

Bài 16:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian vòi một, vòi hai một mình chảy đầy bể. ĐK: $x, y > 0$

Trong 1 giờ, hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1)

Vòi một chảy 4 giờ sẽ chảy được $\frac{4}{x}$ bể, vòi hai chảy trong 3 giờ sẽ chảy được $\frac{3}{y}$ bể.

Ta có phương trình $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{10}$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là 20 giờ và 30 giờ.

Bài 17:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian vòi một, vòi hai một mình chảy đầy bể. ĐK: $x, y > 0$

Trong 1 giờ, hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Vòi một chảy trong 3 giờ sẽ chảy được $\frac{3}{x}$ bể, vòi hai chảy trong 4 giờ sẽ chảy được $\frac{4}{y}$ bể.

Ta có phương trình $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 60\% = \frac{3}{5}$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là 15 giờ và 10 giờ

Bài 18:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian vòi một, vòi hai một mình chảy đầy bể. ĐK: $x, y > 0$

Trong 1 giờ, hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ (1)

Vòi một chảy 45 phút sẽ chảy được $\frac{3}{4x}$ bể, vòi hai chảy trong 30 phút sẽ chảy được $\frac{1}{2y}$ bể.

Ta có phương trình $\frac{3}{4x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{3}$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là 3 giờ và 6 giờ.

Bài 19:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian vòi một, vòi hai một mình chảy đầy bể. ĐK: $x, y > 0$

Trong 1 giờ, hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Vòi một chảy 2 giờ sẽ chảy được $\frac{2}{x}$ bể, vòi hai chảy trong 14 giờ sẽ chảy được $\frac{14}{y}$ bể.

Ta có phương trình $\frac{2}{x} + \frac{14}{y} = 1$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{14}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 18 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là 9 giờ và 18 giờ

Bài 20:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian vòi một, vòi hai một mình chảy đầy bể. ĐK: $x, y > 0$

Trong 1 giờ, hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ (1)

Vòi một chảy 15 phút sẽ chảy được $\frac{1}{4x}$ bể, vòi hai chảy trong 20 phút sẽ chảy được $\frac{1}{3y}$ bể.

Ta có phương trình $\frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = 20\% = \frac{1}{5}$ (2)

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{4}{15} \\ \frac{1}{y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Như vậy vòi một cần $\frac{15}{4}$ giờ hay 3 giờ 45 phút, vòi hai cần $\frac{5}{2}$ giờ hay 2 giờ 30 để chảy đầy bể.

Bài 21:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian vòi một, vòi hai một mình chảy đầy bể. ĐK: $x, y > 0$

Trong 1 giờ, hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1)

Vòi một chảy 18 giờ sẽ chảy được $\frac{18}{x}$ bể, vòi hai chảy trong 4 giờ sẽ chảy được $\frac{4}{y}$ bể.

Ta có phương trình $\frac{18}{x} + \frac{4}{y} = 1$ (2)

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{18}{x} + \frac{4}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{21} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{28} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 28 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là 21 giờ và 28 giờ

Bài 22:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian vòi một, vòi hai một mình chảy đầy bể. ĐK: $x, y > 0$

Trong 1 giờ, hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$ (1)

Vòi một chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ nên ta có phương trình $y - x = 2$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} y - x = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ (I)}. \text{ Giải hệ (I) ta được } \begin{cases} x = \frac{-4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là 2 giờ và 4 giờ.

Bài 23:

Bài làm

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian vòi một, vòi hai một mình chảy đầy bể. ĐK: $x, y > 0$

Trong 1 giờ, hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể, nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (1)

Vòi một chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 6 giờ nên ta có phương trình $y - x = 6$ (2)

Từ (1), (2) ta có phương trình
$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (I)}. \text{ Giải hệ (I) ta được } \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Hoặc $\begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là 6 và 12 giờ.

Dạng 3.

Bài 1:

Bài làm

Gọi x, y (sản phẩm) lần lượt là số sản phẩm tổ một, tổ hai làm được trong tháng thứ nhất.

ĐK: $0 < x, y < 500$.

Tháng thứ nhất hai tổ làm được 500 sản phẩm nên ta có $x + y = 500$ (1)

Tháng thứ hai tổ một tăng 10% và tổ hai tăng 15% nên hai tổ làm được 564 sản phẩm.

$$\text{Nên ta có phương trình } \frac{1}{10}x + \frac{3}{20}y = 64 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 500 \\ \frac{1}{10}x + \frac{3}{20}y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 220 \\ y = 280 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy trong tháng thứ nhất tổ một và tổ hai lần lượt làm được 220, 280 sản phẩm.

Bài 2:

Bài làm

Gọi x, y là số tấm kính chắn giọt bắn làm được của hai lớp 9A, 9B làm được trong đợt một.

ĐK: $0 < x, y < 1500$.

Trong đợt một, cả hai lớp làm được 1500 chiếc nên ta có $x + y = 1500$ (1)

Trong đợt hai, lớp 9A vượt mức 75% và lớp 9B vượt mức 68% nên cả hai lớp làm được 2583

chiếc, ta có phương trình $\frac{3}{4}x + \frac{17}{25}y = 1083$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 1500 \\ \frac{3}{4}x + \frac{17}{25}y = 1083 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy trong đợt một, lớp 9A, 9B lần lượt làm được 900, 600 tấm kính chắn giọt.

Bài 3:

Bài làm

Gọi x, y (sản phẩm) lần lượt là số sản phẩm tổ một, tổ hai lần lượt làm theo kế hoạch.

ĐK: $0 < x, y < 700$

Theo kế hoạch hai tổ phải sản xuất 700 sản phẩm, nên ta có $x + y = 700$ (1)

Tổ một vượt mức 15% và tổ hai vượt mức 20% nên cả hai tổ làm được 820 sản phẩm.

Ta có phương trình $\frac{3}{20}x + \frac{1}{5}y = 120$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 700 \\ \frac{3}{20}x + \frac{1}{5}y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 300 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số sản phẩm tổ một, tổ hai làm theo kế hoạch lần lượt là 400, 300 sản phẩm.

Bài 4:

Bài làm

Gọi x, y (dụng cụ) lần lượt là số dụng cụ xí nghiệp một, hai làm theo kế hoạch.

ĐK: $0 < x, y < 360$

Theo kế hoạch hai xí nghiệp phải làm 360 dụng cụ nên ta có phương trình $x + y = 360$ (1)

Thực tế, xí nghiệp một vượt mức 10%, xí nghiệp hai vượt mức 15% nên làm được 404 dụng cụ

Ta có phương trình $\frac{1}{10}x + \frac{3}{20}y = 44$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 360 \\ \frac{1}{10}x + \frac{3}{20}y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 160 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số dụng cụ xí nghiệp một, xí nghiệp hai làm được theo kế hoạch là 200, 160.

Bài 5:

Bài làm

Gọi x, y (sản phẩm) là số sản phẩm tổ một, tổ hai làm theo kế hoạch. ĐK: $0 < x, y < 600$

Theo kế hoạch, hai tổ phải làm 600 sản phẩm, nên ta có phương trình $x + y = 600$ (1)

Do cải tiến nên tổ một vượt mức 18% và tổ hai vượt mức 21% nên vượt mức 120 sản phẩm.

Ta có phương trình
$$\frac{9}{50}x + \frac{21}{100}y = 120 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 600 \\ \frac{9}{50}x + \frac{21}{100}y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 400 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số sản phẩm tổ một, tổ hai làm theo kế hoạch lần lượt là 200, 400.

Bài 6:

Bài làm

Gọi x, y (ngày) lần lượt là thời gian để đội một, đội hai làm một mình xong công việc.

ĐK: $x, y > 0$.

Trong một ngày hai đội làm được số công việc là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc, ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$

Trong 8 ngày, hai đội làm được $\frac{8}{x} + \frac{8}{y}$ công việc, sau đó đội hai tăng năng suất gấp đôi và làm

xong trong $3,5 = \frac{7}{2}$ ngày, nên ta có phương trình $\frac{8}{x} + \frac{8}{y} + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{y} = 1 \Rightarrow \frac{8}{x} + \frac{15}{y} = 1$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{8}{x} + \frac{15}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{28} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 21 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để đội một, đội hai làm một mình xong công việc là 28 ngày và 21 ngày.

Bài 7:

Bài làm

Gọi x, y lần lượt là số chi tiết máy tổ một, tổ hai làm được trong tháng riêng. ĐK: $x, y > 0$

Tháng riêng hai tổ đã sản xuất được 900 chi tiết máy nên ta có $x + y = 900$ (1)

Tháng hai, tổ một đã vượt mức 15% và tổ hai vượt mức 10% nên sản xuất được 1010 chi tiết máy,

nên ta có phương trình
$$\frac{3}{20}x + \frac{1}{10}y = 110 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 900 \\ \frac{3}{20}x + \frac{1}{10}y = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 500 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy trong tháng riêng, tổ một sản xuất được 400, tổ hai đã sản xuất được 500 chi tiết máy.

Bài 8:

Bài làm

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm tổ một, tổ hai làm được trong tháng thứ nhất.

ĐK: $0 < x, y < 1000$

Trong tháng thứ nhất hai tổ làm được 1000 sản phẩm nên ta có $x + y = 1000$ (1)

Trong tháng thứ hai, tổ một vượt mức 20%, tổ hai vượt mức 15% nên hai tổ làm được 1170 sản phẩm, nên ta có $\frac{1}{5}x + \frac{3}{20}y = 170$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{1}{5}x + \frac{3}{20}y = 170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 600 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy trong tháng thứ nhất, tổ một và tổ hai lần lượt sản xuất được 400 và 600 sản phẩm.

Bài 9:

Bài làm

Gọi giá gốc của quyền từ điển và món đồ chơi lần lượt là x, y (nghìn đồng). ĐK: $x, y > 0$

Tổng số tiền của quyền từ điển và món đồ chơi là 750 nghìn đồng, nên ta có $x + y = 750$ (1)

Do quyền từ điển được giảm 20% và món đồ chơi được giảm 10% nên Bình chỉ trả 630 nghìn đồng, nên ta có $\frac{4}{5}x + \frac{9}{10}y = 630$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 750 \\ \frac{4}{5}x + \frac{9}{10}y = 630 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 300 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy giá gốc của quyền từ điển và món đồ chơi lần lượt là 450, 300 nghìn đồng.

Bài 10:

Bài làm

Gọi x, y lần lượt là giá tiền ban đầu của chiếc bếp từ và nồi chiên. ĐK: $x, y > 0$

Giá ban đầu của chiếc bếp và nồi chiên là 21 triệu nên ta có $x + y = 21$ (1)

Do bếp từ được giảm 15% và giá nồi chiên giảm 10% nên bác An phải trả 18,3 triệu,

nên ta có $\frac{17}{20}x + \frac{9}{10}y = 18,3$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 21 \\ \frac{17}{20}x + \frac{9}{10}y = 18,3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy ban đầu giá tiền chiếc bếp từ là 12 triệu, còn nồi chiên giá 9 triệu.

Bài 11:

Bài làm

Gọi x, y (nghìn đồng) lần lượt là giá niêm yết của bàn là và quạt điện. ĐK: $x, y > 0$

Tổng số tiền của bàn là và quạt điện theo giá niêm yết là 750 nghìn nên ta có $x + y = 750$ (1)

Do bàn là được khuyến mại 10% và quạt là 20% nên phải trả 625 nghìn,

ta có phương trình $\frac{9}{10}x + \frac{1}{4}y = 625$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 750 \\ \frac{9}{10}x + \frac{4}{5}y = 625 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 250 \\ y = 500 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy theo giá niêm yết thì bàn là giá 250 nghìn và quạt điện giá 500 nghìn đồng.

Bài 12:**Bài làm**

Gọi x là giá niêm yết của máy hút ẩm và y là giá niêm yết của quạt cây. ĐK: $x, y > 0$

Tổng số tiền của máy hút ẩm và quạt cây là 9 triệu đồng, nên ta có phương trình $x + y = 9$ (1)

Máy hút ẩm được giảm 20% và quạt cây được giảm 10% nên số tiền được giảm giá là 1,6 triệu

Ta có phương trình $\frac{1}{5}x + \frac{1}{10}y = 1,6$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}y = 1,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy giá niêm yết của máy hút ẩm là 7 triệu đồng và quạt cây là 2 triệu đồng.

Dạng 4.**Bài 1:****Bài làm**

Gọi x, y lần lượt là số người và số ngày theo dự định. ĐK: $x > 10, y > 2, x \in \mathbb{N}$

Lượng công việc theo dự định là xy (ngày công)

Nếu tăng thêm 10 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 2 ngày,

nên ta có phương trình $(x+10)(y-2) = xy \Rightarrow -2x+10y = 20$ (1)

Nếu bớt đi 10 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày nữa mới hoàn thành công việc,

nên ta có phương trình $(x-10)(y+3) = xy \Rightarrow 3x-10y = 30$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -2x+10y = 20 \\ 3x-10y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy theo dự định thì cần 50 người công nhân.

Bài 2:**Bài làm**

Gọi x, y lần lượt là số công nhân (người) và số ngày dự định. ĐK: $x, y \in \mathbb{N}, x > 4, y > 3$

Lượng công việc theo dự định là xy (ngày công)

Nếu bớt đi hai công nhân thì phải mất thêm 4 ngày mới hoàn thành công việc

Nên ta có phương trình $(x-2)(y+4) = xy \Rightarrow 4x-2y = 8$ (1)

Nếu tăng thêm 3 công nhân thì công việc hoàn thành sớm 3 ngày

Nên ta có phương trình $(x+3)(y-3) = xy \Rightarrow -3x+3y = 9$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x-2y = 8 \\ -3x+3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 10 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy theo dự định, cần 7 công nhân và làm trong 10 ngày mới hoàn thành công việc.

Bài 3:**Bài làm**

Gọi x, y lần lượt là số luống và số cây cải bắp trên mỗi luống trong vườn nhà Mai.

ĐK: $x, y \in \mathbb{N}, x > 5, y > 2$.

Số cây cải bắp trong vườn là $x.y$ (cây)

Nếu tăng thêm 7 luống nhưng mỗi luống trồng ít đi hai cây thì số cây bắp cải toàn vườn giảm 9 cây, nên ta có phương trình $(x+7)(y-2) = xy - 9 \Rightarrow -2x + 7y = 5$ (1)

Nếu giảm đi 5 luống nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì số cây bắp cải toàn vườn tăng thêm 15 cây, nên ta có phương trình $(x-5)(y+2) = xy + 15 \Rightarrow 2x - 5y = 25$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} -2x + 7y = 5 \\ 2x - 5y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy vườn nhà Mai có $50 \cdot 15 = 750$ cây cải bắp.

Bài 4:

Bài làm

Gọi x, y lần lượt là số dãy và số ghế trong một dãy. ĐK: $x, y \in \mathbb{N}^*$

Vì có tất cả 200 ghế nên ta có $x \cdot y = 200$ (1)

Nếu kê thêm 2 dãy và mỗi dãy tăng thêm 1 ghế thì kê được 242 ghế nên ta có phương trình $(x+2)(y+1) = 242 \Rightarrow xy + x + 2y = 240 \Rightarrow x + 2y = 40$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} xy = 200 \\ x + 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy phòng học ban đầu có 20 dãy ghế, mỗi dãy có 10 ghế.

Bài 5:

Bài làm

Gọi số dãy ghế ban đầu là x và số ghế trong một dãy ban đầu là y . ĐK: $x, y \in \mathbb{N}^*$

Vì số ghế là 250 nên ta có $x \cdot y = 250$ (1)

Mỗi dãy bớt đi 5 ghế mà số ghế trong hội trường không đổi thì nhà trường phải kê thêm 25 dãy ghế nữa nên ta có $(x+25)(y-5) = 250$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x \cdot y = 250 \\ (x+25)(y-5) = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 10 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy ban đầu hội trường có 25 dãy ghế.

Chương 2. Phương trình và bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bài 4. Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

1) Ta có $(x+2)(x-1) = 0$ Với $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ Với $x-1=0 \Rightarrow x=1$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-2$ và $x=1$.
2) Ta có $(x+2)(x-3) = 0$ Với $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ Với $x-3=0 \Rightarrow x=3$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-2$ và $x=3$.
3) Ta có $(x-1)(3x-6) = 0$ Với $x-1=0 \Rightarrow x=1$ Với $3x-6=0 \Rightarrow x=2$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1$ và $x=2$.
4) $(x-7)(2x-8) = 0$ Với $x-7=0 \Rightarrow x=7$ Với $2x-8=0 \Rightarrow x=4$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=7$ và $x=4$.
5) $(2x-7)(7+x) = 0$ Với $2x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$ Với $7+x=0 \Rightarrow x=-7$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\frac{7}{2}$ và $x=-7$.
6) $(x-5)(5x-1) = 0$ Với $x-5=0 \Rightarrow x=5$ Với $5x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=5$ và $x=\frac{1}{5}$.
7) $(2x+5)(1-3x) = 0$ Với $2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$ Với $1-3x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-\frac{5}{2}$ và $x=\frac{1}{3}$.
8) $(2x+3)(1-4x) = 0$ Với $2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ Với $1-4x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-\frac{3}{2}$ và $x=\frac{1}{4}$.
9) $(3x+2)(4x-5) = 0$ Với $3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$ Với $4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-\frac{2}{3}$ và $x=\frac{5}{4}$.

Bài 2:

1) $(x+1)^2(x+2) = 0$

Với $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Với $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -2$.

2) $(6-x)(x+6)^2 = 0$

Với $6-x = 0 \Rightarrow x = 6$

Với $(x+6)^2 = 0 \Rightarrow x = -6$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 6$ hoặc $x = -6$

3) $(5-x)^2(3x-1) = 0$

Với $(5-x)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$

Với $3x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 5$ và $x = \frac{1}{3}$.

4) $(3x-1)(3-x)^2 = 0$

Với $3x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Với $(3-x)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{1}{3}$ và $x = 3$

5) $(x-2)^2(3x-4) = 0$

Với $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Với $3x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = \frac{4}{3}$.

6) $(2x-3)^2(x-4) = 0$

Với $(2x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Với $x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{3}{2}$ và $x = 4$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1) $5x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(5x-8) = 0$ nên $x = 0$ hoặc $5x-8 = 0$.

Với $5x-8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{8}{5}$.

2) $8x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(2x-1) = 0$ nên $x = 0$ hoặc $2x-1 = 0$

Với $2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$.

3) $4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(4x+3) = 0$ nên $x = 0$ hoặc $4x+3 = 0$

Với $4x+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -\frac{3}{4}$.

4) $-3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow -3x(x+2) = 0$ nên $x = 0$ hoặc $x+2 = 0$

Với $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -2$.

5) $-6x + 9x^2 = 0 \Rightarrow -3x(2-3x) = 0$ nên $x = 0$ hoặc $2-3x = 0$

<p>Với $2 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{2}{3}$.</p>
<p>6) $-9x^2 - 8x = 0 \Rightarrow -x(9x + 8) = 0$ nên $x = 0$ hoặc $9x + 8 = 0$ Với $9x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8}{9}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{-8}{9}$.</p>
<p>7) $2x(x - 3) = x - 3 \Rightarrow 2x(x - 3) - (x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(2x - 1) = 0$ Với $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ Với $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = \frac{1}{2}$.</p>
<p>8) $4x(x - 3) - 3x + 9 = 0 \Rightarrow 4x(x - 3) - 3(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(4x - 3) = 0$ Với $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ Với $4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = \frac{3}{4}$.</p>
<p>9) $x(x - 4) - 3x + 12 = 0 \Rightarrow x(x - 4) - 3(x - 4) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 3) = 0$ Với $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ Với $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 4$ và $x = 3$.</p>
<p>10) $2x(x - 3) + 5x - 15 = 0 \Rightarrow (x - 3)(2x + 5) = 0$ Với $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ Với $2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5}{2}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = \frac{-5}{2}$.</p>
<p>11) $5x(x - 6) - 2x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 6)(5x - 2) = 0$ Với $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ Với $5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 6$ và $x = \frac{2}{5}$.</p>
<p>12) $7x(x + 2) - 6(x + 2) = 0 \Rightarrow (x + 2)(7x - 6) = 0$ Với $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ Với $7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = \frac{6}{7}$.</p>

Bài 4: Giải các phương trình sau:

<p>1) $(x - 1)(x + 7) = (1 - x)(3 - 2x) \Rightarrow (x - 1)(x + 7) - (1 - x)(3 - 2x) = 0$ $\Rightarrow (x - 1)(x + 7) + (x - 1)(3 - 2x) = 0 \Rightarrow (x - 1)[(x + 7) + (3 - 2x)] = 0 \Rightarrow (x - 1)(10 - x) = 0$ Với $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ Với $10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 10$.</p>
<p>2) $(2 - x)(x + 1) = (x - 2)(3x + 5) \Rightarrow (2 - x)(x + 1) - (x - 2)(3x + 5) = 0$ $\Rightarrow (2 - x)(x + 1) + (2 - x)(3x + 5) = 0 \Rightarrow (2 - x)[(x + 1) + (3x + 5)] = 0 \Rightarrow (2 - x)(4x + 6) = 0$ Với $4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$ Với $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{-3}{2}$ và $x = 2$.</p>
<p>3) $(x + 6)(5 - x) = (x - 5)(7x + 8) \Rightarrow (x + 6)(5 - x) - (x - 5)(7x + 8) = 0$ $\Rightarrow (x + 6)(5 - x) + (5 - x)(7x + 8) = 0 \Rightarrow (5 - x)(x + 6 + 7x + 8) = 0 \Rightarrow (8x + 14)(5 - x) = 0$</p>

$$\text{Với } 8x+14=0 \Rightarrow x = \frac{-7}{4}$$

Với $5-x=0 \Rightarrow x=5$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{-7}{4}$ và $x=5$.

$$\begin{aligned} 4) \quad (2x+5)(x-4) &= (x-4)(5-x) \Rightarrow (2x+5)(x-4) - (x-4)(5-x) = 0 \\ &\Rightarrow (x-4)[(2x+5) - (5-x)] = 0 \Rightarrow (x-4)(3x) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Với } 3x=0 \Rightarrow x=0$$

Với $x-4=0 \Rightarrow x=4$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0$ và $x=4$.

$$\begin{aligned} 5) \quad (x-2)(7-3x) &= (x-2)(4x-3) \Rightarrow (x-2)(7-3x) - (x-2)(4x-3) = 0 \\ &\Rightarrow (x-2)[(7-3x) - (4x-3)] = 0 \Rightarrow (x-2)(-7x+10) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Với } -7x+10=0 \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

Với $x-2=0 \Rightarrow x=2$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{10}{7}$ và $x=2$.

$$\begin{aligned} 6) \quad 3x^2 - 3x &= (x-1)(x+3) \Rightarrow 3x(x-1) - (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow (x-1)[3x - (x+3)] = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)(2x-3) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Với } x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Với $2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1$ và $x = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} 7) \quad x(x+3) &= (2x-1)(x+3) \Rightarrow x(x+3) - (2x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow (x+3)[x - (2x-1)] = 0 \\ &\Rightarrow (x+3)(-x+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Với } -x+1=0 \Rightarrow x=1$$

Với $x+3=0 \Rightarrow x=-3$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1$ và $x=-3$.

$$\begin{aligned} 8) \quad (3x-2)(2x+1) &= (2x+1)^2 \Rightarrow (3x-2)(2x+1) - (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow (2x+1)[(3x-2) - (2x+1)] = 0 \\ &\Rightarrow (2x+1)(x-3) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Với } 2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

Với $x-3=0 \Rightarrow x=3$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{-1}{2}$ và $x=3$.

$$\begin{aligned} 9) \quad (2x-3)(5x+1) &= (3-2x)(x-5) \Rightarrow (2x-3)(5x+1) - (3-2x)(x-5) = 0 \\ &\Rightarrow (2x-3)[(5x+1) + (x-5)] = 0 \Rightarrow (2x-3)(6x-4) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Với } 2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Với $6x-4=0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{3}{2}$ và $x = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} 10) \quad (6x-7)(3x+4) &= (7-6x)(x-1) \Rightarrow (6x-7)(3x+4) - (7-6x)(x-1) = 0 \\ &\Rightarrow (6x-7)[(3x+4) + (x-1)] = 0 \Rightarrow (6x-7)(4x+3) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Với } 6x-7=0 \Rightarrow x = \frac{7}{6}$$

Với $4x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-3}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{7}{6}$ và $x = \frac{-3}{4}$.

$$11) (2-3x)(x+11) = (3x-2)(2-5x) \Rightarrow (2-3x)(x+11) - (3x-2)(2-5x) = 0 \\ \Rightarrow (2-3x)[(x+11)+(2-5x)] = 0 \Rightarrow (2-3x)(13-4x) = 0$$

Với $2-3x=0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Với $13-4x=0 \Rightarrow x = \frac{13}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{2}{3}$ và $x = \frac{13}{4}$.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1) (1+x)^2 - (x-1)^2 = 0 \Rightarrow [(1+x)-(x-1)][(1+x)+(x-1)] = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$.

$$2) (3x+1)^2 - (2x+3)^2 = 0 \Rightarrow [(3x+1)-(2x+3)][(3x+1)+(2x+3)] = 0 \Rightarrow (x-2)(5x+4) = 0$$

Với $x-2=0 \Rightarrow x = 2$

Với $5x+4=0 \Rightarrow x = \frac{-4}{5}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = \frac{-4}{5}$.

$$3) (5x-4)^2 - (3x-2)^2 = 0 \Rightarrow [(5x-4)-(3x-2)][(5x-4)+(3x-2)] = 0 \Rightarrow (2x-2)(8x-6) = 0$$

Với $2x-2=0 \Rightarrow x = 1$

Với $8x-6=0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{3}{4}$.

$$4) (x-2)^2 = (3x+5)^2 \Rightarrow (x-2)^2 - (3x+5)^2 \Rightarrow [(x-2)-(3x+5)][(x-2)+(3x+5)] \\ \Rightarrow (-2x-7)(4x+3) = 0$$

Với $-2x-7=0 \Rightarrow x = \frac{-7}{2}$.

Với $4x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-3}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{-7}{2}$ và $x = \frac{-3}{4}$.

$$5) (x-3)^2 = (3x-2)^2 \Rightarrow (x-3)^2 - (3x-2)^2 \Rightarrow [(x-3)-(3x-2)][(x-3)+(3x-2)] = 0$$

$$\Rightarrow (-2x-1)(4x-5) = 0$$

Với $-2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

Với $4x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{-1}{2}$ và $x = \frac{5}{4}$.

$$6) (2x+7)^2 = (x+3)^2 \Rightarrow (2x+7)^2 - (x+3)^2 = 0 \Rightarrow [(2x+7)-(x+3)][(2x+7)+(x+3)] = 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(3x+10) = 0$$

Với $x+4=0 \Rightarrow x = -4$

Với $3x+10=0 \Rightarrow x = \frac{-10}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -4$ và $x = \frac{-10}{3}$.

$$7) (6-9x)^2 = (5x-7)^2 \Rightarrow (6-9x)^2 - (5x-7)^2 = 0 \Rightarrow [(6-9x)-(5x-7)][(6-9x)+(5x-7)] = 0$$

$$\Rightarrow (-14x+1)(-4x-1) = 0$$

Với $-14x+1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{14}$

Với $-4x-1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{1}{14}$ và $x = -\frac{1}{4}$.

8) $(4x-6)^2 = (6+4x)^2 \Rightarrow (4x-6)^2 - (6+4x)^2 = 0 \Rightarrow [(4x-6)-(6+4x)][(4x-6)+(6+4x)] = 0$
 $\Rightarrow -12.8x = 0 \Rightarrow x = 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$

9) $(13x-7)^2 = (3x-4)^2 \Rightarrow (13x-7)^2 - (3x-4)^2 = 0 \Rightarrow [(13x-7)-(3x-4)][(13x-7)+(3x-4)] = 0$
 $\Rightarrow (10x-3)(16x-11) = 0$

Với $10x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{10}$

Với $16x-11=0 \Rightarrow x = \frac{11}{16}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{3}{10}$ và $x = \frac{11}{16}$.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

1) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{5}{x} = \frac{8}{x^2-2x}$. ĐKXD: $x \neq 0, x \neq 2$.

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{5}{x} = \frac{8}{x(x-2)} \Rightarrow \frac{x(x+2)-5(x-2)}{x(x-2)} = \frac{8}{x(x-2)} \Rightarrow x^2 + 2x - 5x + 10 = 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

Với $x-1=0 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x-2=0 \Rightarrow x=2$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

2) $\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x}$. ĐKXD: $x \neq 0, x \neq -1$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)} \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)+x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)} \Rightarrow x^2 - 1 + x = 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

Với $x-2=0 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2$.

3) $\frac{x-7}{x} = \frac{49}{x(x-7)} + \frac{3x}{x-7}$. ĐKXD: $x \neq 0, x \neq 7$.

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{(x-7)^2}{x(x-7)} = \frac{49}{x(x-7)} + \frac{3x^2}{x(x-7)} \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 49 + 3x^2 \Rightarrow 2x^2 + 14x = 0 \Rightarrow 2x(x+7) = 0$$

Với $2x=0 \Rightarrow x=0$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x+7=0 \Rightarrow x=-7$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-7$.

4) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-x} = \frac{1}{x}$. ĐKXD: $x \neq 0, x \neq 1$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{3x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x(x+1)}{x(x-1)} - \frac{3x+1}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x(x-1)} \Rightarrow x^2 + x - 3x - 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$
$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

Với $x = 0$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

5) $\frac{5+x}{3x-6} - \frac{2x-3}{2x-4} = \frac{1}{2}$. ĐKXĐ: $x \neq 2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{5+x}{3(x-2)} - \frac{2x-3}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2(5+x)}{6(x-2)} - \frac{3(2x-3)}{6(x-2)} = \frac{3(x-2)}{6(x-2)} \Rightarrow 10 + 2x - 6x + 9 = 3x - 6$$
$$\Rightarrow -7x = -25 \Rightarrow x = \frac{25}{7} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{25}{7}$.

6) $\frac{6x-x^2}{x^2-2x} + \frac{x}{x-2} = \frac{3}{x}$. ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq 2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{6x-x^2}{x(x-2)} + \frac{x}{x-2} = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{6x-x^2}{x(x-2)} + \frac{x^2}{x(x-2)} = \frac{3(x-2)}{x(x-2)} \Rightarrow 6x - x^2 + x^2 = 3x - 6$$
$$\Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -2$.

7) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2-2x}$. ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq 2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)} \Rightarrow \frac{x(x+2)}{x(x-2)} - \frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)} \Rightarrow x^2 + 2x - x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 + x = 0$$
$$\Rightarrow x(x+1) = 0.$$

Với $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x = 0$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1$.

8) $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{3x+3}$. ĐKXĐ: $x \neq -1, x \neq -2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{3(x+1)} \Rightarrow \frac{6(x+2) - 9(x+1)}{3(x+1)(x+2)} = \frac{x+2}{3(x+1)(x+2)} \Rightarrow 6x + 12 - 9x - 9 = x + 2$$
$$\Rightarrow -4x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{4}$.

9) $\frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{5}{2x+6}$. ĐKXĐ: $x \neq -3, x \neq 2$.

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{5}{2(x+3)} \Rightarrow \frac{6(x-2) - 2(x+3)}{2(x+3)(x-2)} = \frac{5(x-2)}{2(x+3)(x-2)} \Rightarrow 6x - 12 - 2x - 6 = 5x - 10$$
$$\Rightarrow -x = 8 \Rightarrow x = -8 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -8$

10) $\frac{6}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{5}{2x+6}$. ĐKXD: $x \neq -3, x \neq 2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{6}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{5}{2(x+3)} \Rightarrow \frac{12(x-2) - 2(x+3)}{2(x+3)(x-2)} = \frac{5(x-2)}{2(x+3)(x-2)} \Rightarrow 12x - 24 - 2x - 6 = 5x - 10$$
$$\Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$.

11) $\frac{7}{2x-3} + \frac{1}{2x-2} = \frac{3}{x-1}$. ĐKXD: $x \neq \frac{3}{2}, x \neq 1$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{7}{2x-3} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{3}{x-1} \Rightarrow \frac{14(x-1) + 2x-3}{2(2x-3)(x-1)} = \frac{6(2x-3)}{2(x-1)(2x-3)} \Rightarrow 14x - 14 + 2x - 3 = 12x - 18$$
$$\Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{1}{4}$.

12) $\frac{1}{2x-1} + \frac{3}{12x-8} = \frac{2}{3x-2}$. ĐKXD: $x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{2}{3}$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{2x-1} + \frac{3}{4(3x-2)} = \frac{2}{3x-2} \Rightarrow \frac{4(3x-2) + 3(2x-1)}{4(2x-1)(3x-2)} = \frac{8(2x-1)}{4(3x-2)(2x-1)} \Rightarrow 12x - 8 + 6x - 3 = 16x - 8$$
$$\Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{3}{2}$.

Bài 7: Giải các phương trình sau:

1) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{3x+5}{x^2-9}$. ĐKXD: $x \neq 3, x \neq -3$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{3x+5}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow \frac{2(x+3) + 3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3x+5}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow 2x + 6 + 3x - 9 = 3x + 5$$
$$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$.

2) $\frac{3x-1}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3}$. ĐKXD: $x \neq 3, x \neq -3$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{3x-1}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x+3) - (x-3)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow 3x - 1 = 2x + 6 - x + 3 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

xác định). Vậy phương trình có nghiệm là $x = 5$.

$$3) \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2-x} = \frac{2x-3}{x^2-4}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 2, x \neq -2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{2x-3}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \frac{(x-2)-2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-3}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow x-2-2x-4 = 2x-3$$

$$\Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1$.

$$4) \frac{x-1}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{-12}{x^2-4}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 2, x \neq -2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{-12}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-1)(x+2)+5(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-12}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow x^2+x-2+5x-10 = -12$$

$$\Rightarrow x^2+6x=0 \Rightarrow x(x+6)=0$$

Với $x=0$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x+6=0 \Rightarrow x=-6$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$ và $x=-6$

$$5) \frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{20}{x^2-25}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 5, x \neq -5$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{20}{(x-5)(x+5)} \Rightarrow \frac{(x+5)^2 - (x-5)^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{20}{(x-5)(x+5)}$$

$$\Rightarrow x^2+10x+25 - (x^2-10x+25) = 20 \Rightarrow 20x = 20 \Rightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

$$6) \frac{3}{x-7} + \frac{2}{x+7} = \frac{5}{x^2-49}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 7, x \neq -7$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{3}{x-7} + \frac{2}{x+7} = \frac{5}{(x-7)(x+7)} \Rightarrow \frac{3(x+7)+2(x-7)}{(x-7)(x+7)} = \frac{5}{(x-7)(x+7)} \Rightarrow 3x+21+2x-14 = 5$$

$$\Rightarrow 5x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{5} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{-2}{5}$.

$$7) \frac{x+2}{x-2} - \frac{6}{x+2} = \frac{x^2}{x^2-4}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 2, x \neq -2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{6}{x+2} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \frac{(x+2)^2 - 6(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow x^2+4x+4-6x+12 = x^2$$

$$\Rightarrow -2x+16=0 \Rightarrow x=8 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 8$.

$$8) \frac{x}{x+3} - \frac{2x-1}{3-x} = \frac{2x^2+4x}{x^2-9}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 3, x \neq -3$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2x^2+4x}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow \frac{x(x-3)+(x+3)(2x-1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x^2+4x}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + 4x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

Với $x-3=0 \Rightarrow x=3$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1$.

9) $\frac{x-5}{x+5} - \frac{2x}{x-5} = \frac{x(x+10)}{25-x^2}$. ĐKXD: $x \neq 5, x \neq -5$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x-5}{x+5} + \frac{2x}{5-x} = \frac{x(x+10)}{(5-x)(5+x)} \Rightarrow \frac{(x-5)(5-x)+2x(x+5)}{(5-x)(x+5)} = \frac{x(x+10)}{(5-x)(x+5)}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 10x - 25 + 2x^2 + 10x = x^2 + 10x \Rightarrow 10x = 25 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$
 (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{5}{2}$.

10) $\frac{5}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{x-5}{x^2-9}$. ĐKXD: $x \neq 3, x \neq -3$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{5}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{x-5}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow \frac{5(x+3)+4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-5}{(x+3)(x-3)} \Rightarrow 5x+15+4x-12 = x-5$$

$$\Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1$$
 (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1$.

11) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{48}{9-x^2}$. ĐKXD: $x \neq 3, x \neq -3$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{-48}{(x-3)(3+x)} \Rightarrow \frac{(x+3)^2 - (x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{-48}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 = -48$$

$$\Rightarrow 12x = -48 \Rightarrow x = -4$$
 (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -4$.

12) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$. ĐKXD: $x \neq 2, x \neq -2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{5x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2) - (5x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 - 5x + 2 = x^2 + 2x \Rightarrow -10x = -4 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$
 (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{2}{5}$.

13) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{2x-22}{x^2-4}$. ĐKXD: $x \neq 2, x \neq -2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x-2}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{2x-22}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \frac{(x-2)^2 - 3(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-22}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 3x - 6 = 2x - 22$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0$$

Với $x-4=0 \Rightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x-5=0 \Rightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=4$ và $x=5$.

14) $\frac{3}{1-3x} = \frac{2}{1+3x} - \frac{7+5x}{9x^2-1}$. ĐKXD: $x \neq \frac{1}{3}, x \neq -\frac{1}{3}$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{3}{1-3x} = \frac{2}{1+3x} + \frac{7+5x}{(1-3x)(3x+1)} \Rightarrow \frac{3(1+3x)}{(1-3x)(1+3x)} = \frac{2(1-3x)+7+5x}{(1-3x)(1+3x)}$$

$$\Rightarrow 3+9x = 2-6x+7+5x \Rightarrow 10x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{3}{5}$.

15) $\frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{x^2+9}{x^2-9}$. ĐKXD: $x \neq 3, x \neq -3$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow \frac{x(x+3)+(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow x^2+3x+x^2-6x+9 = x^2+9$$

$$\Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0$$

Với $x=0$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x-3=0 \Rightarrow x=3$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$.

16) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{7x-6}{4-x^2}$. ĐKXD: $x \neq 2, x \neq -2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{6-7x}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)-x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{6-7x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2-x^2-2x = 6-7x \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \text{ (không thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm (không có nghiệm)

17) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{2x-1}{x-3} = \frac{13x-9}{x^2-9}$ ĐKXD: $x \neq 3, x \neq -3$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+2}{x+3} + \frac{2x-1}{x-3} = \frac{13x-9}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow \frac{(x+2)(x-3)+(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{13x-9}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Rightarrow x^2-x-6+2x^2+5x-3 = 13x-9 \Rightarrow 3x^2-9x=0 \Rightarrow 3x(x-3)=0$$

Với $x=0$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x-3=0 \Rightarrow x=3$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$.

$$18) \frac{x^2 - 4x - 8}{x^2 - 4} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 2, x \neq -2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x^2 - 4x - 8}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2} \Rightarrow \frac{x^2 - 4x - 8 + (x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-5)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 8 + x^2 - x - 2 = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

Với $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

Bài 8: Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-2} = \frac{3x}{(x+1)(x-2)}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq -1, x \neq 2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{(x-2) + 5(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3x}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow x-2 + 5x+5 = 3x \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \text{ (không thỏa mãn điều$$

kiện xác định). Vậy phương trình vô nghiệm (không có nghiệm)

$$2) \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{3x-11}{(x+1)(x-2)}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq -1, x \neq 2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2(x-2) - (x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3x-11}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow 2x-4-x-1 = 3x-11 \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều$$

kiện xác định). Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

$$3) \frac{2}{x-2} - \frac{3}{3-x} = \frac{3x-20}{(x-3)(x-2)}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 2, x \neq 3$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2(x-3) + 3(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{3x-20}{(x-3)(x-2)} \Rightarrow 2x-6+3x-6 = 3x-20 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4 \text{ (thỏa mãn$$

điều kiện xác định). Vậy phương trình có nghiệm là $x = -4$.

$$4) \frac{x}{2x-6} - \frac{x}{2x+2} = \frac{3x+1}{(x+1)(x-3)}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq -1, x \neq 3$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x}{2(x-3)} - \frac{x}{2(x+1)} = \frac{3x+1}{(x+1)(x-3)} \Rightarrow \frac{x(x+1) - x(x-3)}{2(x-3)(x+1)} = \frac{6x+2}{2(x-3)(x+1)}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - x^2 + 3x = 6x + 2 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

$$5) \frac{x+3}{x+1} - \frac{x-1}{x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 0, x \neq -1$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x(x+3) - (x+1)(x-1)}{x(x+1)} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)} \Rightarrow x^2 + 3x - x^2 + 1 = 3x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x+1) = 0$$

Với $x = 0$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{1}{3}$.

$$6) \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{5}{(x-1)(x-2)}. \text{ ĐKXD: } x \neq 1, x \neq 2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{(x-2)+2(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{5}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow x-2+2x-2=5 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác$$

định). Vậy phương trình có nghiệm là $x=3$.

$$7) \frac{2}{(x-4)(x-2)} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{x-1}{2-x}. \text{ ĐKXD: } x \neq 2, x \neq 4$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2+(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{(1-x)(x-4)}{(x-2)(x-4)} \Rightarrow 2+x^2+x-6=5x-x^2-4 \Rightarrow 2x^2-4x=0 \Rightarrow 2x(x-2)=0$$

Với $x=0$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x-2=0 \Rightarrow x=2$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$.

$$8) \frac{7}{x+2} + \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x^2+5x+6}. \text{ ĐKXD: } x \neq -2, x \neq -3$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{7(x+3)+2(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} \Rightarrow 7x+21+2x+4=1 \Rightarrow 9x=-24 \Rightarrow x=-\frac{8}{3} \text{ (thỏa mãn điều$$

kiện xác định). Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\frac{8}{3}$.

$$9) \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+1}{x^2-2x-8} = \frac{3}{x-4}. \text{ ĐKXD: } x \neq -2, x \neq 4$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x^2+1}{(x+2)(x-4)} = \frac{3}{x-4} \Rightarrow \frac{x(x-4)-(x^2+1)}{(x+2)(x-4)} = \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-4)} \Rightarrow x^2-4x-x^2-1=3x+6$$

$\Rightarrow -7x=7 \Rightarrow x=-1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1$.

$$10) \frac{4}{x+6} + \frac{1}{x-3} = \frac{9}{x^2+3x-18}. \text{ ĐKXD: } x \neq -6, x \neq 3$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{4}{x+6} + \frac{1}{x-3} = \frac{9}{(x+6)(x-3)} \Rightarrow \frac{4(x-3)+(x+6)}{(x+6)(x-3)} = \frac{9}{(x+6)(x-3)} \Rightarrow 4x-12+x+6=9$$

$\Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình không có nghiệm.

$$11) \frac{2}{3x+1} - \frac{15}{6x^2-x-1} = \frac{3}{2x-1}. \text{ ĐKXD: } x \neq -\frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2}{3x+1} - \frac{15}{(3x+1)(2x-1)} = \frac{3}{2x-1} \Rightarrow \frac{2(2x-1)-15}{(3x+1)(2x-1)} = \frac{3(3x+1)}{(3x+1)(2x-1)} \Rightarrow 4x-2-15=9x+3$$
$$\Rightarrow -5x=20 \Rightarrow x=-4 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -4$.

12) $\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$. ĐKXD: $x \neq 2, x \neq -1$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-2}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow \frac{4(x+1)+x(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x^2-2}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow 4x+4+x^2-2x=x^2-2$$
$$\Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$
 Vậy phương trình có nghiệm là $x = -3$.

13) $\frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+3} = \frac{3x+11}{x^2+2x-3}$. ĐKXD: $x \neq 1, x \neq -3$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+3} = \frac{3x+11}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow \frac{2(x+3)+4(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{3x+11}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow 2x+6+4x-4=3x+11$$
$$\Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$
 Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

14) $\frac{2}{x+6} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x+8}{x^2+7x+6}$. ĐKXD: $x \neq -6, x \neq -1$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2}{x+6} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x+8}{(x+6)(x+1)} \Rightarrow \frac{2(x+1)+(x+6)}{(x+6)(x+1)} = \frac{3x+8}{(x+6)(x+1)} \Rightarrow 2x+2+x+6=3x+8$$
$$\Rightarrow 0=0 \text{ (thỏa mãn với mọi điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi $x \neq -6, x \neq -1$.

15) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}$. ĐKXD: $x \neq -1, x \neq -2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{5x+4}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow \frac{3(x+2)+2(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{5x+4}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow 3x+6+2x+2=5x+4$$
$$\Rightarrow 8=4 \text{ (vô lý).}$$
 Vậy phương trình không có nghiệm.

16) $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+4} = \frac{3x}{x^2+2x-8}$. ĐKXD: $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -4$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+4} = \frac{3x}{(x-2)(x+4)} \Rightarrow \frac{5(x+4)+2(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{3x}{(x-2)(x+4)} \Rightarrow 5x+20+2x-4=3x$$
$$4x=-16 \Rightarrow x=-4 \text{ (không thỏa mãn điều kiện xác định).}$$
 Vậy phương trình không có nghiệm.

17) $\frac{3}{2x-1} + \frac{1}{x+4} = \frac{5x+11}{2x^2+7x-4}$. ĐKXD: $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -4$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{3}{2x-1} + \frac{1}{x+4} = \frac{5x+11}{(2x-1)(x+4)} \Rightarrow \frac{3(x+4)+(2x-1)}{(2x-1)(x+4)} = \frac{5x+11}{(2x-1)(x+4)} \Rightarrow 3x+12+2x-1=5x+11$$
$$\Rightarrow 11=11 \text{ (thỏa mãn với mọi điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -4$

18) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{x^2-11}{x^2-4}$. ĐKXĐ: $x \neq 2, x \neq -2$.

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{x^2-11}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \frac{(x-2)^2 + 3(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-11}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 3x + 6 = x^2 - 11$$

$$\Rightarrow -x = -21 \Rightarrow x = 21 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 21$

19) $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} = \frac{2}{x^2-1}$. ĐKXĐ: $x \neq 1, x \neq -1$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \frac{2(x+1)^2 - 2(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 + 4x - 2 = 4 \Rightarrow 8x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

20) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{5}{x-2} = \frac{4}{x^2-4} + 1$. ĐKXĐ: $x \neq 2, x \neq -2$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{(x+1)(x-2) + 5(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4 + (x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow x^2 - x - 2 + 5x + 10 = 4 + x^2 - 4 \Rightarrow 4x = -8$$

$\Rightarrow x = -2$ (không thỏa mãn điều kiện xác định). Vậy phương trình không có nghiệm.

21) $\frac{x}{2x-6} + \frac{x}{2x+2} = \frac{-2x}{(3-x)(x+1)}$. ĐKXĐ: $x \neq 3, x \neq -1$.

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2(x+1)} = \frac{2x}{(x-3)(x+1)} \Rightarrow \frac{2x(x+1) + 2x(x-3)}{2(x-3)(x+1)} = \frac{4x}{2(x-3)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x + 2x^2 - 6x = 4x \Rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 4x(x-2) = 0$$

Với $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$ và $x = 2$.

22) $\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x}$. ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq -1$.

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x(x+1)} \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1) + x}{x(x+1)} = \frac{2x-1}{x(x+1)} \Rightarrow x^2 - 1 + x = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) = 0.$$

Với $x = 0$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

$$23) \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} = \frac{3}{2x+2}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 1, x \neq -1$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x-1} = \frac{3}{2(x+1)} \Rightarrow \frac{2+2(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1)}{2(x+1)(x-1)} \Rightarrow 2+2x+2=3x-3$$

$$\Rightarrow -x = -7 \Rightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7$.

$$24) \frac{2x}{x^2+x+1} - \frac{1}{1-x} = \frac{3x^2}{x^3-1}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 1$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{2x(x-1) + (x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} \Rightarrow 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1 = 3x^2 \Rightarrow -x = -1$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện xác định). Vậy phương trình không có nghiệm.}$$

$$25) \frac{9x^2}{x^3-8} + \frac{6}{x^2+2x+4} = \frac{3}{x-2}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{9x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} + \frac{6}{x^2+2x+4} = \frac{3}{x-2} \Rightarrow \frac{9x^2+6(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{3(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$\Rightarrow 9x^2+6x-12=3x^2+6x+12 \Rightarrow 6x^2=24 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0$$

Với $x-2=0 \Rightarrow x=2$ (không thỏa mãn điều kiện xác định).

Với $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -2$.

$$26) \frac{1}{x+2} - \frac{2x-9}{x^3+8} = \frac{2}{x^2-2x+4}. \text{ ĐKXĐ: } x \neq -2$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2x-9}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{2}{x^2-2x+4} \Rightarrow \frac{x^2-2x+4-(2x-9)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{2(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$\Rightarrow x^2-2x+4-2x+9=2x+4 \Rightarrow x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

$$27) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x^2+2}{x^3-1} = 0. \text{ ĐKXĐ: } x \neq 1$$

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{(x^2+x+1)+(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = 0 \Rightarrow x^2+x+1+x-1-x^2-2=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

(không thỏa mãn điều kiện xác định). Vậy phương trình không có nghiệm.

Bài 5. Bất đẳng thức và tính chất.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

1) Từ $a+1954 < b+1954 \Rightarrow a+1954-1954 < b+1954-1954 \Rightarrow a < b$.
2) Từ $a-7 \geq b-7 \Rightarrow a-7+7 \geq b-7+7 \Rightarrow a \geq b$.
3) Từ $a-(-4) \leq b+4 \Rightarrow a+4 \leq b+4 \Rightarrow a+4-4 \leq b+4-4 \Rightarrow a \leq b$.
4) Từ $11+a < 11+b \Rightarrow 11+a-11 < 11+b-11 \Rightarrow a < b$.
5) Từ $-6+a \leq b-6 \Rightarrow -6+a+6 \leq b-6+6 \Rightarrow a \leq b$.
6) $3-(-a) > b+3 \Rightarrow 3+a > b+3 \Rightarrow 3+a-3 > b+3-3 \Rightarrow a > b$.

Bài 2:

1) Từ $6a \leq 6b \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 6a \leq \frac{1}{6} \cdot 6b \Rightarrow a \leq b$
2) Từ $3a+1 \geq 3b+1 \Rightarrow 3a \geq 3b \Rightarrow a \geq b$
3) Từ $5a-1 > 5b-1 \Rightarrow 5a > 5b \Rightarrow a > b$
4) Từ $8-a < 8-b \Rightarrow -a < -b \Rightarrow a > b$
5) Từ $-3a \geq -3b \Rightarrow a \leq b$
6) Từ $-2a+3 \geq 3-2b \Rightarrow -2a \geq -2b \Rightarrow a \leq b$

Bài 3:

1) Ta có $a < b \Rightarrow 2a < 2b \Rightarrow 2a+1 < 2b+1 < 2b+2 \Rightarrow 2a+1 < 2b+2$
2) Ta có $a < b \Rightarrow -2a > -2b \Rightarrow -2a-5 > -2b-5 > -2b-7 \Rightarrow -2a-5 > -2b-7$
3) Ta có $a < b \Rightarrow 4a < 4b \Rightarrow 4a+2 < 4b+2 < 4b+3 \Rightarrow 4a+2 < 4b+3$

Bài 4:

1) Ta có $a > b \Rightarrow -3a < -3b \Rightarrow 1-3a < 1-3b$
2) Ta có $a > b \Rightarrow 6a > 6b \Rightarrow 6a-5 > 6b-5$
3) Ta có $a > b \Rightarrow -3a < -3b \Rightarrow -3a-4 < -3b-4$
4) Ta có $a > b \Rightarrow 2a > 2b \Rightarrow -1+2a > -1+2b$
5) Ta có $a > b \Rightarrow -2a < -2b \Rightarrow -2a+3 < -2b+3 < -2b+5 \Rightarrow -2a+3 < -2b+5$
6) Ta có $a > b \Rightarrow 4a > 4b \Rightarrow 4a+1 > 4b+1 > 4b-7 \Rightarrow 4a+1 > 4b-7$

Bài 5:

$$\text{Từ } 2a+1 \geq 2b-3 \Rightarrow 2a+1+3 \geq 2b-3+3 \Rightarrow 2a+4 \geq 2b \Rightarrow 2(a+2) \geq 2b \Rightarrow a+2 \geq b.$$

Bài 6:

$$\text{Từ } 3-4a \geq 3-4b \Rightarrow -4a \geq -4b \Rightarrow 4a \leq 4b \Rightarrow 4a+3 \leq 4b+3.$$

Bài 7:

$$\text{Từ } 2a+3 \geq 2b+4 \Rightarrow 2a+1 \geq 2b+2 > 2b \Rightarrow 2a+1 > 2b$$

Bài 8: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Bài làm:

$$\text{Từ } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0.$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = b = c.$$

Bài 9: Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a+b+c)$ với mọi a, b, c .

Bài làm:

$$\text{Từ } a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - a - b - c + \frac{3}{4} \geq 0 \Rightarrow \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = b = c = \frac{1}{2}.$$

Bài 10: Chứng minh rằng $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$ với mọi a, b, c .

Bài làm:

$$\text{Từ } 2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$$

$$\Rightarrow 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac \geq 0 \Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = b = c.$$

Bài 11: Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ với mọi a, b

Bài làm:

$$\text{Từ } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq 0 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a + b = 0 \Rightarrow a = -b.$$

Bài 12: Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Bài làm:

$$\text{Từ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow \frac{(a+b)}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a - b = 0 \Rightarrow a = b.$$

Bài 13: Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ với mọi a, b, c .

Bài làm:

$$\text{Từ } a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 \geq 0 \Rightarrow a^3(a-b) + b^3(a-b) \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = b.$$

Bài 14: Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$.

Bài làm:

$$\text{Từ } a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) \geq 0 \Rightarrow (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Rightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = b \text{ hoặc } a = -b.$$

Bài 6. Bất phương trình bậc nhất một ẩn.**B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.****Bài 1:**

1) Từ $x+3 > 5 \Rightarrow x > 2$	2) Từ $3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$
3) Từ $3x+2 > 8 \Rightarrow x > 2$	4) Từ $2x-7 > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{2}$
5) Từ $3-2x \leq 4 \Rightarrow -2x \leq 1 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}$	6) Từ $3x+5 \leq 14 \Rightarrow 3x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$
7) Từ $-x-3 \geq -4 \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$	8) Từ $-x+3 \geq -6 \Rightarrow -x \geq -9 \Rightarrow x \leq 9$

Bài 2:

1) Từ $x+2 < 3x+4 \Rightarrow -2x < 2 \Rightarrow x > -1$	2) Từ $2x-7 > 8-x \Rightarrow 3x > 15 \Rightarrow x > 5$
3) Từ $3x+5 < 2x-1 \Rightarrow x < -6$	4) Từ $5x-3 > 3x-4 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > \frac{-1}{2}$
5) Từ $7x+4 \geq 5x-8 \Rightarrow 2x \geq -12 \Rightarrow x \geq -6$	6) Từ $5x-2 \leq 2x+8 \Rightarrow 3x \leq 10 \Rightarrow x \leq \frac{10}{3}$
7) Từ $-3x-1 \leq -3+x \Rightarrow -4x \leq -2 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$	8) Từ $4-x \geq -5-2x \Rightarrow x \geq -9$

Bài 3:

1) Từ $3(2+x) \leq x-8 \Rightarrow 3x+6 \leq x-8 \Rightarrow 2x \leq -14 \Rightarrow x \leq -7$
2) Từ $4x-3 > 3(x-2) \Rightarrow 4x-3 > 3x-6 \Rightarrow x > -3$
3) Từ $10x+1 > 3(5x+2) \Rightarrow 10x+1 > 15x+6 \Rightarrow -5x > 5 \Rightarrow x < -1$
4) Từ $2(x-3)+12 \leq x+2 \Rightarrow 2x-6+12 \leq x+2 \Rightarrow x \leq -4$
5) Từ $-3(x+1) \geq x-2 \Rightarrow -3x-3 \geq x-2 \Rightarrow -4x \geq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{4}$
6) Từ $4(3-x) \geq -3x+5 \Rightarrow 12-4x \geq -3x+5 \Rightarrow -x \geq -7 \Rightarrow x \leq 7$
7) Từ $3+2(x-1) < 3(x+1)-5 \Rightarrow 3+2x-2 < 3x+3-5 \Rightarrow -x < -3 \Rightarrow x > 3$
8) Từ $4x-8 \geq 3(3x-2)+4-2x \Rightarrow 4x-8 \geq 9x-6+4-2x \Rightarrow -3x \geq 6 \Rightarrow x \leq -2$
9) Từ $3(x-2)+7x \leq 4(x+1)+14 \Rightarrow 3x-6+7x \leq 4x+4+14 \Rightarrow 6x \leq 24 \Rightarrow x \leq 4$

Bài 4:

1) Từ $2x+3(x+1) > 5x-(2x-4) \Rightarrow 2x+3x+3 > 5x-2x+4 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$
2) Từ $(x+1)(2x-1) < 2x^2-4x+1 \Rightarrow 2x^2+x-1 < 2x^2-4x+1 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$.

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

1) $\frac{x-6}{3} \leq \frac{2x+1}{4} \Rightarrow 4(x-6) \leq 3(2x+1) \Rightarrow 4x-24 \leq 6x+3 \Rightarrow -2x \leq 27 \Rightarrow x \geq \frac{-27}{2}$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{-27}{2}$.
2) $\frac{4x-5}{3} > \frac{7-x}{5} \Rightarrow 5(4x-5) > 3(7-x) \Rightarrow 20x-25 > 21-3x \Rightarrow 23x > 46 \Rightarrow x > 2$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 2$.

$$3) \frac{2x-3}{2} < \frac{1-3x}{-5} \Rightarrow 5(2x-3) < 2(3x-1) \Rightarrow 10x-15 < 6x-2 \Rightarrow 4x < 13 \Rightarrow x < \frac{13}{4}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{13}{4}$.

$$4) \frac{2x-3}{2} > \frac{8x-11}{6} \Rightarrow 3(2x-3) > 8x-11 \Rightarrow 6x-9 > 8x-11 \Rightarrow -2x > -2 \Rightarrow x < 1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 1$.

$$5) \frac{3x-1}{3} \geq \frac{4-2x}{2} \Rightarrow 2(3x-1) \geq 3(4-2x) \Rightarrow 6x-2 \geq 12-6x \Rightarrow 12x \geq 14 \Rightarrow x \geq \frac{7}{6}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{7}{6}$.

$$6) \frac{5-2x}{6} > \frac{5x-2}{3} \Rightarrow 5-2x > 2(5x-2) \Rightarrow 5-2x > 10x-4 \Rightarrow -12x > -9 \Rightarrow x < \frac{3}{4}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{3}{4}$.

$$7) \frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{4} \leq \frac{x-2}{6} \Rightarrow 4(x-2) - 3(x+1) \leq 2(x-2) \Rightarrow 4x-8-3x-3 \leq 2x-4 \Rightarrow -x \leq 7 \Rightarrow x \geq -7$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -7$.

$$8) \frac{x-1}{2} + \frac{2-x}{3} \leq \frac{3x-3}{4} \Rightarrow 6(x-1) + 4(2-x) \leq 3(3x-3) \Rightarrow 6x-6+8-4x \leq 9x-9 \Rightarrow x \geq \frac{11}{7}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{11}{7}$.

$$9) \frac{x-5}{2} - \frac{x-3}{6} < \frac{2x+1}{3} \Rightarrow 3(x-5) - (x-3) < 2(2x+1) \Rightarrow 3x-15-x+3 < 4x+2 \Rightarrow x > -7$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -7$.

$$10) \frac{x-1}{5} - \frac{4x+3}{10} < \frac{1-5x}{25} \Rightarrow 10(x-1) - 5(4x+3) < 2(1-5x) \Rightarrow 10x-10-20x-15 < 2-10x \Rightarrow 0 < 27$$

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.

$$11) \frac{x+2}{4} + \frac{2x-3}{3} \leq \frac{x-12}{6} \Rightarrow 3(x+2) + 4(2x-3) \leq 2(x-12) \Rightarrow 3x+6+8x-12 \leq 2x-24 \Rightarrow x \leq -2$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -2$.

$$12) \frac{3x+5}{4} - \frac{x-4}{6} \leq \frac{3x+7}{3} \Rightarrow 3(3x+5) - 2(x-4) \leq 4(3x+7) \Rightarrow 9x+15-2x+8 \leq 12x+28 \Rightarrow x \geq -1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -1$.

$$13) \frac{2x+1}{3} - \frac{x}{2} \leq \frac{7}{6} \Rightarrow 2(2x+1) - 3x \leq 7 \Rightarrow 4x+2-3x \leq 7 \Rightarrow x \leq 5$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 5$.

$$14) \frac{x+2}{3} \geq \frac{2x-1}{4} - 1 \Rightarrow 4(x+2) \geq 3(2x-1) - 12 \Rightarrow 4x+8 \geq 6x-3-12 \Rightarrow x \leq \frac{23}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{23}{2}$.

$$15) \frac{1-2x}{4} - 2 \leq \frac{1-5x}{8} \Rightarrow 2(1-2x) - 16 \leq 1-5x \Rightarrow 2-4x-16 \leq 1-5x \Rightarrow x \leq 15$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 15$.

$$16) \frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{5} < -2 \Rightarrow 5(x+2) - 3(3x-1) < -30 \Rightarrow 5x+10-9x+3 < -30 \Rightarrow x > \frac{43}{4}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{43}{4}$.

$$17) \frac{x-1}{4} - 1 > \frac{x+1}{3} + 8 \Rightarrow 3(x-1) - 12 > 4(x+1) + 96 \Rightarrow 3x-3-12 > 4x+4+96 \Rightarrow x < -115$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -115$.

$$18) \frac{x+2}{3} - 1 \geq 2x + \frac{x}{2} \Rightarrow 2(x+2) - 6 \geq 12x + 3x \Rightarrow 2x+4-6 \geq 15x \Rightarrow x \leq \frac{-2}{13}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{-2}{13}$.

Bài 6:

Bài làm:

Gọi số tiền gửi tiết kiệm là x (triệu đồng). ĐK: $x > 3$.

Lãi suất hàng tháng là 0,4%. $x = \frac{0,4}{100} \cdot x = \frac{4x}{1000}$.

Để lãi suất hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì ta có $\frac{4x}{1000} \geq 3$

$\Rightarrow 4x \geq 3000 \Rightarrow x \geq \frac{3000}{4} = 750$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy cần gửi số tiền ít nhất là 750 triệu đồng.

Bài 7:

Bài làm:

Gọi số kilômét mà khách hàng có thể di chuyển được là x (km). ĐK: $x > 0$

Số tiền khách hàng phải trả khi đi được x (km) là $15 + 12 \cdot x$ (nghìn đồng)

Với 100 nghìn đồng thì ta có bất phương trình $15 + 12x \leq 100 \Rightarrow 12x \leq 85 \Rightarrow x \leq \frac{85}{12} \approx 7,083 \approx 7$

Vậy khách hàng có thể đi được tối đa là 7 (km).

Bài 8: Chứng minh rằng $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ với mọi a, b .

Bài làm:

Từ $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \Rightarrow 4a^2 + b^2 - 4ab \Rightarrow (2a - b)^2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $2a = b$.

Bài 9: Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b+c+d)$ với mọi a, b, c, d .

Bài làm:

Từ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b+c+d)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad \geq 0 \Rightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 - 4ab - 4ac - 4ad \geq 0$

$\Rightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + a^2 \geq 0$

$\Rightarrow (a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 + a^2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d = 0$.

Chương 3. Căn bậc hai và căn bậc ba
Bài 7. Căn bậc hai và căn thức bậc hai.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

1) ĐKXD: $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$	2) ĐKXD: $-6x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$
3) ĐKXD: $-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$	4) ĐKXD: $7x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
5) ĐKXD: $3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{3}$	6) ĐKXD: $6x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{6}$
7) ĐKXD: $4-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$	8) ĐKXD: $-3a-4 \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{-4}{3}$
9) ĐKXD: $4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$	10) ĐKXD: $x^2-16 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$ hoặc $x \leq -4$
11) ĐKXD: $4x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ hoặc $x \leq \frac{-1}{2}$	12) ĐKXD: $1+3a^2 \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

Bài 2:

1) ĐKXD: $\frac{x+3}{5-x} \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x < 5$
2) ĐKXD: $\frac{x-3}{2-x} \geq 0 \Rightarrow 2 < x \leq 3$
3) ĐKXD: $\frac{x+2}{2-x} \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x < 2$
4) ĐKXD: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$
5) ĐKXD: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-1}{2} \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x > 4$
6) ĐKXD: $\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$
7) ĐKXD: $x^2-3x+2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$
8) ĐKXD: $x^2+4x+5 \geq 0 \Rightarrow (x+2)^2+1 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$
9) ĐKXD: $9x^2-6x+1 \geq 0 \Rightarrow (3x-1)^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Bài 3:

1) $\sqrt{3^2} + \sqrt{5^2} = 3+5=8$	2) $\sqrt{4^2} + \sqrt{(-2)^4} = 4+2^2=8$
3) $\sqrt{2^2} + \sqrt{(-7)^2} = 2+ -7 =9$	4) $\sqrt{(-6)^2} + \sqrt{6^2} = -6 +6=12$
5) $\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-1)^4} = -3 -1^2=2$	6) $\sqrt{(-11)^2} - \sqrt{(-9)^2} = -11 - -9 =2$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{(4-\sqrt{9})^2} = 4-\sqrt{9} = 4-\sqrt{9}$	2) $\sqrt{(4-\sqrt{6})^2} = 4-\sqrt{6} = 4-\sqrt{6}$
3) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2} = 3-\sqrt{11} = \sqrt{11}-3$	4) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} = 2\sqrt{2}-3 = 3-2\sqrt{2}$

5) $\sqrt{(10-\sqrt{10})^2} = 10-\sqrt{10} = 10-\sqrt{10}$	6) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{3}-2 = 2-\sqrt{3}$
7) $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$	8) $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} = \sqrt{3}-3 = 3-\sqrt{3}$
9) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = \sqrt{5}-3 = 3-\sqrt{5}$	10) $\sqrt{(3-\sqrt{8})^2} = 3-\sqrt{8} = 3-\sqrt{8}$
11) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1 = \sqrt{2}-1$	12) $\sqrt{(3+\sqrt{8})^2} = 3+\sqrt{8}$

Bài 5:

1) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3} + 1-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 1$
2) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2} - 1-\sqrt{2} = 3+\sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) = 4$
3) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2} = \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}-5 = \sqrt{2}+1 - (5-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-4$
4) $\sqrt{(5-\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+\sqrt{6})^2} = 5-\sqrt{6} - 5+\sqrt{6} = 5-\sqrt{6} - (5+\sqrt{6}) = -2\sqrt{6}$
5) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} = \sqrt{5}-2 + \sqrt{5}+2 = \sqrt{5}-2 + \sqrt{5}+2 = 2\sqrt{5}$
6) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-2 + \sqrt{3}-1 = 2-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 1$
7) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+3)^2} = 1-\sqrt{2} + \sqrt{2}+3 = \sqrt{2}-1 + \sqrt{2}+3 = 2+2\sqrt{2}$
8) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}-3 + \sqrt{5}-2 = 3-\sqrt{5} + \sqrt{5}-2 = 1$
9) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2} - \sqrt{(\sqrt{10}-5)^2} = 3-\sqrt{10} - \sqrt{10}-5 = \sqrt{10}-3 - (5-\sqrt{10}) = 2\sqrt{10}-8$
10) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = 2-\sqrt{5} - 2+\sqrt{5} = \sqrt{5}-2 - (2+\sqrt{5}) = -4$
11) $\sqrt{(3+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-6)^2} = 3+\sqrt{5} + \sqrt{5}-6 = 3+\sqrt{5} + 6-\sqrt{5} = 9$
12) $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \cdot (\sqrt{5}+1) = \sqrt{5}-1 \cdot (\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 5-1 = 4$

Bài 6:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1 = \sqrt{3}-1$
2) $\sqrt{5-2\sqrt{5}+1} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1 = \sqrt{5}-1$
3) $\sqrt{1-2\sqrt{2}+2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$
4) $\sqrt{4-4\sqrt{5}+5} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = 2-\sqrt{5} = \sqrt{5}-2$
5) $\sqrt{4+4\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$

$$6) \sqrt{5-6\sqrt{5}+9} = \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3| = 3-\sqrt{5}$$

$$7) \sqrt{7-4\sqrt{7}+4} = \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} = |\sqrt{7}-2| = \sqrt{7}-2$$

$$8) \sqrt{6-8\sqrt{6}+16} = \sqrt{(\sqrt{6}-4)^2} = |\sqrt{6}-4| = 4-\sqrt{6}$$

$$9) \sqrt{25-10\sqrt{5}+5} = \sqrt{(5-\sqrt{5})^2} = |5-\sqrt{5}| = 5-\sqrt{5}$$

$$10) \sqrt{x^2+8x+16} = \sqrt{(x+4)^2} = |x+4|$$

$$11) \sqrt{x-4\sqrt{x}+4} = \sqrt{(\sqrt{x}-2)^2} = |\sqrt{x}-2|$$

$$12) \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

$$13) \sqrt{x-8\sqrt{x}+16} = \sqrt{(\sqrt{x}-4)^2} = |\sqrt{x}-4|$$

$$14) \sqrt{x^2-10x+25} = \sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$$

$$15) \sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

Bài 7:

$$1) \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

$$2) \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

$$3) \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$$

$$4) \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$$

$$5) \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = |3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$$

$$6) \sqrt{30-10\sqrt{5}} = \sqrt{(5-\sqrt{5})^2} = |5-\sqrt{5}| = 5-\sqrt{5}$$

Bài 8:

$$1) A = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-1 + \sqrt{5}-2 = 2\sqrt{5}-3$$

$$2) A = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1 = 2\sqrt{3}$$

$$3) A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 2-\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = 3-2\sqrt{3}$$

$$4) A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}+1 - (\sqrt{3}-1) = 2$$

$$5) A = \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} = \sqrt{6}-1 - (\sqrt{6}+1) = -2$$

$$6) A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}$$

$$7) A = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2} - (3-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$8) A = \sqrt{8-2\sqrt{7}} - \sqrt{8+2\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} = \sqrt{7}-1 - (\sqrt{7}+1) = -2$$

$$9) A = \sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{(4+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = 4+\sqrt{2} + 4-\sqrt{2} = 8$$

$$10) A = \sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}} = \sqrt{(5+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{3})^2} = 5+\sqrt{3} + 4-\sqrt{3} = 9$$

Bài 9:

$$1) B = 2\sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} = 2\sqrt{2} + |\sqrt{8}-3| = 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 3$$

$$2) B = \sqrt{(\sqrt{7}-4)^2} + \sqrt{7} = |\sqrt{7}-4| + \sqrt{7} = 4-\sqrt{7} + \sqrt{7} = 4$$

$$3) B = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-3| + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 3-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 2$$

$$4) B = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + |\sqrt{2}-2| = \sqrt{2}+1 + 2-\sqrt{2} = 3$$

$$5) B = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + |2+\sqrt{5}| = \sqrt{5}-1 + 2 + \sqrt{5} = 1+2\sqrt{5}$$

$$6) B = \sqrt{(4-3\sqrt{2})^2} - \sqrt{11+6\sqrt{2}} = |4-3\sqrt{2}| - \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}-4 - (3+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-7$$

$$7) B = (1-\sqrt{3})^2 - \sqrt{4-2\sqrt{3}} + 3\sqrt{3} = 1-2\sqrt{3}+3 - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 3\sqrt{3} = 4+\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = 5$$

$$8) B = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{19+8\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-2| + \sqrt{(4+\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 6$$

Bài 10:

$$1) C = \sqrt{5-2\sqrt{3}-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \sqrt{5-2\sqrt{3}-2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \sqrt{5-2\sqrt{3}-2(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \sqrt{5-4\sqrt{3}+2} = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$$

$$2) C = \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{(4-\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

Bài 11:

$$1) \sqrt{x-2} = 4 \Rightarrow x-2 = 16 \Rightarrow x = 18$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 16$.

$$3) \sqrt{4-5x} = 12 \Rightarrow 4-5x = 144 \Rightarrow x = -28$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -28$.

$$5) 4\sqrt{x+5} = 8 \Rightarrow x+5 = 4 \Rightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1$

$$2) \sqrt{2x+1} = 3 \Rightarrow 2x+1 = 9 \Rightarrow x = 4$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$

$$4) \sqrt{6x-2} = 4 \Rightarrow 6x-2 = 16 \Rightarrow x = 3$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

$$6) \sqrt{3x-5} = 4 \Rightarrow 3x-5 = 16 \Rightarrow x = 7$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7$

7) $\sqrt{7x-3} = 5 \Rightarrow 7x-3 = 25 \Rightarrow x = 4$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$	8) $\sqrt{x+3} = 7 \Rightarrow x+3 = 49 \Rightarrow x = 46$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 46$
9) $\sqrt{x+5} - 2 = 4 \Rightarrow x+5 = 36 \Rightarrow x = 31$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 31$	10) $\sqrt{9(x-1)} = 21 \Rightarrow 9(x-1) = 441 \Rightarrow x = 50$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 50$
11) $\sqrt{9x-18} - 15 = 0 \Rightarrow 9x-18 = 225 \Rightarrow x = 27$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 27$	12) $\sqrt{4x+9} - 3 = 0 \Rightarrow 4x+9 = 9 \Rightarrow x = 0$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$
13) $3\sqrt{x-2} - 5 = 4 \Rightarrow (x-2) = 9 \Rightarrow x = 11$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 11$	14) $4 + \sqrt{x-5} = 5 \Rightarrow x-5 = 1 \Rightarrow x = 6$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$
15) $\sqrt{4x+5} = 2 \Rightarrow 4x+5 = 4 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{-1}{4}$	

Bài 12:

1) $\sqrt{x^2+1} = 2 \Rightarrow x^2+1 = 4 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \sqrt{3}$ và $x = -\sqrt{3}$.
2) $\sqrt{x^2+2} = 3 \Rightarrow x^2+2 = 9 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \sqrt{7}$ và $x = -\sqrt{7}$.
3) $\sqrt{x^2+1} = 3 \Rightarrow x^2+1 = 9 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \sqrt{8}$ và $x = -\sqrt{8}$.
4) $\sqrt{(x-3)^2} = 4 \Rightarrow (x-3)^2 = 16 \Rightarrow (x-3)^2 - 4^2 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-1) = 0$ nên $x = 5$ hoặc $x = 1$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 5$ và $x = 1$.
5) $\sqrt{(x-3)^2} = 9 \Rightarrow (x-3)^2 = 9^2 \Rightarrow (x-6)x = 0$ nên $x = 6$ hoặc $x = 0$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 6$.
6) $\sqrt{(2x-3)^2} = 9 \Rightarrow (2x-3)^2 = 9^2 \Rightarrow (2x-12)(2x+6) = 0$ nên $x = 6$ hoặc $x = -3$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 6$ và $x = -3$.
7) $\sqrt{4(x+2)^2} = 8 \Rightarrow (2x+4)^2 = 8^2 \Rightarrow (2x-4)(2x+12) = 0$ nên $x = 2$ hoặc $x = -6$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -6$.
8) $\sqrt{4(x-1)^2} - 6 = 0 \Rightarrow (2x-2)^2 = 6^2 \Rightarrow (2x-8)(2x+4) = 0$ nên $x = 4$ hoặc $x = -2$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 4$ và $x = -2$.
9) $\sqrt{(1-4x)^2} = 5 \Rightarrow (1-4x)^2 = 5^2 \Rightarrow (-4-4x)(6-4x) = 0$ nên $x = -1$ hoặc $x = \frac{3}{2}$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = \frac{3}{2}$.

Bài 13:

$$1) \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2} = 5 \Rightarrow (x-6)^2 = 5^2 \Rightarrow (x-11)(x-1) = 0 \text{ nên } x = 11 \text{ hoặc } x = 1$$

$$2) \sqrt{x^2 - 14x + 49} = 2 \Rightarrow \sqrt{(x-7)^2} = 2 \Rightarrow (x-7)^2 = 2^2 \Rightarrow (x-9)(x-5) = 0 \text{ nên } x = 9 \text{ hoặc } x = 5$$

$$3) \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6 \Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = 6 \Rightarrow (2x+1)^2 = 6^2 \Rightarrow (2x-5)(2x+7) = 0 \text{ nên } x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-7}{2}$$

$$4) \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5 \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2} = 5 \Rightarrow (2x-1)^2 = 5^2 \Rightarrow (2x-6)(2x+4) = 0 \text{ nên } x = 3 \text{ hoặc } x = -2$$

$$5) \sqrt{4x^2 - 4x + 9} = 3 \Rightarrow \sqrt{(2x-3)^2} = 3 \Rightarrow (2x-3)^2 = 3^2 \Rightarrow (2x-6)(2x) = 0 \text{ nên } x = 3 \text{ hoặc } x = 0$$

$$6) \sqrt{x^2 + 10x + 25} = 1 \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2} = 1 \Rightarrow (x+5)^2 = 1^2 \Rightarrow (x+4)(x+6) = 0 \text{ nên } x = -4 \text{ hoặc } x = -6$$

$$7) \sqrt{9 - 12x + 4x^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{(3-2x)^2} = 4 \Rightarrow (3-2x)^2 = 4^2 \Rightarrow (-1-2x)(7-2x) = 0$$

nên $x = \frac{-1}{2}$ hoặc $x = \frac{7}{2}$

$$8) \sqrt{9x^2 - 24x + 16} = 1 \Rightarrow \sqrt{(3x-4)^2} = 1 \Rightarrow (3x-4)^2 = 1^2 \Rightarrow (3x-5)(3x-3) = 0 \text{ nên } x = \frac{5}{3} \text{ hoặc } x = 1$$

$$9) \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} = 7 \Rightarrow (x+1)^2 = 7^2 \Rightarrow (x-7)(x+8) = 0 \text{ nên } x = 7 \text{ hoặc } x = -8$$

$$10) \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3 \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2} = 3 \Rightarrow (x+3)^2 = 3^2 \Rightarrow x(x+6) = 0 \text{ nên } x = 0 \text{ hoặc } x = -6$$

$$11) \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 5 \Rightarrow (x-2)^2 = 5^2 \Rightarrow (x-7)(x+3) = 0 \text{ nên } x = 7 \text{ hoặc } x = -3$$

$$12) \sqrt{x^2 - 8x + 16} = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2} = 5 \Rightarrow (x-4)^2 = 5^2 \Rightarrow (x-9)(x+1) = 0 \text{ nên } x = 9 \text{ hoặc } x = -1$$

$$13) \sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4 \Rightarrow x^2 + 5x + 20 = 16 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 0 \text{ nên } x = -1 \text{ hoặc } x = -4$$

$$14) \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 3^2 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \text{ nên } x = 4 \text{ hoặc } x = -2$$

$$15) 2\sqrt{9x^2 + 6x + 1} = 14 \Rightarrow \sqrt{(3x+1)^2} = 7 \Rightarrow (3x+1)^2 = 7^2 \Rightarrow (3x-6)(3x+8) = 0 \text{ nên } x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{-8}{3}$$

$$16) 2\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 18 \Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = 9 \Rightarrow (2x+1)^2 = 9^2 \Rightarrow (2x-8)(2x+5) = 0 \text{ nên } x = 4 \text{ hoặc } x = \frac{-5}{2}$$

Bài 14:

$$1) \text{ĐK: } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{1-2x^2} = x-1 \Rightarrow 1-2x^2 = (x-1)^2 \Rightarrow 1-2x^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x-2) = 0$$

Nên $x = 0$ (không thỏa mãn) hoặc $x = \frac{2}{3}$ (không thỏa mãn)

Vậy phương trình không có nghiệm.

<p>2) ĐK: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$</p> $\sqrt{5x+4} = x+2 \Rightarrow 5x+4 = (x+2)^2 \Rightarrow 5x+4 = x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$ <p>Nên $x=0$ (thỏa mãn) hoặc $x=1$ (thỏa mãn)</p> <p>Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$.</p>
<p>3) ĐK: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$</p> $\sqrt{x^2-4} - x + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = x-2 \Rightarrow x^2-4 = x^2-4x+4 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn) <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x=2$.</p>
<p>4) ĐK: $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$</p> $\sqrt{x^2-2x} = 2-x \Rightarrow x^2-2x = 4-4x+x^2 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn) <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x=2$.</p>
<p>5) ĐK: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$</p> $\sqrt{x^2+x+1} = x+1 \Rightarrow x^2+x+1 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2+x+1 = x^2+2x+1 \Rightarrow x=0$ (thỏa mãn) <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x=0$.</p>
<p>6) ĐK: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$</p> $\sqrt{4x^2-8x+1} = x-1 \Rightarrow 4x^2-8x+1 = (x-1)^2 \Rightarrow 4x^2-8x+1 = x^2-2x+1 \Rightarrow 3x^2-6x=0$ $\Rightarrow 3x(x-2)=0$ nên $x=0$ (không thỏa mãn) hoặc $x=2$ (thỏa mãn) <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x=2$.</p>
<p>7) ĐK: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$</p> $\sqrt{5x^2-2x+2} = x+1$ $\Rightarrow 5x^2-2x+2 = (x+1)^2 \Rightarrow 5x^2-2x+2 = x^2+2x+1 \Rightarrow 4x^2-4x+1=0 \Rightarrow (2x-1)^2=0$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.
<p>8) ĐK: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$</p> $\sqrt{4x^2-x+1} - 2x = 3 \Rightarrow \sqrt{4x^2-x+1} = 2x+3 \Rightarrow 4x^2-x+1 = 4x^2+12x+9 \Rightarrow 13x = -8$ $\Rightarrow x = -\frac{8}{13}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -\frac{8}{13}$.
<p>9) ĐK: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$</p> $\sqrt{x^2-4x+4} = x+3 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2} = x+3 \Rightarrow (x-2)^2 = (x+3)^2 \Rightarrow -5(2x+1)=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$.</p>
<p>10) ĐK: $4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$</p> $\sqrt{x^2-8x+16} = 4-x \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2} = 4-x \Rightarrow (x-4)^2 = (4-x)^2 \Rightarrow 0=0$ <p>Vậy phương trình có nghiệm với mọi $x \leq 4$</p>
<p>11) ĐK: $x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$</p> $\sqrt{x^2-6x+9} - x - 5 = 0 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2} = x+5 \Rightarrow (x-3)^2 = (x+5)^2 \Rightarrow -8(2x+2)=0 \Rightarrow x = -1$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -1$</p>

12) ĐK: $5x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-2}{5}$

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - 5x = 2 \Rightarrow \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 5x + 2 \Rightarrow (3x-1)^2 = (5x+2)^2 \Rightarrow (-2x-3)(8x+1) = 0$$

Nên $x = \frac{-3}{2}$ (không thỏa mãn) hoặc $x = \frac{-1}{8}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{-1}{8}$

13) ĐK: $x \geq 0$

$$\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 4x \Rightarrow (3x+2)^2 = (4x)^2 \Rightarrow (-x+2)(7x+2) = 0$$

nên $x = 2$ (thỏa mãn) hoặc $x = \frac{-2}{7}$ (không thỏa mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 2$.

14) ĐK: $2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}$

$$\sqrt{25-10x+x^2} - 2x = 1 \Rightarrow \sqrt{25-10x+x^2} = 2x+1 \Rightarrow (x-5)^2 = (2x+1)^2 \Rightarrow (-x-6)(3x-4) = 0$$

Nên $x = -6$ (không thỏa mãn) hoặc $x = \frac{4}{3}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{4}{3}$.

15) ĐK: $2x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-5}{2}$

$$2x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = -5 \Rightarrow \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 2x + 5 \Rightarrow (3x-1)^2 = (2x+5)^2 \Rightarrow (x-6)(5x+4) = 0$$

Nên $x = 6$ (thỏa mãn) hoặc $x = \frac{-4}{5}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 6$ và $x = \frac{-4}{5}$

16) ĐK: $5x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{5}$

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 5x - 2 \Rightarrow (3x-1)^2 = (5x-2)^2 \Rightarrow (-2x+1)(8x-3) = 0$$

nên $x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn) hoặc $x = \frac{3}{8}$ (không thỏa mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$

17) ĐK: $3x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3}$

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 5 = 3x \Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3x - 5 \Rightarrow (x-3)^2 = (3x-5)^2 \Rightarrow (-2x+2)(4x-8) = 0$$

Nên $x = 1$ (không thỏa mãn) hoặc $x = 2$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 2$

18) ĐK: $3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{3}$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3x + 1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 3x + 1 \Rightarrow (x-2)^2 = (3x+1)^2 \Rightarrow (-2x-3)(4x-1) = 0$$

Nên $x = \frac{-3}{2}$ (không thỏa mãn) hoặc $x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{4}$.

19) ĐK: $x \geq 0$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 1} = x \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = x^2 \Rightarrow -4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$
 (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{4}$.

20) ĐK: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} = x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = (x + 3)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow 8x = -4$$
$$\Rightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ (thỏa mãn)}. \text{ Vậy phương trình có nghiệm là } x = \frac{-1}{2}.$$

21) ĐK: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{2}$

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25} - 2x = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2} = 2x+3 \Rightarrow (x-5)^2 = (2x+3)^2 \Rightarrow (-x-8)(3x-2) = 0$$

nên $x = -8$ (không thỏa mãn) hoặc $x = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{2}{3}$

22) ĐK: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 3 = 4 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy phương trình không có nghiệm.

23) ĐK: $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1 \Rightarrow (x - 3)^2 = (2x - 1)^2 \Rightarrow (-x - 2)(3x - 4) = 0$$

nên $x = -2$ (không thỏa mãn) hoặc $x = \frac{4}{3}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{4}{3}$.

24) ĐK: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x - 1 \Rightarrow (2x - 1)^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow x(3x - 2) = 0$$

nên $x = 0$ (không thỏa mãn) hoặc $x = \frac{2}{3}$ (không thỏa mãn). Vậy phương trình không có nghiệm.

25) ĐK: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 2 = x \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2} = x+2 \Rightarrow (2x-1)^2 = (x+2)^2 \Rightarrow (x-3)(3x+1) = 0$$

Nên $x = 3$ (thỏa mãn) hoặc $x = \frac{-1}{3}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = \frac{-1}{3}$

26) ĐK: $2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2x = 1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 2x+1 \Rightarrow (x-2)^2 = (2x+1)^2 \Rightarrow (-x-3)(3x-1) = 0$$

Nên $x = -3$ (không thỏa mãn) hoặc $x = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$

27) ĐK: $x+7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$

$$\sqrt{25x^2 - 30x + 9} = x + 7 \Rightarrow (5x - 3)^2 = (x + 7)^2 \Rightarrow (4x - 10)(6x + 4) = 0$$

Nên $x = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn) hoặc $x = \frac{-2}{3}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{5}{2}$ và $x = \frac{-2}{3}$

$$28) \text{ĐK: } 3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{25x^2 - 10x + 1} = 3x - 2 \Rightarrow (5x - 1)^2 = (3x - 2)^2 \Rightarrow (2x + 1)(8x - 3) = 0$$

$$\text{Nên } x = \frac{-1}{2} \text{ (không thỏa mãn) hoặc } x = \frac{3}{8} \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình không có nghiệm.

$$29) \text{ĐK: } 2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-5}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2x = 5 \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2} = 2x + 5 \Rightarrow (x - 2)^2 = (2x + 5)^2 \Rightarrow (-x - 7)(3x + 3) = 0$$

$$\text{Nên } x = -7 \text{ (không thỏa mãn điều kiện) hoặc } x = -1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -1$

Bài 8. Khai căn bậc hai với phép nhân và phép chia.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - \sqrt{144} : \sqrt{36} = \sqrt{3 \cdot 27} - 12 : 6 = \sqrt{81} - 2 = 9 - 2 = 7$
2) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{25} = 4 \cdot 5 + 14 : 5 = 20 + \frac{14}{5} = \frac{114}{5}$
3) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{72} : \sqrt{2} = 5 \cdot 3 - \sqrt{72} : 2 = 15 - \sqrt{36} = 15 - 6 = 9$
4) $\sqrt{48} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{45} : \sqrt{5} = \sqrt{48 \cdot 3} - \sqrt{45 : 5} = \sqrt{144} - \sqrt{9} = 12 - 3 = 9$
5) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64} = 7 \cdot 12 + 16 : 8 = 84 + 2 = 86$
6) $(\sqrt{32} + 3\sqrt{18}) : \sqrt{2} = \sqrt{32} : \sqrt{2} + 3\sqrt{18} : \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{32 : 2} + 3\sqrt{18 : 2} = \sqrt{16} + 3\sqrt{9} = 4 + 3 \cdot 3 = 13$
7) $(\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{12}{15}} + \sqrt{\frac{75}{15}} + \sqrt{\frac{27}{15}} = \sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{\frac{9}{5}}$ $= \frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$
8) $(\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}) : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} - \sqrt{\frac{75}{3}} + \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{4} - \sqrt{25} + \sqrt{16} = 2 - 5 + 4 = 1$
9) $(\sqrt{48} - \sqrt{75} + 6\sqrt{3}) : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{16} - \sqrt{25} + 6 = 4 - 5 + 6 = 5$
10) $\sqrt{12} \cdot (5\sqrt{3} - \sqrt{27}) = 5 \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{12} \cdot \sqrt{27} = 5 \cdot \sqrt{36} - \sqrt{324} = 5 \cdot 6 - 18 = 12$
11) $\sqrt{2} \cdot (4\sqrt{2} - 6) + \sqrt{72} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 6\sqrt{2} + \sqrt{36 \cdot 2} = 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 2} - 6\sqrt{2} + \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot 2 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 8$
12) $(3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} - 5\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{100} - 5\sqrt{36} + 3\sqrt{16}$ $= 3 \cdot 10 - 5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 12$
13) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{60} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4 \cdot 15} = 3\sqrt{25} - 2\sqrt{15} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{15}$ $= 3 \cdot 5 - 2\sqrt{15} + 2\sqrt{15} = 15$
14) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} = \sqrt{16} - 3\sqrt{4} + \sqrt{20} - \sqrt{5}$ $= 4 - 3 \cdot 2 + \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{5} = -2 + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = -2 + \sqrt{5}$
15) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84} = \sqrt{28} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 21}$ $= \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{21} + 7 + \sqrt{4} \cdot \sqrt{21} = 2 \cdot 7 - 2\sqrt{21} + 7 + 2\sqrt{21} = 21$
16) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{14} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + 7\sqrt{8} = \sqrt{28} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{14} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + 7\sqrt{8}$ $= \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + 7 + 7\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 7 - 14\sqrt{2} + 7 + 14\sqrt{2} = 21$
17) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{18} + 5\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{6} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{18} \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{6}$

$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot 3 + 5 \cdot \sqrt{6} = 2 \cdot 3 - 6\sqrt{6} + 15 + 5\sqrt{6} = 21 - \sqrt{6}$
18) $\begin{aligned} & (\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11}) \cdot \sqrt{11} + 3\sqrt{22} = \sqrt{99} \cdot \sqrt{11} - \sqrt{18} \cdot \sqrt{11} - \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} + 3\sqrt{22} \\ & = \sqrt{9} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} - 11 + 3\sqrt{22} = 3 \cdot 11 - 3\sqrt{22} - 11 + 3\sqrt{22} = 22 \end{aligned}$
19) $\begin{aligned} & (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{16} - 3 \cdot 2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \\ & = 4 - 6 - 5\sqrt{2} = -2 - 5\sqrt{2} \end{aligned}$
20) $\begin{aligned} & (\sqrt{24} - \sqrt{48} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} + 12\sqrt{2} = \sqrt{24} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{48} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + 12\sqrt{2} \\ & = \sqrt{144} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} - 6 + 12\sqrt{2} = 12 - 12\sqrt{2} - 6 + 12\sqrt{2} = 6 \end{aligned}$
21) $\begin{aligned} & (2\sqrt{112} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 2\sqrt{28})\sqrt{7} = 2\sqrt{112} \cdot \sqrt{7} - 5\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{63} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{28} \cdot \sqrt{7} \\ & = 2\sqrt{16} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - 5 \cdot 7 + 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 56 - 35 + 42 - 28 = 35 \end{aligned}$
22) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 + \sqrt{5} \cdot 10 \cdot 8 = 5 - 2 + \sqrt{400} = 3 + 20 = 23$
23) $\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7}\right) \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{21} = \frac{1}{2}\sqrt{28} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{12} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{21} \\ & = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{196} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} - 7 + 2\sqrt{21} = \frac{1}{2} \cdot 14 - 2 \cdot \sqrt{21} - 7 + 2\sqrt{21} = 0 \end{aligned}$
24) $\begin{aligned} & 10\sqrt{27} - \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}} - 5\sqrt{24} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{9} \cdot \sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \\ & = 30\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 20\sqrt{3} = 6\sqrt{3} . \end{aligned}$

Bài 2:

1) $\begin{aligned} A &= \sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{14+2 \cdot 3\sqrt{5}} - \sqrt{8-2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} \\ &= 3+\sqrt{5} - (\sqrt{5}-\sqrt{3}) = 3+\sqrt{3} \end{aligned}$
2) $\begin{aligned} A &= \sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{7-2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{2} - (\sqrt{5}+\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \end{aligned}$
3) $\begin{aligned} A &= \sqrt{9+4\sqrt{2}} - \sqrt{9-4\sqrt{2}} = \sqrt{8+2 \cdot 2\sqrt{2}+1} - \sqrt{8-2 \cdot 2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2} \\ &= 2\sqrt{2}+1 - (2\sqrt{2}-1) = 2 \end{aligned}$
4) $\begin{aligned} A &= \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}+2} + \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} \\ &= \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{2}+1 = \sqrt{3}+1 \end{aligned}$
5) $\begin{aligned} A &= \sqrt{13-4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{12-2 \cdot 2\sqrt{3}+1} + \sqrt{4-2 \cdot 2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \\ &= 2\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3} = 1+\sqrt{3} \end{aligned}$
6) $A = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}+2} - \sqrt{3-2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}+2} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad A &= \sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4(6+2\sqrt{5})} + \sqrt{4-2.2\sqrt{5}+5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} \\ &= 2(\sqrt{5}+1) + \sqrt{5} - 2 = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad A &= \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}} = \sqrt{9-2.3\sqrt{6}+6} + \sqrt{24-2.3.2\sqrt{6}+9} = \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(2\sqrt{6}-3)^2} \\ &= 3 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 3 = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \quad A &= \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}} = \sqrt{4-2.2\sqrt{2}+2} + \sqrt{18-2.2.3\sqrt{2}+4} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-2)^2} \\ &= 2 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) \quad A &= \sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{9-2.3.2\sqrt{2}+8} + \sqrt{8+2.2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 = 4 \end{aligned}$$

Bài 3:

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} \\ \Rightarrow A\sqrt{2} &= \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}-1 + \sqrt{5}+1 = 2\sqrt{5} \\ \Rightarrow A &= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad A &= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \Rightarrow A\sqrt{2} &= \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}+1 - (\sqrt{3}-1) = 2 \\ \Rightarrow A &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad A &= \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} \\ \Rightarrow A\sqrt{2} &= \sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} = \sqrt{7}+1 - (\sqrt{7}-1) = 2 \\ \Rightarrow A &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad A &= \sqrt{6-\sqrt{11}} + \sqrt{6+\sqrt{11}} \\ \Rightarrow A\sqrt{2} &= \sqrt{12-2\sqrt{11}} + \sqrt{12+2\sqrt{11}} = \sqrt{(\sqrt{11}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{11}+1)^2} = \sqrt{11}-1 + \sqrt{11}+1 = 2\sqrt{11} \\ \Rightarrow A &= \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{2}} = \sqrt{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad A &= \sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}} \\ \Rightarrow A\sqrt{2} &= \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}-\sqrt{3} - (\sqrt{5}+\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} \\ \Rightarrow A &= \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$6) A = \sqrt{5 - \sqrt{21}} - \sqrt{5 + \sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{A} = \sqrt{10 - 2\sqrt{21}} - \sqrt{10 + 2\sqrt{21}} = \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{7} - \sqrt{3} - (\sqrt{7} + \sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6}$$

Bài 4:

$$1) (\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = (\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

$$2) (\sqrt{10} + \sqrt{6})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \\ = \sqrt{2}(5 - 3) = 2\sqrt{2}$$

$$3) (5 + 2\sqrt{3})\sqrt{37 - 20\sqrt{3}} = (5 + 2\sqrt{3})\sqrt{25 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 + 12} = (5 + 2\sqrt{3})\sqrt{(5 - 2\sqrt{3})^2} \\ = (5 + 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3}) = 25 - 12 = 13$$

$$4) (2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$5) \sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} + 1) \\ = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} \cdot (\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 3 - 1 = 2$$

$$6) (\sqrt{10} - \sqrt{14})(\sqrt{6} + \sqrt{35}) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{7})\sqrt{6 + \sqrt{35}} = (\sqrt{5} - \sqrt{7}) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{35}} \\ = (\sqrt{5} - \sqrt{7})\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} = (\sqrt{5} - \sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2} = (\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + \sqrt{5}) = 5 - 7 = -2$$

$$7) (\sqrt{6} + \sqrt{10})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} \\ = (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = (\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = (\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

$$8) \sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}} = \sqrt{2 + \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$$

$$9) \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}} = \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{16} \cdot \sqrt{3}}} = \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} = \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3} - 1} \\ = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1.$$

$$10) \sqrt{8 + 2\sqrt{6 - \sqrt{20}}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{6 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{8 + 2(\sqrt{5} - 1)} \\ = \sqrt{8 + 2\sqrt{5} - 2} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = \sqrt{5} + 1$$

$$11) \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = 1$$

$$12) \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = \sqrt{3 - \sqrt{29 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5}}} = \sqrt{3 - \sqrt{20 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} + 9}} = \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}$$

$$= \sqrt{3 - (2\sqrt{5} - 3)} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1$$

Bài 5:

$$\begin{aligned} 1) & (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2} = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 2)\sqrt{2\sqrt{3} + 4} \\ & = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 2)\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3} + 1)^2(\sqrt{3} - 2) = (4 + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 2) \\ & = 2(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 2) = 2(3 - 4) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) & \sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} - \sqrt{2})(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3}) \\ & = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} \cdot (\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1)^2(2 + \sqrt{3}) = (4 - 2\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ & = 2(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2(4 - 3) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) & (3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2})\sqrt{3 - \sqrt{5}} = (3 + \sqrt{5})\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)\sqrt{3 - \sqrt{5}} = (3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\ & = (3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = (3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} - 1) = (3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)^2 = (3 + \sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5}) \\ & = (3 + \sqrt{5})2(3 - \sqrt{5}) = 2(9 - 5) = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) & \sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5}) = \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5}) = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5}) \\ & = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \cdot (\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5}) = (\sqrt{5} - 1)^2(3 + \sqrt{5}) = (6 - 2\sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 2(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \\ & = 2(9 - 5) = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) & (\sqrt{14} - \sqrt{6})(5 + \sqrt{21})\sqrt{5 - \sqrt{21}} = \sqrt{2}(\sqrt{7} - \sqrt{3})(5 + \sqrt{21})\sqrt{5 - \sqrt{21}} \\ & = (\sqrt{7} - \sqrt{3})(5 + \sqrt{21})\sqrt{10 - 2\sqrt{21}} = (\sqrt{7} - \sqrt{3})(5 + \sqrt{21})\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2} = (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2(5 + \sqrt{21}) \\ & = (10 - 2\sqrt{21})(5 + \sqrt{21}) = 2(5 - \sqrt{21})(5 + \sqrt{21}) = 2(25 - 21) = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) & (4 - \sqrt{15})(\sqrt{6} + \sqrt{10})\sqrt{4 + \sqrt{15}} = (4 - \sqrt{15})\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{4 + \sqrt{15}} \\ & = (4 - \sqrt{15})(\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = (4 - \sqrt{15})(\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} \\ & = (4 - \sqrt{15})(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = (4 - \sqrt{15})(8 + 2\sqrt{15}) = (4 - \sqrt{15})2(4 + \sqrt{15}) = 2(16 - 15) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) & 2(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2(4 + \sqrt{15})\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{4 - \sqrt{15}} \\ & = 2(4 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = 2(4 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} \\ & = 2(4 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 2(4 + \sqrt{15})(8 - 2\sqrt{15}) = 4(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 4(16 - 15) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) & (\sqrt{6} + \sqrt{2})(4 - 2\sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)(4 - 2\sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1)(4 - 2\sqrt{3})\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\ & = (\sqrt{3} + 1)(4 - 2\sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = (\sqrt{3} + 1)^2(4 - 2\sqrt{3}) = (4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3}) = 16 - 12 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \sqrt{6+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}} = \sqrt{6+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}} = \sqrt{6+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-(\sqrt{3}+1)}} \\
 & = \sqrt{6+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \sqrt{6+2\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \sqrt{6+2\cdot(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{6+2\sqrt{3}-2} \\
 & = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \sqrt{2\sqrt{5}+10-\sqrt{25+4\sqrt{6-2\sqrt{5}}}} = \sqrt{2\sqrt{5}+10-\sqrt{25+4\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}} = \sqrt{2\sqrt{5}+10-\sqrt{25+4(\sqrt{5}-1)}} \\
 & = \sqrt{2\sqrt{5}+10-\sqrt{21+4\sqrt{5}}} = \sqrt{2\sqrt{5}+10-\sqrt{(2\sqrt{5}+1)^2}} = \sqrt{2\sqrt{5}+10-(2\sqrt{5}+1)} = \sqrt{9} = 3
 \end{aligned}$$

Bài 6:

$$1) \quad A = (\sqrt{19}-3)(\sqrt{19}+3) = 19-9 = 10$$

$$2) \quad A = (10-3\sqrt{11})(3\sqrt{11}+10) = 100-9\cdot 11 = 1$$

$$3) \quad A = \sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} = \sqrt{16-7} = \sqrt{9} = 3$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & A = \sqrt{12-3\sqrt{7}} - \sqrt{12+3\sqrt{7}} \Rightarrow A^2 = (\sqrt{12-3\sqrt{7}} - \sqrt{12+3\sqrt{7}})^2 \\
 & \Rightarrow A^2 = 12-3\sqrt{7}+12+3\sqrt{7}-2\sqrt{(12-3\sqrt{7})(12+3\sqrt{7})} = 24-2\sqrt{144-9\cdot 7} = 24-2\cdot 9 = 6 \Rightarrow A = \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} \Rightarrow A^2 = (\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2 \\
 & \Rightarrow A^2 = 6+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}+2\sqrt{(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})} = 12+2\sqrt{36-20} = 12+2\cdot 4 = 20 \Rightarrow A = \sqrt{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & A = \sqrt{10+2\sqrt{21}} - \sqrt{10-2\sqrt{21}} \Rightarrow A^2 = (\sqrt{10+2\sqrt{21}} - \sqrt{10-2\sqrt{21}})^2 \\
 & \Rightarrow A^2 = 10+2\sqrt{21}+10-2\sqrt{21}-2\sqrt{(10+2\sqrt{21})(10-2\sqrt{21})} = 20-2\sqrt{100-4\cdot 21} = 20-2\cdot 4 = 12 \\
 & \Rightarrow A = \sqrt{12}.
 \end{aligned}$$

Bài 7:

$$1) \quad \sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = \sqrt{4-\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}} = \sqrt{4-2\sqrt{2}-1} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

$$2) \quad \sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \sqrt{6-2\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} = \sqrt{6-2(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

$$3) \quad \sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}} = \sqrt{17-4\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{17-4(2+\sqrt{5})} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}} = \sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}} = \sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}} = \sqrt{3+\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}} = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} \\
 & = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1
 \end{aligned}$$

$$5) \quad \sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}} = \sqrt{48-10\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}} = \sqrt{48-10(2+\sqrt{3})} = \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{(5-\sqrt{3})^2} = 5-\sqrt{3}$$

$$6) \sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}} = \sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}} = \sqrt{5-2\sqrt{3}-1} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

Bài 8:

$$1) \sqrt{45}-\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} + \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}} = 3\sqrt{5} - 2 \cdot 5 + \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 10$$

$$2) \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{\frac{22}{11}} - (\sqrt{2}-1) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 1$$

$$3) \left(\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{24} + \sqrt{\frac{50}{3}} \right) \cdot \sqrt{12} = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{24} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{\frac{50}{3}} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{\frac{8 \cdot 12}{3}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{\frac{50 \cdot 12}{3}}$$

$$= \sqrt{32} - 12\sqrt{2} + \sqrt{200} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} - 12\sqrt{2} + \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$4) \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + |-7| = 3-\sqrt{5}+7 = 10-\sqrt{5}$$

$$5) 6\sqrt{3} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 1 = 6\sqrt{3} + (\sqrt{3}-1) - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} = 6\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 1$$

Bài 9:

$$1) \sqrt{x+5} = \sqrt{2x} \cdot \text{ĐK: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0. \text{ Biến đổi phương trình thành:}$$

$$x+5 = 2x \Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện). Vậy phương trình có một nghiệm là } x = 5.$$

$$2) \sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} \cdot \text{ĐK: } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1. \text{ Biến đổi phương trình thành:}$$

$$2x-1 = x-1 \Rightarrow x = 0 \text{ (không thỏa mãn điều kiện). Vậy phương trình không có nghiệm.}$$

$$3) \sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x} \cdot \text{ĐK: } \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-5}{2} \leq x \leq 1. \text{ Biến đổi phương trình thành:}$$

$$2x+5 = 1-x \Rightarrow x = \frac{-4}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện). Vậy phương trình có một nghiệm là } x = \frac{-4}{3}.$$

$$4) \sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x} \cdot \text{ĐK: } \begin{cases} x^2-x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq 0. \text{ Biến đổi phương trình thành:}$$

$$x^2-x = 3-x \Rightarrow x^2 = 3 \text{ nên } x = \sqrt{3} \text{ (không thỏa mãn điều kiện) và } x = -\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy phương trình có một nghiệm là } x = -\sqrt{3}$$

$$5) \sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-3} \cdot \text{ĐK: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}. \text{ Biến đổi phương trình thành:}$$

$$3x+1 = 4x-3 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là } x = 4.$$

$$6) \sqrt{x^2-x} = \sqrt{3x-5} \cdot \text{ĐK: } \begin{cases} x^2-x \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{5}{3}. \text{ Biến đổi phương trình thành:}$$

$$x^2-x = 3x-5 \Rightarrow x^2-4x+5 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \text{ (vô lý). Vậy phương trình không có nghiệm.}$$

$$7) \sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3} \cdot \text{ĐK: } \begin{cases} 2x^2-3 \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}. \text{ Biến đổi phương trình thành:}$$

$$2x^2-3 = 4x-3 \Rightarrow 2x^2-4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \text{ nên } x = 0 \text{ (không thỏa mãn) hoặc } x = 2 \text{ (thỏa)}$$

mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 2$.

8) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$. ĐK: $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$x^2 - x - 6 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 2 = 0 \text{ (không có giá trị nào của } x \text{ thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình không có nghiệm.

Bài 10:

1) $\sqrt{x^2 - 25} - \sqrt{x - 5} = 0$. ĐK: $\begin{cases} x^2 - 25 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{(x - 5)(x + 5)} - \sqrt{x - 5} = 0 \Rightarrow \sqrt{x - 5}(\sqrt{x + 5} - 1) = 0$$

Với $\sqrt{x - 5} = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $\sqrt{x + 5} - 1 = 0 \Rightarrow x + 5 = 1 \Rightarrow x = -4$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 5$.

2) $\sqrt{x^2 - 4} - 3\sqrt{x - 2} = 0$. ĐK: $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{(x - 2)(x + 2)} - 3\sqrt{x - 2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x - 2}(\sqrt{x + 2} - 3) = 0$$

Với $\sqrt{x - 2} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $\sqrt{x + 2} - 3 = 0 \Rightarrow x + 2 = 9 \Rightarrow x = 7$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 7$.

3) $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x + 2} = 0$. ĐK: $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{(x - 2)(x + 2)} - 2\sqrt{x + 2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x + 2}(\sqrt{x - 2} - 2) = 0$$

Với $\sqrt{x + 2} = 0 \Rightarrow x = -2$ (không thỏa mãn điều kiện)

Với $\sqrt{x - 2} - 2 = 0 \Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 6$

4) $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$. ĐK: $\begin{cases} 4x^2 - 9 \geq 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{(2x - 3)(2x + 3)} - 2\sqrt{2x + 3} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x + 3}(\sqrt{2x - 3} - 2) = 0$$

Với $\sqrt{2x + 3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ (không thỏa mãn điều kiện)

Với $\sqrt{2x - 3} - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{7}{2}$.

5) $\sqrt{9 - 4x^2} = 5\sqrt{3 - 2x}$. ĐK: $\begin{cases} 9 - 4x^2 \geq 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{(3 - 2x)(3 + 2x)} - 5\sqrt{3 - 2x} = 0 \Rightarrow \sqrt{3 - 2x}(\sqrt{3 + 2x} - 5) = 0$$

Với $\sqrt{3 - 2x} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $\sqrt{3 + 2x} - 5 = 0 \Rightarrow x = 11$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{3}{2}$.

6) $\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0$. ĐK: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{x-2} - 3\sqrt{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}(1-3\sqrt{x+2}) = 0$$

Với $\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $1-3\sqrt{x+2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-17}{9}$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{-17}{9}$.

7) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x^2+x-6} = 0$. ĐK: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2+x-6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{(x-2)(x+3)} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}(1-\sqrt{x+3}) = 0$$

Với $\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $1-\sqrt{x+3} = 0 \Rightarrow x = -2$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -2$

8) $\sqrt{x^2+x-20} = \sqrt{x-4}$. ĐK: $\begin{cases} x^2+x-20 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{(x-4)(x+5)} - \sqrt{x-4} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-4}(\sqrt{x+5}-1) = 0$$

Với $\sqrt{x-4} = 0 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $\sqrt{x+5}-1 = 0 \Rightarrow x = -4$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 4$

9) $3\sqrt{x^2-1} + 2\sqrt{x+1} = 0$. ĐK: $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$. Biến đổi phương trình thành:

$$\Rightarrow 3\sqrt{(x-1)(x+1)} + 2\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}(3\sqrt{x-1}+2) = 0$$

Với $\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x = -1$ (không thỏa mãn điều kiện)

Với $3\sqrt{x-1}+2 = 0$ (không có giá trị x thỏa mãn). Vậy phương trình không có nghiệm.

Bài 11:

1) $x - \sqrt{x-2} = 4$. ĐK: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$x-2 - \sqrt{x-2} - 2 = 0. \text{ Đặt } \sqrt{x-2} = t \text{ (ĐK: } t \geq 0 \text{) thay vào phương trình ta được}$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0$$

Với $t-2 = 0 \Rightarrow t = 2$ (thỏa mãn) $\sqrt{x-2} = 2 \Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn)

Với $t+1 = 0 \Rightarrow t = -1$ (không thỏa mãn).

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 6$.

2) $x + 2\sqrt{x+2} = 1$. ĐK: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. Biến đổi phương trình thành:

$$x+2 + 2\sqrt{x+2} - 3 = 0. \text{ Đặt } \sqrt{x+2} = t \text{ (ĐK: } t \geq 0 \text{) thay vào phương trình ta được}$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-1) = 0$$

<p>Với $t+3=0 \Rightarrow t=-3$ (<i>không thỏa mãn</i>) Với $t-1=0 \Rightarrow t=1$ (<i>thỏa mãn</i>). Khi đó $\sqrt{x+2}=1 \Rightarrow x=-1$ (<i>thỏa mãn</i>) Vậy phương trình có một nghiệm là $x=-1$.</p>
<p>3) $x+4=5\sqrt{x-2}$. ĐK $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành: $x-2-5\sqrt{x-2}+6=0$. Đặt $\sqrt{x-2}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) thay vào phương trình ta được $t^2-5t+6=0 \Rightarrow (t-2)(t-3)=0$ Với $t-2=0 \Rightarrow t=2$ (<i>thỏa mãn điều kiện</i>). Khi đó $\sqrt{x-2}=2 \Rightarrow x=6$ (<i>thỏa mãn</i>) Với $t-3=0 \Rightarrow t=3$ (<i>thỏa mãn điều kiện</i>). Khi đó $\sqrt{x-2}=3 \Rightarrow x=11$ (<i>thỏa mãn</i>) Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=6$ và $x=11$</p>
<p>4) $x-1-\sqrt{x+5}=0$. ĐK: $x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$. Biến đổi phương trình thành: $x+5-\sqrt{x+5}-6=0$. Đặt $\sqrt{x+5}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) thay vào phương trình ta được $t^2-t-6=0 \Rightarrow (t-3)(t+2)=0$ Với $t-3=0 \Rightarrow t=3$ (<i>thỏa mãn</i>). Khi đó $\sqrt{x+5}=3 \Rightarrow x=4$ (<i>thỏa mãn</i>) Với $t+2=0 \Rightarrow t=-2$ (<i>không thỏa mãn</i>). Vậy phương trình có một nghiệm là $x=4$.</p>
<p>5) $x-3\sqrt{x-2}-12=0$. ĐK: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành: $x-2-3\sqrt{x-2}-10=0$. Đặt $\sqrt{x-2}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) Thay vào phương trình ta được $t^2-3t-10=0 \Rightarrow (t-5)(t+2)=0$ Với $t-5=0 \Rightarrow t=5$ (<i>thỏa mãn</i>). Khi đó $\sqrt{x-2}=5 \Rightarrow x=27$ (<i>thỏa mãn</i>) Với $t+2=0 \Rightarrow t=-2$ (<i>không thỏa mãn</i>). Vậy phương trình có một nghiệm là $x=27$.</p>
<p>6) $x-7\sqrt{x-2}+10=0$. ĐK: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành: $x-2-7\sqrt{x-2}+12=0$. Đặt $\sqrt{x-2}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) thay vào phương trình ta được $t^2-7t+12=0 \Rightarrow (t-3)(t-4)=0$ Với $t-3=0 \Rightarrow t=3$ (<i>thỏa mãn</i>). Khi đó $\sqrt{x-2}=3 \Rightarrow x=11$ (<i>thỏa mãn</i>) Với $t-4=0 \Rightarrow t=4$ (<i>thỏa mãn</i>). Khi đó $\sqrt{x-2}=4 \Rightarrow x=18$ (<i>thỏa mãn</i>) Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=11$ và $x=18$.</p>
<p>7) $\sqrt{2x+1}-x+1=0$. ĐK: $2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}$. Biến đổi phương trình thành: $2\sqrt{2x+1}-2x+2=0 \Rightarrow 2x+1-2\sqrt{2x+1}-3=0$. Đặt $\sqrt{2x+1}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) Thay vào phương trình ta được $t^2-2t-3=0 \Rightarrow (t-3)(t+1)=0$ Với $t-3=0 \Rightarrow t=3$ (<i>thỏa mãn</i>). Khi đó $\sqrt{2x+1}=3 \Rightarrow x=4$ (<i>thỏa mãn</i>) Với $t+1=0 \Rightarrow t=-1$ (<i>không thỏa mãn</i>) Vậy phương trình có một nghiệm là $x=4$.</p>
<p>8) $\sqrt{2x+27}-6=x$. ĐK: $2x+27 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-27}{2}$. Biến đổi phương trình thành: $x-\sqrt{2x+27}+6=0 \Rightarrow 2x+27-2\sqrt{2x+27}-15=0$. Đặt $\sqrt{2x+27}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) Thay vào phương trình ta được $t^2-2t-15=0 \Rightarrow (t+3)(t-5)=0$ Với $t+3=0 \Rightarrow t=-3$ (<i>không thỏa mãn</i>) Với $t-5=0 \Rightarrow t=5$ (<i>thỏa mãn</i>). Khi đó $\sqrt{2x+27}=5 \Rightarrow x=-1$ (<i>thỏa mãn</i>)</p>

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1$.

Bài 12:

1) $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7$. ĐK: $x^2 - 3x + 5 \geq 0$. Biến đổi phương trình thành:

$$x^2 - 3x + 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} - 12 = 0. \text{ Đặt } \sqrt{x^2 - 3x + 5} = t \text{ (ĐK: } t \geq 0)$$

$$\text{Thay vào phương trình ta được } t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t + 4) = 0$$

$$\text{Với } t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ (thỏa mãn). Khi đó } \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 4) = 0$$

$$\text{Nên } x = -1 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t + 4 = 0 \Rightarrow t = -4 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 4$.

2) $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3x$. ĐK: $x^2 - 3x + 3 \geq 0$. Biến đổi phương trình thành:

$$x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 3 = 0. \text{ Đặt } \sqrt{x^2 - 3x + 3} = t \text{ (ĐK: } t \geq 0)$$

$$\text{Thay vào phương trình ta được } t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t + 3) = 0$$

$$\text{Với } t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ (thỏa mãn). Khi đó } \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\text{Nên } x = 1 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t + 3 = 0 \Rightarrow t = -3 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

3) $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$. ĐK: $2x^2 - 8x + 12 \geq 0$. Biến đổi phương trình thành:

$$2x^2 - 8x + 12 - 2\sqrt{2x^2 - 8x + 12} - 24 = 0. \text{ Đặt } \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = t \text{ (ĐK: } t \geq 0)$$

$$\text{Thay vào phương trình ta được } t^2 - 2t - 24 = 0 \Rightarrow (t + 4)(t - 6) = 0$$

$$\text{Với } t + 4 = 0 \Rightarrow t = -4 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Khi đó } \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 6 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 6) = 0$$

$$\text{Nên } x = -2 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 6$.

4) $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$. ĐK: $6x^2 - 12x + 7 \geq 0$. Biến đổi phương trình thành:

$$\Rightarrow 6x^2 - 12x + 7 - 6\sqrt{6x^2 - 12x + 7} - 7 = 0. \text{ Đặt } \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = t \text{ (ĐK: } t \geq 0)$$

$$\text{Thay vào phương trình ta được } t^2 - 6t - 7 = 0 \Rightarrow (t + 1)(t - 7) = 0$$

$$\text{Với } t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t - 7 = 0 \Rightarrow t = 7 \text{ (thỏa mãn). Khi đó}$$

$$\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 7 \Rightarrow 6x^2 - 12x - 42 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 8$$

$$\text{Nên } x - 1 = \sqrt{8} \Rightarrow x = \sqrt{8} + 1 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x - 1 = -\sqrt{8} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{8} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1 + \sqrt{8}$ và $x = 1 - \sqrt{8}$

5) $4x^2 - 12x - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 15 = 0$. ĐK: $4x^2 - 12x + 11 \geq 0$. Biến đổi phương trình thành:

$$4x^2 - 12x + 11 - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 4 = 0. \text{ Đặt } \sqrt{4x^2 - 12x + 11} = t \text{ (ĐK: } t \geq 0)$$

$$\text{Thay vào phương trình ta được } t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 4) = 0$$

$$\text{Với } t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ (thỏa mãn). Khi đó } \sqrt{4x^2 - 12x + 11} = 1 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 10 = 0 \text{ (không có giá trị)}$$

x thỏa mãn).

Với $t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ (thỏa mãn). Khi đó $\sqrt{4x^2 - 12x + 11} = 4 \Rightarrow 4x^2 - 12x - 5 = 0 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 14$

Nên $x = \frac{3 + \sqrt{14}}{2}$ (thỏa mãn) hoặc $x = \frac{3 - \sqrt{14}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{3 + \sqrt{14}}{2}$ và $x = \frac{3 - \sqrt{14}}{2}$

6) $3\sqrt{x^2 + 3x} = (x + 5)(2 - x)$. ĐK: $x^2 + 3x \geq 0$. Biến đổi phương trình thành:

$x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} + 10 = 0$. Đặt $\sqrt{x^2 + 3x} = t$ (ĐK: $t \geq 0$)

Thay vào phương trình ta được $t^2 + 3t - 10 = 0 \Rightarrow (t + 5)(t - 2) = 0$

Với $t + 5 = 0 \Rightarrow t = -5$ (không thỏa mãn)

Với $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ (thỏa mãn). Khi đó $\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 4) = 0$

Nên $x = 1$ (thỏa mãn) hoặc $x = -4$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -4$.

7) $(x + 1)(x + 4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$. ĐK: $x^2 + 5x + 2 \geq 0$. Biến đổi phương trình thành:

$x^2 + 5x + 2 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} - 4 = 0$. Đặt $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = t$ (ĐK: $t \geq 0$)

Thay vào phương trình ta được $t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t + 1)(t - 4) = 0$

Với $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$ (không thỏa mãn)

Với $t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ (thỏa mãn). Khi đó $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 7) = 0$

Nên $x = 2$ (thỏa mãn) hoặc $x = -7$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -7$

Bài 9. Biến đổi đơn giản và rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

1) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{180}$ $= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = -\sqrt{5}$	2) $5\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$ $= 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
3) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - \sqrt{48}$ $= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$	4) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$ $= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
5) $3\sqrt{5} + \sqrt{20} - 7\sqrt{5}$ $= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$	6) $\sqrt{32} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}$ $= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$
7) $5\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{72}$ $= 15\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$	8) $2\sqrt{32} - 3\sqrt{98} - 6\sqrt{200}$ $= 8\sqrt{2} - 21\sqrt{2} - 60\sqrt{2} = -73\sqrt{2}$
9) $3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{50}$ $= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0$	10) $5\sqrt{5} + \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$ $= 5\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$
11) $2\sqrt{32} + 4\sqrt{8} - 5\sqrt{18}$ $= 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = \sqrt{2}$	12) $2\sqrt{18} - 7\sqrt{2} + \sqrt{162}$ $= 6\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
13) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$ $= 8\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$	14) $2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - \sqrt{50}$ $= 4\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
15) $5\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{48}$ $= 15\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$	16) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{50} + 5\sqrt{32}$ $= 3\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$
17) $\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 15\sqrt{5}$ $= 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 15\sqrt{5} = -7\sqrt{5}$	18) $4\sqrt{5} - 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$ $= 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \sqrt{5}$
19) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$ $= 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$	20) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{45} + \sqrt{500}$ $= 2\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
21) $3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$ $= 6\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$	22) $\sqrt{98} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8} + \sqrt{18}$ $= 7\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$
23) $\sqrt{5} - \sqrt{48} + 5\sqrt{27} - \sqrt{45}$ $= \sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 3\sqrt{5} = 11\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$	24) $2\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{75} - \sqrt{243}$ $= 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$
25) $\sqrt{50} + \sqrt{32} - 3\sqrt{18} + 4\sqrt{8}$ $= 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$	26) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$ $= 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$

Bài 2:

1) $2\sqrt{75} - 5\sqrt{27} - \sqrt{192} + 4\sqrt{48}$ $= 10\sqrt{3} - 15\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$	2) $2\sqrt{48} + 4\sqrt{27} + \sqrt{75} + 2\sqrt{3}$ $= 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$
3) $5\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{108} - \sqrt{192}$ $= 10\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 12\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = -\sqrt{3}$	4) $4\sqrt{12} + \sqrt{108} - 8\sqrt{3} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ $= 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{3} + 2$
5) $3\sqrt{45} - 7\sqrt{125} + \sqrt{500} + 16\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ $= 9\sqrt{5} - 35\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 16\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = -32$	6) $A = 5\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \frac{1}{5}\sqrt{50}$ $= 15\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Bài 3:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$	2) $\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
3) $\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$	4) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$
5) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$	6) $\frac{3}{\sqrt{3}+2} = \frac{3(\sqrt{3}-2)}{3-4} = 3(2-\sqrt{3})$
7) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$	8) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}+3} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{5}-3)}{5-9} = \frac{3\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{4}$
9) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{6-5} = 2(\sqrt{6}+\sqrt{5})$	10) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
11) $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}} = \frac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{10-7} = \sqrt{10}-\sqrt{7}$	12) $\frac{-\sqrt{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{-2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} = \frac{-2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}$
13) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 3+2\sqrt{2}$	14) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3} = 7+4\sqrt{3}$
15) $\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1} = \frac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{12-1} = \frac{22-11\sqrt{3}}{11} = 2-\sqrt{3}$	
16) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{12})(\sqrt{5}+2)}{5-4} = \sqrt{75}+2\sqrt{15}-\sqrt{60}-2\sqrt{12} = 5\sqrt{5}-4\sqrt{3}$	
17) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3} = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4+\sqrt{15}$	
18) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} = \frac{6+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-6}{-1} = -\sqrt{6}$	
19) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{8}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{8-5} = \frac{2\sqrt{16}+\sqrt{40}+2\sqrt{10}+5}{3} = \frac{13+4\sqrt{10}}{3}$	

$$20) \frac{10+\sqrt{5}}{2\sqrt{15}+\sqrt{3}} = \frac{(10+\sqrt{5})(2\sqrt{15}-\sqrt{3})}{57} = \frac{20\sqrt{15}-10\sqrt{3}+2\sqrt{75}-\sqrt{15}}{57} = \frac{19\sqrt{15}}{57}$$

Bài 4:

$$1) A = \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2}{3-1} = 1$$

$$2) A = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = 2\sqrt{3}$$

$$3) A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{4-3} = 4$$

$$4) A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$5) A = \frac{2}{\sqrt{10}-3} + \frac{2}{\sqrt{10}+3} = \frac{2(\sqrt{10}+3)+2(\sqrt{10}-3)}{10-9} = 4\sqrt{10}$$

$$6) A = \frac{1}{5+2\sqrt{3}} + \frac{1}{5-2\sqrt{3}} = \frac{5-2\sqrt{3}+5+2\sqrt{3}}{25-4.3} = \frac{10}{13}$$

$$7) A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}-(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{2-7} = \frac{2\sqrt{7}}{-5} = \frac{-2\sqrt{7}}{5}$$

$$8) A = \frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \frac{(5-2\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)}{5-4} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = 5\sqrt{5}+10-2\sqrt{25}-4\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1) = 1$$

$$9) A = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \sqrt{20} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}-2\sqrt{3}-2\sqrt{5} = -2\sqrt{3}$$

$$10) A = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-1} + \frac{12}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1} + \frac{12(\sqrt{7}+1)}{7-1} = \sqrt{7}+2\sqrt{7}+2 = 3\sqrt{7}+2$$

$$11) A = \frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{5}+2-\sqrt{5} = 2$$

$$12) A = \frac{\sqrt{27}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - (3-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$13) A = \sqrt{5} - \frac{8}{\sqrt{5}+1} + \frac{2\sqrt{5}-5}{2-\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \frac{8(\sqrt{5}-1)}{5-1} + \frac{\sqrt{5}(2-\sqrt{5})}{2-\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2(\sqrt{5}-1) + \sqrt{5} = 2$$

$$14) A = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} - (\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-\sqrt{3}+1 = 1$$

$$15) A = \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \frac{4}{\sqrt{5}-3} = 3-\sqrt{5} + \frac{4(\sqrt{5}+3)}{5-9} = 3-\sqrt{5} - (\sqrt{5}+3) = -2\sqrt{5}$$

$$16) A = \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}} + 3-\sqrt{5} = 5$$

$$17) A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} - \sqrt{5} + 2 = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 2 = 3$$

18)

$$19) A = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3} = -\sqrt{2}$$

$$20) A = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1} + \sqrt{3}-1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 2\sqrt{3}-1$$

$$21) A = \sqrt{48} - \frac{\sqrt{21}-\sqrt{15}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} = 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 4\sqrt{3}-1$$

$$22) A = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}-1 + 2\sqrt{3} - \frac{6(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 3\sqrt{3}-1-3(\sqrt{3}+1) = -4$$

$$23) A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} + \frac{\sqrt{12}}{6} - \frac{2(3-\sqrt{3})}{9-3} = 2-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3-\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$24) A = \frac{2}{\sqrt{6}-2} + \frac{2}{\sqrt{6}+2} + \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{2(\sqrt{6}+2)+2(\sqrt{6}-2)}{6-4} + \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{2} + \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{17\sqrt{6}}{6}$$

$$25) A = \frac{4}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{6}{\sqrt{3}-3} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{3-1} + \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} + \frac{6(\sqrt{3}+3)}{3-9} = 2(\sqrt{3}-1) - \sqrt{3}-2 - \sqrt{3}-3 = -7$$

$$26) A = \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{6}{\sqrt{3}+3} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} - \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} + \frac{6(\sqrt{3}-3)}{3-9} = \sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+2 - \sqrt{3}+3 = \sqrt{3}+4$$

$$27) A = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3} - (2+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{2-9} - 2 - \sqrt{3} = -\frac{4-6\sqrt{2}}{7}$$

$$28) A = \frac{6+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} - \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} + \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} \\ = 2\sqrt{3} - (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \sqrt{5}-\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$29) A = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{16}}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = \frac{2(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{7}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} + (\sqrt{7}-2) = 2\sqrt{7}$$

$$30) A = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{27} + (\sqrt{3}+1)^2 = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} - 3\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} = 5$$

$$31) A = \frac{9}{\sqrt{10}-1} + \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{11-2\sqrt{10}} = \frac{9(\sqrt{10}+1)}{10-1} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{10}-1)}{\sqrt{5}} + \sqrt{(\sqrt{10}-1)^2} \\ = \sqrt{10}+1 + \sqrt{10}-1 + \sqrt{10}-1 = 3\sqrt{10}+1$$

$$32) A = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-3\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})}{4-2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-3)}{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$$33) A = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \frac{2}{1-\sqrt{3}} - \frac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} + \frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3} - \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+1} = \sqrt{7} + \sqrt{3} - (1+\sqrt{3}) - \sqrt{7} = -1$$

$$34) A = \frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}} + \frac{3}{2-\sqrt{5}} + \frac{6\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}} = \frac{7(\sqrt{12}+\sqrt{5})}{12-5} + \frac{3(2+\sqrt{5})}{4-5} + \frac{\sqrt{5}(6+2\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 6 - 3\sqrt{5} + 6 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{3}$$

$$35) A = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \frac{6}{\sqrt{3}} - 15\sqrt{\frac{1}{3}} + 1 = \sqrt{3} - 1 + \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 1 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$36) A = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = -2$$

$$37) A = \sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{8}{\sqrt{5}-1} - \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \frac{8(\sqrt{5}+1)}{5-1} - (3+\sqrt{5}) = -1$$

$$38) A = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{2}{\sqrt{6}-2} - \frac{6}{3-\sqrt{6}} \right) (2\sqrt{6}+7) = \left(\frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} + \frac{2(\sqrt{6}+2)}{6-4} - \frac{6(3+\sqrt{6})}{9-6} \right) (2\sqrt{6}+7) = [3(\sqrt{6}-1) + \sqrt{6} + 2 - 2(3+\sqrt{6})] (2\sqrt{6}+7) = (2\sqrt{6}-7)(2\sqrt{6}+7) = 24 - 49 = -25$$

$$39) A = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2}{4-3} = 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} = 14$$

$$40) A = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3} = 8 - 2\sqrt{15} + 8 + 2\sqrt{15} = 16$$

$$41) A = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{3+\sqrt{5}})^2 + (\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}{\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} = \frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{\sqrt{9-5}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$42) A = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = 4$$

Bài 5:

$$1) A = \frac{6}{4+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \frac{6}{4-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{6}{4+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} - \frac{6}{4-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \frac{6}{4+\sqrt{3}-1} - \frac{6}{4-\sqrt{3}+1} = \frac{6}{3+\sqrt{3}} - \frac{6}{5-\sqrt{3}} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3} - \frac{6(5+\sqrt{3})}{25-3} = 3 - \sqrt{3} - \frac{15+3\sqrt{3}}{11} = \frac{33-11\sqrt{3}-15-3\sqrt{3}}{11} = \frac{18-14\sqrt{3}}{11}$$

$$2) A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2-(2-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$3) A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}$$

$$= \frac{(6+\sqrt{3}-3)+(6-\sqrt{3}-3)}{6} = 1. \text{ Vậy } A = \sqrt{2}.$$

$$4) A = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{3-\sqrt{5}}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = 2$$

Bài 6:

$$1) A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}}. \text{ ĐKXĐ: } x > 0, x \neq 4$$

$$A = \left[\frac{(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x-4} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}} = 2.$$

$$2) A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-4}. \text{ ĐKXĐ: } x \geq 0, x \neq 4$$

$$A = \left[\frac{(\sqrt{x}-2)+(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right] \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x-4} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}} = 2 \text{ (ĐK: } x \neq 0)$$

$$3) A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - 2 \right) \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} + 1 \right). \text{ ĐKXĐ: } x \geq 0, x \neq 1$$

$$A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} \right) \left(\frac{x-1+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \right) = \left(\frac{x+\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+3} \right) \left(\frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \right)$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) = x-4$$

$$4) A = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right)^2. \text{ ĐKXĐ: } a \geq 0, a \neq 1$$

$$A = \left[\frac{(\sqrt{a}-1)^2 + (\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \right] \left(\frac{a+1-2}{a+1} \right)^2 = \frac{a-2\sqrt{a}+1+a+2\sqrt{a}+1}{a-1} \cdot \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2$$

$$= \frac{2a+2}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2} = \frac{2(a-1)}{a+1}$$

$$5) A = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right). \text{ ĐKXĐ: } a > 0, a \neq 4$$

$$A = \left[\frac{(\sqrt{a}-2)^2 - (\sqrt{a}+2)^2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} \right] \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}} = \frac{a-4\sqrt{a}+4 - (a+4\sqrt{a}+4)}{a-4} \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}} = \frac{-8\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = -8$$

6) $A = \frac{5\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x^2+2\sqrt{x}+8}{x-4}$. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 4$

$$A = \frac{(5\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) + (3\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) - (x^2+2\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{-x^2+8x-16}{x-4} = \frac{-(x-4)^2}{x-4} = 4-x$$

7) $A = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 9$

$$A = \frac{x+3+\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \quad (\text{ĐK: } x \neq 0)$$

8) $A = \left(\frac{2x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$. ĐKXĐ: $x > 0, x \neq 1$

$$A = \left(\frac{2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{4(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{4(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

9) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 4$.

$$A = \left[\frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot (\sqrt{x}+2) = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

10) $A = \frac{5-5\sqrt{x}}{x-16} - \frac{2}{4-\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}+4}$. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 16$.

$$A = \frac{5-5\sqrt{x}+2(\sqrt{x}+4)+3(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{1}{x-16}$$

11) $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1}$. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$A = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1) + 5(\sqrt{x}+1) + 4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$$

12) $A = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3} + \frac{15-4\sqrt{x}}{9-4x}$. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$.

$$A = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+3) + (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}-3) + 4\sqrt{x}-15}{(2\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+3)} = \frac{4x-9}{4x-9} = 1$$

13) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}+1}$. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 1$

$$A = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \cdot \frac{4(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{x+1}}$$

Bài 7:

1) $\sqrt{4(x-3)} + \sqrt{9x-27} = 10$. ĐKXD: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x-3} = 10 \Rightarrow 5\sqrt{x-3} = 10 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 7$.

2) $\sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} = 1$. ĐKXD: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{16(x+1)} - \sqrt{9(x+1)} = 1 \Rightarrow 4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow x+1 = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

3) $\sqrt{4x-8} = 6 - \sqrt{x-2}$. ĐKXD: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$\Rightarrow 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2} = 6 \Rightarrow 3\sqrt{x-2} = 6 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Rightarrow x = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 6$

4) $\sqrt{4x-12} = 10 - \sqrt{9x-27}$. ĐKXD: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x-3} = 10 \Rightarrow 5\sqrt{x-3} = 10 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 7$

5) $5\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} = 16$. ĐKXD: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:

$$5\sqrt{x-5} + 3\sqrt{x-5} = 16 \Rightarrow 8\sqrt{x-5} = 16 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 9$

6) $\sqrt{4(1-3x)} + \sqrt{9(1-3x)} = 10$. ĐKXD: $1-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{1-3x} + 3\sqrt{1-3x} = 10 \Rightarrow 5\sqrt{1-3x} = 10 \Rightarrow \sqrt{1-3x} = 2 \Rightarrow 1-3x = 4 \Rightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -1$

7) $\sqrt{4x-8} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-18} = 15$. ĐKXD: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{x-2} + \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{x-2} = 15 \Rightarrow 5\sqrt{x-2} = 15 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow x-2 = 9 \Rightarrow x = 11 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 11$

8) $\sqrt{x-1} - \sqrt{4x-4} + \sqrt{9x-9} = 5$. ĐKXD: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-1} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} = 5 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{5}{2} \Rightarrow x-1 = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \frac{29}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{29}{4}$.

9) $5\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} - \sqrt{4x-20} = 18$. ĐKXD: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:

$$5\sqrt{x-5} + 3\sqrt{x-5} - 2\sqrt{x-5} = 18 \Rightarrow 6\sqrt{x-5} = 18 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 3 \Rightarrow x-5 = 9 \Rightarrow x = 14 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 14$.

10) $6\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} - 2\sqrt{4x-20} = 25$. ĐKXD: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:

$6\sqrt{x-5} + 3\sqrt{x-5} - 4\sqrt{x-5} = 25 \Rightarrow 5\sqrt{x-5} = 25 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 5 \Rightarrow x-5 = 25 \Rightarrow x = 30 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 30$.</p>
<p>11) $\sqrt{4x+4} - 2\sqrt{9x+9} = \sqrt{x+1} - 15$. ĐKXD: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Biến đổi phương trình thành:</p> $2\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = -15 \Rightarrow -5\sqrt{x+1} = -15 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 3 \Rightarrow x+1 = 9 \Rightarrow x = 8 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 8$.</p>
<p>12) $7\sqrt{x-5} - 6\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{9x-45} = 12$. ĐKXD: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:</p> $7\sqrt{x-5} - 12\sqrt{x-5} + 9\sqrt{x-5} = 12 \Rightarrow 4\sqrt{x-5} = 12 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 3 \Rightarrow x-5 = 9 \Rightarrow x = 14 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 14$.</p>
<p>13) $3\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+16} = 15 - \sqrt{16x+64}$. ĐKXD: $x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$. Biến đổi phương trình thành:</p> $3\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+4} + 4\sqrt{x+4} = 15 \Rightarrow 5\sqrt{x+4} = 15 \Rightarrow \sqrt{x+4} = 3 \Rightarrow x+4 = 9 \Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 5$.</p>
<p>14) $7\sqrt{x-5} - \sqrt{9x-45} + \sqrt{4x-20} = 6$. ĐKXD: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:</p> $7\sqrt{x-5} - 3\sqrt{x-5} + 2\sqrt{x-5} = 6 \Rightarrow 6\sqrt{x-5} = 6 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 1 \Rightarrow x-5 = 1 \Rightarrow x = 6 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 6$.</p>
<p>15) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} - \sqrt{25x-25} + 2 = 0$. ĐKXD: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Biến đổi phương trình thành:</p> $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} - 5\sqrt{x-1} = -2 \Rightarrow -2\sqrt{x-1} = -2 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = 1 \Rightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 2$.</p>
<p>16) $\sqrt{9x+27} + 4\sqrt{x+3} - \frac{3}{4}\sqrt{16x+48} = 0$. ĐKXD: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$. Biến đổi phương trình thành:</p> $3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x+3} - \frac{3}{4} \cdot 4\sqrt{x+3} = 0 \Rightarrow 4\sqrt{x+3} = 0 \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -3$.</p>
<p>17) $\sqrt{4x-20} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} + \sqrt{x-5} = 4$. ĐKXD: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:</p> $2\sqrt{x-5} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{x-5} = 4 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x-5 = 4 \Rightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 9$.</p>
<p>18) $\sqrt{1-x} + \sqrt{4-4x} - \frac{1}{3}\sqrt{16-16x} + 5 = 0$. ĐKXD: $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$. Biến đổi phương trình thành:</p> $\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x} - \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{1-x} = -5 \Rightarrow \frac{5}{3}\sqrt{1-x} = -5 \text{ (vô lí) vì } \frac{5}{3}\sqrt{1-x} \geq 0 \text{ mà } -5 < 0.$ <p>Vậy phương trình không có nghiệm.</p>
<p>19) $3\sqrt{4x+4} - \sqrt{9x+9} - 8\sqrt{\frac{x+1}{16}} = 5$. ĐKXD: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Biến đổi phương trình thành:</p> $6\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} - 8 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow x+1 = 25 \Rightarrow x = 24 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 24$.</p>

20) $\sqrt{9x-45} - \sqrt{x-5} = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{4x-20}$. ĐKXD: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:

$$3\sqrt{x-5} - \sqrt{x-5} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x-5} = 4 \Rightarrow 3\sqrt{x-5} = 4 \Rightarrow \sqrt{x-5} = \frac{4}{3} \Rightarrow x-5 = \frac{16}{9} \Rightarrow x = \frac{61}{9} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{61}{9}$.

21) $\sqrt{4x-8} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-18} = 3\sqrt{x-2} - 1$. ĐKXD: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{x-2} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2} = -1 \Rightarrow -2\sqrt{x-2} = -1 \Rightarrow \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{9}{4}$.

22) $\sqrt{9x+18} + \frac{1}{4}\sqrt{16x+32} - 2\sqrt{x+2} = 4$. ĐKXD: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. Biến đổi phương trình thành:

$$3\sqrt{x+2} + \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x+2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 2$.

23) $\sqrt{4x-12} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-27} = 4 + \sqrt{x-3}$. ĐKXD: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x-3} - \sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 7$.

24) $\sqrt{4x-8} - 5\sqrt{x-2} + \frac{2}{3}\sqrt{9x-18} + 1 = 0$. ĐKXD: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{x-2} - 5\sqrt{x-2} + \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{x-2} = -1 \Rightarrow -\sqrt{x-2} = -1 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 3$.

25) $5\sqrt{4x-16} - \frac{7}{3}\sqrt{9x-36} = 36 - 3\sqrt{x-4}$. ĐKXD: $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$. Biến đổi phương trình thành:

$$10\sqrt{x-4} - \frac{7}{3} \cdot 3\sqrt{x-4} + 3\sqrt{x-4} = 36 \Rightarrow 6\sqrt{x-4} = 36 \Rightarrow \sqrt{x-4} = 6 \Rightarrow x = 40 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 40$.

26) $\sqrt{x-3} + \sqrt{9x-27} - \frac{1}{2}\sqrt{4x-12} = 6$. ĐKXD: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x-3} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x-3} = 6 \Rightarrow 3\sqrt{x-3} = 6 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 7$.

27) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} = 4 + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}}$. ĐKXD: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} - 3 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{x-5} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{x-5} = 4 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 9$.

28) $\sqrt{16x+48} - 7\sqrt{x+3} + \frac{3}{4}\sqrt{4x+12} = -6$. ĐKXD: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$. Biến đổi phương trình thành:

$$4\sqrt{x+3} - 7\sqrt{x+3} + \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{x+3} = -6 \Rightarrow \frac{-3}{2}\sqrt{x+3} = -6 \Rightarrow \sqrt{x+3} = 4 \Rightarrow x = 13 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 13$.

29) $\sqrt{4x-12} - \sqrt{9x-27} + \sqrt{\frac{25x-75}{4}} - 3 = 0$. ĐKXD: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$2\sqrt{x-3} - 3\sqrt{x-3} + \frac{5}{2}\sqrt{x-3} = 3 \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{x-3} = 3 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 6$.

30) $\sqrt{16x-48} - 8\sqrt{4x-12} + \frac{2}{3}\sqrt{9x-27} = -20$. ĐKXD: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$4\sqrt{x-3} - 16\sqrt{x-3} + \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{x-3} = -20 \Rightarrow -10\sqrt{x-3} = -20 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 7$.

31) $\sqrt{9x-9} - 3\sqrt{x-1} + \frac{5}{2}\sqrt{16x-16} = 30$. ĐKXD: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Biến đổi phương trình thành:

$$3\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x-1} + \frac{5}{2} \cdot 4\sqrt{x-1} = 30 \Rightarrow 10\sqrt{x-1} = 30 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 10$.

32) $\frac{3}{2}\sqrt{4+8x} - \frac{5}{3}\sqrt{9+18x} - \frac{1}{4}\sqrt{16+32x} = 1$. ĐKXD: $2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}$.

Biến đổi phương trình thành: $\frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{1+2x} - \frac{5}{3} \cdot 3\sqrt{1+2x} - \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{1+2x} = 1$

$$\Rightarrow -3\sqrt{1+2x} = 1 \Rightarrow \sqrt{1+2x} = \frac{-1}{3} \text{ (vô lí) vì } \sqrt{1+2x} \geq 0 \text{ mà } \frac{-1}{3} < 0$$

Vậy phương trình không có nghiệm.

33) $\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{4x-4} + \sqrt{\frac{18x-18}{2}} = 6$. ĐKXD: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Biến đổi phương trình thành:

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-1} = 6 \Rightarrow 3\sqrt{x-1} = 6 \Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 5$.

Bài 8:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$. ĐKXD: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$. Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = 1 \Rightarrow x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x(1-x)} = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0$$

Nên $x = 0$ (thỏa mãn) hoặc $1-x = 0 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$

2) $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 1$. ĐKXD: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$.

$$(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^2 = 1 \Rightarrow x + 2 - x + 2\sqrt{x(2-x)} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{2x-x^2} = -1 \Rightarrow \sqrt{2x-x^2} = \frac{-1}{2} \text{ (vô lí)}$$

Vì $\sqrt{2x-x^2} \geq 0$ mà $\frac{-1}{2} < 0$. Vậy phương trình không có nghiệm.

$$3) \sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}. \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0.$$

$$(\sqrt{x+5})^2 = (1 + \sqrt{x})^2 \Rightarrow x+5 = 1+x+2\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 4$.

$$4) \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2. \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2 = 2^2 \Rightarrow x-1+3-x+2\sqrt{(x-1)(3-x)} = 4 \Rightarrow \sqrt{(x-1)(3-x)} = 1$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 2$.

$$5) \sqrt{10-x} + \sqrt{x+3} = 5. \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} 10-x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x \leq 10$$

$$(\sqrt{10-x} + \sqrt{x+3})^2 = 25 \Rightarrow 10-x+x+3+2\sqrt{(10-x)(x+3)} = 25 \Rightarrow \sqrt{(10-x)(x+3)} = 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0$$

Nên $x-1=0 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn) hoặc $x-6=0 \Rightarrow x=6$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1$ và $x=6$

$$6) \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4. \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$$

$$(\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x})^2 = 16 \Rightarrow x+5+5-x+2\sqrt{(x+5)(5-x)} = 16 \Rightarrow \sqrt{25-x^2} = 3$$

$$\Rightarrow 25-x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=4$ và $x=-4$

$$7) \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 5. \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 3$$

$$(\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x})^2 = 25 \Rightarrow x-3+2-x+2\sqrt{(x-3)(2-x)} = 25 \Rightarrow \sqrt{(x-3)(2-x)} = 13$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 175 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{675}{4} = 0 \text{ (không tồn tại giá trị } x)$$

Vậy phương trình không có nghiệm.

$$8) \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5. \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq -1$$

Đặt $\sqrt{x+1} = t$ (ĐK: $t \geq 0$) $\Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x+6 = t^2 + 5$. Thay vào phương trình ta được

$$t + \sqrt{t^2 + 5} = 5 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 5} = 5 - t \text{ (ĐK: } 5 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 5)$$

Khi đó $t^2 + 5 = (5-t)^2 \Rightarrow t^2 + 5 = 25 - 10t + t^2 \Rightarrow 10t = 20 \Rightarrow t = 2$ (thỏa mãn)

Thay $t = 2$ trở lại ta được $\sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 3$.

$$9) \sqrt{3x-5} = 3 - \sqrt{x-2}. \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$

Đặt $\sqrt{x-2} = t$ (ĐK: $t \geq 0$) $\Rightarrow x = t^2 + 2 \Rightarrow 3x - 5 = 3t^2 + 1$. Thay vào phương trình ta được

$$\sqrt{3t^2+1}=3-t \quad (\text{ĐK: } 3-t \geq 0 \Rightarrow t \leq 3)$$

$$\text{Khi đó } 3t^2+1=(3-t)^2 \Rightarrow t^2+3t-4=0 \Rightarrow (t-1)(t+4)=0$$

Với $t=1$ (thỏa mãn). Khi đó $\sqrt{x-2}=1 \Rightarrow x=3$ (thỏa mãn)

Với $t=-4$ (không thỏa mãn). Vậy phương trình có một nghiệm là $x=3$

$$10) \sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=1. \text{ ĐKXD: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2.$$

Đặt $\sqrt{x-2}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) $\Rightarrow x-2=t^2 \Rightarrow x+1=t^2+3$. Thay vào phương trình ta được

$$\sqrt{t^2+3}-t=1 \Rightarrow \sqrt{t^2+3}=1-t. \quad (\text{ĐK: } 1-t \geq 0 \Rightarrow t \leq 1)$$

$$\Rightarrow t^2+3=(1-t)^2 \Rightarrow -2t=2 \Rightarrow t=-1 \quad (\text{không thỏa mãn})$$

Vậy phương trình không có nghiệm.

$$11) \sqrt{x-5}-\sqrt{x+4}=2. \text{ ĐKXD: } \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 5$$

Đặt $\sqrt{x-5}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) $\Rightarrow x-5=t^2 \Rightarrow x+4=t^2+9$. Thay vào phương trình ta được

$$t-\sqrt{t^2+9}=2 \Rightarrow \sqrt{t^2+9}=t-2 \quad (\text{ĐK: } t-2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2)$$

$$\Rightarrow t^2+9=(t-2)^2 \Rightarrow 4t=-5 \Rightarrow t=-\frac{5}{4} \quad (\text{không thỏa mãn})$$

Vậy phương trình không có nghiệm.

$$12) \sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=4. \text{ ĐKXD: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4.$$

Đặt $\sqrt{x-4}=t$ (ĐK: $t \geq 0$) $\Rightarrow x-4=t^2 \Rightarrow x+3=t^2+7$. Thay vào phương trình ta được

$$\sqrt{t^2+7}-t=4 \Rightarrow \sqrt{t^2+7}=t+4 \quad (\text{ĐK: } t \geq -4)$$

$$\Rightarrow t^2+7=(t+4)^2 \Rightarrow 8t=-9 \Rightarrow t=-\frac{9}{8} \quad (\text{không thỏa mãn})$$

Vậy phương trình không có nghiệm.

Bài 9: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 9, x \neq 25$

Bài làm:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})+2x}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}-x+2x}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}+x}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} : \frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-5} = \frac{x}{\sqrt{x}-5} \end{aligned}$$

Bài 10: Rút gọn biểu thức sau $A = \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

Bài làm:

$$A = \left[\frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2} \right] : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} = \frac{4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4}{x-4}.$$

Bài 11: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right)$.

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tìm các giá trị của x để giá trị của biểu thức A bằng 9.

Bài làm:

a) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$A = \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1.$$

b) Để biểu thức A nhận giá trị bằng 9 hay $\sqrt{x}-1=9 \Rightarrow \sqrt{x}=10 \Rightarrow x=100$ (thỏa mãn điều kiện).

Bài 12: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}-x}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài làm:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{x})} = \frac{x+1}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{x})} = \frac{x+1}{1-x}$

b) Khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

Bài 13: Cho biểu thức $A = \frac{x-7}{x-3\sqrt{x}} - \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tính $A: \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ khi $x = \frac{2}{10-3\sqrt{11}}$.

Bài làm:

a) $A = \frac{x-7}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{(3+\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$

b) Ta có $A: \frac{1}{\sqrt{x}-3} = A \cdot (\sqrt{x}-3) = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \cdot (\sqrt{x}-3) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ (1)

$$\text{Khi } x = \frac{2}{10-3\sqrt{11}} \Rightarrow x = \frac{4}{20-6\sqrt{11}} = \frac{4}{(\sqrt{11}-3)^2} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\frac{4}{(\sqrt{11}-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}-3}$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } A = \frac{1}{\sqrt{x}-3} = 2 : \frac{2}{\sqrt{11}-3} = \sqrt{11}-3.$$

Bài 14: Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị của x để $A = \frac{9}{2}$.

Bài làm:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Để } A = \frac{9}{2} \text{ thì } \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2(x+2\sqrt{x}+1) = 9\sqrt{x} \Rightarrow (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) = 0$$

$$\text{Với } 2\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } \sqrt{x}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 15: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

c) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức $A = \frac{13}{3}$.

Bài làm:

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{b) Khi } x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện). Thay vào biểu thức } A, \text{ ta được } A = \frac{4+\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$$

$$\text{c) Để biểu thức } A = \frac{13}{3} \text{ thì } \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{13}{3} \Rightarrow 3(x+\sqrt{x}+1) = 13\sqrt{x} \Rightarrow (3\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) = 0$$

$$\text{Với } 3\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } \sqrt{x}-3=0 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 16: Cho biểu thức $A = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) So sánh giá trị của biểu thức A với 6.

Bài làm:

a) ĐKXD: $x > 0, x \neq 1$

$$A = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$$

b) Xét $A-6 = \frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} - 6 = \frac{2x-4\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} > 0$ với mọi $x > 0, x \neq 1$.

Vậy $A > 6$.

Bài 17: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq \pm 4$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm x để $A > \frac{1}{2}$.

Bài làm:

a) $A = \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$

b) Xét $A - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2} = \frac{4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

Để $A > \frac{1}{2} \Rightarrow A - \frac{1}{2} > 0$ hay $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow 2-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow -4 < x < 4$.

Mà $x > 0, x \neq \pm 4$ nên $0 < x < 4$

Bài 18: Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức $A = 3$.

Bài làm:

a) $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

b) Để biểu thức $A = 3$ thì $\frac{2}{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{9}$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 19: Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài làm:

$$a) A = \frac{3(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Khi $x = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$ (thỏa mãn điều kiện)

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{2}-1$ vào biểu thức A ta được $A = \frac{1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 20: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{9}$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị của x để biểu thức $A = \frac{6}{5}$.

Bài làm:

$$a) A = \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1) - (3\sqrt{x}-1) + 8\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} : \frac{3\sqrt{x}+1 - 3\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}+1}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}-1}$$

b) Để $A = \frac{6}{5}$ thì $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}-1} = \frac{6}{5} \Rightarrow 5(x+\sqrt{x}) = 6(3\sqrt{x}-1) \Rightarrow 5x - 13\sqrt{x} + 6 = 0$
 $\Rightarrow (5\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2) = 0$.

Với $5\sqrt{x}-3=0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{25}$ (thỏa mãn)

Với $\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Bài 21: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 2$.

Bài làm:

$$a) A = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (2+5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

b) Để $A = 2$ thì $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ (thỏa mãn)

Bài 22: Cho biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài làm:

$$a) P = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

$$b) \text{ Ta có } P = \frac{\sqrt{x}+1+1}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} > 0 \Rightarrow P > 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \Rightarrow P \leq 2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 1 < P \leq 2$ nên $P = 2$.

$$\text{Khi đó } 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 23: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P = 7$.

Bài làm:

$$a) P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + 1 = x - \sqrt{x} + 1.$$

$$b) \text{ Để } P = 7 \Rightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 7 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) = 0.$$

$$\text{Với } \sqrt{x}+2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ (không tồn tại giá trị } x)$$

$$\text{Với } \sqrt{x}-3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 24: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

b) Chứng minh rằng $A + B = 3$

Bài làm:

$$a) \text{ Khi } x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức } A \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}+1} = \frac{3}{4}.$$

$$b) \text{ Ta có } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x + (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) - 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Khi đó } A + B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = 3$$

Bài 25: Cho $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Rút gọn B
- Tìm các số hữu tỉ x để $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Khi $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) Ta có $B = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)+5(\sqrt{x}+1)+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+7\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$.

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+2}$.

$$\text{Do } x \geq 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow P > 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} \leq 2 \Rightarrow P \leq 3 \quad (2).$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 1 < P \leq 3$.

$$\text{Với } P = 2 \Rightarrow 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = 1 \Rightarrow \sqrt{x}+2 = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } P = 3 \Rightarrow 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+2} = 3 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+4}{6-3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Rút gọn biểu thức $M = A \cdot B$

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta được $A = \frac{9+4}{6-3 \cdot 3} = \frac{-13}{3}$

b) Ta có $M = A \cdot B = \frac{x+4}{6-3\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}} \right) = \frac{x+4}{3(2-\sqrt{x})} \cdot \left(\frac{5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right)$

$$= \frac{x+4}{3(2-\sqrt{x})} \cdot \frac{5\sqrt{x}-2-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{-x-4}{x-4}$$

Bài 27: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$.

- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức P được xác định.
- Rút gọn biểu thức P .
- Tính giá trị của P khi $x = 4$.

Bài làm:

a) ĐKXD: $x > 0, x \neq 1$.

b) Ta có
$$P = \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1 - (\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$$

c) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức P ta được
$$P = \frac{\sqrt{4} + 1}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

Bài 10. Căn bậc ba và căn thức bậc ba.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Tính

1) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$	2) $-\sqrt[3]{216} = -\sqrt[3]{6^3} = -6$
3) $-\sqrt[3]{0} = 0$	4) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{125} = 3 - 2 - 5 = -4$
5) $\sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{27 \cdot 6} - \sqrt[3]{8 \cdot 6} - \sqrt[3]{6}$ $= 3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{6} = 0$	6) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64}$ $= 2 + (-3) + (-4) = -5$
7) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128}$ $= \sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{-8 \cdot 2} + \sqrt[3]{64 \cdot 2}$ $= 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$	8) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{-27}$ $= \sqrt[3]{8 \cdot 5} - \sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{-27}$ $= 2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} - 9 = \sqrt[3]{5} - 9$
9) $-\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{(-1)^3}$ $= -\sqrt[3]{8 \cdot 3} - 2\sqrt[3]{-27 \cdot 3} + \sqrt[3]{-1}$ $= -2\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{3} - 1 = 4\sqrt[3]{3} - 1$	

Bài 2:

1) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}-1$
2) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$
3) $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(9+4\sqrt{5})} = \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+2)^2} = \sqrt{5}+2$
4) $(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1) = (\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1) = 2+1=3$
5) $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3 \cdot 2}+\sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}) = 3+2=5$

Các bài toán ôn thi vào 10 khu vực Hà Nội.

Dạng 1. Tìm x nguyên hoặc x để biểu thức nhận giá trị nguyên

Bài 1: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm các giá trị nguyên của x để hiệu $A - B$ có giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}-3} = \frac{5}{1} = 5$

b) Ta có $B = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$

c) Ta có $A - B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+3}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}$

Xét $A - B = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Xét $A - B \neq 0$. Để $A - B$ nhận giá trị nguyên thì $\frac{3}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên hay

$\sqrt{x}-3 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{4; 2; 6; 0\} \Rightarrow x \in \{16; 4; 36; 0\}$ (thỏa mãn)

Bài 2: Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+\sqrt{x}+2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{16}{\sqrt{16}+1} = \frac{16}{5}$.

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{x}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

Xét $P = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-1} = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Xét $P \neq 0$. Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x$ là số chính phương và $\sqrt{x}-1 \in U(1)$

Với $\sqrt{x}-1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Với $\sqrt{x}-1 = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Bài 3: Cho biểu thức $A = \frac{x-8}{\sqrt{x+3}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{5\sqrt{x+3}}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$.
- Với $M = \frac{A}{B}$. Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức M đạt giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{4-8}{\sqrt{4+3}} = \frac{-4}{5}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$

c) Ta có $A : B = \frac{x-8}{\sqrt{x+3}} : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} = \frac{x-8}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-1-7}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x}-1 - \frac{7}{\sqrt{x+1}}$

Xét $M = \frac{A}{B} = 0 \Rightarrow x-8=0 \Rightarrow x=8$ (thỏa mãn)

Xét $M \neq 0$ để M nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x+1} \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

Với $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1$ nên

TH1: $\sqrt{x+1}=1 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$ (thỏa mãn)

TH2: $\sqrt{x+1}=7 \Rightarrow \sqrt{x}=6 \Rightarrow x=36$ (thỏa mãn)

Bài 4: Cho biểu thức $A = \frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ với $x > 0$.

- Tính giá trị của B khi $x = 4$.
- Chứng minh $P = A + B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B , ta được $B = \frac{1}{\sqrt{4+3}} = \frac{1}{5}$

b) Học sinh tự chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$.

c) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Xét $P = 0 \Rightarrow \sqrt{x}-3=0 \Rightarrow x=9$ (thỏa mãn)

Xét $P \neq 0$. Để P nhận giá trị nguyên thì $M = \frac{3}{\sqrt{x}}$ có giá trị nguyên hay $\sqrt{x} \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Do $\sqrt{x} > 0$ với mọi $x > 0$ nên $\sqrt{x} \in \{1; 3\}$

TH1: Với $\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn)

TH2: Với $\sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$ (thỏa mãn)

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 36$.
- Rút gọn A .
- Tìm tất cả các số nguyên x để $P = A \cdot B$ là số nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B , ta được $B = \frac{\sqrt{36}-3}{\sqrt{36+1}} = \frac{3}{7}$

b) Ta có $A = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}) + 11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})} = \frac{3x+9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+1}} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{3\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x+1}} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$

Xét $P = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Xét $P \neq 0$. Để P nhận giá trị nguyên thì $M = \frac{3}{\sqrt{x+1}}$ nhận giá trị nguyên hay $\sqrt{x+1} \in U(3)$

Nhận thấy $\sqrt{x+1} \geq 1$ với mọi $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x+1} \in \{1; 3\}$

TH1: $M = 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

TH2: $M = 3 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Bài 6: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+6}}{x-4}$ và $B = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

- Tìm giá trị của B khi $x = \frac{4}{9}$.
- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức B nhận giá trị nguyên
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = A - B$.

Bài làm:

a) ĐKXĐ của biểu thức B là $x \geq 0, x \neq 4$

Thay $x = \frac{4}{9}$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B , ta được $B = \left(3 - \sqrt{\frac{4}{9}}\right) : \left(\sqrt{\frac{4}{9}} + 2\right) = \frac{7}{8}$

b) ĐKXĐ của biểu thức A là $x \geq 0, x \neq 4$

Ta có $A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}) - (\sqrt{x+1})(\sqrt{x-2}) - (\sqrt{x+6})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{2}{\sqrt{x+2}}$

c) Ta có $B = \frac{-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x+2}} = \frac{-\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x+2}} = -1 + \frac{5}{\sqrt{x+2}}$

Xét $B = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\sqrt{x}+3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Xét $B \neq 0$. Để biểu thức B nhận giá trị nguyên thì biểu thức $\frac{5}{\sqrt{x+2}}$ có giá trị nguyên

hay $\sqrt{x}+2 \in U(5)$. Mà $\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \in \{5\}$

Với $\sqrt{x}+2=5 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$ (thỏa mãn)

d) Ta có $S = A - B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}$

Để S nhận giá trị nhỏ nhất thì $\frac{3}{\sqrt{x}+2}$ là số dương lớn nhất $\Rightarrow \sqrt{x}+2$ có giá trị nhỏ nhất.

Mà $\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x}+2$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2. Đạt được khi $\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 1 - \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$. Đạt được khi $x=0$.

Bài 7: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

c) So sánh B với 1.

d) Tìm số nguyên x để $P = A \cdot B$ nhận giá trị là số tự nhiên.

Bài làm:

a) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}-3} = \frac{5}{1} = 5$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

c) Xét $B-1 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{x}+1} < 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$. Nên $B < 1$.

d) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}$.

Xét $P=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$

Xét $P \neq 0$. Để P nhận giá trị là các số tự nhiên thì $\sqrt{x}-3 \in U(3)$ và $\frac{3}{\sqrt{x}-3} \geq -1$

Nên $\sqrt{x}-3 \in \{1; 3; -3\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{4; 6; 0\} \Rightarrow x \in \{16; 36; 0\}$ (thỏa mãn)

Bài 8: Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm giá trị nguyên của x để $P = A \cdot B$ có giá trị là số tự nhiên.

Bài làm:

a) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{16-2}{\sqrt{16}} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

$$c) \text{ Ta có } P = A \cdot B = \frac{x-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-9+7}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{7}{\sqrt{x}-3}$$

Xét $P = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Xét $P \neq 0$. Để P nhận giá trị là số tự nhiên thì x phải là số chính phương và $\sqrt{x} - 3 \in U(7)$

Vì $\sqrt{x} - 3 > -3$ với mọi $x > 0$, $x \neq 9$ nên $\sqrt{x} - 3 \in \{-1; 1; 7\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{2; 4; 10\} \Rightarrow x \in \{4; 16; 100\}$

Vậy các giá trị nguyên cần tìm của x là $x \in \{2; 4; 16; 100\}$

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} + \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{1}{x-1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm giá trị x nguyên lớn nhất để biểu thức $P = A + B$ nhận giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{3\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}-1} = \frac{8}{2} = 4$

b) Ta có $B = \frac{(\sqrt{x}+1) + (\sqrt{x}-1) + 2}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

c) Ta có $P = A + B = \frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{3\sqrt{x}-3+3}{\sqrt{x}-1} = 3 + \frac{3}{\sqrt{x}-1}$

Để P nhận giá trị nguyên thì $\frac{3}{\sqrt{x}-1}$ có giá trị nguyên hay $\sqrt{x}-1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Do x là số nguyên lớn nhất nên $\sqrt{x}-1$ lớn nhất và $\sqrt{x}-1 \geq -1$ nên ta có

$$\sqrt{x}-1 = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 10: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-6} - \frac{2}{\sqrt{x}+6} - \frac{9\sqrt{x}+6}{x-36}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$, $x \neq 36$

a) Tính giá trị của A khi $x = 16$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$

c) Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên nhỏ nhất.

Bài làm:

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{16}+6}{\sqrt{16}-3} = \frac{10}{1} = 10$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}$

Để P nhận giá trị nguyên thì $\frac{3}{\sqrt{x}-3}$ có giá trị nguyên hay $\sqrt{x}-3 \in U(3) = \{1; -1; 3; -3\}$

Và để P nhỏ nhất thì $\sqrt{x}-3$ là số âm lớn nhất.

$$\text{Nên } \sqrt{x} - 3 = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn) khi đó } P = 1 + \frac{3}{-1} = -2.$$

Bài 11: Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{18}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = 36$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm tất cả các giá trị của x nguyên để P có giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{7}{\sqrt{36}+8} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2(\sqrt{x}-3) - 18}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{7}{\sqrt{x}+8} \cdot \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$

Nhận thấy với $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 > 0 \Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x}+3} > 0$ (1)

Mặt khác $\sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{7}{3}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < P \leq \frac{7}{3} \Rightarrow P = 1$ hoặc $P = 2$ vì P nhận giá trị nguyên.

TH1: $P = 1 \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 1 \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 7 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ (thỏa mãn)

TH2: $P = 2 \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 2 \Rightarrow \sqrt{x}+3 = \frac{7}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (không thỏa mãn)

Bài 12: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 49$
- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các giá trị của x để $P = A \cdot B$ có giá trị là một số nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 49$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B , ta được $B = \frac{\sqrt{49}-3}{\sqrt{49}+5} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

b) Ta có $A = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1) + 11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} = \frac{3\sqrt{x}+15-15}{\sqrt{x}+5} = 3 - \frac{15}{\sqrt{x}+5}$

Xét $P = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Xét $P \neq 0$. Để P nhận giá trị nguyên thì $M = \frac{15}{\sqrt{x}+5}$ có giá trị nguyên.

Nhận thấy $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x}+5 > 0 \Rightarrow M > 0$ (1)

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x} + 5 \geq 5 \Rightarrow M = \frac{15}{\sqrt{x} + 5} \leq 3 \quad (2).$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < M \leq 3 \Rightarrow M = 1, M = 2$ hoặc $M = 3$ (vì M nguyên)

$$\text{Với } M = 1 \Rightarrow \frac{15}{\sqrt{x} + 5} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 10 \Rightarrow x = 100 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } M = 2 \Rightarrow \frac{15}{\sqrt{x} + 5} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 5 = \frac{15}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{25}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } M = 3 \Rightarrow \frac{15}{\sqrt{x} + 5} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} + 5 = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 13: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 10}{x - 4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2}$
- Tìm x để biểu thức $P = \frac{A}{B}$ nhận giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{9} + 3}{\sqrt{9} + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2}$

c) Ta có $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} : \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 1 - 3}{\sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$

Xét $P = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 4$ (không thỏa mãn)

Xét $P \neq 0$. Để P nhận giá trị nguyên thì $M = \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$ có giá trị nguyên

$$\text{Với } x \geq 0, x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow M = \frac{3}{\sqrt{x} + 1} > 0 \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow M = \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \leq 3 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < M \leq 3 \Rightarrow M = 1, M = 2$ hoặc $M = 3$ (vì M có giá trị nguyên)

TH1: $M = 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (không thỏa mãn)

TH2: $M = 2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

TH3: $M = 3 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Bài 14: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} - \frac{2}{\sqrt{x}-4} - \frac{4\sqrt{x}}{16-x}$ với $x \geq 0, x \neq 16$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}$
- Tìm x để biểu thức $Q = A \cdot B$ nhận giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{4}-5}{\sqrt{4}+2} = \frac{-3}{4}$

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) - 2(\sqrt{x}+4) + 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{x-2\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}$

c) Ta có $Q = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+4} = 1 - \frac{9}{\sqrt{x}+4}$

Xét $P = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 5 = 0 \Rightarrow x = 25$ (thỏa mãn)

Xét $P \neq 0$. Để Q nhận giá trị nguyên thì $M = \frac{9}{\sqrt{x}+4}$ có giá trị nguyên

Do $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x}+4} \leq \frac{9}{4} \Rightarrow M \leq \frac{9}{4}$ (1)

Mặt khác $\frac{9}{\sqrt{x}+4} > 0 \Rightarrow M > 0$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < M \leq \frac{9}{4} \Rightarrow M = 1$ hoặc $M = 2$ (vì M có giá trị nguyên)

TH1: Với $M = 1 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x}+4} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 4 = 9 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$ (thỏa mãn)

TH2: Với $M = 2 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x}+4} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Bài 15: Cho biểu thức $A = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}} - \frac{9\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm x để biểu thức $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{3-\sqrt{4}}{\sqrt{4}+1} = \frac{1}{3}$

b) Ta có $B = \frac{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1) - (9\sqrt{x}+5) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = -\frac{2x+6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$

$$= -\frac{2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{-2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-3}$$

$$c) \text{ Ta có } P = A \cdot B = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{-2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-3} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x+1}} = \frac{2(\sqrt{x}+1)+2}{\sqrt{x+1}} = 2 + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

Xét $P = 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = 0$ (không tồn tại giá trị của x)

Xét $P \neq 0$. Để P có giá trị nguyên thì $M = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ có giá trị nguyên.

$$\text{Nhận thấy } x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow M = \frac{2}{\sqrt{x+1}} > 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+1}} \leq 2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < M \leq 2$. Mà M nhận giá trị nguyên nên $M \in \{1; 2\}$

$$\text{TH1: } M = 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } M = 2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 16: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+4}{x-1} + \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

c) Tìm giá trị của x để $Q = \frac{2B}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{25}+2}{\sqrt{25}-1} = \frac{7}{4}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$$c) \text{ Ta có } Q = \frac{2B}{A} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}+4-4}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{4}{\sqrt{x}+2}$$

Xét $Q = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Xét $Q \neq 0$. Để Q nhận giá trị nguyên thì $M = \frac{4}{\sqrt{x}+2}$ có giá trị nguyên

$$\text{Nhận thấy } x \geq 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow M > 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} \leq 2 \Rightarrow M \leq 2 \text{ với mọi } x \geq 0, x \neq 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < M \leq 2 \Rightarrow M \in \{1; 2\}$ (vì M nhận giá trị nguyên)

$$\text{TH1: } M = 1 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } M = 2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 17: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị của x để P có giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{25+7}}{\sqrt{25-2}} = \frac{12}{3} = 4$

b) Rút gọn $B = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$

c) $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x+2}}$

Xét $P = 0 \Rightarrow \sqrt{x+7} = 0$ (không tồn tại giá trị x)

Xét $P \neq 0$. Để P nhận giá trị nguyên thì $M = \frac{5}{\sqrt{x+2}}$ có giá trị nguyên.

Do $x \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} > 0 \Rightarrow M > 0$ (1)

Mặt khác $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow M \leq \frac{5}{2}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < M < \frac{5}{2} \Rightarrow M \in \{1, 2\}$ do M nhận giá trị nguyên.

TH1: $M = 1 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 1 \Rightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

TH2: $M = 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Bài 18: Cho hai biểu thức $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{3}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3})}$ với $x > 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức $P = B \cdot A$
- Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1}) - (\sqrt{x+3}) + 3}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3})} = \frac{x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3})}$

Xét $P = B \cdot A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3})} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$

c) Xét $P = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Xét $P \neq 0$. Có $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+3}} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x+3}}$. Để P nhận giá trị nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{x+3}}$ nhận giá trị nguyên

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+3}} > 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x+3} \geq 3 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow 0 < \frac{5}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+3}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+3} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 19: Cho hai biểu thức $A = \frac{9}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{x+16}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{5}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+2}}$
- Tìm x để biểu thức $Q = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Bài làm:

$$\text{a) Thay } x = 25 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A, \text{ ta được } A = \frac{9}{\sqrt{25}-2} = \frac{9}{5-2} = 3$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{x+16}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{5}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{c) Ta có } Q = A \cdot B = \frac{9}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+2}} = \frac{9}{\sqrt{x+2}} \neq 0$$

$$\text{với } x \geq 0, x \neq 4, \text{ ta có } 0 < \frac{9}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 0 < Q \leq \frac{9}{2}, \text{ mà } Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow Q \in \{1; 2; 3; 4\}$$

$$\text{TH1: } Q = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 9 \Rightarrow x = 49 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } Q = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x+2} = 9 \Rightarrow x = \frac{25}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH3: } Q = 3 \Rightarrow 3\sqrt{x+2} = 9 \Rightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH4: } Q = 4 \Rightarrow 4\sqrt{x+2} = 9 \Rightarrow x = \frac{1}{16} \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 20: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} + \frac{4\sqrt{x}+6}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $M = A(B-1)$ có giá trị là số nguyên.

Bài làm:

$$\text{a) Thay } x = 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16+2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-1}}$

c) Ta có $M = A(B-1) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-1}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{x-1}} = \frac{5}{\sqrt{x+2}} \neq 0$

$$\text{Vì } x \geq 0, x \neq 1 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} > 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x+2} \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{5}{2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < M \leq \frac{5}{2}$ và M nhận giá trị nguyên nên $M \in \{1; 2\}$

$$\text{Với } M = 1 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } M = 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x+2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $x \in \left\{ 9; \frac{1}{4} \right\}$ thì biểu thức M có giá trị là số nguyên.

Bài 21: Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x+8}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2}{\sqrt{x+3}} - \frac{18}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của A khi $x = 25$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $M = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{7}{\sqrt{25+8}} = \frac{7}{13}$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+3}) + 2(\sqrt{x-3}) - 18}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} = \frac{x + 5\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} = \frac{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+8})}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}}$$

c) Ta có $M = A \cdot B = \frac{7}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow 0 < P < \frac{7}{3}$

$$\text{Với } M = 1 \Rightarrow \sqrt{x+3} = 7 \Rightarrow x = 16 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } M = 2 \Rightarrow \sqrt{x+3} = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy để M nguyên thì $x = 16$ hoặc $x = \frac{1}{4}$

Bài 22: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{3\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{8}{\sqrt{x-2}} - \frac{3\sqrt{x+26}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 9$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{5}{\sqrt{x+2}}$

c) Tìm giá trị x để $P = A \cdot B$ đạt giá trị nguyên nhỏ nhất.

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{9+2}}{3\sqrt{9+1}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{5}{\sqrt{x+2}}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x+2}}{3\sqrt{x+1}} \cdot \frac{5}{\sqrt{x+2}} = \frac{5}{3\sqrt{x+1}}$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{3\sqrt{x+1}} > 0$ (1)

Mặt khác $3\sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{5}{3\sqrt{x+1}} \leq 5$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < P \leq 5$. Như vậy P nhận giá trị nguyên nhỏ nhất là

$P = 1 \Rightarrow \frac{5}{3\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow 3\sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{9}$ (thỏa mãn)

Bài 23: Cho các biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ và $C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức B và C .

b) Tìm x để $B \cdot C = \frac{1}{3}$.

c) Chứng minh rằng với $x > 0, x \neq 1$ thì tích $B \cdot C$ không thể nhận giá trị nguyên.

Bài làm:

a) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}) - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} = \frac{x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

Và $C = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

b) Ta có $B \cdot C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$.

Để $B \cdot C = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3(\sqrt{x}-1) = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2\sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

c) Ta có $B \cdot C = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

Vì $x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \neq 0 \Rightarrow B \cdot C \neq 0$.

Để $B \cdot C$ có giá trị nguyên thì $M = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ có giá trị nguyên.

Nhận thấy $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 0 \Rightarrow M > 0$ (1)

Mặt khác $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 1 \Rightarrow M = \frac{2}{\sqrt{x+1}} < 2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 < M < 2 \Rightarrow M = 1$ (vì M có giá trị nguyên)

Với $M = 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ (không thỏa mãn)

Vậy với $x > 0$, $x \neq 1$ thì tích $B.C$ không thể nhận giá trị nguyên.

Bài 24: Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 100$
- Chứng minh biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$
- Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để biểu thức $3M$ có giá trị là một số nguyên với $M = A.B$

Bài làm:

a) Thay $x = 100$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B ta được $B = \frac{\sqrt{100+2}}{\sqrt{100+1}} = \frac{12}{11}$

b) Học sinh tự chứng minh $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

c) Ta có $M = A.B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$. Khi đó $3M = \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{6\sqrt{x+6}-6}{\sqrt{x+1}} = 6 - \frac{6}{\sqrt{x+1}}$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x+1}} > 0 \Rightarrow 3M = 6 - \frac{6}{\sqrt{x+1}} < 6 \quad (1)$$

$$\text{Và } \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x+1}} \leq 6 \Rightarrow 3M = 6 - \frac{6}{\sqrt{x+1}} \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 0 \leq 3M < 6$. Để x có giá trị nguyên lớn nhất thì $6 - \frac{6}{\sqrt{x+1}}$ có giá trị nguyên lớn

nhất hay $6 - \frac{6}{\sqrt{x+1}} = 5 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$ (thỏa mãn)

Bài 25: Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức $P = \frac{A}{B}$
- Tìm số tự nhiên x để $P < 0$

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{1}{\sqrt{25+1}} = \frac{1}{6}$

b) Ta có $B = \frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}) - (\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}) + \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} = \frac{\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$$\text{Khi đó } P = \frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$$

c) Để $P < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} < 0$. Vì $\sqrt{x+1} > 0$ với mọi $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$

Nên $\sqrt{x-2} < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 4 \Rightarrow 0 \leq x < 4$. Vậy các số tự nhiên x cần tìm là 0; 1; 2; 3.

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

c) Tìm các giá trị x nguyên để $B : A < \frac{1}{2}$

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{4}-1} = 4$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

c) Ta có $B : A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

Nên $B : A < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}+2)} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Rightarrow 0 \leq x < 4$. Kết hợp với điều kiện

Ta được các giá trị x nguyên cần tìm là $x \in \{0; 2; 3\}$

Bài 27: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$

c) Đặt $P = A - 6B$. Tìm giá trị x nguyên lớn nhất để $P < 0$

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{2\sqrt{9}}{3+\sqrt{9}} = \frac{6}{6} = 1$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$

c) Ta có $P = A - 6B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{6}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+3}$.

Để $P < 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+3} < 0$. Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 25$

Nên $2\sqrt{x}-6 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 9$. Vậy x nguyên lớn nhất cần tìm là $x = 8$ (thỏa mãn)

Bài 28: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{2\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $P^2 > P$

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{9}+5}{2\sqrt{9}-4} = 4$

b) Ta có $B = \frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+5}{2\sqrt{x}-4} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+5}{2\sqrt{x}}$

Để $P^2 > P$ thì $P(P-1) > 0$

Với $x > 0, x \neq 4 \Rightarrow P > 0$ nên $P-1 > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+5}{2\sqrt{x}} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{5-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow 0 < x < 25$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của x cần tìm là $x = 24$.

Bài 29: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{5}{\sqrt{x}-2} - \frac{16+2\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

b) Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$

c) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $5A+B \leq 3$

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào A , ta được $A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}+2} = \frac{3}{5}$

b) Ta có $B = \frac{5(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{16+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$

c) Ta có

$$5A+3B \leq 3 \Rightarrow \frac{5\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \leq 3 \Rightarrow \frac{5\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - 3 \leq 0 \Rightarrow 5\sqrt{x}+3-3\sqrt{x}-6 \leq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-3 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{9}{4}$$

Mà x là số nguyên lớn nhất nên $x=2$ (thỏa mãn)

Dạng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức.

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của A khi $x=1$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$

c) Gọi $P = A+B$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài làm:

a) Thay $x=1$ (thỏa mãn điều kiện) và biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{1}+4}{\sqrt{1}+1} = \frac{5}{2}$.

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$

$$c) P = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} - 1$$

Do $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 0$. Áp dụng BĐT Cô – si ta được

$$\sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x+1}) \cdot \frac{4}{\sqrt{x+1}}} = 4 \Rightarrow P \geq 4 - 1 = 3$$

Dấu "=" xảy ra khi $(\sqrt{x+1})^2 = 4 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3, đạt được khi $x = 1$.

Bài 2: Cho hai biểu thức $M = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ và $N = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{2}{\sqrt{x+2}} + \frac{8}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = 9$

b) Chứng minh $N = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{M}{N}$.

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức M ta được: $M = \frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{9-2}} = 4$

b) Ta có $N = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}) + 2(\sqrt{x-2}) + 8}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{x + 4\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

c) Tìm được $P = \frac{M}{N} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow P = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy $P_{\min} = \frac{1}{2}$ đạt được khi $x = 0$.

Bài 3: Cho biểu thức $P = \frac{3x+12}{\sqrt{x+3}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của P khi $x = 4$

b) Chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{P}{Q}$.

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức P , ta được $P = \frac{3 \cdot 4 + 12}{\sqrt{4+3}} = \frac{24}{5}$.

b) Ta có $Q = \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} - \frac{7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$
 $= \frac{3x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

$$c) \text{ Ta có } A = P : Q = \frac{3x+12}{\sqrt{x+3}} : \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{x+4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô - si cho hai số không âm, ta được } \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4 \Rightarrow A \geq 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 4.$$

Bài 4: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3x+3}{9-x}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức B và tính $P = \frac{B}{A}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Bài làm:

$$a) \text{ Thay } x = 25 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào } A, \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{25}+1}{\sqrt{25}-3} = 3.$$

$$b) \text{ Ta có } B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - 3x - 3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{-3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{B}{A} = \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}$$

$$c) \text{ Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq 1 \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} \geq -1 \Rightarrow M \geq -1$$

Vậy min $M = -1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+10}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 4$

b) Rút gọn biểu thức $M = \frac{A}{B}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của M

Bài làm:

$$a) \text{ Thay } x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A \text{ ta được } A = \frac{1}{\sqrt{4}-3} = -1.$$

$$b) \text{ Ta có } M = \frac{A}{B} = \left(\frac{x+\sqrt{x}+10}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \left[\frac{x+\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right] \cdot (\sqrt{x}-3) = \frac{x+\sqrt{x}+10 - (\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot (\sqrt{x}-3) = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3}.$$

$$c) M = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6$$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3$ và $\frac{16}{\sqrt{x}+3}$ là hai số dương. Áp dụng BĐT Cô - si cho hai số trên ta được

$$M \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{16}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 2\sqrt{16} - 6 = 2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi}$$

$$\sqrt{x}+3 = \frac{16}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 16 \Leftrightarrow x=1$$

Bài 6: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

c) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{9+\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}-2} = \frac{16}{1} = 16$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 1$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số không âm $\sqrt{x}+1$ và $\frac{4}{\sqrt{x}+1}$ ta được

$$\frac{A}{B} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}} - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \sqrt{x}+1 = 2 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Bài 7: Cho hai biểu thức $M = \frac{x+15}{\sqrt{x}+3}$ và $N = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

a) Tính giá trị của M khi $x=81$

b) Rút gọn biểu thức N

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = M + N$

Bài làm:

a) Thay $x=81$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức M , ta được $M = \frac{81+15}{\sqrt{81}+3} = \frac{96}{12} = 8$

b) Ta có $N = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = \frac{2(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$
 $= \frac{1}{\sqrt{x}+3}.$

c) Ta có $P = M + N = \frac{x+15}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số không âm $\sqrt{x}+3$ và $\frac{25}{\sqrt{x}+3}$ ta được

$$P \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 10 - 6 = 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 8: Cho biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài làm:

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{16+3}{\sqrt{16}+3} = \frac{19}{7}$

b) Ta có $B = \frac{x+3\sqrt{x}-2-(\sqrt{x}-3) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$

c) Ta có $P = \frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2$

Áp dụng BĐT Cô - si cho hai số không âm $\sqrt{x}+1$ và $\frac{4}{\sqrt{x}+1}$ ta được

$$P \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}} - 2 = 4 - 2 = 2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2$. Đạt được khi $x = 1$.

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm giá trị của x để $C = \frac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = 12$

b) Ta có $B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $C = \frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Áp dụng BĐT Cô - si cho hai số không âm \sqrt{x} và $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ta được $C \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn)

Bài 10: Cho biểu thức $P = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 4$.
- Chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = P \cdot Q$.

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức P ta được $P = \frac{4+7}{3\sqrt{4}} = \frac{11}{6}$

b) Học sinh tự chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

c) Ta có $A = P \cdot Q = \frac{x+7}{3\sqrt{x}} \cdot \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số không âm $\sqrt{x}+3$ và $\frac{16}{\sqrt{x}+3}$ ta được

$$A \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{16}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 8 - 6 = 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+3 = \frac{16}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 16 \Rightarrow \sqrt{x} = 13 \Rightarrow x = 169$

Bài 11: Cho hai biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+15}{x-9}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức $M = P \cdot Q$
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức M .

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức Q ta được $A = \frac{\sqrt{25}-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}+3+\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{2(\sqrt{x}+9)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$.

$$\text{Khi đó } M = P \cdot Q = \frac{2(\sqrt{x}+9)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+3}.$$

c) Ta có $M = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+3} = 1 + \frac{6}{\sqrt{x}+3}$.

Để biểu thức M có giá trị lớn nhất thì $\frac{6}{\sqrt{x}+3}$ là số dương lớn nhất hay $\sqrt{x}+3$ có giá trị bé nhất.

Mà $\sqrt{x}+3 \geq 3$ nên $\sqrt{x}+3$ có giá trị nhỏ nhất bằng 3. Đạt được khi $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M bằng $1 + \frac{6}{3} = 3$. Đạt được khi $x = 0$.

Bài 12: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x+3\sqrt{x}+9}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{2\sqrt{25}-1}{\sqrt{25}-3} = \frac{9}{2}$

b) Ta có $B = \frac{2x+3\sqrt{x}+9-\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+6\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

c) Ta có $P = \frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}+6-7}{\sqrt{x}+3} = 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+3}$

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{7}{\sqrt{x}+3}$ là số dương lớn nhất hay $\sqrt{x}+3$ là số dương bé nhất.

Nhận thấy $\sqrt{x}+3 \geq 3$ với mọi $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{7}{3} \Rightarrow P \geq 2 - \frac{7}{3} = \frac{-1}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+3 = 3 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Bài 13: Cho hai biểu thức $P = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \sqrt{3} + 66$
- Rút gọn biểu thức $P-1$
- Với $x \in \mathbb{N}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = Q.(P-1)$

Bài làm:

a) Thay $x = \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \sqrt{3} + 66 = \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} + \sqrt{3} + 66 = -\sqrt{3}-2 + \sqrt{3} + 66 = 64$ (thỏa mãn điều kiện) vào

biểu thức Q ta được $Q = \frac{\sqrt{64}-2}{\sqrt{64}-3} = \frac{8-2}{8-3} = \frac{6}{5}$.

b) Ta có $P = \frac{x+(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

Khi đó $P-1 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $K = Q.(P-1) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$

Để K đạt giá trị lớn nhất thì $\sqrt{x}-3 > 0$ và có giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\sqrt{x}-3 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 3 \Rightarrow x > 9$. Với $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 10$. Khi đó $K = \frac{2}{\sqrt{10}-3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $K = \frac{2}{\sqrt{10}-3}$ đạt được khi $x = 10$

Bài 14: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $P = A \cdot B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào A , ta được $A = \frac{2\sqrt{25}-1}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}$

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) - (2x-\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = 2 + \frac{5}{\sqrt{x}-3}$

Để P lớn nhất thì $\sqrt{x}-3 > 0$ và $\sqrt{x}-3$ có giá trị nhỏ nhất.

Mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 10 \Rightarrow \sqrt{x}-3 \geq \sqrt{10}-3 > 0$

$\Rightarrow P_{max} = \frac{2\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}-3} = 17 + 5\sqrt{10} \Leftrightarrow x = 10$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Bài 15: Cho $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$
- Rút gọn B .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A \cdot B$

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) Ta có $B = \frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ là số dương lớn nhất. hay $\sqrt{x}+1$ có giá trị nhỏ nhất.

Mà $\sqrt{x}+1 \geq 1$ có giá trị nhỏ nhất bằng 1. Khi $x = 0$ (thỏa mãn), thay vào $P = 1 - \frac{1}{1} = 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0 đạt được khi $x = 0$.

Bài 16: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-21}{x-\sqrt{x}-6} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A \cdot B$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{25+2}}{1+\sqrt{25}} = \frac{7}{6} = 1$

b) Ta có $B = \frac{2\sqrt{x}-21+\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)-4(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}+1}$

Nhận thấy $\sqrt{x}+1 \geq 1$ với mọi $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} \leq 2 \Rightarrow P = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \leq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+1=1 \Rightarrow x=0$.

Bài 17: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x+3\sqrt{x}+9}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Bài làm:

a) Thay $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{2\sqrt{36}-1}{\sqrt{36}-3} = \frac{11}{3}$

b) Ta có $B = \frac{2x+3\sqrt{x}+9-\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+6\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

c) Ta có $P = \frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}+6-7}{\sqrt{x}+3} = 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+3}$

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{7}{\sqrt{x}+3}$ là số dương có giá trị lớn nhất hay $\sqrt{x}+3$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $\sqrt{x}+3 \geq 3$ với mọi $x \geq 0, x \neq 9$. Khi đó $P = 2 - \frac{7}{3} = \frac{-1}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Bài 18: Cho hai biểu thức $P = \frac{x-9}{\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{2\sqrt{x}+5}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 4$
- Chứng minh $Q = \frac{x+2}{x-9}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $A = P \cdot Q$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài làm:

a) Thay $x=4$ (thỏa mãn điều kiện) vào P ta được $P = \frac{4-9}{\sqrt{4}} = \frac{-5}{2}$.

b)
$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{2\sqrt{x}+5}{9-x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}+5}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{2\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}-3+2\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+2}{x-9}$$

c) Ta có $A = P \cdot Q = \frac{x-9}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x+2}{x-9} = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$

Do $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2}{\sqrt{x}} \geq 0$ với $x > 0, x \neq 9$. Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}-\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = 2$

Bài 19: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Tìm các giá trị của x để $A = \frac{-3}{5}$

b) Rút gọn biểu thức $P = B : A$

c) Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Bài làm:

a) Để $A = \frac{-3}{5}$ thì $\frac{\sqrt{x}}{4-x} = \frac{-3}{5} \Rightarrow 5\sqrt{x} = -3(4-x) \Rightarrow 3x - 5\sqrt{x} - 12 = 0 \Rightarrow (3\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-3) = 0$

Với $x > 0$ thì $3\sqrt{x}+4 > 0$ nên $\sqrt{x}-3 = 0 \Rightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

b) Ta có $B = \frac{x}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2}$

Khi đó $P = B : A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2} : \frac{\sqrt{x}}{4-x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})$

c) Ta có $P = -x + \sqrt{x} + 2 = -(x - \sqrt{x} - 2) = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$

P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{4}$ khi $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Dạng 3. Các bài toán tổng hợp

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+4}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A.B$. Tìm giá trị của x khi $|P|=P$

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào A , ta được $A = \frac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}$

b) $B = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

c) $P = A.B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$

Để $|P|=P \Leftrightarrow P \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} \geq 0$. Mà $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x}+4 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 > 0 \Rightarrow x > 4$

Bài 2: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{3x}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x=49$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $|P| > P$

Bài làm:

a) Thay $x=49$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta được: $A = \frac{\sqrt{49}+1}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7}$.

b) Ta có $B = \frac{3x - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-2}$.

c) Tính được $P = \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}$

Để $|P| > P \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}} < 0$. Do $x > 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow 0 < x < 4$ và $x \neq 1$. Do $x \in \mathbb{Z}$ và x nhỏ nhất nên $x=2$.

Bài 3: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x=16$
- Rút gọn B
- Đặt $P = A.B$. Tìm giá trị nguyên của x để $|P| > P$

Bài làm:

a) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào A , ta được $A = \frac{2}{3}$

$$b) B = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}(\sqrt{x+1}) + 2}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$c) \text{ Ta có } P = A : B = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}} : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

$$\text{Đề } |P| > P \Leftrightarrow P < 0 \text{ hay } \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} < 0 \Rightarrow 0 \leq x < 4 \text{ và } x \neq 1. \text{ Vì } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } x \in \{0; 2; 3\}$$

Bài 4: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$ và $B = \frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A : B$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $2\sqrt{P} < 1$

Bài làm:

$$a) \text{ Thay } x = 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A, \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{16-2}}{\sqrt{16-1}} = \frac{2}{3}.$$

$$b) \text{ Ta có } B = \frac{3x+3\sqrt{x}-3 - (\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1}) - (\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$c) \text{ Ta có } P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}} : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$\text{Đề } 2\sqrt{P} < 1 \Rightarrow \sqrt{P} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq P < \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } P \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } P < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \frac{3(\sqrt{x}-3)}{4(\sqrt{x+1})} < 0 \Rightarrow 0 \leq x < 9 \quad (2)$$

Kết hợp (1), (2) với điều kiện ta được $4 \leq x < 9$. Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{4; 5; 6; 7; 8\}$.

Bài 5: Cho $A = \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25} + \frac{3}{\sqrt{x+5}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-5}}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

- Tính giá trị của B khi $x = 49$.
- Rút gọn A .
- Tính giá trị của x để $\frac{B}{A} = |x-4|$.

Bài làm:

$$a) \text{ Thay } x = 49 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } B, \text{ ta được } B = \frac{\sqrt{49+2}}{\sqrt{49-5}} = \frac{9}{2}$$

$$b) \text{ Ta có } A = \frac{20-2\sqrt{x}+3(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} = \frac{\sqrt{x+5}}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$$

c) Ta có $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} : \frac{1}{\sqrt{x}-5} = \sqrt{x}+2$. Để $\frac{B}{A} = |x-4| \Rightarrow \sqrt{x}+2 = |x-4|$ (với $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 > 0$)

TH1: $x-4 = \sqrt{x}+2 \Rightarrow x-\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)=0$

Vì $\sqrt{x}+2=0$ với mọi $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}-3=0 \Rightarrow x=9$ (thỏa mãn)

TH2: $x-4 = -\sqrt{x}-2 \Rightarrow x+\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Bài 6: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} + \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{x-25}{x-9}$

c) Đặt $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{3}$

Bài làm:

a) Thay $x=25$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào A , ta được: $A = \frac{\sqrt{25}+5}{\sqrt{25}-3} = 5$

b) Ta có $B = \frac{4(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$
 $= \frac{4\sqrt{x}-12+2x-\sqrt{x}-13-x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-25}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-25}{x-9}$.

c) Rút gọn $P = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$.

\sqrt{P} có nghĩa khi $\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} \geq 0 \Rightarrow x \geq 25$

Để $\sqrt{P} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} < \frac{1}{9} \Rightarrow x < 36$. Vậy $25 \leq x < 36$

Bài 7: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

c) Đặt $P = A : B$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Bài làm:

a) Thay $x=25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{25}+2} = \frac{5}{7}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $P = A : B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$. Để $\sqrt{P} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq P < \frac{1}{4}$

Với $P \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow x > 4$ (vì $\sqrt{x+2} > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 4$) (1)

Với $P < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}-10}{4(\sqrt{x+2})} < 0 \Rightarrow 3\sqrt{x}-10 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{10}{3} \Rightarrow 0 \leq x < \frac{100}{9}$

(vì $4(\sqrt{x+2}) > 0$) (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 4 < x < \frac{100}{9}$. Mà x nhận giá trị nguyên nhỏ nhất nên $x = 5$

Bài 8: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+5}}$ và $B = \frac{x+20}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{6}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$

c) Tìm x để $\sqrt{AB} < \frac{1}{2}$.

Bài làm:

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{16+2}}{\sqrt{16+5}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$

c) Ta có $A \cdot B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+5}} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}}$. Để $\sqrt{A \cdot B} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq A \cdot B < \frac{1}{4}$

Để $A \cdot B \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow x \geq 9$ (vì $\sqrt{x+5} > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 4$) (1)

Để $A \cdot B < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}} - \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}-17}{4(\sqrt{x+5})} < 0 \Rightarrow 3\sqrt{x}-17 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{17}{3} \Rightarrow 0 \leq x < \frac{289}{9}$

(vì $4(\sqrt{x+5}) > 0$) (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 9 \leq x < \frac{289}{9}$

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} + \frac{4x}{x-4}$ và $B = \frac{4(\sqrt{x+2})}{\sqrt{x-2}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 196$

b) Rút gọn biểu thức A

c) Xét biểu thức $P = A : B$. So sánh P và \sqrt{P}

Bài làm:

a) Thay $x = 196$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B , ta được $B = \frac{4(\sqrt{196+2})}{\sqrt{196-2}} = \frac{4 \cdot 16}{12} = \frac{16}{3}$

$$b) \text{ Ta có } A = \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - (\sqrt{x}-2)^2 + 4x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$c) \text{ Ta có } P = A : B = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}. \text{ Nhận thấy } P \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0, x \neq 4$$

$$\text{Xét } P-1 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - 1 = \frac{-2}{\sqrt{x}+2} < 0 \text{ với mọi } x \geq 0, x \neq 4 \text{ nên } 0 < P < 1.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{P} < P.$$

Bài 10: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

a) Tính giá trị của A khi $x=169$

b) Chứng minh biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

c) Với biểu thức $P = A \cdot B$. Hãy so sánh biểu thức P với \sqrt{P}

Bài làm:

a) Thay $x=169$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{2\sqrt{169}+5}{\sqrt{169}-1} = \frac{2 \cdot 13+5}{13-1} = \frac{31}{12}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

c) Ta có $A \cdot B = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3}$

$$\text{Xét } P-1 = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3} - 1 = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} > 0 \text{ với mọi } x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$\text{Nên } P > 1 \Rightarrow P > \sqrt{P}.$$

Bài 11: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của A khi $x=16$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Đặt $P = A \cdot B$. So sánh giá trị của biểu thức P với 1.

Bài làm:

a) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{16}-2}{\sqrt{16}+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) + 3(\sqrt{x}+2) + (3\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}$.

$$\text{Xét } P-1 = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4} - 1 = \frac{-2}{\sqrt{x}+4}$$

$$\text{Với } x \geq 0, x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x}+4 > 0 \Rightarrow P-1 < 0 \Rightarrow P < 1.$$

Bài 12: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của A khi $x=9$.
- Rút gọn B
- Đặt $P = A \cdot B$. So sánh P với 1.

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta được $A = \frac{\sqrt{9}+6}{\sqrt{9}-5} = \frac{-9}{2}$

b) $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} - \frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} - \frac{5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$.

c) $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+5} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+5}$

Vì $\frac{1}{\sqrt{x}+5} > 0$ nên $P > 1$.

Bài 13: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{12}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}-15}{x-25} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $C = \frac{B}{A}$. Tìm giá trị của x để biểu thức C có giá trị bằng 2

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{9}+3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) Ta có $B = \frac{3\sqrt{x}-15+\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x-2\sqrt{x}-15}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5}$

c) Ta có $C = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} : \frac{1}{12} = \frac{12}{\sqrt{x}+5}$.

Để biểu thức C có giá trị bằng 2 thì $\frac{12}{\sqrt{x}+5} = 2 \Rightarrow \sqrt{x}+5 = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Bài 14: Cho hai biểu thức $A = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3x+1}{x-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x=36$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho biểu thức $P = A \cdot B$. Tìm x để $P = \frac{10}{3}$

Bài làm:

a) Thay $x=36$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{5\sqrt{36}}{\sqrt{36}-1} = \frac{30}{5} = 6$

$$b) \text{ Ta có } B = \frac{3x+1-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$c) \text{ Ta có } P = A \cdot B = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Đề } P = \frac{10}{3} \text{ thì } \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{10}{3} \Rightarrow 15\sqrt{x} = 10\sqrt{x} + 10 \Rightarrow 5\sqrt{x} = 10 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 15: Cho hai biểu thức $A = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+5} - \frac{\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x}+30}{x-25} \right) : \frac{x}{\sqrt{x}-5}$ với $x > 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của A khi $x = 1$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A \cdot B$. Tìm x để $P = 4$

Bài làm:

$$a) \text{ Thay } x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A \text{ ta được } A = \frac{1+3}{\sqrt{1}+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$b) \text{ Ta có } B = \frac{\sqrt{x}-5+\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)+4\sqrt{x}+30}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} : \frac{x}{\sqrt{x}-5} = \frac{x+10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{x} = \frac{\sqrt{x}+5}{x}$$

$$c) \text{ Ta có } P = A \cdot B = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}+5} \cdot \frac{\sqrt{x}+5}{x} = \frac{x^2+3}{x}$$

$$\text{Đề } P = 4 \Rightarrow \frac{x^2+3}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\text{Với } x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } x-3=0 \Rightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 16: Cho hai biểu thức và $B = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1-x}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm tất cả các giá trị của x để $A \cdot B = A$

Bài làm:

$$a) \text{ Thay } x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào } A \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{4}-2}{\sqrt{4}+1} = 0$$

$$b) \text{ Ta có } B = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$c) \text{ Ta có } A \cdot B = A \Rightarrow A(B-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } A = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } B = 1 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 = 0 \text{ (không tồn tại giá trị } x \text{ thỏa mãn)}$$

Bài 17: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x=9$.
- Chứng minh $P=Q$.
- Tính giá trị của x để biểu thức $P = \frac{1}{4}$.

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức Q ta được $A = \frac{\sqrt{9}-2}{3\sqrt{9}} = \frac{1}{9}$
b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1) \cdot \sqrt{x}} : \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}$ $= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}{3} = \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}} = Q$
c) Để $P = \frac{1}{4} \Rightarrow P - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{4(\sqrt{x}-2) - 3\sqrt{x}}{12\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-8}{12\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 8 \Rightarrow x = 64$ (thỏa mãn)

Bài 18: Cho hai biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của Q tại $x=9$
- Rút gọn biểu thức $M = P \cdot Q$
- Tìm các giá trị của x để $M < \frac{-1}{3}$

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức Q ta được $Q = \frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}+2} = \frac{4}{5}$
b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}+1 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ Khi đó $M = P \cdot Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$
c) Để $M < \frac{-1}{3} \Rightarrow M + \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \frac{3(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}+2}{3(\sqrt{x}+2)} < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{16}$ Vậy $0 \leq x < \frac{1}{16}$ thì giá trị của biểu thức $M < \frac{-1}{3}$.

Bài 19: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A với $x=1$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

c) Tìm x để $A.B \geq 0$

Bài làm:

a) Thay $x = 1$ (thỏa mãn điều kiện) vào A , ta được $A = \frac{\sqrt{1}+2}{\sqrt{1}-2} = -3$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

c) Ta có $A.B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$.

TH1: $x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow A.B = 0$ (thỏa mãn)

TH2: $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Rightarrow x > 4$. Kết hợp với điều kiện, $x = 0$ hoặc $x > 4$ (thỏa mãn)

Bài 20: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x+4}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

c) Đặt $P = A.B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

c) Ta có $P = A.B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}}$.

$$\text{Để } P < \frac{1}{2} \Rightarrow P - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{2(\sqrt{x+2})} < 0$$

Vì $2(\sqrt{x+2}) > 0$ với mọi $x > 0, x \neq 4$ nên $\sqrt{x}-4 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 4 \Rightarrow 0 < x < 16$

Kết hợp với điều kiện ta được $0 < x < 16$ và $x \neq 4$

Bài 21: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

c) Cho biểu thức $P = A.B$, tìm x để $P > \frac{1}{2}$

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}-3} = \frac{3}{2}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

$$\text{Để } P > \frac{1}{2} \Rightarrow P - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-3)} > 0$$

Vì $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0$ nên $\sqrt{x}-3 > 0 \Rightarrow x > 9$.

Vậy với $x > 9$ thì biểu thức $P > \frac{1}{2}$

Bài 22: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm x để $A \cdot B < \frac{1}{2}$

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào A , ta được $A = \frac{1}{5}$

b) Ta có $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (7\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}$

$$= \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$$

c) Ta có $A \cdot B < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{2(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}+3)}{2(\sqrt{x}+3)} < 0$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+3)} < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-7}{2(\sqrt{x}+3)} < 0. \text{ vì } x \geq 0 \Rightarrow 2(\sqrt{x}+3) > 0.$$

Nên để $\frac{\sqrt{x}-7}{2(\sqrt{x}+3)} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-7 < 0 \Rightarrow x < 49$. Vậy $0 \leq x < 49$ và $x \neq 4$ thì $A \cdot B < \frac{1}{2}$

Bài 23: Cho hai biểu thức $A = \frac{5-x}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{\sqrt{x}+3} - \frac{2x+18}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Biết $P = A \cdot B$. Tìm các giá trị của x để $P \geq 2$

Bài làm:

a) Thay $x=4$ (thỏa mãn điều kiện) vào A , ta được $A = \frac{5-4}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{6(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2x+18}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{-x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } P &= A.B = \frac{5-x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-5}{\sqrt{x}-3} \\ \text{Để } P \geq 2 &\Rightarrow \frac{x-5}{\sqrt{x}-3} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-3} \geq 0 \\ \text{TH1: } \sqrt{x}-1 &= 0 \Rightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ \text{TH2: } \sqrt{x}-3 &> 0 \Rightarrow x > 9 \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Bài 24: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$
- Chứng minh rằng $B = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$
- Tìm giá trị x nguyên lớn nhất thỏa mãn $A.B \leq -1$

Bài làm:

$$\text{a) Thay } x=16 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A, \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{16}+3}{\sqrt{16}-3} = 7$$

$$\text{b) Học sinh tự chứng minh } B = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{c) Ta có } A.B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{3}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{Để } A.B \leq -1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-3} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 9$$

Vì x nguyên lớn nhất nên $x=8$.

Bài 25: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}+6}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x=16$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A.B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài làm:

$$\text{a) Thay } x=16 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A, \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{16}-5}{\sqrt{16}-3} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$.

Đề $P < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{2(\sqrt{x}-5) - (\sqrt{x}+3)}{2(\sqrt{x}+3)} < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-13}{2(\sqrt{x}+3)} < 0$

Với $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x}+3 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-13 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 13 \Rightarrow 0 \leq x < 169$

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}-2} + \frac{16}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=1$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm các giá trị x là số chẵn để $A \cdot B \geq 1$

Bài làm:

a) Thay $x=1$ (thỏa mãn điều kiện) vào A , ta được $A = \frac{\sqrt{1}+2}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}$

b) Ta có $B = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{16}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4\sqrt{x}+8-16}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4}{\sqrt{x}+2}$

c) Ta có $A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+2} = \frac{4}{\sqrt{x}+1}$

Như vậy $A \cdot B \geq 1 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+1} > 1 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > 0$.

Vì $\sqrt{x}+1 > 0 \Rightarrow 3-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x < 9$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$ và x là số chẵn nên $x \in \{0; 2; 6; 8\}$

Bài 27: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x-3}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{A}{B} < 1$.

Bài làm:

a) Ta có $B = \frac{x-3-2(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

b) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$. Đề $\frac{A}{B} < 1 \Rightarrow \frac{A}{B} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} < 0$

Mà $\sqrt{x} > 0$ với mọi $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 4 \Rightarrow 0 < x < 4$

Mà x lấy các giá trị nguyên nên $x \in \{1; 2; 3\}$, mà $x \neq 1 \Rightarrow x \in \{2; 3\}$

Bài 28: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

- c) Tìm các giá trị nguyên của x để $P < 0$ với $P = A \cdot B$.

Bài làm:

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{16}-2}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$. Để $P < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} < 0$

Nhận thấy $\sqrt{x}+3 > 0$ với mọi $x > 0$, $x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Rightarrow 0 < x < 4$

Mà x nhận giá trị nguyên nên $x \in \{1; 2; 3\}$.

Bài 29: Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2x+\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$.

- a) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
 b) Rút gọn B .
 c) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P có giá trị âm.

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{9-2\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$

b) Ta có $B = \frac{2x+\sqrt{x}-4-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

c) Ta có $P = \frac{A}{B} = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2+1}{\sqrt{x}-2}$

Vì $(\sqrt{x}-1)^2+1 \geq 1$. Để P có giá trị âm thì $\sqrt{x}-2 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 0 \leq x < 4$

Vì $x \in \mathbb{Z}$, $x > 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$.

Bài 30: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$.

- a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn P .
 b) Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{4}$.
 c) Tìm x để $P < 2$.

Bài làm:

- a) ĐKXĐ: $x \geq 0$, $x \neq 4$.

Ta có $P = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)+2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

b) Thay $x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức P , ta được $P = \left(3\sqrt{\frac{1}{4}}\right) : \left(\sqrt{\frac{1}{4}}+2\right) = \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = \frac{3}{5}$

$$c) \text{ ĐỀ } P < 2 \Rightarrow P - 2 < 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+2}} < 0$$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x}-4 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 4 \Rightarrow 0 \leq x < 16$.

Bài 31: Cho hai biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để $P > \frac{1}{4}$.

Bài làm:

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{4\sqrt{16}}{\sqrt{16}-2} = \frac{16}{2} = 8$

b) Ta có $B = \frac{2(\sqrt{x}-2) + 2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

Khi đó $P = \frac{B}{A} = \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

c) ĐỀ $P > \frac{1}{4} \Rightarrow P - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 0$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 2-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$ vì $x \in \mathbb{Z}$.

Bài 32: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2-3\sqrt{x}}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{B}{A} > \frac{5}{4}$.

Bài làm:

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) Ta có $B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) + 2-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

c) Ta có $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$. ĐỀ

$$\frac{B}{A} > \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow \frac{4(\sqrt{x}+3) - 5(\sqrt{x}+2)}{4(\sqrt{x}+2)} > 0 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{4(\sqrt{x}+2)} > 0$$

Vì $4(\sqrt{x}+2) > 0$ với mọi $x > 0, x \neq 4$ nên $2-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 0 < x < 4$

Vì x cần tìm có giá trị nguyên nên $x \in \{1; 2; 3\}$.

Bài 33: Cho biểu thức $A = 5\sqrt{5} - \sqrt{80} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3-11\sqrt{x}}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Rút gọn biểu thức A và B
- Hãy tìm các giá trị của x để biểu thức A và B thỏa mãn $B > A$

Bài làm:

a) Ta có $A = 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - (\sqrt{5}-1) = \sqrt{5} - \sqrt{5} + 1 = 1$

Ta có $B = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3) - (3-11\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3x-9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

b) Để $B > A \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} > 1 \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} > 0$

Với $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x}+3 > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-3 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{3}{2} \Rightarrow x > \frac{9}{4}$.

Vậy với $x > \frac{9}{4}$ và $x \neq 9$ thì $B > A$.

Bài 34: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = B : A$. So sánh P với 2.

Bài làm:

a) Thay $x = 64$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{64}+4}{\sqrt{64}} = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - (4\sqrt{x}-4)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

c) Ta có $P = B : A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4} = 1 - \frac{6}{\sqrt{x}+4}$

Vì $\frac{6}{\sqrt{x}+4} > 0$ với mọi $x > 0, x \neq 4$ nên $P < 1 < 2 \Rightarrow P < 2$.

Bài 35: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm các giá trị của x để $P = 3$. AB đạt giá trị nguyên âm.

Bài làm:

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+2} = \frac{3}{7}$

b) Ta có $B = \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - 3(\sqrt{x}-2) - 12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có $P = 3 \cdot AB = 3 \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$

Để P nhận giá trị nguyên âm thì $\frac{3(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+2} < 0$.

Nhận thấy với $x \geq 0, x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x}-1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$

Bài 36: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{x+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$

b) Chứng minh biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

c) Đặt $P = A \cdot B$. Tìm tất cả các giá trị của m để có giá trị x thỏa mãn $P = m$

Bài làm:

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta được $A = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{x}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$.

Để $P = m$ hay

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = m \Rightarrow \sqrt{x}+1 = m\sqrt{x}+2m \Rightarrow \sqrt{x}-m\sqrt{x} = 2m-1 \Rightarrow \sqrt{x}(1-m) = 2m-1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2m-1}{1-m}$$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ và $x \neq 1$ nên $\frac{2m-1}{1-m} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m < 1$ và $2m-1 \neq 1-m \Rightarrow m \neq \frac{2}{3}$.

Vậy tất cả các giá trị của m thỏa mãn $\frac{1}{2} \leq m < 1$ và $m \neq \frac{2}{3}$.

Bài 37: Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

c) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{2}{x+2}$

Bài làm:

a) Thay $x = 64$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{2}{\sqrt{64}-2} = \frac{1}{3}$.

b) Ta có $B = \frac{3(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$.

c) Với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $P = \frac{A}{B} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$. Để $P \geq \frac{2}{x+2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{2}{x+2}$.

Do $2 > 0$ và $x+2 > 0$, $\sqrt{x}+2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \leq x+2 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \geq 0$

TH1: $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = 0$ nên $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (

TH2: $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0$ vì $\sqrt{x} \geq 0$ nên $x > 1$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 4$ ta được $x = 0$ hoặc $x \geq 1$, $x \neq 4$.

Bài 38: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0$, $x \neq 25$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả các số nguyên tố x để $A > B(2\sqrt{x}+5)$

Bài làm:

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{16}+2}{\sqrt{16}-5} = \frac{6}{-1} = -6$

b) Học sinh tự chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$

c) Từ $A > B(2\sqrt{x}+5) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} > \frac{1}{\sqrt{x}-5}(2\sqrt{x}+5) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} - \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5} > 0 \Rightarrow \frac{-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-5} > 0$

Vì $-\sqrt{x}-3 < -3 < 0$ nên $\sqrt{x}-5 < 0 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < 5 \Rightarrow 0 < x < 25$

Vì x là số nguyên tố nên $x \in \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}$.

Bài 39: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức B khi $4x^2 + x - 5 = 0$

c) Tìm m để có giá trị x thỏa mãn $2A + mB = 0$

Bài làm:

a) Ta có $A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 2(\sqrt{x}-1) - 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

b) Khi $4x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow (4x+5)(x-1) = 0$

Với $4x+5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$ (không thỏa mãn) nên không tồn tại giá trị của biểu thức B

Với $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện của biểu thức B) thay vào biểu thức B , ta được

$B = \frac{\sqrt{1}-1}{\sqrt{1}} = 0$.

c) Ta có $2A + mB = 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{m(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \frac{2x + m(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = 0$

$\Rightarrow 2x + m(x-1) = 0 \Rightarrow 2x + mx - m = 0 \Rightarrow (m+2)x = m \Rightarrow x = \frac{m}{m+2}$ (ĐK: $m \neq -2$)

Vì $x > 0$ nên $\frac{m}{m+2} > 0 \Rightarrow m > 0$ hoặc $m < -2$

và $x \neq 1$ nên $\frac{m}{m+2} \neq 1 \Rightarrow m \neq m+2$ (luôn đúng)

Vậy với mọi giá trị m thỏa mãn $m > 0$ hoặc $m < -2$.

Bài 40: Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm x để $P \geq \frac{\sqrt{x}+9}{8}$

Bài làm:

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{9}-2} = \frac{6}{3-2} = 6$

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1) + 3 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

c) Ta có $P = A \cdot B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

$$\text{Để } P \geq \frac{\sqrt{x}+9}{8} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{\sqrt{x}+9}{8} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+9}{8} \geq 0 \Rightarrow \frac{-(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0$$

Nhận thấy $-\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \leq 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$ nên chỉ xảy ra trường hợp

$$\sqrt{x}-3=0 \Rightarrow x=9 \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài 41: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x=16$
- Rút gọn biểu thức $P = A \cdot B$
- Tìm tất cả các giá trị của x để $(6x+18) \cdot P \geq x+9$

Bài làm:

a) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào A , ta được $A = \frac{\sqrt{16}-2}{16+3} = \frac{2}{19}$

b) $B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) - 2 + 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

Khi đó $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$. Vậy $P = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$

c) Ta có $(6x+18) \cdot P \geq x+9 \Rightarrow 6(x+3) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+3} \geq x+9 \Rightarrow x-6\sqrt{x}+9 \leq 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-3)^2 \leq 0$
 $\Rightarrow \sqrt{x}-3=0 \Rightarrow x=9$

Chương 4. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Bài 1. Tỷ số lượng giác của góc nhọn.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

a) $A = \tan 76^0 - \cot 14^0$ $= \tan 76^0 - \tan(90^0 - 14^0)$ $= \tan 76^0 - \tan 76^0 = 0$	b) $B = \sin 33^0 - \cos 57^0$ $= \sin 33^0 - \sin(90^0 - 57^0)$ $= \sin 33^0 - \sin 33^0 = 0$
c) $C = \sin 30^0 + \cos 30^0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$	d) $D = \sin 30^0 + \sin 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
e) $E = \tan 30^0 + \cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}$	f) $F = 2 \cdot \tan 45^0 - \cot 60^0 = 2 - \sqrt{3}$

Bài 2:

a) $A = \frac{\sin 25^0}{\cos 65^0} = \frac{\sin 25^0}{\sin(90^0 - 65^0)} = \frac{\sin 25^0}{\sin 25^0} = 1$	b) $B = \frac{\tan 50^0}{\cot 40^0} = \frac{\tan 50^0}{\cot(90^0 - 40^0)} = \frac{\tan 50^0}{\tan 50^0} = 1$
c) $C = \frac{\sin 70^0}{\tan 70^0} = \sin 70^0 : \frac{\sin 70^0}{\cos 70^0} = \cos 70^0$	

Bài 3:

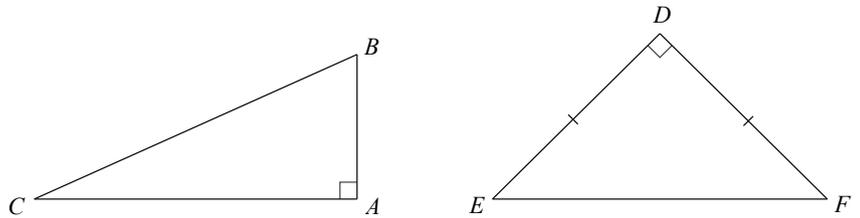
a) $M = \sin 10^0 \cdot \cos 80^0 + \cos 10^0 \cdot \sin 80^0 = \sin 10^0 \cdot \sin 10^0 + \cos 10^0 \cdot \cos 10^0 = \sin^2 10^0 + \cos^2 10^0 = 1$
b) $N = \frac{\sin 58^0}{\cos 32^0} - \cos 60^0 + \tan 37^0 \cdot \tan 53^0 + \sin 30^0$ $= \frac{\sin 58^0}{\sin 58^0} - \sin 30^0 + \tan 37^0 \cdot \cot 37^0 + \sin 30^0 = 1 + 1 = 2$

Bài 4:

a) Tỷ số lượng giác của góc B là:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \quad \cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} \quad \cot B = \frac{AB}{AC}$$



Hình 1

b) Tỷ số lượng giác của góc E là:

$$\sin E = \frac{DF}{EF} \quad \cos E = \frac{ED}{EF} \quad \tan E = \frac{DF}{DE} \quad \cot E = \frac{DE}{DF}$$

Bài 5:

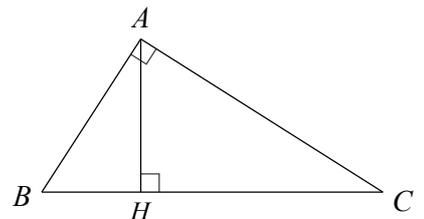
a) Tỷ số lượng giác của góc B trong $\triangle ABC$ là

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \quad \cos B = \frac{AB}{BC} \quad \tan B = \frac{AC}{AB} \quad \cot B = \frac{AB}{AC}$$

Tỷ số lượng giác của góc B trong $\triangle ABH$ là

$$\sin B = \frac{AH}{AB} \quad \cos B = \frac{BH}{AB} \quad \tan B = \frac{AH}{BH} \quad \cot B = \frac{BH}{AH}$$

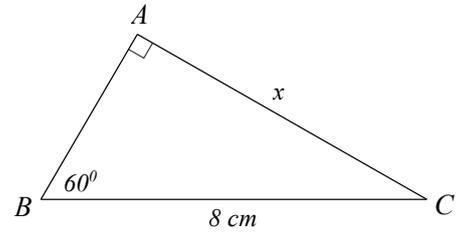
b) Vì $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB \cdot AC = AH \cdot BC$.



Hình 2

Bài 6: (Hình 3)

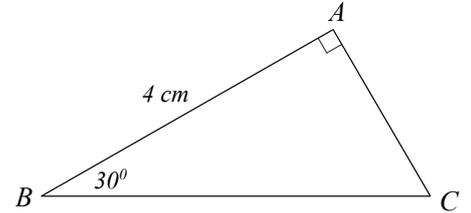
- a) Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4\sqrt{3} \text{ cm}$
- b) Ta có $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{8} \Rightarrow AB = 4 \text{ cm}$



Hình 3

Bài 7: (Hình 4)

- a) Ta có $\tan B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AC}{4} \Rightarrow AC = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$
- Ta có $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{BC} \Rightarrow BC = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ cm}$



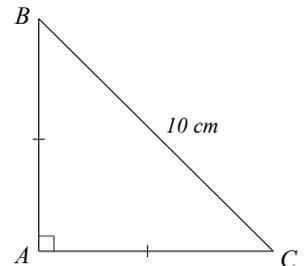
Hình 4

- b) Ta có $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

Bài 8: (Hình 5)

$\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = 45^\circ$

Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AC}{10} \Rightarrow AC = 5\sqrt{2} \text{ cm} = AB$



Hình 5

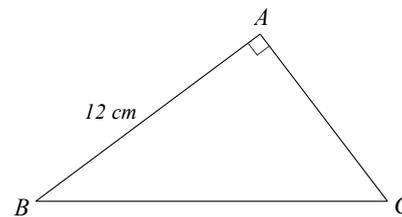
Bài 9: (Hình 6)

- a) Ta có $\tan B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AC}{12} \Rightarrow AC = 9 \text{ cm}$

Áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm}$$

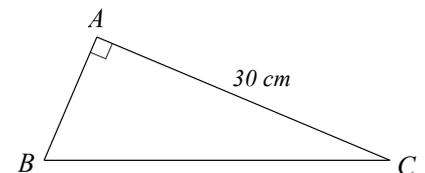
- b) Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} \Rightarrow \widehat{B} \approx 36,8^\circ$.



Hình 6

Bài 10: (Hình 7)

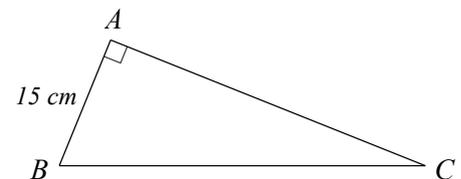
Ta có $\tan C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{AB}{30} \Rightarrow AB = \frac{25}{2} \text{ cm}$



Hình 7

Bài 11: (Hình 8)

Ta có $\cot B = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{5}{13} = \frac{15}{AC} \Rightarrow AC = 39 \text{ cm}$



Hình 8

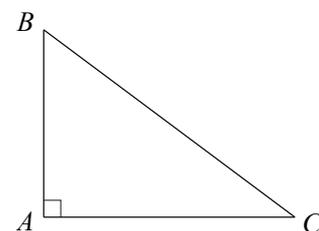
Bài 12: (Hình 9)

Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$

Nên $\cos C = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin B = \frac{4}{5}$

Mà $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$$\Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos^2 B = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos B = \frac{3}{5}$$



Hình 9

Lại có $\tan B = \sin B : \cos B = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$ và $\cot B = \frac{1}{\tan B} = \frac{3}{4}$.

Bài 13: (Hình 10)

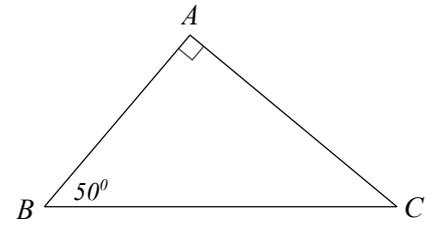
Ta có $\sin B \approx 0,766 \Rightarrow \cos C \approx 0,766$

Lại có $\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin^2 C + 0,766^2 = 1$

$\Rightarrow \sin^2 C = 0,413 \Rightarrow \sin C \approx 0,642$

$\tan C = \sin C : \cos C = \frac{0,642}{0,766} \approx 0,838$

$\cot C = \cos C : \sin C = \frac{0,766}{0,642} \approx 1,193$



Hình 10

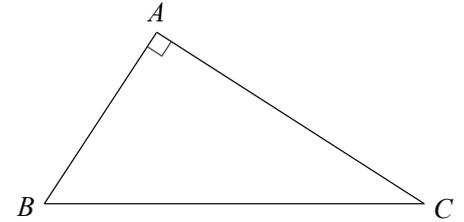
Bài 14: (Hình 11)

Từ $\cos B = 0,6 \Rightarrow \sin C = 0,6$

Lại có $\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \cos^2 C = 1 - 0,36 = 0,64$

$\Rightarrow \cos C = 0,8$

$\tan C = \sin C : \cos C = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$ và $\cot C = 1 : \tan C = \frac{4}{3}$.



Hình 11

Bài 15: (Hình 12)

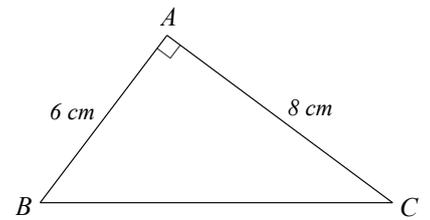
Áp dụng định lý Pythagore ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm}$

$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \cos C$

$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \sin C$

$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = \cot C$ và $\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \tan C$.



Hình 12

Bài 16: (Hình 13)

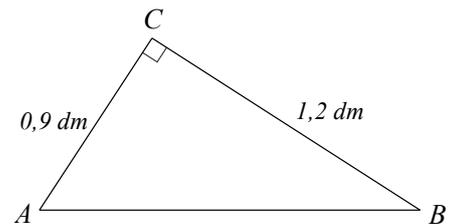
Áp dụng định lý Pythagore ta có

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 0,9^2 + 1,2^2 = 2,25 \Rightarrow AB = 1,5 \text{ dm}$

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5} = \cos B$

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{0,9}{1,5} = \frac{3}{5} = \sin B$

$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1,2}{0,9} = \frac{4}{3} = \cot B$ và $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4} = \tan B$.



Hình 13

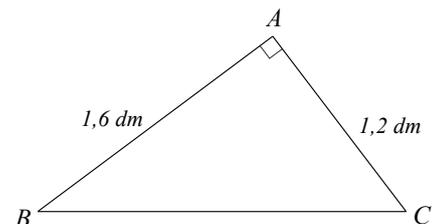
Bài 17: (Hình 14)

Áp dụng định lý Pythagore ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1,6^2 + 1,2^2 = 4 \Rightarrow BC = 2 \text{ cm}$

$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{1,6}{2} = \frac{4}{5} = \cos B$

$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{1,2}{2} = \frac{3}{5} = \sin B$

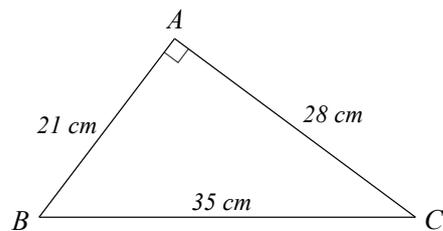


Hình 14

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{1,6}{1,2} = \frac{4}{3} = \cot B \text{ và } \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} = \tan B.$$

Bài 18: (Hình 15)

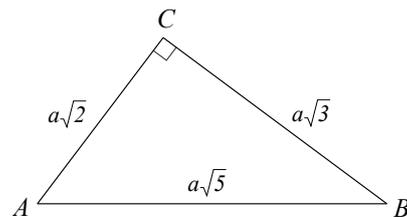
- a) Ta có $BC^2 = 35^2 = 1225 \text{ cm}$
 Và $AB^2 + AC^2 = 21^2 + 28^2 = 1225 \text{ cm}$
 Nên $BC^2 = AB^2 + AC^2$ vậy $\triangle ABC$ vuông tại A .
- b) Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$ và $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$



Hình 15

Bài 19: (Hình 16)

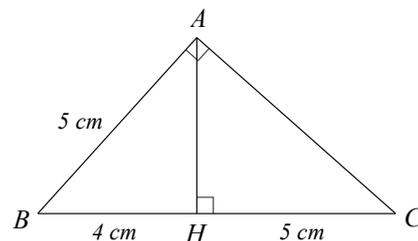
- a) Ta có $AB^2 = (a\sqrt{5})^2 = 5a^2$
 Và $AC^2 + BC^2 = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{3})^2 = 2a^2 + 3a^2 = 5a^2$
 Như vậy $AB^2 = AC^2 + BC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A .
- b) Ta có $\sin B = \frac{BC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
 $\cos B = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
 $\tan B = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cot C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cot B = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



Hình 16

Bài 20: (Hình 16)

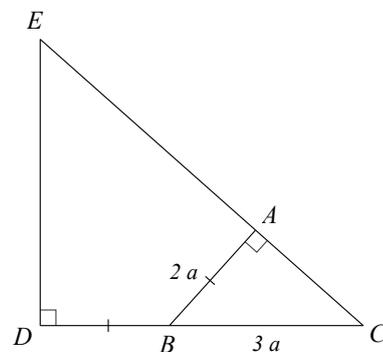
- a) $\triangle AHB$ vuông tại H , ta có
 $\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{B} \approx 36,8^\circ$
 Khi đó $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} \approx 90^\circ - 36,8^\circ = 53,2^\circ$
- b) Ta có $BC = BH + HC = 9 \text{ cm}$
 Áp dụng định lý Pythagore ta có:
 $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 9^2 - 5^2 = 56 \Rightarrow AC = \sqrt{56} \text{ cm}$
 Khi đó chu vi $\triangle ABC$ là: $AB + BC + AC = 5 + 9 + \sqrt{56} = 14 + \sqrt{56} \text{ (cm)}$
 Diện tích $\triangle ABC$ là $\frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{56} \text{ (cm}^2\text{)}$



Hình 17

Bài 21:

- a) Chứng minh $\triangle CAB \sim \triangle CDE$ (g - g)
 $\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow DE \cdot CA = AB \cdot CD = 2a \cdot 5a = 10a^2$.
- b) Ta có $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{C} \approx 41,5^\circ$
 Áp dụng Pythagore ta có
 $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{5} \text{ cm}$
 Từ câu a) ta có $DE \cdot CA = 10a^2 \Rightarrow DE = \frac{10a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{10a}{\sqrt{5}} \text{ cm}$



Hình 18

Bài 22:

a) Áp dụng Pythagore ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm}$$

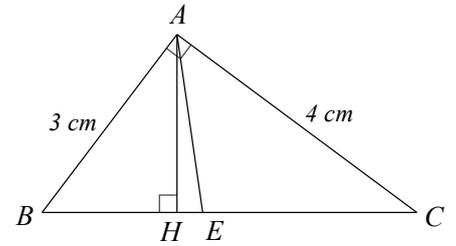
$$\text{Lại có } \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

b) Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{B} \approx 53,7^\circ$.

$$\text{Khi đó } \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} \approx 90^\circ - 53,7^\circ \approx 36,2^\circ$$

c) AE là đường phân giác của $\triangle ABC$ nên ta có

$$\frac{BE}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{BE}{3} = \frac{CE}{4} = \frac{BE+CE}{3+4} = \frac{5}{7} \Rightarrow BE = \frac{15}{7} \text{ cm và } CE = \frac{20}{7} \text{ cm}.$$



Hình 19

Bài 23:

a) Ta có $EF^2 = 10^2 = 100 \text{ cm}$

$$\text{Và } DE^2 + DF^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \text{ cm}$$

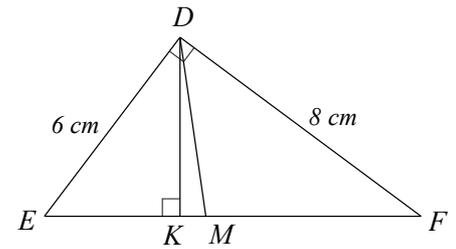
Nên $EF^2 = DE^2 + DF^2$. Vậy $\triangle DEF$ vuông tại D .

b) Ta có $\frac{1}{2} DK \cdot EF = \frac{1}{2} DE \cdot DF \Rightarrow DK = \frac{DE \cdot DF}{EF} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5} \text{ cm}$

$$\text{Áp dụng Pythagore ta có } FK^2 = DF^2 - DK^2 = 8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{1024}{25} \Rightarrow FK = \frac{32}{5} \text{ cm}.$$

c) Ta có $\sin E = \frac{DF}{EF} = \frac{8}{10} \Rightarrow \widehat{E} \approx 53,7^\circ$. Khi đó $\widehat{F} = 90^\circ - \widehat{E} \approx 36,2^\circ$

d) Vì DM là đường phân giác của $\triangle DEF$ nên ta có $\frac{ME}{DE} = \frac{MF}{DF} \Rightarrow \frac{ME}{6} = \frac{MF}{8} = \frac{ME+MF}{6+8} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$
 $\Rightarrow ME = \frac{30}{7} \text{ cm và } MF = \frac{40}{7} \text{ cm}.$



Hình 20

Bài 12: Một số hệ thức giữa cạnh, góc trong tam giác vuông và ứng dụng.

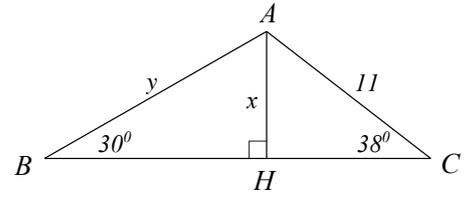
B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

Hình 1:

$$x = AH = AC \cdot \sin C = 11 \cdot \sin 38^\circ \approx 6,77 \text{ cm}$$

$$AH = AB \cdot \sin B \Rightarrow y = AB = \frac{AH}{\sin B} = \frac{6,77}{\sin 30^\circ} \approx 13,54 \text{ cm}$$

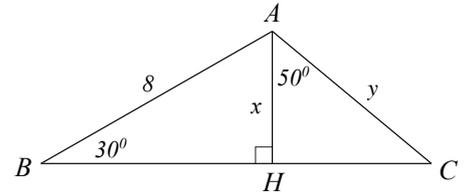


Hình 1

Hình 2:

$$x = AH = AB \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$AH = AC \cdot \cos 50^\circ \Rightarrow y = AC = \frac{AH}{\cos 50^\circ} = \frac{4}{\cos 50^\circ} \approx 6,22 \text{ cm}$$

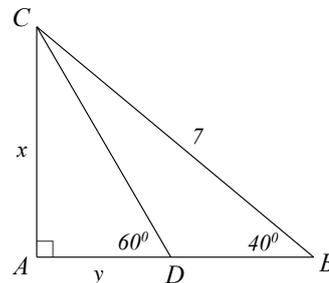


Hình 2

Hình 3:

$$x = AC = BC \cdot \sin B = 7 \cdot \sin 40^\circ \approx 4,5 \text{ cm}$$

$$y = AD = AC \cdot \cot D = 4,5 \cdot \cot 60^\circ \approx 2,6 \text{ cm}$$



Hình 3

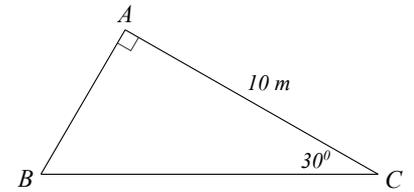
Bài 2:

Hình 4:

$$\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$AB = AC \cdot \tan C = 10 \cdot \tan 30^\circ \approx 5,77 \text{ cm}$$

$$AC = BC \cdot \sin B \Rightarrow BC = \frac{AC}{\sin B} = 10 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$



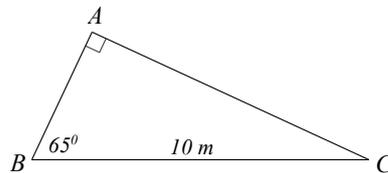
Hình 4

Hình 5:

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

$$AB = BC \cdot \cos B = 10 \cdot \cos 65^\circ \approx 4,23 \text{ cm}$$

$$AC = BC \cdot \sin B = 10 \cdot \sin 65^\circ \approx 9,06 \text{ cm}.$$



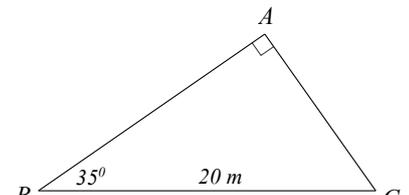
Hình 5

Hình 6:

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$AB = BC \cdot \sin C = 20 \cdot \sin 55^\circ \approx 16,38 \text{ cm}$$

$$AC = BC \cdot \cos C = 20 \cdot \cos 55^\circ \approx 11,47 \text{ cm}$$



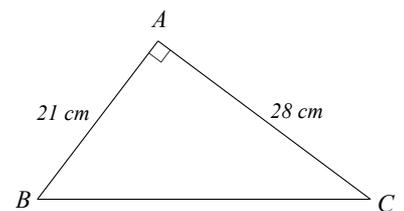
Hình 6

Hình 7:

$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 = 21^2 + 28^2 = 1225 \Rightarrow BC = 35 \text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{28}{35} \Rightarrow \widehat{B} \approx 53^\circ 7'$$

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 53^\circ 7' \approx 36^\circ 53'$$



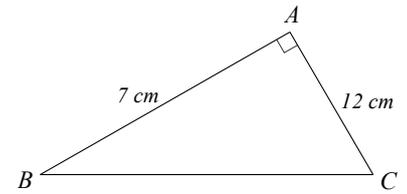
Hình 7

Hình 8:

$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 = 7^2 + 12^2 = 193 \Rightarrow BC \approx 13,9 \text{ cm}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{7} \Rightarrow \widehat{B} \approx 59^{\circ}40'$$

$$\widehat{C} = 90^{\circ} - \widehat{B} = 90^{\circ} - 59^{\circ}40' = 30^{\circ}20'$$



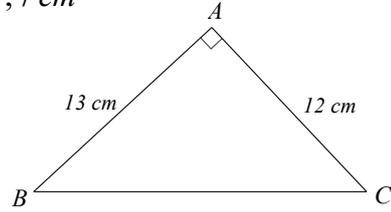
Hình 8

Hình 9:

$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 = 13^2 + 12^2 = 313 \Rightarrow BC \approx 17,7 \text{ cm}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13} \Rightarrow \widehat{B} \approx 42^{\circ}42'$$

$$\widehat{C} = 90^{\circ} - \widehat{B} = 90^{\circ} - 42^{\circ}42' = 47^{\circ}18'$$



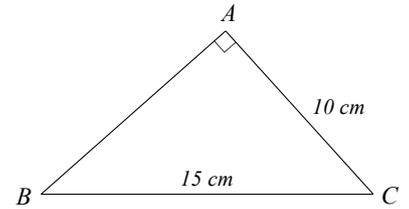
Hình 9

Hình 10:

$$\text{Ta có } AB^2 = BC^2 - AC^2 = 15^2 - 10^2 = 125 \Rightarrow AB = 11,18 \text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{B} \approx 41^{\circ}48'$$

$$\widehat{C} = 90^{\circ} - \widehat{B} = 90^{\circ} - 41^{\circ}48' = 48^{\circ}12'$$



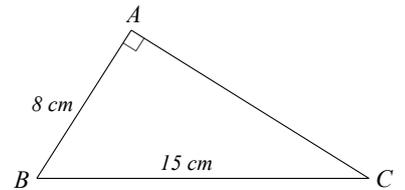
Hình 10

Hình 11:

$$\text{Ta có } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 15^2 - 8^2 = 161 \Rightarrow AC \approx 12,69 \text{ cm}$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{15} \Rightarrow \widehat{C} \approx 32^{\circ}13'$$

$$\widehat{B} = 90^{\circ} - \widehat{C} = 90^{\circ} - 32^{\circ}13' = 57^{\circ}48'$$



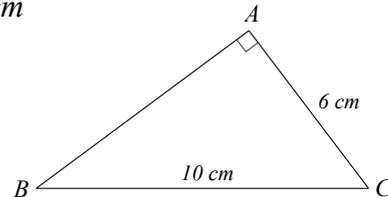
Hình 11

Hình 12:

$$\text{Ta có } AB^2 = BC^2 - AC^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow AB = 8 \text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} \Rightarrow \widehat{B} = 36^{\circ}52'$$

$$\widehat{C} = 90^{\circ} - \widehat{B} = 90^{\circ} - 36^{\circ}52' = 53^{\circ}8'$$



Hình 12

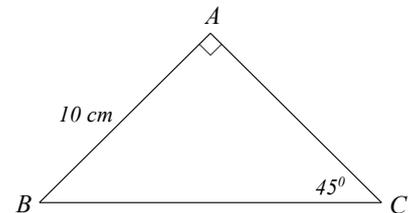
Bài 3:

Hình 13:

$$\widehat{B} = 90^{\circ} - \widehat{C} = 90^{\circ} - 45^{\circ} = 45^{\circ}$$

$$\triangle ABC \text{ cân tại } A \text{ nên } AC = AB = 10 \text{ cm}$$

$$AB = BC \cdot \sin C \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{10}{\sin 45^{\circ}} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$



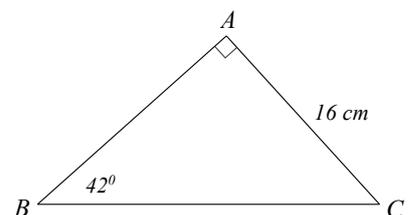
Hình 13

Hình 14:

$$\widehat{C} = 90^{\circ} - \widehat{B} = 90^{\circ} - 42^{\circ} = 48^{\circ}$$

$$AC = BC \cdot \sin B \Rightarrow BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{16}{\sin 42^{\circ}} \approx 23,9 \text{ cm}$$

$$AB = AC \cdot \tan C = 16 \cdot \tan 48^{\circ} \approx 17,77 \text{ cm}$$



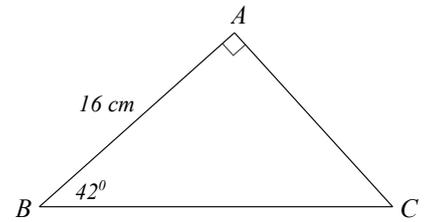
Hình 14

Hình 15:

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$$

$$AB = BC \cdot \cos B \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{16}{\cos 42^\circ} \approx 21,53 \text{ cm}$$

$$AC = AB \cdot \tan B = 16 \cdot \tan 42^\circ \approx 14,4 \text{ cm}$$



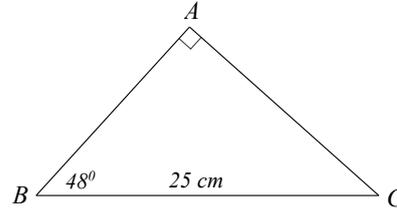
Hình 15

Hình 16:

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$$

$$AB = BC \cdot \sin C = 25 \cdot \sin 42^\circ \approx 16,73 \text{ cm}$$

$$AC = BC \cdot \sin B = 25 \cdot \sin 48^\circ \approx 18,58 \text{ cm}$$



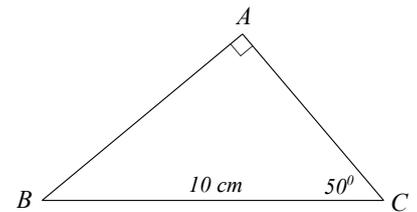
Hình 16

Hình 17:

$$\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$AB = BC \cdot \sin C = 10 \cdot \sin 50^\circ \approx 7,66 \text{ cm}$$

$$AC = BC \cdot \sin B = 10 \cdot \sin 40^\circ \approx 6,43 \text{ cm}$$



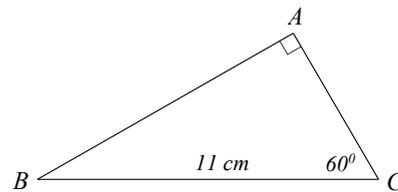
Hình 17

Hình 18:

$$\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$AB = BC \cdot \sin C = 11 \cdot \sin 60^\circ = \frac{11\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$AC = BC \cdot \sin B = 11 \cdot \sin 30^\circ = \frac{11}{2} \text{ cm}$$



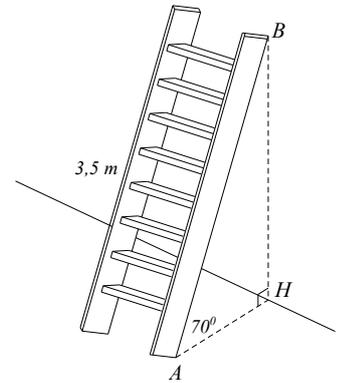
Hình 18

Bài 4:

Gọi chiều dài của thang là $AB = 3,5 \text{ m}$, khoảng cách từ chân thang tới tường là AH

Và góc tạo bởi thang với mặt đất là \widehat{HAB}

$$\triangle ABH \text{ vuông tại } H \text{ nên } AH = AB \cdot \cos \widehat{HAB} = 3,5 \cdot \cos 70^\circ \approx 1,2 \text{ m}$$



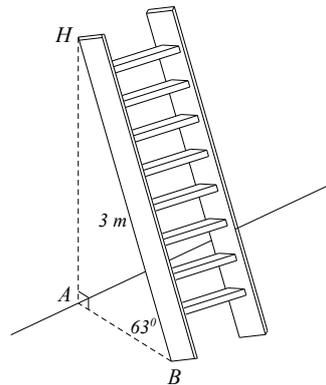
Bài 5:

Gọi chiều dài của chiếc thang là $BH = 3 \text{ m}$

Khoảng cách chân thang tới tường là AB

$\triangle ABH$ vuông tại A nên

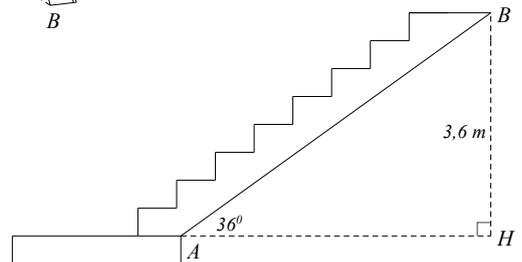
$$AB = BH \cdot \cos B = 3 \cdot \cos 63^\circ \approx 1,4 \text{ m}$$



Bài 6:

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H nên

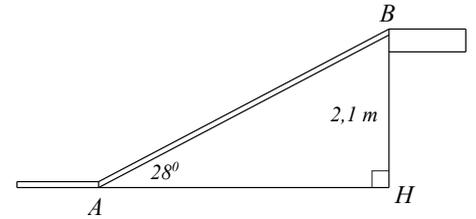
$$\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 36^\circ = \frac{3,6}{AB} \Rightarrow AB = 6,1 \text{ m}$$



Bài 7:

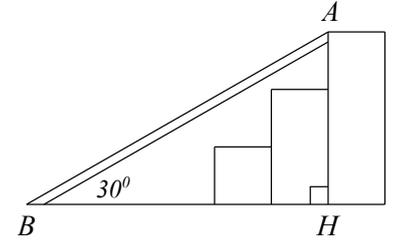
Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$BH = AB \cdot \sin A \Rightarrow AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{2,1}{\sin 28^\circ} \approx 4,47 \text{ m}$$

**Bài 8:**

Độ dài mặt cầu là AB . Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

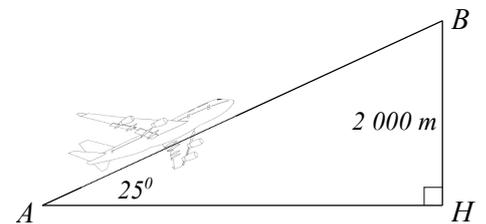
$$AH = AB \cdot \sin B \Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} = \frac{55}{\sin 30^\circ} = 110 \text{ cm}$$

**Bài 9:**

Gọi độ dài bay của máy bay để đạt đến độ cao 2000 m là AB

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có:

$$BH = AB \cdot \sin A \Rightarrow AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{2000}{\sin 25^\circ} = 4732,4 \text{ m}$$



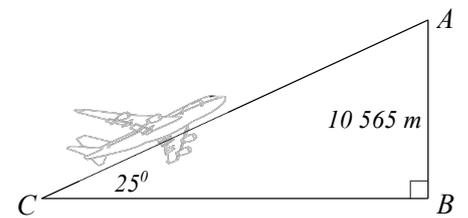
Bài 10: Đổi $5 \text{ phút} = \frac{1}{12}$ giờ.

Độ cao máy bay đạt được là 10565 m nên $AB = 10565 \text{ m}$

$$\text{Ta có } \sin C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{10565}{\sin 25^\circ} \approx 24,999 \text{ km}$$

Do đó vận tốc trung bình mà máy bay đạt được là

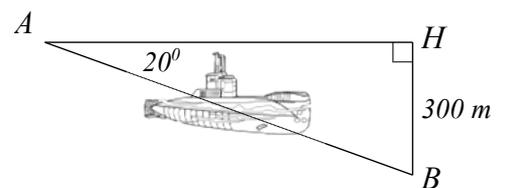
$$v = \frac{s}{t} = \frac{24,999}{\frac{1}{12}} = 299,987 \text{ (km/h)}$$

**Bài 11:**

Gọi quãng đường tàu ngầm di chuyển là $AB \text{ (km)}$.

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , ta có

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{300}{\sin 20^\circ} \approx 877 \text{ m}$$

**Bài 12:**

Gọi chiều cao của cột cờ là AH , bóng của cột cờ trên mặt đất là AB

Xét $\triangle ABH$ vuông tại A , ta có

$$AH = AB \cdot \tan B = 12 \cdot \tan 40^\circ \approx 10 \text{ m}$$

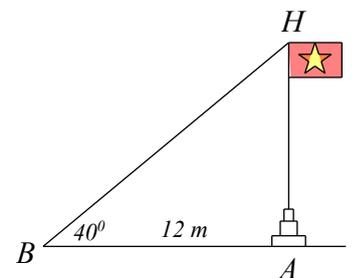
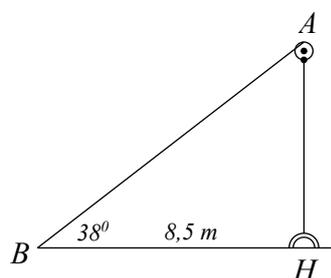
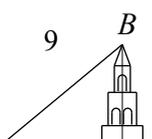
Bài 13:

Gọi chiều cao của cột đèn là AH ,

bóng của cột đèn trên mặt đất là BH

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$AH = BH \cdot \tan B = 8,5 \cdot \tan 38^\circ \approx 6,64 \text{ m}$$

**Bài 14:**

Gọi chiều cao của cột tháp là BH , bóng của tháp trên mặt đất là AH

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có:

$$BH = AH \cdot \tan A = 96 \cdot \tan 50^\circ \approx 114,4 \text{ m}$$

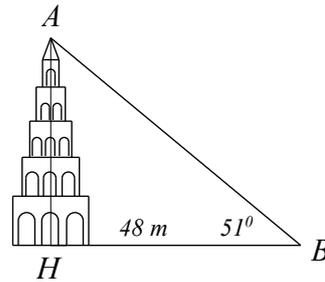
Bài 15:

Gọi chiều cao của cột tháp là AH ,

bóng của tháp trên mặt đất là BH

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có:

$$AH = BH \cdot \tan B = 48 \cdot \tan 51^\circ \approx 59,3 \text{ m}$$

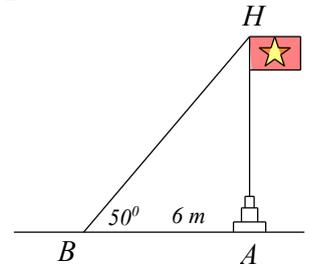


Bài 16:

Gọi chiều cao của cột cờ là AH , bóng của cột cờ trên mặt đất là AB

Xét $\triangle ABH$ vuông tại A , ta có

$$AH = AB \cdot \tan B = 6 \cdot \tan 50^\circ \approx 7,15 \text{ m}$$

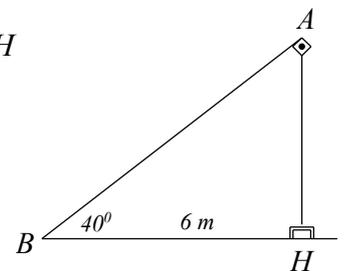


Bài 17:

Gọi chiều cao của cột đèn là AH , bóng của cột đèn trên mặt đất là BH

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$AH = BH \cdot \tan B = 6 \cdot \tan 40^\circ \approx 5 \text{ m}$$



Bài 18:

Gọi chiều cao của tòa nhà là BH , bóng của tòa nhà trên mặt đường là AH

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$BH = AH \cdot \tan A = 36 \cdot \tan 55^\circ \approx 51,4 \text{ m}$$

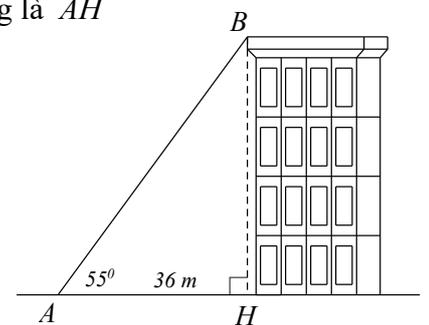
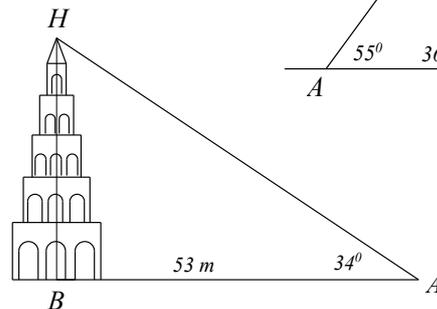
Bài 19:

Gọi chiều cao của tòa tháp là BH ,

bóng của tháp trên mặt đất là AB

Xét $\triangle ABH$ vuông tại B , ta có

$$BH = AB \cdot \tan A = 53 \cdot \tan 34^\circ \approx 35,7 \text{ m}$$

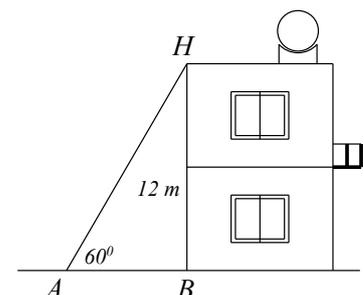


Bài 20:

Gọi chiều cao của ngôi nhà là BH , bóng của ngôi nhà trên mặt đất là AB

Xét $\triangle ABH$ vuông tại B , ta có

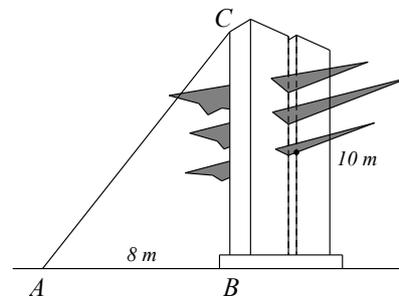
$$\tan A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BH}{\tan A} = \frac{12}{\tan 60^\circ} \approx 4\sqrt{3} \text{ m}$$



Bài 21:

Gọi chiều cao của tượng đài là BC ,
 bóng của tượng đài trên mặt đất là AB
 Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , ta có

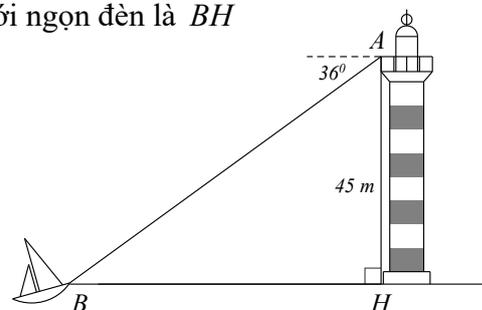
$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{8} \Rightarrow A \approx 51^{\circ}20'$$

**Bài 22:**

Gọi chiều cao của ngọn đèn biển là AH , khoảng cách tàu tới ngọn đèn là BH
 Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

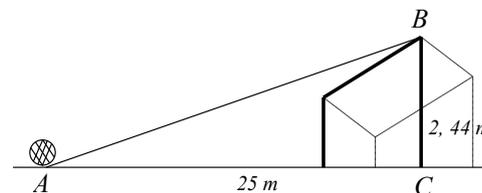
$$\widehat{B} = 36^{\circ} \text{ (so le trong)}$$

$$\tan B = \frac{AH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{AH}{\tan B} = \frac{45}{\tan 36^{\circ}} \approx 61,9 \text{ m}$$

**Bài 23:**

Gọi chiều cao cầu môn là BC , khoảng cách bóng tới cầu môn là AC
 Xét $\triangle ABC$ vuông tại C , ta có

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{2,44}{25} \Rightarrow A \approx 5^{\circ}34'$$

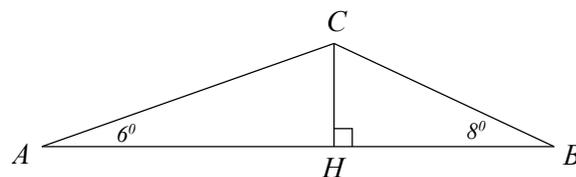
**Bài 24:**

a) Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có

$$\tan A = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan A} = \frac{20}{\tan 6^{\circ}} \approx 190 \text{ m}$$

Xét $\triangle BCH$ vuông tại H , ta có

$$\tan B = \frac{CH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan B} = \frac{20}{\tan 8^{\circ}} \approx 142 \text{ m}. \text{ Vậy } AB = AH + BH = 190 + 142 = 332 \text{ m}$$



b) Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có

$$\sin A = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin A} = \frac{20}{\sin 6^{\circ}} \approx 191 \text{ m} = 0,191 \text{ km}$$

$$\text{Thời gian đi lên dốc là } t = \frac{s}{v} = \frac{0,191}{4} = 0,047 \text{ (giờ)}$$

Xét $\triangle BCH$ vuông tại H , ta có

$$\sin B = \frac{CH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{CH}{\sin B} = \frac{20}{\sin 8^{\circ}} = 143,7 \text{ m} = 0,1437 \text{ km}$$

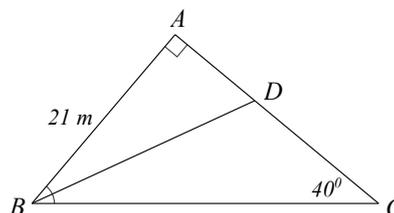
$$\text{Thời gian đi xuống dốc là } t = \frac{s}{v} = \frac{0,1437}{10} = 0,014 \text{ (giờ)}$$

Thời gian đi từ nhà đến trường là $0,047 + 0,014 = 0,061 \text{ giờ} = 3,66 \text{ phút}$.

Bạn Hùng đến trường khoảng lúc 7 giờ 14 phút

Bài 25:

$$\tan C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan C} = \frac{21}{\tan 40^{\circ}} \approx 25 \text{ m}$$



Hình 2

$$\sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{21}{\sin 40^\circ} \approx 32,67 \text{ m}$$

BD là đường phân giác $\triangle ABC$ nên

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{21} = \frac{DC}{32,67} = \frac{AD+DC}{21+32,67} = \frac{AC}{53,67} = \frac{25}{53,67} \Rightarrow AD = 9,8 \text{ m}$$

$$\text{Ta có } \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{C} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = 25^\circ$$

$$\cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB}{\cos \widehat{ABD}} = \frac{21}{\cos 25^\circ} = 23,2 \text{ m}$$

Bài 26:

a) $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$BH = AH \cdot \tan \widehat{BAH} = AH \cdot \tan 30^\circ$$

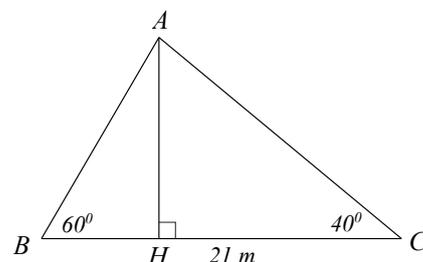
$\triangle AHC$ vuông tại H , ta có

$$CH = AH \cdot \tan \widehat{HAC} = AH \cdot \tan 50^\circ$$

$$\text{Mà } BC = BH + HC = AH \cdot \tan 30^\circ + AH \cdot \tan 50^\circ \approx AH \cdot 0,6 \Rightarrow AH = \frac{BC}{0,6} = \frac{21}{0,6} = 35 \text{ m}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{35}{\sin 40^\circ} \approx 54,45 \text{ m}.$$

b) Diện tích $\triangle ABC$ là $S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 21 = 367,5 \text{ m}^2$



Bài 27:

a) $\triangle ABN$ vuông tại N , ta có

$$BN = AN \cdot \tan \widehat{BAN} = AN \cdot \tan 52^\circ$$

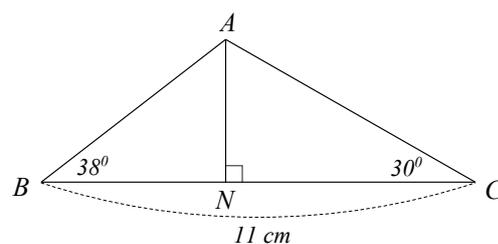
$\triangle ANC$ vuông tại N , ta có

$$NC = AN \cdot \tan \widehat{NAC} = AN \cdot \tan 60^\circ$$

$$\text{Mà } BC = BN + NC = AN \cdot \tan 52^\circ + AN \cdot \tan 60^\circ = AN \cdot (\tan 52^\circ + \tan 60^\circ) \approx AN \cdot 3$$

$$\Rightarrow AN = \frac{BC}{3} = \frac{11}{3} \text{ cm}.$$

b) $\triangle ANC$ vuông tại N , ta có $\sin C = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AN}{\sin C} = \frac{11}{3 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{22}{3} \text{ cm}$



Bài 28:

$\triangle AHC$ vuông tại H , ta có

$$AH = CH \cdot \tan \widehat{ACH} = CH \cdot \tan 70^\circ$$

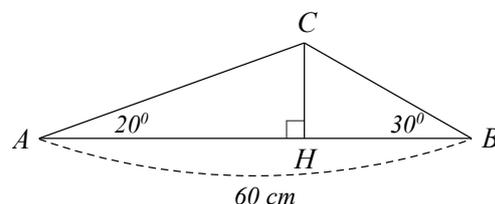
$\triangle CHB$ vuông tại H , ta có

$$BH = CH \cdot \tan \widehat{HCB} = CH \cdot \tan 60^\circ$$

$$\text{Mà } AB = AH + BH = CH \cdot \tan 70^\circ + CH \cdot \tan 60^\circ = CH \cdot (\tan 70^\circ + \tan 60^\circ)$$

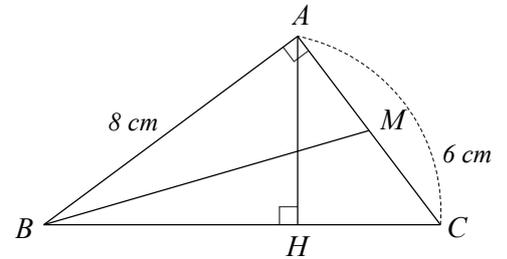
$$\Rightarrow CH = \frac{AB}{\tan 70^\circ + \tan 60^\circ} \approx 13,4 \text{ cm}.$$

Khi đó $AH = CH \cdot \tan 70^\circ \approx 36,8 \text{ cm}$ và $BH = AB - AH = 60 - 36,8 = 23,2 \text{ cm}$



Bài 29:

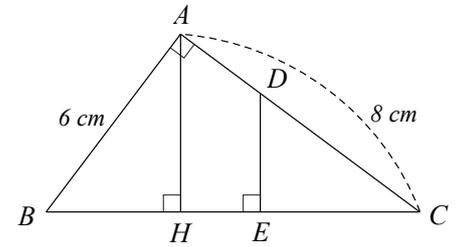
- a) $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm}$
 $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} \Rightarrow \widehat{B} \approx 36^{\circ}52'$
 $\widehat{C} = 90^{\circ} - \widehat{B} = 90^{\circ} - 36^{\circ}52' = 53^{\circ}08'$.



- b) Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{8 \cdot 6}{10} = \frac{24}{5} \text{ cm}$
 $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{1024}{25} \Rightarrow BH = \frac{32}{5} \text{ cm}$
- c) M là trung điểm của $AC \Rightarrow AM = \frac{AC}{2} = 3 \text{ cm}$
 $\triangle ABM$ vuông tại A có $\tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{AM} = \frac{8}{3} \Rightarrow \widehat{AMB} \approx 69^{\circ}26'$.

Bài 30:

- a) $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm}$
 $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{B} \approx 53^{\circ}07'$
 $\widehat{C} = 90^{\circ} - \widehat{B} = 90^{\circ} - 53^{\circ}07' = 36^{\circ}53'$



Hình 7

- b) Ta có $AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C = AB \cdot \frac{AB}{BC} + AC \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC} = \frac{BC^2}{BC} = BC$
- c) Từ A hạ $AH \perp BC$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow \frac{1}{AH} = \frac{BC}{AB \cdot AC} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2}$$

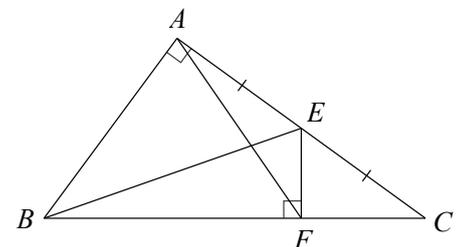
$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \quad (1)$$

$$DE \parallel AH \Rightarrow \triangle CED \sim \triangle CHA \Rightarrow \frac{DE}{AH} = \frac{DC}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = \frac{3}{2} DE \text{ thay vào (1) ta được}$$

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{9DE^2}.$$

Bài 31:

- a) Ta có $\sin C = 0,6 \Rightarrow \widehat{C} = 36^{\circ}52'$
 Khi đó $\widehat{B} = 90^{\circ} - \widehat{C} = 90^{\circ} - 36^{\circ}52' = 53^{\circ}08'$
 Ta có $\sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \sin C = 20 \cdot 0,6 = 12 \text{ cm}$
 Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \Rightarrow AC = 16 \text{ cm}$



Hình 8

- b) Chứng minh $\triangle CFE \sim \triangle CAB$ (g - g) $\Rightarrow \frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow CA \cdot CE = CF \cdot CB \Rightarrow CA \cdot \frac{AC}{2} = CF \cdot CB$
 $\Rightarrow AC^2 = 2CF \cdot CB$
- c) Chứng minh $\triangle CFA \sim \triangle CEB$ (c - g - c) $\Rightarrow \frac{CF}{CE} = \frac{AF}{BE} \Rightarrow AF = \frac{BE \cdot CF}{CE} = BE \cdot \cos C$

Bài 32:

- a) Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle AHB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AB \quad (1)$$

Chứng minh $\triangle AFH \sim \triangle AHC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{AH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH^2 = AF \cdot AC \quad (2)$$

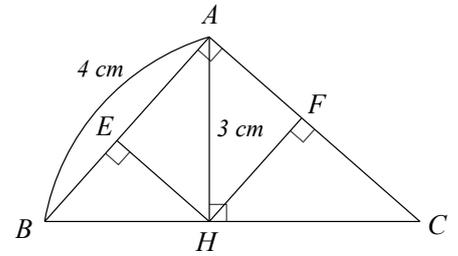
Từ (1), (2) $\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$

- b) Từ (1) $\Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB} = \frac{9}{4} \text{ cm}$. Khi đó $BE = AB - AE = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} \text{ cm}$.

- c) Chỉ ra $AEHF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HF = AE = \frac{9}{4} \text{ cm}$.

Từ $\widehat{HAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$. $\triangle HFC$ vuông tại F , ta có

$$\tan C = \frac{HF}{FC} \Rightarrow FC = \frac{HF}{\tan C} = \frac{9}{4} : \tan 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}.$$



Hình 9

Bài 34:

- a) $AB = BC \cdot \cos B = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3 \text{ cm}$

$$AC = BC \cdot \sin B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

- b) Chứng minh $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$HC = BC - BH = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

- c) Chỉ ra $\triangle BDC$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{BCD}$

Chỉ ra \widehat{ABC} là góc ngoài của $\triangle BDC$ nên $\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCD} = 30^\circ$

Chỉ ra CB là đường phân giác của $\triangle ACD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

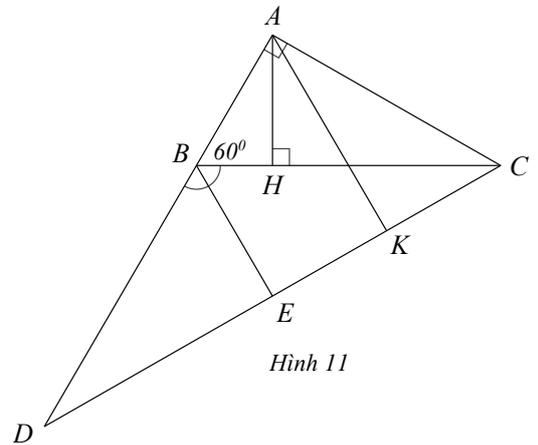
- d) Gọi tia phân giác \widehat{CBD} là BE .

Chỉ ra $BE \perp DC$ rồi suy ra $AK \perp DC$.

$$\text{Chỉ ra } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot DC = \frac{1}{2} AD \cdot AC \Rightarrow \frac{1}{AK} = \frac{DC}{AD \cdot AC} \Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{DC^2}{AD^2 \cdot AC^2} = \frac{AD^2 + AC^2}{AD^2 \cdot AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}. \text{ Ta cần chứng minh } AK^2 = KD \cdot KC$$

Chứng minh $\triangle DK A \sim \triangle AK C$ (g - g) $\Rightarrow \frac{DK}{AK} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow AK^2 = DK \cdot KC$ (đpcm)



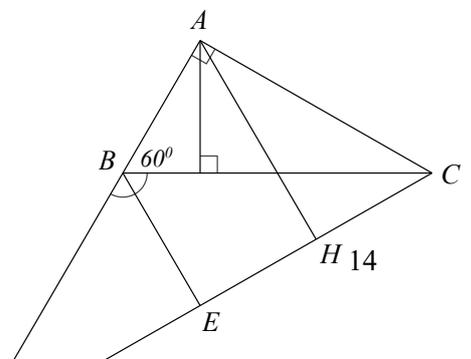
Hình 11

Bài 35:

- a) $AB = BC \cdot \cos B = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3 \text{ cm}$

$$AC = BC \cdot \sin B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

- b) Chỉ ra $\triangle BDC$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{BCD}$



H 14

Chỉ ra \widehat{ABC} là góc ngoài của $\triangle BDC$

nên $\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCD} = 30^\circ$

Chỉ ra CB là đường phân giác của $\triangle ACD$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AC \cdot BD$$

c) Gọi tia phân giác \widehat{CBD} là BE .

Chỉ ra $BE \perp DC$ rồi suy ra $AH \perp DC$.

$$\text{Chỉ ra } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot DC = \frac{1}{2} AD \cdot AC \Rightarrow \frac{1}{AH} = \frac{DC}{AD \cdot AC} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{DC^2}{AD^2 \cdot AC^2} = \frac{AD^2 + AC^2}{AD^2 \cdot AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

Bài 36:

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ADF$ ($g - c - g$)

$$\Rightarrow AE = AF.$$

b) Chỉ ra $\widehat{FAK} = 45^\circ = \widehat{ACF}$

Chứng minh $\triangle AKF \sim \triangle CAF$ ($g - g$)

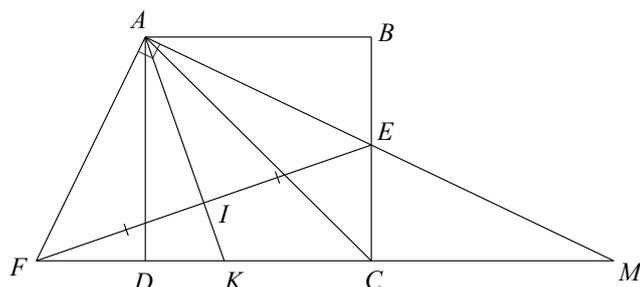
$$\Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{KF}{AF} \Rightarrow AF^2 = KF \cdot CF.$$

c) Ta có $BE = \frac{3}{4} BC = 3 \text{ cm}$

$$\text{Tính } AE^2 = AB^2 + BE^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AE = 5 \text{ cm}.$$

$$\text{Khi đó } S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} \text{ cm}^2$$

d) Chỉ ra $AE = AF$. Chứng minh $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AD^2}$ (không đổi)



Hình 13

a) $\widehat{N} = 90^\circ - \widehat{P} = 32^\circ$

$$AP = PN \cdot \cos P = 72 \cdot \cos 58^\circ \approx 38 \text{ cm}$$

$$AN = PN \cdot \sin P = 72 \cdot \sin 58^\circ \approx 61 \text{ cm}$$

b) Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ADP$ ($g - c - g$)

$$\Rightarrow AP = AM. \text{ Vậy } \triangle APM \text{ cân.}$$

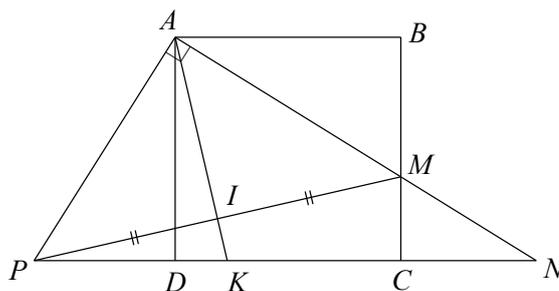
c) Chứng minh $AI \perp PM$

$$\text{Chỉ ra } \triangle PIA \sim \triangle PAM \text{ (} g - g \text{)} \Rightarrow AP^2 = PI \cdot PM \quad (1)$$

$$\text{Chỉ ra } \triangle PIK \sim \triangle ACM \text{ (} g - g \text{)} \Rightarrow PI \cdot PM = PK \cdot PC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow AP^2 = PK \cdot PC$$

d) Chỉ ra $AM = AP$. Chứng minh $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$



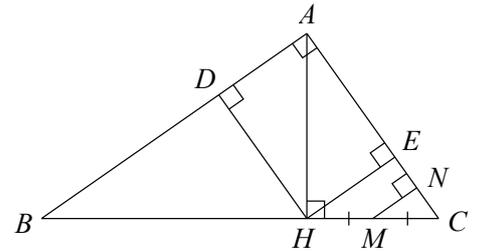
Bài tập ôn tập chương 4.

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- Biết $BH = 4\text{ cm}$, $CH = 2\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AH , AB (làm tròn đến một chữ số thập phân)
- Gọi D , E lần lượt là chân đường vuông góc của H trên AB , AC . Chứng minh $\cos^3 B = \frac{BD}{BC}$
- Gọi M là trung điểm của HC , N là hình chiếu của M trên AC .
Chứng minh $MC^3 = \frac{1}{2} \cdot NC^2 \cdot BC$.

Bài làm:

- Chứng minh $\triangle BHA \sim \triangle AHC$ ($g - g$)
 $\Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH = 4 \cdot 2 \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}\text{ cm}$
 Chứng minh $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ ($g - g$)
 $\Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BH}{BA} \Rightarrow BA^2 = BH \cdot BC = 4 \cdot 6 \Rightarrow BA = 2\sqrt{6}\text{ cm}$.



- Ta có $\cos B = \frac{BD}{BH}$ hoặc $\cos B = \frac{BH}{AB}$ hoặc $\cos B = \frac{AB}{BC}$.

$$\text{Khi đó } \cos^3 B = \frac{BD}{BH} \cdot \frac{BH}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BC}.$$

- Chỉ ra MN là đường trung bình của $\triangle EHC$

$$\text{Chứng minh } AC^2 = HC \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{AC^2}{HC}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{2} NC^2 \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{CE^2}{4} \cdot \frac{AC^2}{HC} = \frac{CE^2 \cdot AC^2}{8 \cdot HC} = \frac{HC^4}{8 \cdot HC} = \frac{HC^3}{8}$$

$$\text{Mặt khác } MC^3 = \left(\frac{HC}{2}\right)^3 = \frac{HC^3}{8}. \text{ Vậy } MC^3 = \frac{1}{2} \cdot NC^2 \cdot BC.$$

Bài 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9\text{ cm}$, $BC = 12\text{ cm}$. Kẻ $AH \perp BD$ tại H .

- Tính BD , AH , góc \widehat{BDA}
- Kẻ $HI \perp AB$. Chứng minh rằng $AI \cdot AB = DH \cdot HB$
- Đường thẳng AH cắt BC tại M và cắt DC tại N .
Chứng minh $HA^2 = HM \cdot HN$

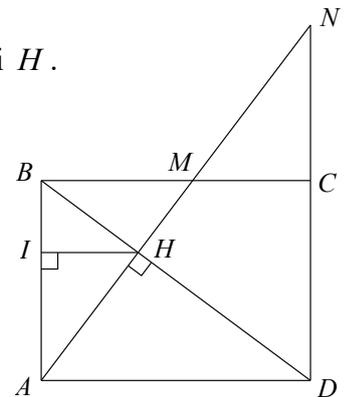
Bài làm:

- $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow BD = 15\text{ cm}$

$$\text{Chứng minh } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} AH \cdot BD \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot AD}{AH} = \frac{9 \cdot 12}{9} = 12\text{ cm}$$

$$\sin \widehat{BDA} = \frac{AB}{BD} = \frac{9}{15} \Rightarrow \widehat{BDA} \approx 36^\circ.$$

- Chứng minh $\triangle AIH \sim \triangle AHB$ ($g - g$) $\Rightarrow AH^2 = AI \cdot AB$ (1)



Chúng minh $\triangle DHA \sim \triangle AHB$ (g - g) $\Rightarrow AH^2 = DH \cdot HB$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AI \cdot AB = DH \cdot HB$

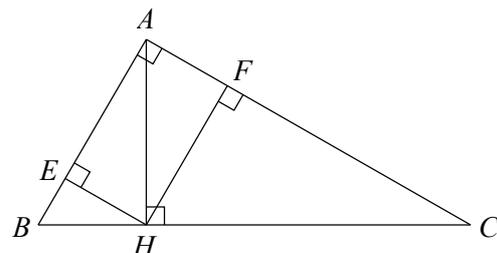
c) $BM \parallel AD \Rightarrow \frac{AH}{HM} = \frac{HD}{HB}$ và $AB \parallel DN \Rightarrow \frac{HN}{HA} = \frac{HD}{HB}$

Khi đó $\frac{AH}{HM} = \frac{HN}{HA} \Rightarrow AH^2 = HM \cdot HN$.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$

- Giải tam giác vuông $\triangle ABC$.
- Tính HB , HC
- Từ H kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$ ($E \in AB$, $F \in AC$).

Chúng minh rằng $EA \cdot EB + AF \cdot FC = \left(\frac{HE}{\sin \widehat{HAE}} \right)^2$



Bài làm:

a) $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow AC = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.

$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$. Khi đó $\widehat{C} = 30^\circ$.

b) Chúng minh $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ (g - g) $\Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \text{ cm}$

$\Rightarrow HC = BC - BH = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \text{ cm}$.

c) Chúng minh $\triangle HEB \sim \triangle AEH$ (g - g) $\Rightarrow \frac{EH}{AE} = \frac{BE}{EH} \Rightarrow AE \cdot BE = EH^2$

Chúng minh $\triangle HFA \sim \triangle CFH$ (g - g) $\Rightarrow \frac{HF}{AF} = \frac{CF}{HF} \Rightarrow AF \cdot CF = HF^2$

Khi đó $EA \cdot EB + AF \cdot FC = EH^2 + HF^2 = AH^2$.

Mặt khác $\left(\frac{HE}{\sin \widehat{HAE}} \right)^2 = \frac{HE^2}{\sin^2 \widehat{HAE}} = HE^2 : \frac{HE^2}{AH^2} = AH^2$.

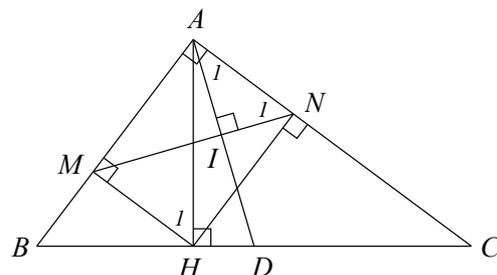
Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH . Vẽ HM vuông góc với AB tại M , HN vuông góc với AC tại N

- Cho biết $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Tính độ dài BC , AH và số đo các góc B , C .
- Chúng minh rằng $AM \cdot AB = AN \cdot AC$
- Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt BC tại D .
Chúng minh D là trung điểm của BC .

Bài làm:

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm}$.

Chúng minh $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC$



$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6.8}{10} = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} \Rightarrow \widehat{B} \approx 53^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 37^\circ.$$

b) Chứng minh $\triangle AMH \sim \triangle AHB$ (g-g) $\Rightarrow AM \cdot AB = AH^2$

Chứng minh $\triangle ANH \sim \triangle AHC$ (g-g) $\Rightarrow AN \cdot AC = AH^2$. Khi đó $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

c) Chỉ ra $\widehat{N}_1 = \widehat{H}_1$ và $\widehat{H}_1 = \widehat{B}$ nên $\widehat{N}_1 = \widehat{B}$.

Lại có $\widehat{A}_1 + \widehat{N}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{B} = 90^\circ$ mà $\widehat{C} + \widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C} \Rightarrow AD = DC$

Tương tự chỉ ra $\begin{cases} \widehat{BAD} + \widehat{A}_1 = 90^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{A}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{B} \Rightarrow AD = BD$. Như vậy $DB = DC$

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , ($H \in BC$)

a) Biết $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$. Tính AC , AH và \widehat{ABC} (làm tròn đến độ)

b) Kẻ HM vuông góc với AB tại M , HN vuông góc với AC tại N . Chứng minh $AH = MN$ và $AM \cdot MB + AN \cdot NC = AH^2$

c) Chứng minh rằng $\tan^3 \widehat{C} = \frac{BM}{CN}$

Bài làm:

a) $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \Rightarrow AC = 16 \text{ cm}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = \frac{48}{5} \text{ cm}$$

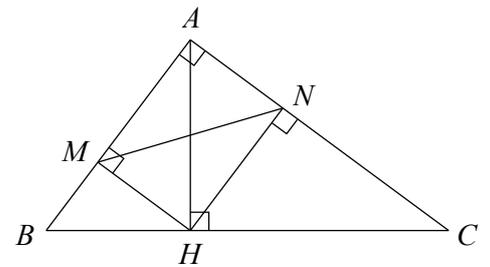
$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{16}{20} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 53^\circ.$$

b) Chứng minh $AMHN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = MN$

Chứng minh $\triangle AMH \sim \triangle HMB$ (g-g) $\Rightarrow AM \cdot AB = MH^2$

Chứng minh $\triangle HNA \sim \triangle CNH$ (g-g) $\Rightarrow AN \cdot NC = HN^2$

Từ đó $AM \cdot MB + AN \cdot NC = MH^2 + HN^2 = MN^2 = AH^2$.



c) Chứng minh $BM = \frac{BH^2}{AB}$ và $CN = \frac{CH^2}{AC}$.

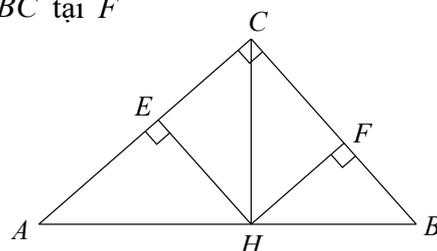
Khi đó $\frac{BM}{CN} = \frac{BH^2}{AB} \cdot \frac{AC}{CH^2}$. Mặt khác $BH = \frac{AB^2}{BC} \Rightarrow BH^2 = \frac{AB^4}{BC^2}$ thay vào ta được

$$\frac{BM}{CN} = \frac{AB^4}{BC^2 \cdot AB} \cdot \frac{AC}{CH^2} = \frac{AB^3 \cdot AC}{BC^2 \cdot CH^2} = \frac{AB^3 \cdot AC}{AC^4} = \frac{AB^3}{AC^3} = \tan^3 C.$$

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C , có độ dài cạnh AC và BC lần lượt là 20 cm , 15 cm . Vẽ đường cao CH , kẻ HE vuông góc với AC tại E , HF vuông góc với BC tại F

a) Tính số đo \widehat{A} , độ dài AB , EF

b) Chứng minh rằng $AC \cdot EC = BC \cdot FC$



Bài làm:

a) $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{20} \Rightarrow \widehat{A} \approx 37^\circ. AB^2 = AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625 \Rightarrow AB = 25 \text{ cm}.$

Chỉ ra $CEHF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CH = EF.$

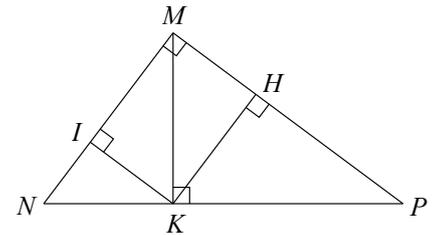
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} CH \cdot AB \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ cm} = EF.$$

b) Chứng minh $\triangle CEH \sim \triangle CHA$ (g - g) $\Rightarrow AC \cdot CE = CH^2$

Chứng minh $\triangle CFH \sim \triangle CHB$ (g - g) $\Rightarrow BC \cdot CF = CH^2$ suy ra $AC \cdot EC = BC \cdot FC$

Bài 7: Cho $\triangle MNP$ vuông tại M có độ dài cạnh $MN = 6 \text{ cm}$ và $MP = 8 \text{ cm}$. Vẽ đường cao MK , kẻ KI vuông góc với MN tại I , KH vuông góc với MP tại H

- a) Tính độ dài NP , IH và số đo góc \widehat{P}
 b) Chứng minh rằng $MI \cdot MN = MH \cdot MP$



Bài làm:

a) $NP^2 = MN^2 + MP^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow NP = 10 \text{ cm}$

Chứng minh $MIKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IH = MK$

$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} MK \cdot NP = \frac{1}{2} MN \cdot MP \Rightarrow MK = \frac{MN \cdot MP}{NP} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

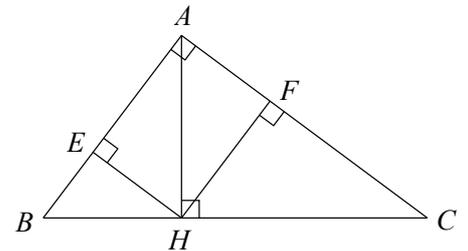
$$\tan P = \frac{MN}{MP} = \frac{6}{8} \Rightarrow \widehat{P} \approx 37^\circ.$$

b) Chứng minh $\triangle MIK \sim \triangle MKN$ (g - g) $\Rightarrow MI \cdot MN = MK^2$

Chứng minh $\triangle MHK \sim \triangle MKP$ (g - g) $\Rightarrow MH \cdot MP = MK^2$. Suy ra $MI \cdot MN = MH \cdot MP$

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH .

- a) Cho biết $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BC , HB , AH
 b) Vẽ HE vuông góc với AB tại E , HF vuông góc với AC tại F . Chứng minh rằng $AE \cdot EB = EH^2$ và $AE \cdot EB + AF \cdot FC = EF^2$
 c) Chứng minh rằng $BE = BC \cdot \cos^3 \widehat{B}$



Bài làm:

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm}.$

Chứng minh $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ (g - g)

$$\Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} \text{ cm}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} \text{ cm}.$$

b) Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle HEB$ (g - g) $\Rightarrow AE \cdot EB = EH^2$

Chứng minh $\triangle HFA \sim \triangle CFH$ (g - g) $\Rightarrow AF \cdot FC = HF^2$

Khi đó $AE \cdot EB + AF \cdot FC = EH^2 + HF^2 = EF^2.$

c) Ta có $\cos^3 \widehat{B} = \frac{AB^3}{BC^3} \Rightarrow BC \cdot \cos^3 \widehat{B} = BC \cdot \frac{AB^3}{BC^3} = \frac{AB^3}{BC^2}$

Chứng minh $BE = \frac{BH^2}{AB}$ và $BH = \frac{AB^2}{BC} \Rightarrow BH^2 = \frac{AB^4}{BC^2}$ thay vào ta được $BE = \frac{AB^4}{BC^2 \cdot AB} = \frac{AB^3}{BC^2}$.

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH .

- a) Giả sử $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$. Tính độ dài BC , AH và số đo \widehat{ABC}
 b) Kẻ HD , HE lần lượt vuông góc với AB , AC . Chứng minh rằng $AD \cdot AB = AE \cdot AC$
 c) Lấy điểm G nằm giữa E và C . Kẻ AK vuông góc với BG tại K . Chứng minh rằng $\sin \widehat{AGB} \cdot \cos \widehat{ABC} = \frac{HK}{CG}$

Bài làm:

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow BC = 13 \text{ cm}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} \text{ cm} \text{ và } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 67^\circ.$$

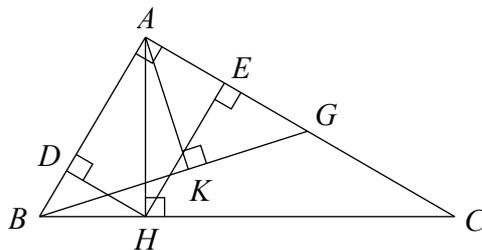
b) Chứng minh $\triangle ADH \sim \triangle AHB$ ($g - g$) $\Rightarrow AD \cdot AB = AH^2$

Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle AHC$ ($g - g$) $\Rightarrow AE \cdot AC = AH^2$. Khi đó $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

c) Chứng minh $BH \cdot BC = BK \cdot BG$ ($= AB^2$)

Chỉ ra $\triangle BKH \sim \triangle BCG$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \frac{BH}{BG} = \frac{HK}{CG}$

$$\Rightarrow \sin \widehat{AGB} \cdot \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BG} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB^2}{BG \cdot BC} = \frac{BH \cdot BC}{BG \cdot BC} = \frac{BH}{BG} = \frac{HK}{CG}$$



Chương 5. Đường tròn.

Bài 13. Mở đầu về đường tròn.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Bài làm:

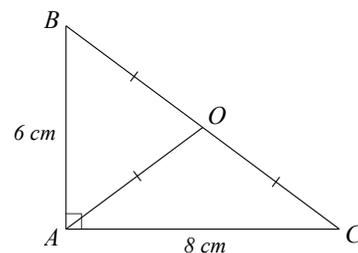
Gọi O là trung điểm của BC .

$\triangle ABC$ vuông tại A có AO là đường trung tuyến

ứng với cạnh huyền BC nên $OA = \frac{BC}{2} = OB = OC$.

Vậy ba điểm A, B, C cùng thuộc đường tròn tâm O , bán kính OB .

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 10\text{ cm} \Rightarrow OB = \frac{BC}{2} = 5\text{ cm}$.



Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D . Xác định tâm đối xứng và hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn đó nếu hình vuông có cạnh bằng 3 cm .

Bài làm:

a) Hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo

Nên $EA = EB = EC = ED$. Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm E , bán kính EA .

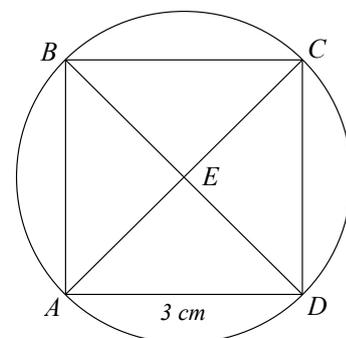
E là tâm đối xứng của đường tròn

và BD, AC là hai trục đối xứng của đường tròn này.

b) Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 3^2 = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow BD = 3\sqrt{2}\text{ cm}$

Như vậy $BE = \frac{BD}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\text{ cm}$.

Vậy bán kính của đường tròn tâm E là $\frac{3}{\sqrt{2}}\text{ cm}$.



Bài 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$.

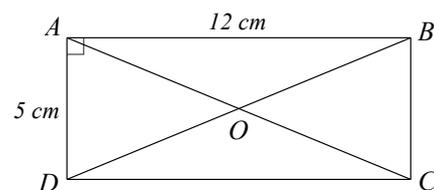
Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Bài làm:

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

Khi đó $OA = OB = OC = OD$. Như vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn tâm O bán kính OB .

Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow BD = 13\text{ cm} \Rightarrow OB = \frac{13}{2}\text{ cm}$.



Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8\text{ cm}$, $BC = 15\text{ cm}$.

Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

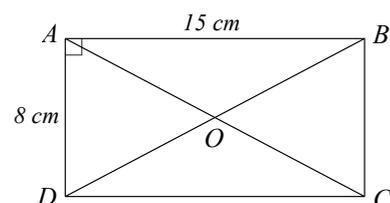
Bài làm:

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

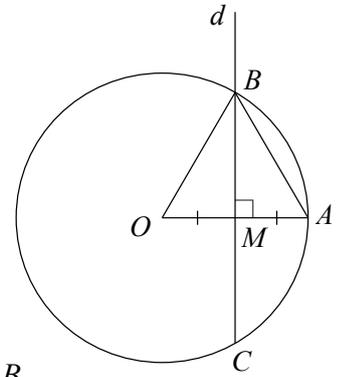
Khi đó $OA = OB = OC = OD$.

Như vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn tâm O , bán kính OB .

Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 15^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow BD = 17\text{ cm} \Rightarrow BO = \frac{17}{2}\text{ cm}$.



Bài 5: Cho đường tròn $(O; 3\text{ cm})$. Điểm $A \in (O)$. Đường thẳng d vuông góc với OA tại trung điểm của OA cắt đường tròn (O) tại B và C .



- Chứng minh rằng $\triangle OAB$ là tam giác đều.
- Tính độ dài đoạn BC .

Bài làm:

- $\triangle OAB$ có $OA = OB$ (cùng bằng bán kính) nên cân tại O . Gọi đường thẳng d cắt OA tại M . $\triangle OAB$ có BM vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên $\triangle OAB$ cân tại $B \Rightarrow OB = AB$. Vậy $\triangle OAB$ có $OA = OB = AB$ nên là tam giác đều.
- Ta có $OM = \frac{OA}{2} = \frac{3}{2}\text{ cm}$. Áp dụng Pythagore ta có:

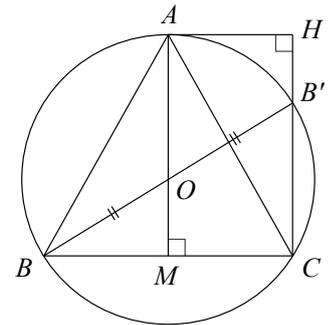
$$BM^2 = OB^2 - OM^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow BM = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm} \Rightarrow BC = 3\sqrt{3}\text{ cm}$$

Bài 6: Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C thuộc đường tròn đó sao cho $\triangle ABC$ cân tại A .

- Giả sử $BC = 6\text{ cm}$, đường cao AM của $\triangle ABC$ bằng 4 cm . Tính AB .
- Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O . Vẽ $AH \perp CB'$ tại H . Tứ giác $AHCM$ là hình gì?

Bài làm:

- $\triangle ABC$ cân tại A , nên đường cao AM cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow BM = CM = \frac{BC}{2} = 3\text{ cm}$.
Áp dụng định lý Pythagore ta có $AB^2 = AM^2 + BM^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AB = 5\text{ cm}$
- $\triangle ABB'C$ có $OB = OB'$ nên OC là đường trung tuyến, mà $OC = \frac{BB'}{2}$.
Nên $\triangle ABB'C$ vuông tại C .
Tứ giác $AHCM$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

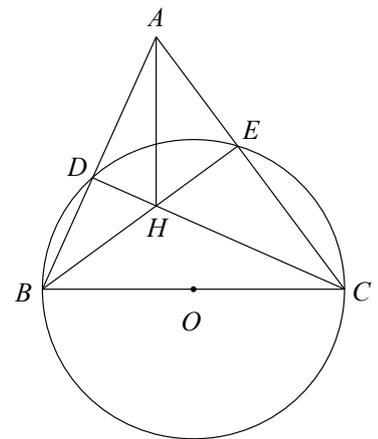


Bài 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC , đường tròn này cắt AB, AC lần lượt tại D và E . Gọi H là giao điểm của BE và CD .

- Chứng minh rằng $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.
- Chứng minh rằng $AH \perp BC$.

Bài làm:

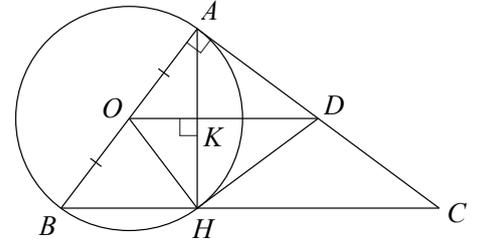
- $\triangle BDC$ có $BO = CO$ nên DO là đường trung tuyến, mà $DO = \frac{BC}{2} = R$ nên $\triangle BDC$ vuông tại $D \Rightarrow CD \perp AB$.
 $\triangle BEC$ có $BO = CO$ nên EO là đường trung tuyến, mà $EO = \frac{BC}{2} = R$ nên $\triangle BEC$ vuông tại $E \Rightarrow BE \perp AC$.
- $\triangle ABC$ có hai đường cao BE và CD cắt nhau tại H , nên H là trực tâm $\Rightarrow AH \perp BC$.



Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$.

Vẽ đường tròn (O) đường kính AB cắt BC tại H .

- Tính AH và CH .
- Kẻ $OK \perp AH$ tại K , tia OK cắt AC tại D .
Chứng minh rằng $DH \perp OH$

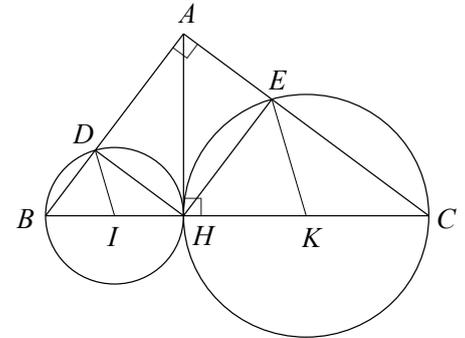


Bài làm:

- Áp dụng định lý Pythagore ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 10\text{ cm}$
 $\triangle ABH$ có $OA = OB \Rightarrow HO$ là trung tuyến, mà $OH = \frac{AB}{2} = OA = OB$ nên $\triangle AHB$ vuông tại H
 Lại có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}\text{ cm}$.
 Chứng minh $\triangle CHA \sim \triangle CAB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CH = \frac{CA^2}{CB} = \frac{8^2}{10} = \frac{32}{5}\text{ cm}$
- Chỉ ra $\triangle AOD = \triangle BOD$ (c-c-c) $\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{OHD} = 90^\circ$

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn (I) đường kính BH cắt AB tại D , vẽ đường tròn (K) đường kính HC cắt AC tại E .

- Chứng minh $ADHE$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh rằng $AD \cdot AB = AE \cdot AC$
- Giả sử $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$.
 Tính DE và diện tích tứ giác $DEKI$.



Bài làm:

- Chứng minh $\triangle BDH$ vuông tại $D \Rightarrow HD \perp AB$
 Chứng minh $\triangle HEC$ vuông tại $E \Rightarrow HE \perp AC$
 Tứ giác $ADHE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.
- Chứng minh $\triangle ADH \sim \triangle AHB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AD}{AH} \Rightarrow AH^2 = AB \cdot AD$ (1)
 Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle AHC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AC$ (2)
 Từ (1), (2) $\Rightarrow AD \cdot AB = AE \cdot AC (= AH^2)$.
- Áp dụng Pythagore tính được $AC = 4\text{ cm}$.
 Tính $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5}\text{ cm} = DE$.
 Tính diện tích $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\text{ cm}^2$.
 Chỉ ra $S_{DBI} = S_{DHI}$, $S_{DAE} = S_{DHE}$, $S_{EHK} = S_{ECK}$ nên $S_{DEKI} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{6}{2} = 3\text{ cm}^2$

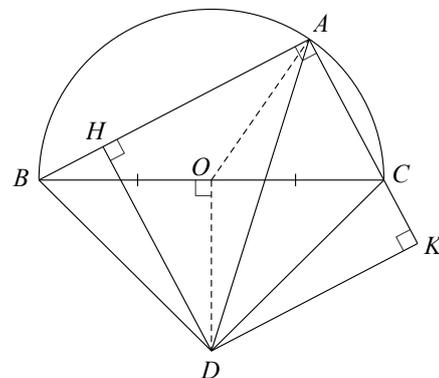
Bài 10: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . A là một điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $AB > AC$. Tia phân giác \widehat{BAC} cắt đường trung trực BC tại D . Hạ DH và DK lần lượt vuông góc với AB và AC .

- Chứng minh rằng $AHDK$ là hình vuông.
- Chứng minh A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Bài làm:

- Chỉ ra $AHDK$ là hình chữ nhật. lại có AD là tia phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{HAD} = 45^\circ$
 Nên $\triangle AHD$ vuông cân tại $H \Rightarrow HA = HD$. Vậy $AHDK$ là hình vuông.

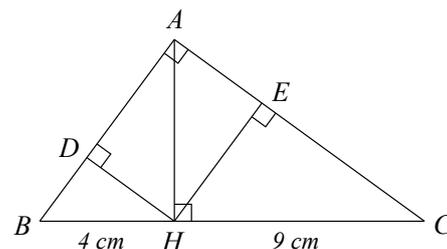
- b) Chứng minh A, B, C cùng thuộc đường tròn $(O; OB)$
 Chỉ ra $DB = DC$ (vì D nằm trên đường trung trực của BC)
 Chứng minh $\triangle DHB = \triangle DKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)
 $\Rightarrow \widehat{HDB} = \widehat{CDK}$. Khi đó $\widehat{BDC} = \widehat{HDK} = 90^\circ$
 Chứng minh B, D, C cùng thuộc đường tròn $(O; OB)$
 Kết luận A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn $(O; OB)$



Bài 11: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$, đường cao AH

- a) Cho $HB = 4\text{ cm}, HC = 9\text{ cm}$. Tính AH và số đo \widehat{ABC} (làm tròn đến độ)
 b) Gọi D là hình chiếu của H trên AB , E là hình chiếu của H trên AC .
 Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.
- 2) $AD \cdot AB + AE \cdot AC = 2 \cdot DE^2$
- 3) $\frac{HC^2}{AC^2} + \frac{BD^2}{BH^2} = 1$.



Bài làm:

- a) Chứng minh $\triangle CHA \sim \triangle AHB$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH = 4 \cdot 9 \Rightarrow AH = 6\text{ cm}$

$$\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 56^\circ.$$

b)

- 1) Chỉ ra tứ giác $ADHE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.
- 2) Chứng minh $\triangle ADH \sim \triangle AHB$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AD}{AH} \Rightarrow AH^2 = AB \cdot AD$

$$\text{Chứng minh } \triangle AEH \sim \triangle AHC \text{ (} g - g \text{)} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AC$$

$$\text{Khi đó } AD \cdot AB + AE \cdot AC = 2 \cdot AH^2 = 2 \cdot DE^2.$$

- 3) Chứng minh $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} \Rightarrow BH^2 = \frac{AB^4}{BC^2}$

$$\text{Chứng minh } \triangle CHA \sim \triangle CAB \text{ (} g - g \text{)} \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CH = \frac{CA^2}{CB} \Rightarrow CH^2 = \frac{CA^4}{BC^2}$$

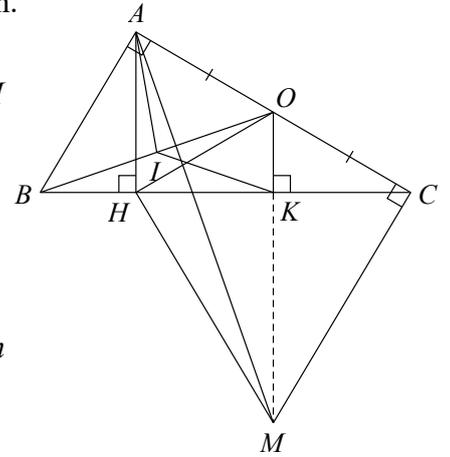
$$\text{Chứng minh } \triangle BDH \sim \triangle BHA \text{ (} g - g \text{)} \Rightarrow \frac{BD}{BH} = \frac{BH}{BA} \Rightarrow BD = \frac{BH^2}{BA} \Rightarrow BD^2 = \frac{BH^4}{AB^2}$$

Thay vào ta được:

$$\frac{HC^2}{AC^2} + \frac{BD^2}{BH^2} = \frac{CA^4}{BC^2 \cdot AC^2} + \frac{BH^4}{AB^2 \cdot BH^2} = \frac{CA^2}{BC^2} + \frac{BH^2}{AB^2} = \frac{CA^2}{BC^2} + \frac{AB^4}{BC^2 \cdot AB^2} = \frac{CA^2 + AB^2}{BC^2} = 1$$

Bài 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- Biết $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 13\text{ cm}$. Tính độ dài cạnh AH và số đo góc \widehat{BAH}
- Gọi O là trung điểm của AC , K là hình chiếu của O trên BC . Chứng minh 4 điểm A, B, O, K cùng nằm trên một đường tròn.
- Đường thẳng qua A và vuông góc với BO cắt đường thẳng qua C vuông góc với AC tại M . Chứng minh $\triangle ABO \sim \triangle CAM$ và ba điểm O, K, M thẳng hàng



Bài làm:

- $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \Rightarrow AC = 12\text{ cm}$.
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}\text{ cm}$
 $\cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} = \frac{60}{13 \cdot 5} = \frac{60}{65} \Rightarrow \widehat{BAH} \approx 22^\circ 37'$
- Lấy I là trung điểm của BO .
 $\triangle ABO$ vuông tại A có AI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $BO \Rightarrow AI = OI = BI$
 $\triangle BKO$ vuông tại K có KI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $BO \Rightarrow KI = OI = BI$
 Vậy bốn điểm A, B, O, K cùng nằm trên một đường tròn.

- Chỉ ra $\widehat{OAM} = \widehat{ABO} \Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle CAM$ ($g - g$)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BO}{AM}$$

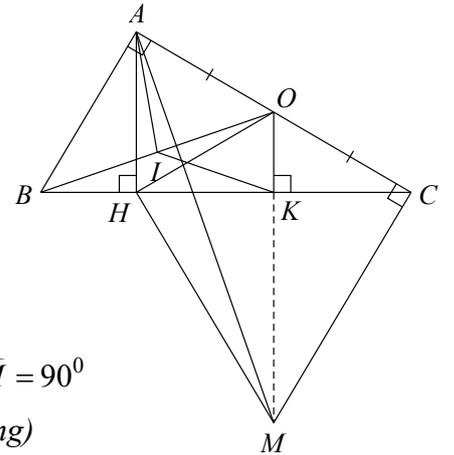
$$\text{Chứng minh } \triangle AHB \sim \triangle CHA \text{ (} g - g \text{)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH}$$

$$\text{Từ đó } \frac{BO}{AM} = \frac{BH}{AH} \text{ và } \widehat{HBO} = \widehat{HAI}$$

$$\text{Chỉ ra } \triangle HBO \sim \triangle HAM \text{ (} c - g - c \text{)} \Rightarrow \widehat{BHO} = \widehat{AHM} \Rightarrow \widehat{OHM} = 90^\circ$$

$$\text{Chứng minh } \triangle OHM = \triangle OCM \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)} \\ \Rightarrow MH = MC \Rightarrow M \text{ nằm trên đường trung trực của } HC.$$

Mà O, K nằm trên đường trung trực của HC nên O, K, M thẳng hàng.

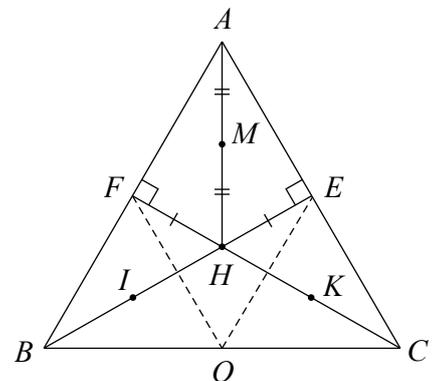


Bài 13: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , vẽ hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn và chỉ ra tâm của đường tròn đó.
- Gọi I, K lần lượt là hai điểm trên BH và CH sao cho $HE = HI$, $HF = HK$. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, I, K cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi M là trung điểm của AH . Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để điểm M thuộc đường tròn đi qua bốn điểm E, F, I, K .

Bài làm:

- Lấy O là trung điểm của BC
 Chỉ ra $FO = BO = CO$ và $EO = BO = CO$.
 Vậy bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc đường tròn tâm O .



b) $\triangle ABC$ cân tại A có BE, CF là hai đường cao nên $BE = CF$

Và AH vừa là đường cao vừa là phân giác góc \widehat{BAC}

Chứng minh $\triangle AFH = \triangle AEH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HF = HE$.

Như vậy $HF = HE = HI = HK$ nên E, F, I, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường tròn đi qua bốn điểm E, F, I, K có tâm là H và bán kính HE .

$\triangle AEH$ vuông tại E có EM là trung tuyến $\Rightarrow ME = MH = MA \Rightarrow \triangle EHM$ cân tại M

Để M thuộc đường tròn $(H; HE)$ thì $HM = HE$ khi đó $\triangle HME$ là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{MHE} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{HAE} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$. Vậy $\triangle ABC$ đều thì điểm M thuộc đường tròn (H) .

Bài 2. Cung và dây của một đường tròn.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6\text{ cm}$.

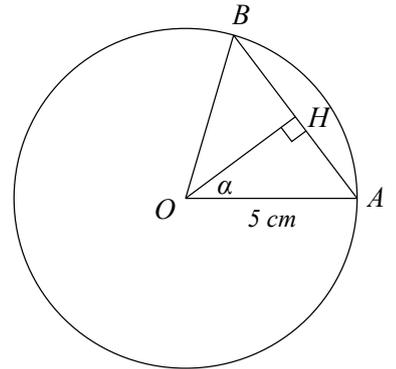
- Tính khoảng cách từ O đến dây AB .
- Tính $\tan \alpha$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α .

Bài làm:

- Gọi $OH \perp AB$.
 $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OH$ vừa là đường cao, đường trung tuyến
 $\Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} = 3\text{ cm}$.

$$OH^2 = OA^2 - HA^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow OH = 4\text{ cm}$$

- Vì $\widehat{AOB} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{AOH} = \alpha$. $\tan \alpha = \frac{HA}{OH} = \frac{3}{4}$



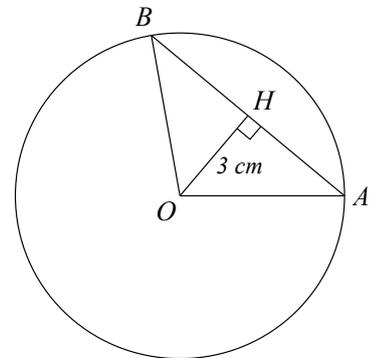
Bài 2: Tâm O của một đường tròn cách dây AB của nó một khoảng 3 cm . Tính bán kính của đường tròn (O) , biết rằng cung nhỏ AB có số đo 100° (làm tròn đến kết hàng phần mười)

Bài làm:

Gọi $OH = 3\text{ cm}$ khoảng cách từ tâm O đến AB .
 $\triangle OAB$ cân tại O , nên đường cao OH cũng là đường phân giác

Mà $\widehat{AOB} = 100^\circ$ nên $\widehat{AOH} = 50^\circ$

$$\cos \widehat{AOH} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OA = \frac{OH}{\cos \widehat{AOH}} = \frac{3}{\cos 50^\circ} \approx 4,67\text{ cm}$$



Bài 3: Cho đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và dây AB . Biết rằng số $\widehat{AB} = 90^\circ$.

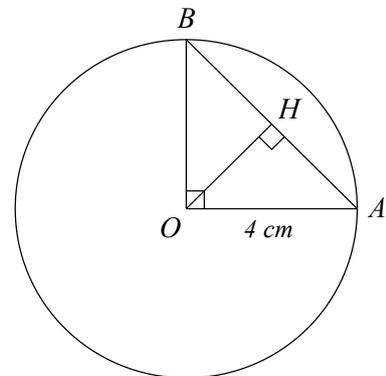
- Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .
- Tính độ dài dây AB .

Bài làm:

- Gọi $OH \perp AB$ tại H . $\widehat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$
 $\triangle ABO$ vuông cân tại O ,

$$\text{Ta có } OH = OA \cdot \sin A = 4 \cdot \sin 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\text{ cm}$$

- $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}\text{ cm}$



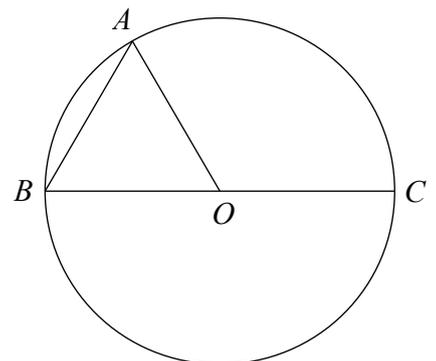
Bài 4: Cho đường tròn (O) đường kính BC , điểm A nằm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOC} = 120^\circ$.

- Chứng minh rằng dây AB bằng bán kính.
- Tính số \widehat{AB} .

Bài làm:

- Vì $\widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$
 $\triangle ABO$ cân tại O lại có $\widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OAB$ là tam giác đều.
 $\Rightarrow AB = OA = OB$.

- Ta có số $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 60^\circ$.

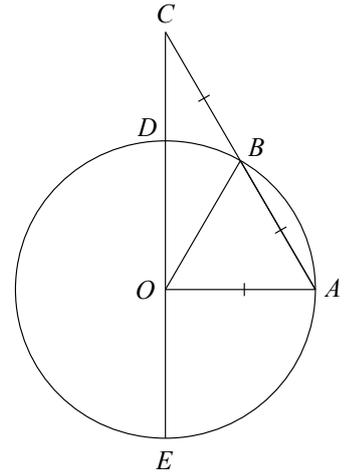


Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = R$. Kéo dài CO cắt (O) lần lượt tại D và E .

- Chứng minh rằng $\widehat{AOD} = 3 \cdot \widehat{ACD}$
- Tính số \widehat{BE} , \widehat{AD} .

Bài làm:

- $\triangle AOC$ có OB là đường trung tuyến, mà $OB = BA = BC$
Nên $\widehat{AOC} = 90^\circ$
 $\triangle OAB$ có $OB = AB = OA = R$ nên là tam giác đều
 $\Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$. Vậy $\widehat{AOD} = 3 \cdot \widehat{ACD}$.
- Chỉ ra $\widehat{BOC} = \widehat{BCO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BOE} = 150^\circ$
Khi đó số $\widehat{BE} = \widehat{BOE} = 150^\circ$, số $\widehat{AD} = \widehat{AOD} = 90^\circ$



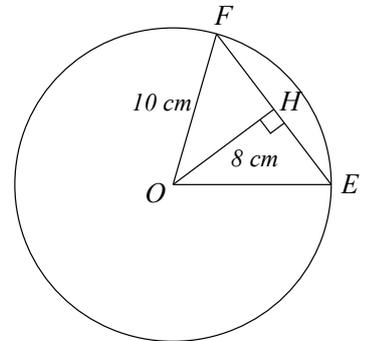
Bài 6: Cho đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$ có dây EF , biết khoảng cách từ tâm O tới dây EF bằng 8 cm .

- Tính độ dài dây EF .
- Tính số \widehat{EF} .

Bài làm:

- Gọi $OH \perp EF$ tại H
 $\triangle OEF$ cân tại O , có OH là đường cao, nên cũng là trung tuyến
 $\Rightarrow EH = FH$.
 $HE^2 = OE^2 - OH^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2 \Rightarrow HE = 6 \text{ cm} \Rightarrow EF = 12 \text{ cm}$.
- $\sin \widehat{HOE} = \frac{HE}{OE} = \frac{6}{10} \Rightarrow \widehat{HOE} \approx 37^\circ$

Mà OH vừa là đường cao vừa là phân giác nên $\widehat{EOF} = 2 \cdot \widehat{EOH} = 74^\circ$
Số $\widehat{EF} = \widehat{EOF} = 74^\circ$

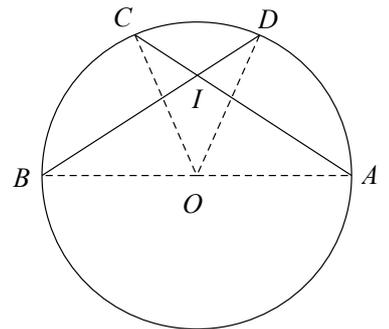


Bài 7: Cho đường tròn (O) , dây AC bằng dây BD cắt nhau tại I . (D nằm giữa A và C)

- Chứng minh rằng số $\widehat{AC} =$ số \widehat{BD}
- Chứng minh rằng số $\widehat{AD} =$ số \widehat{BC}

Bài làm:

- Số $\widehat{AC} = \widehat{AOC}$, số $\widehat{BD} = \widehat{BOD}$
Chứng minh $\triangle AOC = \triangle DOB$ ($c - c - c$) $\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{DOB}$
Vậy số $\widehat{AC} =$ số \widehat{BD} .
- Số $\widehat{AD} =$ số $\widehat{AC} -$ số \widehat{CD}
và số $\widehat{BC} =$ số $\widehat{BD} -$ số \widehat{CD} . mà số $\widehat{AC} =$ số \widehat{BD} nên số $\widehat{AD} =$ số \widehat{BC} .

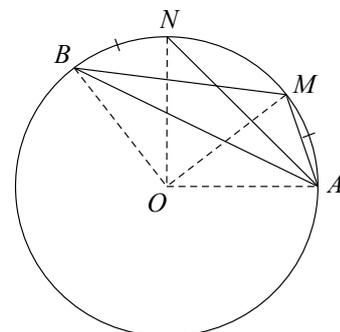


Bài 8: Cho đường tròn (O) , dây AB . Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = BN$ (M nằm trên cung AN).

- Chứng minh rằng số $\widehat{AN} =$ số \widehat{BM}
- Chứng minh rằng hai dây AN, BM bằng nhau.

Bài làm:

- Số $\widehat{AN} =$ số $\widehat{AM} +$ số \widehat{MN}
Số $\widehat{BM} =$ số $\widehat{BN} +$ số \widehat{MN}



Mà số $\widehat{AM} = \widehat{BN} \Rightarrow \widehat{AN} = \widehat{BM}$

b) Vì số $\widehat{AN} = \widehat{BM} \Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{BOM}$.

Chứng minh $\triangle AON = \triangle MOB$ ($c - g - c$) $\Rightarrow AN = MB$.

Bài 15. Độ dài cung tròn, diện tích hình quạt tròn và hình vành khuyên.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó sao cho $\triangle ABC$ cân tại A và số đo cung nhỏ BC bằng 70° .

- Chứng minh rằng cung AB và cung AC bằng nhau.
- Tính độ dài cung BC, AB và AC (làm tròn đến hàng phần mười)

Bài làm:

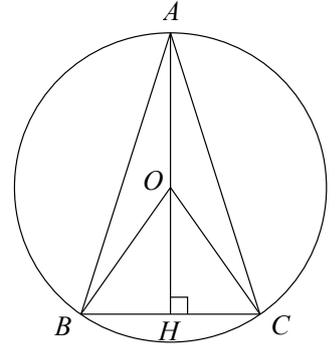
- $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC$
Chứng minh $\triangle AOB = \triangle AOC$ ($c - c - c$) $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AOC}$

Khi đó $\widehat{AB} = \widehat{AC}$.

- Vì số $\widehat{BC} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 70^\circ$.
Độ dài cung tròn BC là $l = \frac{70}{180} \pi R = \frac{70}{180} \cdot 3,14 \cdot 4 \approx 4,9\text{ cm}$.

Ta có $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \frac{360^\circ - 70^\circ}{2} = 145^\circ$.

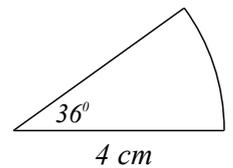
Độ dài cung tròn AB là $l_1 = \frac{145}{180} \pi \cdot R = \frac{145}{180} \cdot 3,14 \cdot 4 \approx 10,1\text{ cm}$, độ dài cung AC là $l_2 \approx 10,1\text{ cm}$.



Bài 2: Tính diện tích của hình quạt tròn có bán kính 4 cm , ứng với cung 36°

Bài làm:

Diện tích hình quạt tròn là $S_1 = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{36}{360} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \approx 5,024\text{ cm}^2$

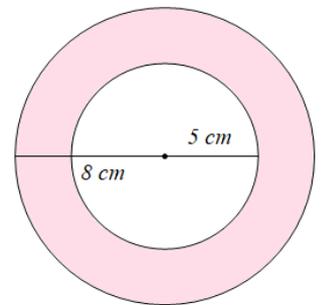


Bài 3: Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 8 cm và 5 cm

Bài làm:

Diện tích hình vành khuyên là

$$S_1 = \pi (R^2 - r^2) = 3,14 \cdot (8^2 - 5^2) \approx 122,46\text{ cm}^2$$



Bài 4: Cho đường tròn $(O; 6\text{ cm})$, hai điểm A, B thuộc đường tròn

sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AB .
- Tính diện tích hình viên phân (hình giới hạn bởi cung AB và dây AB) (Hình bên)

Bài làm:

- Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AB là

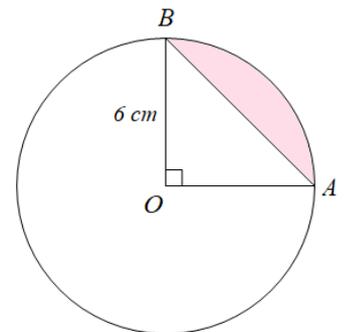
$$S_1 = \frac{n}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{90}{360} \cdot 3,14 \cdot 6^2 \approx 28,26\text{ cm}^2.$$

- Diện tích $\triangle AOB$ là

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18\text{ cm}^2$$

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AB và dây AB là

$$S_2 = S_1 - S_{\triangle AOB} = 28,26 - 18 = 10,26\text{ cm}^2.$$



Bài 5: Một chiếc quạt giấy khi xòe ra có hình dạng của một hình quạt tròn với bán kính 25 cm và khi xòe hết thì góc tạo bởi hai thanh nan ngoài cùng của chiếc quạt là 150° .

- Tính chiều dài cung tròn của chiếc quạt.
- Tính diện tích phần giấy làm quạt, biết rằng phần giấy của quạt là một hình vành khuyên có bán kính đường tròn nhỏ là 10 cm .

Bài làm:

- Chiều dài cung tròn của chiếc quạt là

$$l = \frac{n}{180^\circ} \cdot \pi R = \frac{150^\circ}{180^\circ} \cdot 3,14 \cdot 25 \approx 65,4\text{ cm}$$

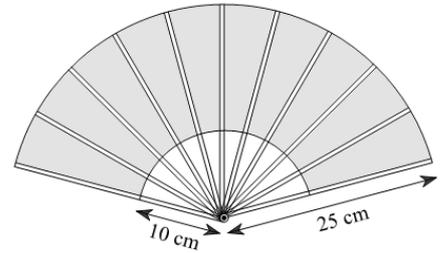
- Diện tích hình quạt tròn với bán kính 25 cm là

$$S_1 = \frac{n}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{150}{360} \cdot 3,14 \cdot 25^2 \approx 817,7\text{ cm}^2$$

Diện tích hình quạt tròn với bán kính 10 cm là

$$S_2 = \frac{n}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{150}{360} \cdot 3,14 \cdot 10^2 \approx 130,8\text{ cm}^2$$

Diện tích phần làm giấy là $S = S_1 - S_2 = 817,7 - 130,8 = 686,9\text{ cm}^2$.



Bài 6: Cho $\triangle ABC$ là tam giác nhọn cân tại A . Kẻ hai đường cao BH và CK .

- Chứng minh rằng đường tròn tâm O đường kính BC đi qua K và H .
- Chứng minh rằng cung BH và cung CK bằng nhau.
- Tính số đo của cung KH nếu $\widehat{BAC} = 40^\circ$.

Bài làm:

- $\triangle KBC$ vuông tại K có KO là trung tuyến $\Rightarrow KO = OB = OC$
 $\triangle HBC$ vuông tại H có HO là trung tuyến $\Rightarrow HO = OB = OC$
 Vậy H, K thuộc đường tròn tâm O đường kính BC .

- $\triangle OBK$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{BOK} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{KBO}$
 $\triangle OCH$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{HOC} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{HCO}$

Mà $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{KBO} = \widehat{HCO}$. Từ đó $\widehat{BOK} = \widehat{HOC} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BK} = \text{sđ } \widehat{HC} \Rightarrow \widehat{BK} = \widehat{HC}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{BH} = \widehat{BK} + \widehat{KH} \\ \widehat{CK} = \widehat{CH} + \widehat{KH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BH} = \widehat{CK}.$$

- Từ $\widehat{A} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{BOK} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{KOH} = 100^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{HK} = 140^\circ$.

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ đều có $AB = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại D và E .

- Chứng minh rằng ba cung BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.
- Tính diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây CE và cung CE .

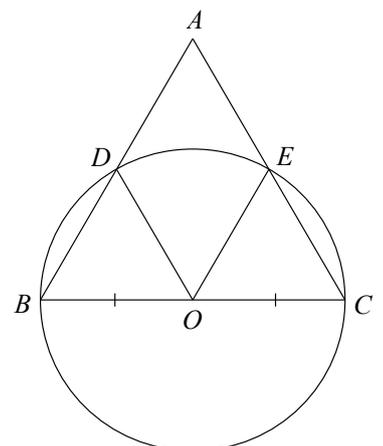
Bài làm:

- Chỉ ra $\widehat{BOD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOC} = 60^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$.

- $\triangle ABC$ đều nên $BC = 2\sqrt{3}\text{ cm} \Rightarrow OC = \sqrt{3}\text{ cm}$
 Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung CE là

$$S_1 = \frac{n}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{60}{360} \cdot 3,14 \cdot (\sqrt{3})^2 = 1,57\text{ cm}^2$$

Tính được diện tích $\triangle ABC$ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$.



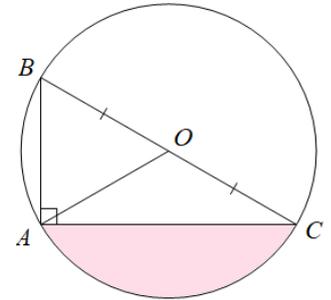
$$\text{Diện tích } \triangle OEC \text{ là } S_2 = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2.$$

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, đường tròn đường kính BC .

- Chứng minh rằng đỉnh A thuộc đường tròn.
- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AC và diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây AC và cung AC .

Bài làm:

- Lấy O là trung điểm của BC .
 $\triangle ABC$ vuông tại A có AO là trung tuyến nên $OA = OB = OC$
 Vậy A thuộc đường tròn tâm O đường kính BC .
- Tính được $OC = 3 \text{ cm}$ và $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$



Chỉ ra $\widehat{AOC} = 120^\circ$. Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AC là

$$S_1 = \frac{120}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^2 = 9,42 \text{ cm}^2.$$

Tính $AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Diện tích $\triangle ABC$ là $S_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$.

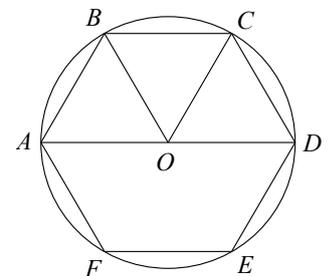
$$\text{Ta có } S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

Khi đó diện tích hình viên phân tạo bởi dây AC và cung AC là

$$S = S_1 - S_{\triangle OAC} = 9,42 - \frac{9\sqrt{3}}{4} \approx 5,52 \text{ cm}^2$$

Bài 9: Cho đường tròn (O ; 5 cm) và hình lục giác đều $ABCDEF$ sao cho 6 đỉnh của hình lục giác đều đều thuộc đường tròn.

- Chứng minh rằng cung AC và cung BD bằng nhau.
- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung BD và diện tích phần viên phân tạo bởi cung AC và dây AC



Bài làm:

- Ta có số $\widehat{AC} = \widehat{AOC} = 120^\circ$
 Và số $\widehat{BD} = \widehat{BOD} = 120^\circ$. Vậy $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.
- Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung BD là $S_1 = \frac{n}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{120}{360} \cdot 3,14 \cdot 5^2 \approx 26,2 \text{ cm}^2$

$$\text{Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung } AC \text{ là } S_2 = \frac{n}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{120}{360} \cdot 3,14 \cdot 5^2 \approx 26,2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Tính diện tích } \triangle OAB \text{ được } \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 \text{ suy ra } S_{\triangle OAC} = S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABCO}$$

Diện tích phần viên phân tạo bởi cung AC và dây AC là

$$S = S_2 - S_{\triangle OAC} = 26,2 - \frac{25\sqrt{3}}{4} \approx 15,4 \text{ cm}^2.$$

Bài 16. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho SA, SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AB . Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F .

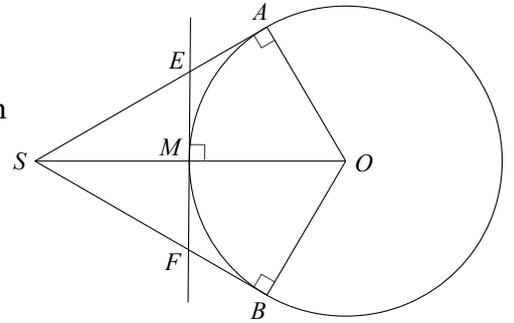
- Chứng minh rằng chu vi của $\triangle SEF$ bằng $SA + SB$
- Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) . Chứng minh $SE = SF$.

Bài làm:

- Vì E là giao của hai tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) nên $EA = EM$.
Và F là giao của hai tiếp tuyến tại M và B của đường tròn (O) nên $FM = FB$.

Chu vi của $\triangle SEF$ là $SE + SF + EF = SE + SF + EM + MF = SE + SF + EA + FB = SA + SB$.

- Ta có $SM \perp EF$ nên SM là đường cao của $\triangle SEF$
Ngoài ra SM là đường phân giác của $\triangle SEF$
Nên $\triangle SEF$ cân tại $S \Rightarrow SE = SF$.



Bài 2: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm)

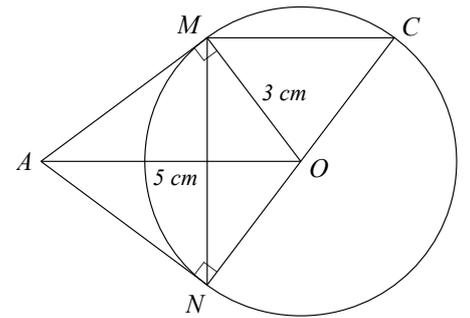
- Chứng minh rằng $OA \perp MN$
- Vẽ đường kính NOC . Chứng minh rằng $MC \parallel AO$.
- Giả sử $OM = 3 \text{ cm}$, $OA = 5 \text{ cm}$. Tính các cạnh của $\triangle AMN$.

Bài làm:

- Chỉ ra $AM = AN$ nên A nằm trên đường trung trực của MN
 $OM = ON = R$ nên O nằm trên đường trung trực của MN
 $\Rightarrow AO$ là đường trung trực của $MN \Rightarrow AO \perp MN$.
- Chứng minh $MC \perp MN$, mà $AO \perp MN \Rightarrow AO \parallel MC$
- Tính $AM = 4 \text{ cm} = AN$. Gọi AO cắt MN tại H

$$\text{Khi đó } S_{AMO} = \frac{1}{2} AM \cdot MO = \frac{1}{2} MH \cdot AO \Rightarrow MH = \frac{AM \cdot MO}{AO} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

$$\text{Chỉ ra } MN = 2MH = \frac{24}{5} \text{ cm}.$$



Bài 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Về cùng phía với nửa đường tròn, vẽ hai tia Ax, By vuông góc với AB . Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Ax . Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By tại N .

- Tính \widehat{MON} .
- Chứng minh rằng $MN = AM + BN$
- Chứng minh rằng $AM \cdot BN = R^2$

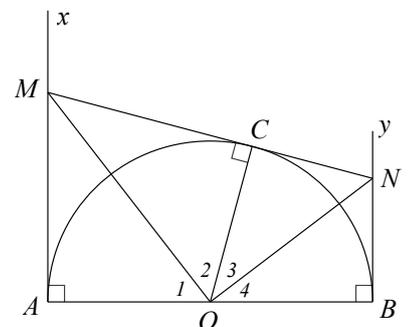
Bài làm:

- Gọi tiếp tuyến thứ hai kẻ từ M có tiếp điểm C .

$$\text{Chỉ ra } \widehat{O_1} = \widehat{O_2}, \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$$

$$\text{Khi đó } \widehat{MON} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

- Chỉ ra $MN = MC + CN = MA + NB$
- Chứng minh $AM \cdot BN = MC \cdot CN = OC^2 = R^2$



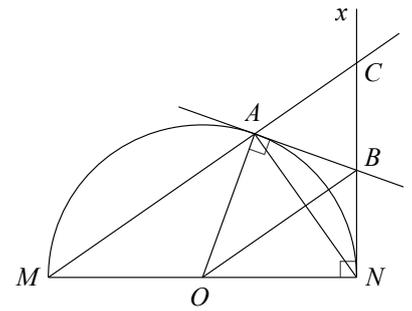
Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN , tiếp tuyến Nx . Qua A trên nửa đường tròn (A không trùng với M, N) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Nx ở B . Tia MA cắt Nx ở C .

- Chứng minh bốn điểm O, A, B, N cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OB \perp AN$
- Chứng minh B là trung điểm của NC .

Bài làm:

- Chỉ ra bốn điểm O, A, B, N cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của OB , bán kính $\frac{OB}{2}$.
- Chỉ ra OB là trung trực của $AN \Rightarrow OB \perp AN$
- Chỉ ra $OB \parallel MC$ vì cùng vuông góc với AN

$$\triangle NMC \text{ có } \begin{cases} OM = ON \\ OB \parallel MC \end{cases} \Rightarrow BN = BC.$$

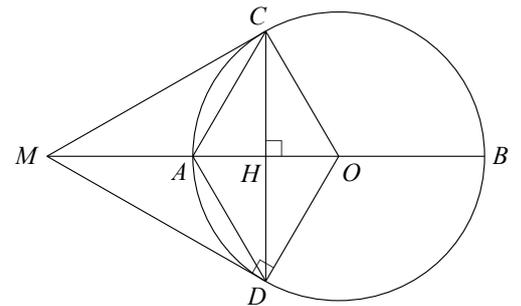


Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi H là trung điểm của OA . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại C và D .

- Tứ giác $ACOD$ là hình gì?
- Qua D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt OA tại M . Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O) và $\triangle MCD$ đều.

Bài làm:

- Chỉ ra $CH = DH$
Tứ giác $ACOD$ có hai đường chéo AO và CD vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình thoi.
- Chỉ ra $\widehat{MOD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AMD} = 30^\circ \Rightarrow AM = AD$
Chỉ ra $MA = AO = AC$.
Chỉ ra $\triangle CMO$ vuông tại $C \Rightarrow MC \perp OC$
Vậy MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



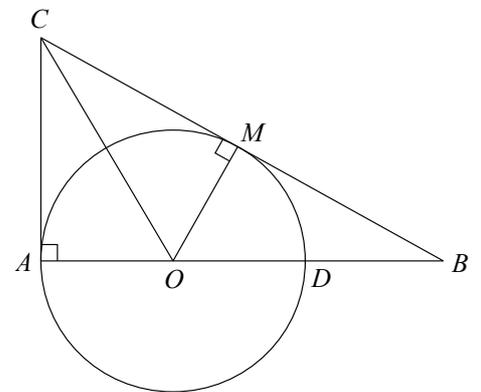
Chỉ ra $MC = MD \Rightarrow \triangle MCD$ cân tại M , mặt khác chỉ ra $\widehat{MAD} = 60^\circ$ nên $\triangle MCD$ đều.

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AD . Vẽ tiếp tuyến tại A của đường tròn, từ C trên tiếp tuyến đó vẽ tiếp tuyến thứ hai CM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm và M khác A) cắt AD tại B .

- Giả sử $AC = 6 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$. Tính BC và BM .
- Chứng minh rằng $BM \cdot AC = BA \cdot MO$.

Bài làm:

- Tính $BC = 10 \text{ cm}$.
Chỉ ra $CA = CM = 6 \text{ cm} \Rightarrow BM = BC - CM = 10 - 6 = 4 \text{ cm}$
- Chứng minh $\triangle BMO \sim \triangle BAC$ ($g - g$)
 $\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{MO}{AC} \Rightarrow BM \cdot AC = BA \cdot MO$.

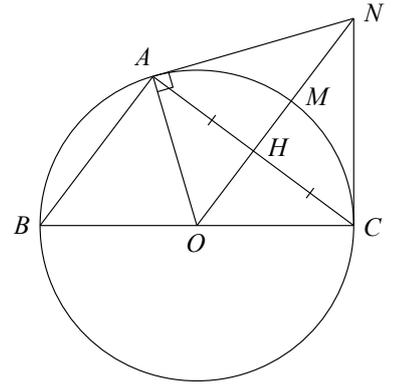


Bài 7: Cho $(O; R)$ đường kính BC , lấy điểm $A \in (O)$. Gọi H là trung điểm của AC . Tia OH cắt (O) tại M . Từ A vẽ tiếp tuyến với (O) cắt tia OM tại N .

- Chứng minh rằng $OM \parallel AB$
- Chứng minh rằng CN là tiếp tuyến của (O) .

Bài làm:

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow AB \perp AC$
Chỉ ra $OM \perp AC$. Khi đó $AB \parallel OM$.
- Chỉ ra $\widehat{AOH} = \widehat{COH} \Rightarrow \triangle AON = \triangle CON$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow \widehat{OCN} = \widehat{OAN} = 90^\circ$. Vậy CN là tiếp tuyến của (O) .

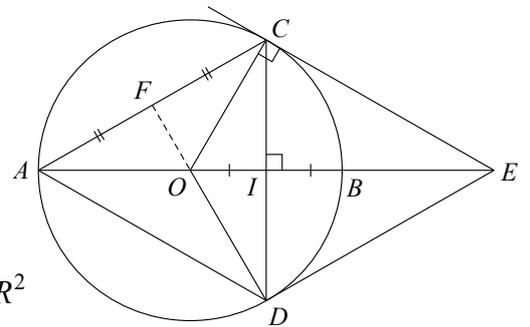


Bài 8: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi I là trung điểm của OB . Qua I kẻ dây CD vuông góc với OB . Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại E .

- Chứng minh $OI \cdot OE = R^2$
- Chứng minh ED là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Gọi F là trung điểm của dây AC .
Chứng minh D, O, F thẳng hàng.

Bài làm:

- Chứng minh $\triangle OIC \sim \triangle OCE$ ($g - g$) $\Rightarrow OI \cdot OE = OC^2 = R^2$
- Chỉ ra OE là tia phân giác $\widehat{COD} \Rightarrow \triangle COE = \triangle DOE$ ($c - g - c$)
 $\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{OCE} = 90^\circ \Rightarrow ED$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Chỉ ra $AO = OB = 2OI$ và AI là trung tuyến của $\triangle ACD \Rightarrow O$ là trọng tâm.
Khi đó DO là đường trung tuyến nên đi qua trung điểm của $AC \Rightarrow D, O, F$ thẳng hàng.



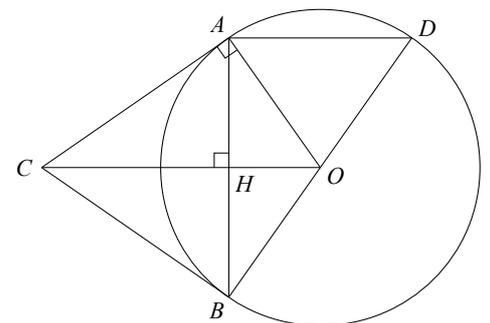
Bài 9: Cho đường tròn (O) và dây AB . Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tại C .

- Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.
- Vẽ đường kính BOD . Chứng minh $AD \parallel OC$
- Cho biết bán kính của đường tròn là 15 cm , $AB = 24 \text{ cm}$.
Tính OC .

Bài làm:

- Giả sử OC cắt AB tại H .
Chỉ ra $\widehat{AOH} = \widehat{BOH} \Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOC$ ($c - g - c$)
 $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OBC} = 90^\circ$. Vậy CB là tiếp tuyến của đường tròn.
- Chứng minh $\triangle ABD$ vuông tại $A \Rightarrow AD \perp AB$ mà $CO \perp AB$ nên $AD \parallel OC$.
- $AB = 24 \text{ cm} \Rightarrow AH = 12 \text{ cm}$. Tính $HO = 9 \text{ cm}$.

$$\text{Chỉ ra } \triangle OHA \sim \triangle OAC \text{ (} g - g \text{)} \Rightarrow OC = \frac{AO^2}{OH} = \frac{15^2}{9} = 25 \text{ cm}$$



Bài 10: Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là một điểm trên đường tròn (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$. Gọi I là trung điểm của AC , OI cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại M , MB cắt CH tại K .

- Chứng minh $OI \perp AC$ và $\triangle ABC$ vuông tại C .
- Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Chứng minh K là trung điểm của CH .

Bài làm:

- Chỉ ra $\triangle OAC$ cân tại $O \Rightarrow OI \perp AC$
Chỉ ra $\triangle ABC$ có CO là đường trung tuyến

Mà $CO = \frac{AB}{2}$ nên $\triangle ABC$ vuông tại C .

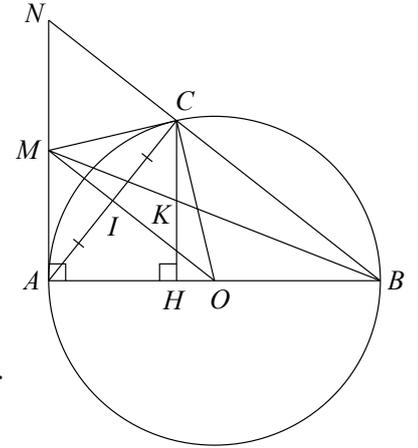
- Chỉ ra $\widehat{AOI} = \widehat{BOI} \Rightarrow \triangle AOM = \triangle COM$ ($c-g-c$)

$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^\circ$ nên MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

- Gọi AM và BC cắt nhau tại N .
Chỉ ra $MI \parallel NC \Rightarrow AM = MN$.

Vì $CH \parallel AN$ (cùng vuông góc với AB) nên $\frac{KH}{AM} = \frac{BK}{BM}$ và $\frac{CK}{MN} = \frac{BK}{BM}$

Từ đó ta có $\frac{KH}{AM} = \frac{CK}{MN} \Rightarrow KH = KC$ (vì $AM = MN$)



Bài 11: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C nằm trên đường tròn (O) . Gọi K là trung điểm của dây cung BC . Qua B dựng tiếp tuyến với (O) cắt OK tại D .

- Chứng minh rằng $DO \perp BC$ và $\triangle ABC$ vuông
- Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Vẽ $CH \perp AB$ tại H . Gọi I là trung điểm của CH . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E . Chứng minh E, C, D thẳng hàng.

Bài làm:

- Chỉ ra $OK \perp BC \Rightarrow DO \perp BC$

$\triangle ABC$ có trung tuyến CO mà $CO = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C

- Chỉ ra $\widehat{COK} = \widehat{BOK} \Rightarrow \triangle COD = \triangle BOD$ ($c-g-c$)

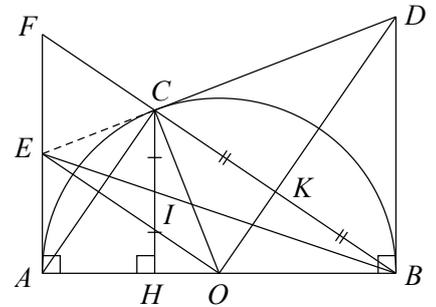
$\Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{DBO} = 90^\circ$

nên DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

- Gọi BC cắt AE tại F . Chỉ ra $CH \parallel AF \Rightarrow \frac{IH}{AE} = \frac{BI}{BE}$ và $\frac{BI}{BE} = \frac{CI}{EF}$.

Từ đó $\frac{IH}{AE} = \frac{CI}{EF} \Rightarrow AE = EF$. $\triangle ACF$ vuông tại C có CE là trung tuyến $\Rightarrow CE = AE$

Chứng minh $\triangle OEA = \triangle OEC$ ($c-c-c$) $\Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OAE} = 90^\circ$. Chỉ ra $\widehat{ECD} = \widehat{ECO} + \widehat{OCD} = 180^\circ$

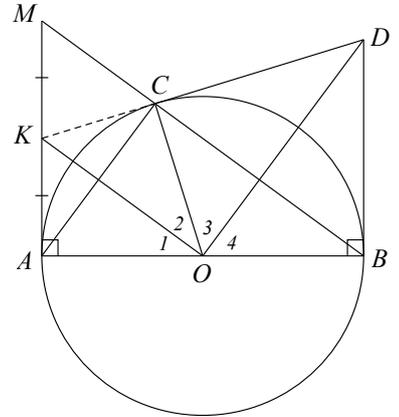


Bài 12: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C thuộc đường tròn (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại M .

- Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông và $AB^2 = BC \cdot BM$
- Gọi K là trung điểm của MA . Chứng minh rằng KC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D . Chứng minh rằng $\triangle KOD$ vuông.

Bài làm:

- $\triangle ABC$ có trung tuyến CO mà $CO = \frac{AB}{2}$
Nên $\triangle ABC$ vuông tại C .
Chứng minh $\triangle BCA \sim \triangle BAM$ ($g-g$) $\Rightarrow AB^2 = BC \cdot BM$
- Chỉ ra $KC = KA \Rightarrow \triangle CKO = \triangle AKO$ ($c-c-c$)
 $\Rightarrow \widehat{KCO} = \widehat{KAO} = 90^\circ$, nên KC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Chỉ ra $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$, $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$
Khi đó $\widehat{KOD} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

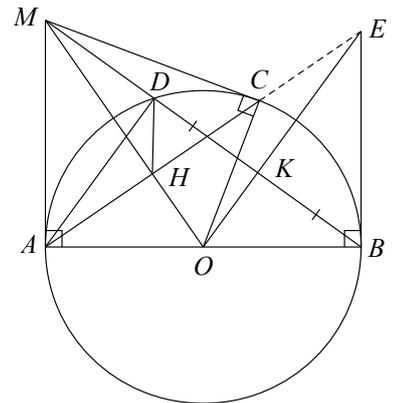


Bài 13: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Qua A vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) . Trên Ax lấy điểm M (M khác A), từ M vẽ tiếp tuyến MC của đường tròn (C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AC . Đường thẳng MB cắt đường tròn (O) tại D (D nằm giữa M và B)

- Chứng minh $OM \perp AC$ tại H .
- Chứng minh rằng $MD \cdot MB = MH \cdot MO$ và $\widehat{MHD} = \widehat{MBA}$
- Gọi K là trung điểm của BD . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OK tại E . Chứng minh A, E, C thẳng hàng.

Bài làm:

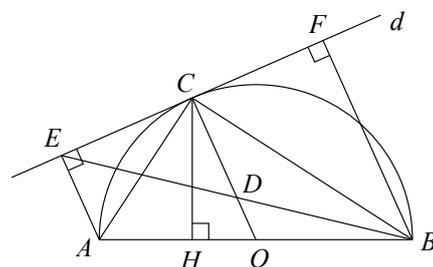
- Chỉ ra MO là trung trực của AC nên $OM \perp AC$
- Chỉ ra $MD \cdot MB = MA^2$ và $MH \cdot MO = MA^2$
Nên $MD \cdot MB = MH \cdot MO$.
Chứng minh $\triangle MDH \sim \triangle MOB$ ($c-g-c$) $\Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{MBA}$.
- Chỉ ra $OK \perp BM \Rightarrow OK \cdot OE = OB^2$
Và $OH \cdot OM = OA^2$ mà $OA = OB \Rightarrow OH \cdot OM = OK \cdot OE$
Khi đó $\triangle OHE \sim \triangle OKM$ ($c-g-c$) $\Rightarrow \widehat{OHE} = \widehat{OKM} = 90^\circ$
Mà $\widehat{OHC} = 90^\circ$, nên H, C, E thẳng hàng.



Bài 14: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Qua điểm C thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc từ A và B tới d . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB .

- Chứng minh rằng $CE = CF$.
- Chứng minh AC là tia phân giác \widehat{BAE} .
- Chứng minh rằng $CH^2 = AE \cdot BF$

Bài làm:



- a) Gọi OC cắt BE tại D . Chỉ ra $AE \parallel OC \parallel BF \Rightarrow BD = DE \Rightarrow EC = CF$
- b) $AE \parallel CO \Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{ACO}$ (so le trong)
 Mà $\triangle OAC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{CAO}$, suy ra $\widehat{EAC} = \widehat{CAO} \Rightarrow AC$ là tia phân giác \widehat{BAE} .
- c) Chỉ ra $\triangle AEC = \triangle AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AE = AH$
 Chỉ ra $\triangle BHC = \triangle BFC$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BH = BF$
 Chứng minh $\triangle BHC \sim \triangle CHA$ (g – g) $\Rightarrow CH^2 = AH \cdot BH = AE \cdot BF$.

Bài 15: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , C là điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$ và $OI \perp AC$.

- a) Chứng minh C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.
 b) Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn. Tia OI cắt Ax tại M . Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$
 c) Gọi giao điểm của BM với CH là K . Chứng minh $\triangle AMO \sim \triangle HCB$ và $CK = KH$

Bài làm:

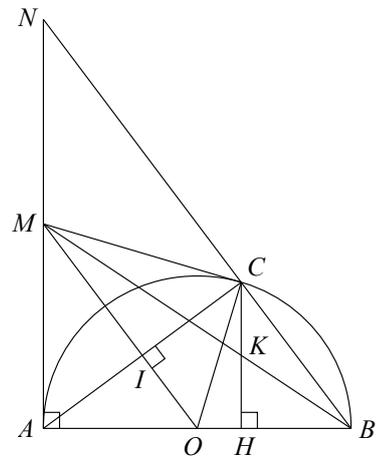
- a) Chứng minh C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm OC .
 b) Chứng minh $\triangle OIA \sim \triangle OAM$ (g – g) $\Rightarrow OI \cdot OM = OA^2 = R^2$
 c) Chỉ ra $OM \parallel BC$ vì cùng vuông góc với AC
 $\Rightarrow \triangle AMO \sim \triangle HCB$ (g – g).

Gọi AM cắt BC tại N . Chứng minh $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$
 $\Rightarrow \triangle AOM = \triangle COM$ (c – g – c) $\Rightarrow MA = MC$.

Chỉ ra $MC = MN$ suy ra $MA = MN$

Vì $CH \parallel NA \Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{BK}{BM}$ và $\frac{BK}{BM} = \frac{CK}{MN}$

Suy ra $CK = HK$ (vì $MA = MN$).



Bài 16: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C (C khác A và B). Kẻ $OK \perp BC$ tại K . Gọi D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn (O) và I là trung điểm của AD .

- a) Chứng minh $OK \parallel AC$ và $BC \cdot BD = 4R^2$
 b) Chứng minh IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)
 c) Từ C kẻ $CH \perp AB$, BI cắt CH tại N . Chứng minh rằng N là trung điểm của CH .

Bài làm:

- a) Chỉ ra $AC \perp BC$ rồi suy ra $OK \parallel AC$ (cùng $\perp BC$)
 Chứng minh $\triangle BCA \sim \triangle BAD$ (g – g)

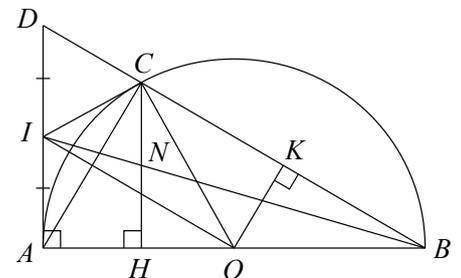
$\Rightarrow BC \cdot BD = BA^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

- b) Chỉ ra $\triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CI = AI$

Chứng minh $\triangle OAI = \triangle OCI$ (c – c – c) $\Rightarrow \widehat{ICO} = \widehat{IAO} = 90^\circ$

Vậy IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

- c) $CH \parallel AD \Rightarrow \frac{NH}{AI} = \frac{BN}{BI}$ và $\frac{BN}{BI} = \frac{CN}{DI}$. Do đó $\frac{NH}{AI} = \frac{CN}{DI} \Rightarrow NH = CN$ vì $AI = DI$.



Bài 17: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Lấy C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M .

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông và $BC \cdot BM = 4R^2$
- Gọi K là trung điểm của MA . Chứng minh KC là tiếp tuyến của (O) .
- Tia KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D . Chứng minh $MO \perp AD$.

Bài làm:

a) $\triangle ABC$ có CO là trung tuyến mà $CO = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .

Chứng minh $\triangle BCA \sim \triangle BAM$ ($g-g$)

$\Rightarrow BC \cdot BM = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

b) Chứng minh $KC = KA = KM$

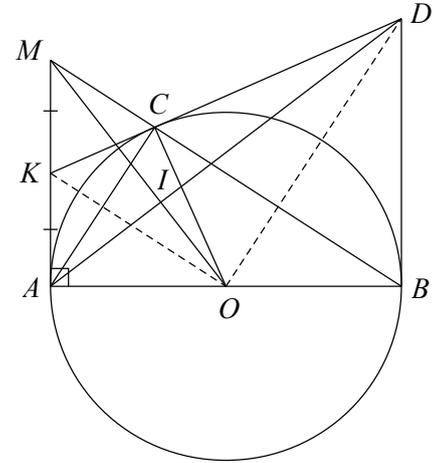
$\Rightarrow \angle CKO = \angle AKO$ ($c-c-c$) $\Rightarrow \widehat{KCO} = \widehat{KAO} = 90^\circ$

c) Chứng minh $OK \perp OD$

Chứng minh $\triangle OCK \sim \triangle DCO$ ($g-g$)

$\Rightarrow \frac{KC}{CO} = \frac{CO}{CD} \Rightarrow \frac{KA}{AO} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \triangle MAO \sim \triangle ABD$ ($c-g-c$) $\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{BAD}$

Gọi AD cắt MO tại $I \Rightarrow \widehat{AMI} + \widehat{MAI} = \widehat{IAO} + \widehat{MAI} = 90^\circ \Rightarrow MI \perp AI$.



Bài 18: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , các đường cao AD và BE cắt nhau tại H . Vẽ đường tròn (O) đường kính AH .

- Chứng minh E là điểm nằm trên đường tròn (O) .
- Chứng minh DE là tiếp tuyến của (O)

Bài làm:

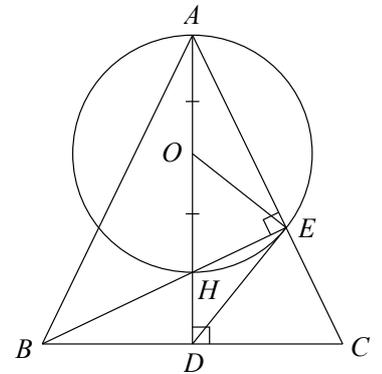
a) Chứng minh $\triangle AHE$ vuông tại E có EO là trung tuyến

Nên $EO = \frac{AH}{2} = OA = OH$ nên E thuộc đường tròn (O)

b) Chỉ ra $BD = CD = DE$

Khi đó $\widehat{DBE} = \widehat{DEB}$ mà $OE = OH \Rightarrow \widehat{OEH} = \widehat{OHE}$

Nên $\widehat{OED} = \widehat{OEH} + \widehat{HED} = \widehat{OHE} + \widehat{HBD} = 90^\circ$. Vậy DE là tiếp tuyến của (O)



Bài 19: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH và BK cắt nhau tại I .

- Chứng minh đường tròn đường kính AI đi qua K .
- Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

Bài làm:

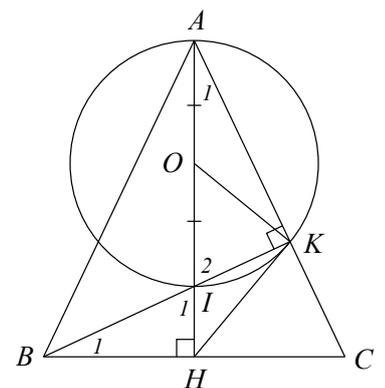
a) Gọi O là trung điểm của AI

Chỉ ra $OA = OI = OK$ nên K thuộc đường tròn đường kính AI .

b) Chỉ ra $HB = HC = HK \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{HKB}$ và $\widehat{OKI} = \widehat{I_2} = \widehat{I_1}$

Khi đó $\widehat{OKH} = \widehat{OKI} + \widehat{IKH} = \widehat{I_1} + \widehat{B_1} = 90^\circ$.

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

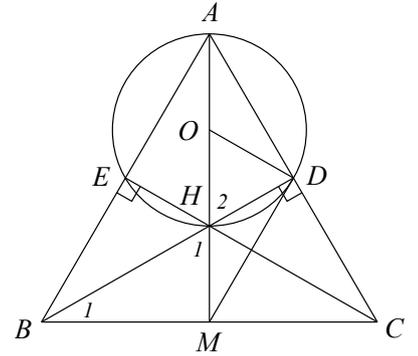


Bài 20: Cho $\triangle ABC$ đều, đường cao BD và CE cắt nhau tại H , AH cắt BC tại M .

- Chứng minh 4 điểm A, D, H, E cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E

Bài làm:

- Gọi O là trung điểm của AH . Chỉ ra $OA = OD = OH = OE$.
Khi đó A, D, H, E cùng thuộc một đường tròn.
- Chỉ ra $BM = CM \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{MDB}$ và $\widehat{OHD} = \widehat{H_2} = \widehat{H_1}$.
Khi đó $\widehat{ODM} = \widehat{ODH} + \widehat{HDM} = \widehat{H_1} + \widehat{B_1} = 90^\circ$
Nên MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Bài 21: Cho B, C là hai điểm trên đường tròn $(O; R)$. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường phân giác \widehat{BOC} tại A . H là giao điểm của OA và BC .

- Chứng minh $\triangle BOH$ vuông và $OB^2 = OH \cdot OA$
- Chứng minh AC là tiếp tuyến của $(O; R)$
- CD là đường kính của $(O; R)$. Qua O dựng đường thẳng vuông góc với AD tại E và cắt CB tại F .
Chứng minh $\widehat{ODF} = 90^\circ$.

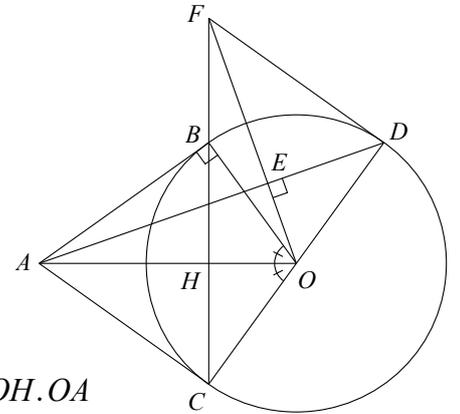
Bài làm:

- $\triangle OBC$ cân tại O có OH là phân giác nên cũng là trung trực $\Rightarrow OH \perp BC$. Chứng minh $\triangle OHB \sim \triangle OBA$ ($g - g$) $\Rightarrow BO^2 = OH \cdot OA$
- Chứng minh $\triangle ABO = \triangle ACO$ (*cạnh huyền - góc nhọn*) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^\circ$
Vậy nên AC là tiếp tuyến của $(O; R)$.

- Chứng minh $\triangle OHF \sim \triangle OEA$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{OH}{OE} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow OH \cdot OA = OE \cdot OF$

Chứng minh $OH \cdot OA = OB^2 = R^2 = OD^2$. Khi đó $OE \cdot OF = OD^2 \Rightarrow \frac{OE}{OD} = \frac{OD}{OF}$

Chứng minh $\triangle OED \sim \triangle ODF$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \widehat{ODF} = \widehat{OED} = 90^\circ$.

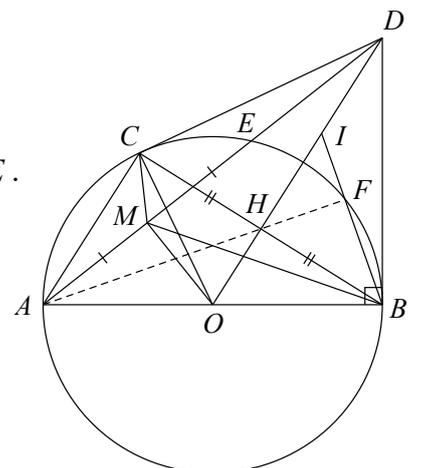


Bài 22: Cho điểm C thuộc đường tròn (O) đường kính AB sao cho $AC < BC$. Gọi H là trung điểm của BC . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OH tại D .

- Chứng minh $DH \cdot DO = DB^2$
- Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Đường thẳng AD cắt (O) tại E . Gọi M là trung điểm của AE .
Chứng minh D, B, M, C cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi I là trung điểm của DH , BI cắt (O) tại F .
Chứng minh A, H, F thẳng hàng.

Bài làm:

- Chứng minh $OH \perp BC$.



Chứng minh $\triangle DHB \sim \triangle DBO$ ($g - g$) $\Rightarrow DH \cdot DO = DB^2$

b) Chỉ ra $\widehat{COH} = \widehat{BOH} \Rightarrow \triangle COD = \triangle BOD$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{OBD} = 90^\circ$

Nên DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

c) Chứng minh $OM \perp AD$

Chỉ ra D, B, M, C cùng cách đều trung điểm của OD

Nên cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của OD .

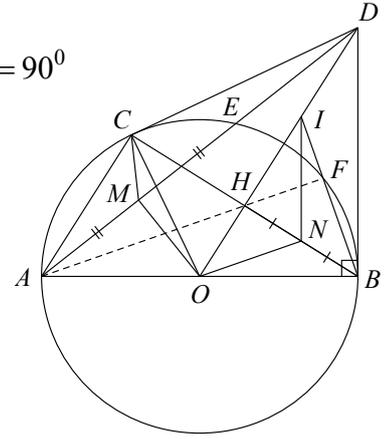
d) Gọi N là trung điểm của HB

Chỉ ra ON, IN là các đường trung bình

Chỉ ra $IN \perp OB, BH \perp OI \Rightarrow ON \perp BI$

Mà $ON \parallel AH \Rightarrow AH \perp BI$ mà $AF \perp BI$

Vậy A, H, F thẳng hàng.



Bài 23: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có BC là đường kính. Gọi H và G lần lượt là hình chiếu của điểm O trên AB và AC . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OH tại E .

1) Chứng minh $OH \parallel AC$ và EB là tiếp tuyến của đường tròn (O)

2) Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AB tại D . Chứng minh:

a) $CD \cdot BC = 2BD \cdot GC$

b) $\widehat{BOD} = \widehat{CGD}$

Bài làm:

1) Chỉ ra $\begin{cases} OH \perp AB \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \parallel AC$

Chỉ ra $\triangle AOE = \triangle BOE$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \widehat{OBE} = \widehat{OAE} = 90^\circ \Rightarrow OB \perp EB$

Kết luận BE là tiếp tuyến của (O)

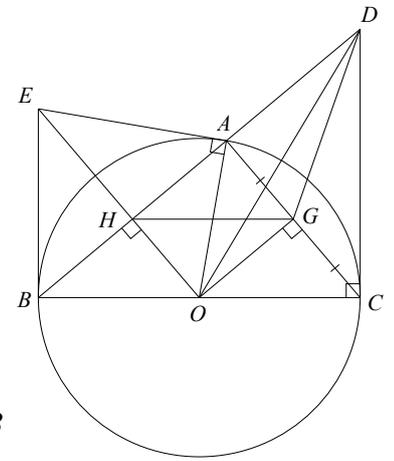
2)

a) Chỉ ra $AG = GC$. Từ $CD \cdot BC = 2BD \cdot GC = BD \cdot AC$

Chứng minh $\triangle BAC \sim \triangle BCD$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow BC \cdot DC = AC \cdot BD$

b) Từ $CD \cdot BC = 2BD \cdot GC \Rightarrow CD \cdot 2BO = BD \cdot GC \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{CG}{BO}$

Chỉ ra $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ \widehat{ACB}) $\Rightarrow \triangle GCD \sim \triangle OBD$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \widehat{CGD} = \widehat{BOD}$.



Bài 24: Cho $(O; R)$. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO và dây AB .

a) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AC của (O) , vẽ BK vuông góc với AC ($K \in AC$). Chứng minh

$MB \cdot BC = BK \cdot MO$

c) MC cắt BK tại I . Chứng minh I là trung điểm của BK .

Bài làm:

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của MO

b) Gọi AO cắt AB tại H

Chứng minh $\widehat{BCK} = \widehat{AOM} = \widehat{BOM}$

Suy ra $\triangle MBO \sim \triangle BKC$ ($g-g$) $\Rightarrow \frac{MB}{BK} = \frac{MO}{BC}$

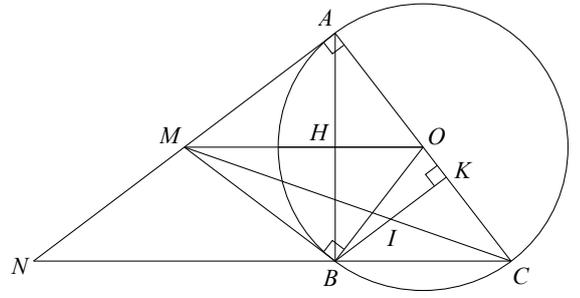
$\Rightarrow MB \cdot BC = BK \cdot MO$.

c) Gọi N là giao của AM với BC .

Chỉ ra $MO \parallel NC$ (cùng $\perp AB$)

MO là đường trung bình $\Rightarrow MN = MA$

Chỉ ra $BK \parallel AN \Rightarrow \frac{BI}{MN} = \frac{CI}{CM}$ và $\frac{CI}{CM} = \frac{IK}{MA} \Rightarrow \frac{BI}{MN} = \frac{IK}{MA} \Rightarrow BI = IK$ (vì $MN = MA$)



Bài 25: Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C bất kì (C khác A và B). Tiếp tuyến tại C và tiếp tuyến tại A cắt nhau tại M

a) Chứng minh bốn điểm O, A, M, C cùng thuộc một đường tròn.

b) AC cắt OM tại H . Chứng minh AC vuông góc với OM và $OH \cdot OM = R^2$

c) Tia BH cắt nửa đường tròn tại D . Chứng minh $\triangle ODM \sim \triangle OHD$

d) Tia AD cắt MH tại I . Chứng minh I là trung điểm của MH

Bài làm:

a) Chứng minh O, A, M, C cùng thuộc đường tròn

có tâm là trung điểm của MO .

b) Chỉ ra MO là trung trực của AC nên $AC \perp MO$

Chứng minh $\triangle OHC \sim \triangle COM$ ($g-g$) $\Rightarrow OH \cdot OM = OC^2 = R^2$

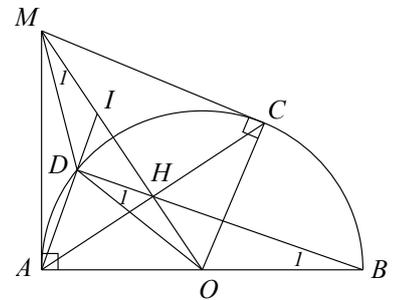
c) Từ $OH \cdot OM = R^2 = OD^2 \Rightarrow \frac{OH}{OD} = \frac{OD}{OM} \Rightarrow \triangle ODM \sim \triangle OHD$ ($c-g-c$)

d) Chỉ ra $\widehat{M_1} = \widehat{D_1} = \widehat{B_1} = \widehat{MAD} \Rightarrow \triangle IMD \sim \triangle IAM$ ($g-g$)

$\Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{ID}{IM} \Rightarrow ID \cdot IA = IM^2$ (1)

Chứng minh $\triangle IDH \sim \triangle IHA$ ($g-g$) $\Rightarrow IH^2 = ID \cdot IA$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow IM^2 = IH^2 \Rightarrow IM = IH$.



Bài 17. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

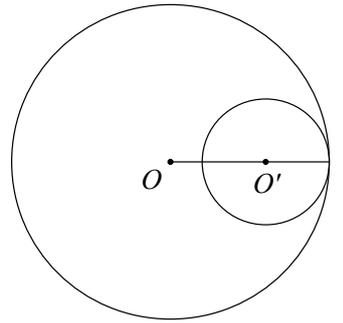
B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho đoạn thẳng $OO' = 3\text{ cm}$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và $(O'; 2\text{ cm})$.

Bài làm:

Ta có $OO' = R - r$ ($3\text{ cm} = 5\text{ cm} - 2\text{ cm}$)

Nên đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc trong.



Bài 2: Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5\text{ cm}$.

Giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 3\text{ cm})$ và $(O'; 2\text{ cm})$ tiếp xúc với nhau.

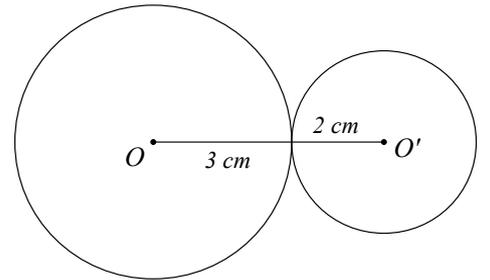
Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

Bài làm:

Ta có $OO' = R + r$ ($5\text{ cm} = 3\text{ cm} + 2\text{ cm}$)

Nên đường tròn (O) và đường tròn (O')

tiếp xúc ngoài với nhau.



Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C .

Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

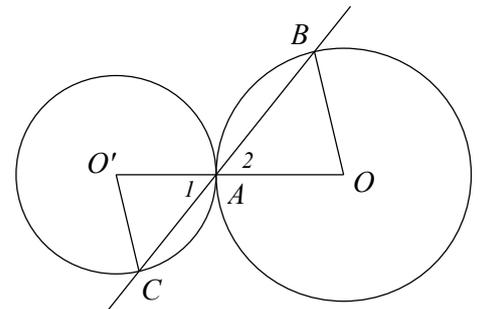
Bài làm:

Chứng minh $\triangle O'AC$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A}_1$

Chứng minh $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A}_2$

Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$, mà hai góc \widehat{B}, \widehat{C} so le trong

Nên $O'C \parallel OB$.



Bài 4: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Vẽ hai đường tròn $(I; IA)$ và đường tròn $(B; BA)$

a) Hai đường tròn (I) và (B) có vị trí như thế nào?

b) Kẻ đường thẳng đi qua A , cắt (I) và (B) lần lượt tại M và N .

So sánh AM và MN .

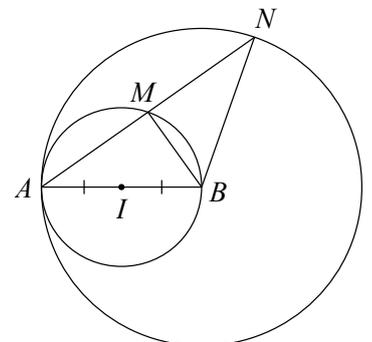
Bài làm:

a) Ta có $IB = AB - AI$

Nên đường tròn (I) và đường tròn (B) tiếp xúc trong.

b) Chỉ ra $\triangle ABN$ cân tại B .

Chỉ ra $BM \perp AN \Rightarrow AM = MN$



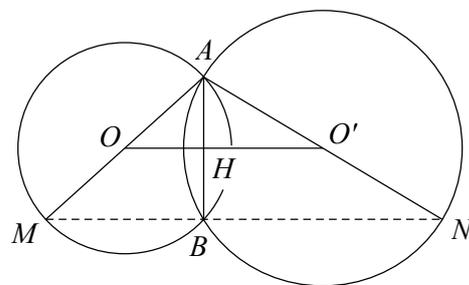
Bài 5: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau tại A và B . Gọi M là điểm đối xứng với A qua O , N là điểm đối xứng với A qua O' .

a) Chứng minh rằng $M \in (O)$ và $N \in (O')$ và ba điểm M, B, N thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

Bài làm:

- a) Vì M đối xứng với A qua $O \Rightarrow OA = OM$ nên $M \in (O)$
 Vì N đối xứng với A qua $O' \Rightarrow O'A = O'N \Rightarrow N \in (O')$
 Chỉ ra $\widehat{ABM} = 90^\circ, \widehat{ABN} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{MBN} = 180^\circ \Rightarrow M, B, N$ thẳng hàng.



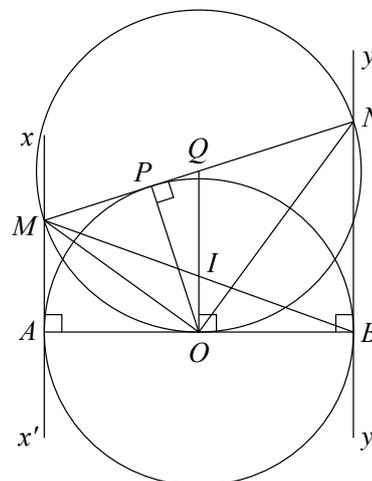
- b) Gọi OO' cắt AB tại H
 Chỉ ra OO' là trung trực của $AB \Rightarrow H$ là trung điểm AB
 Khi đó HB là khoảng cách từ tâm H đến đường thẳng MN .
 Vậy MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB , tiếp tuyến xx' tại A và tiếp tuyến yy' tại B của (O) . Một tiếp tuyến thứ ba của (O) tại điểm P (P khác A và B) cắt xx' tại M và cắt yy' tại N .

- a) Chứng minh rằng $MN = MA + NB$
 b) Đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cắt MN tại Q . Chứng minh rằng Q là trung điểm của MN .
 c) Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .

Bài làm:

- a) Chỉ ra $MA = MP, NP = NB \Rightarrow MN = MP + PN = MA + NB$
 b) Gọi MB cắt OQ tại I . Chỉ ra $MA \parallel QO \parallel BN$
 Chứng minh $MI = IB$ và $MQ = QN$
 c) Chứng minh $\widehat{MON} = 90^\circ \Rightarrow QO = QM = QN$
 Nên QO là bán kính đường tròn $(Q; QM)$
 Và QO là khoảng cách từ tâm Q đến AB
 Vậy AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .



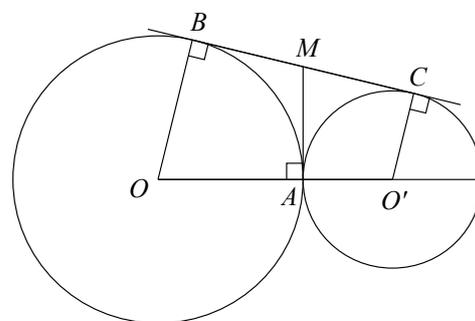
Bài 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d tại B và C ($khác A$), trong đó $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại M .

Chứng minh rằng:

- a) Đường thẳng MA tiếp xúc với (O')
 b) Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC từ đó suy ra $\triangle ABC$ vuông.

Bài làm:

- a) Vì MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A
 Nên $MA \perp OA \Rightarrow MA \perp AO'$
 Như vậy MA là một tiếp tuyến của đường tròn (O') .
 b) Vì d tiếp xúc với $(O), (O')$ tại hai điểm B, C
 nên d là tiếp tuyến $\Rightarrow MB = MA = MC$



Chứng minh $\triangle ABC$ có AM là trung tuyến mà $AM = \frac{BC}{2}$

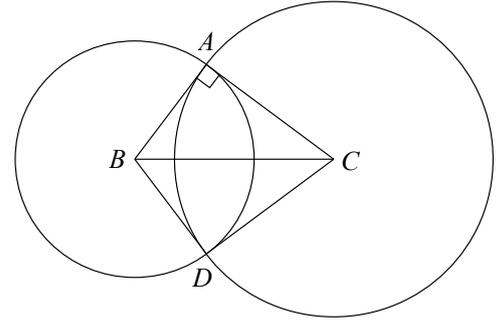
Nên $\triangle ABC$ vuông tại A .

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , vẽ đường tròn $(B; BA)$ và đường tròn $(C; CA)$ chúng cắt nhau tại D (D khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (B) .

Bài làm:

Chứng minh $\triangle ABC = \triangle DBC$ ($c - c - c$)

$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow DC$ là tiếp tuyến của (B) .



Bài 9: Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại A và B . Trong đó O' nằm trên đường tròn (O) . Kẻ đường kính $O'OC$ của đường tròn (O) .

- Chứng minh rằng CA, CB là hai tiếp tuyến của (O')
- Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I , đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ tại K . Chứng minh rằng O, I, K thẳng hàng.

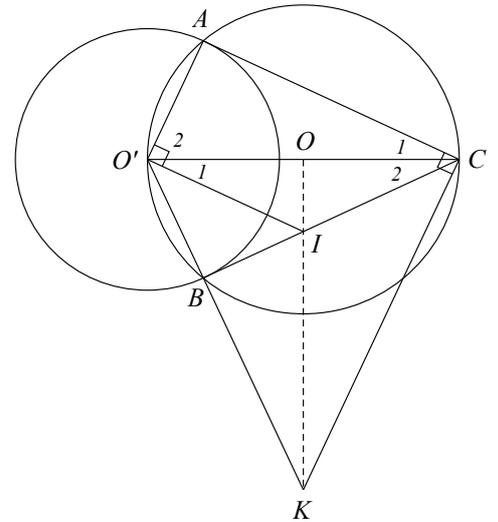
Bài làm:

- Chỉ ra $\triangle AO'C$ vuông tại $A \Rightarrow CA \perp AO'$
Nên CA là tiếp tuyến của đường tròn (O')
Chỉ ra $\triangle AO'BC$ vuông tại $B \Rightarrow BC \perp O'B$
Nên CB là tiếp tuyến của đường tròn (O')

- Chỉ ra $O'I \parallel AC \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{O}'_1$ mà $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{O}'_1 = \widehat{C}_2$
Hay $\triangle IO'C$ cân tại $I \Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của $O'C$

Chỉ ra $O'A \parallel KC \Rightarrow \widehat{O}'_2 = \widehat{O'CK}$ mà $\widehat{O}'_2 = \widehat{BO'C}$ nên $\widehat{O'CK} = \widehat{BO'C}$

Hay $\triangle KO'C$ cân tại $K \Rightarrow K$ nằm trên đường trung trực của $O'C$ và O là trung điểm của $O'C$
Vậy O, I, K thẳng hàng.



Bài 10: Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB và $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE .

- Tính \widehat{DAE} .
- Tứ giác $ADME$ là hình gì?
- Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Bài làm:

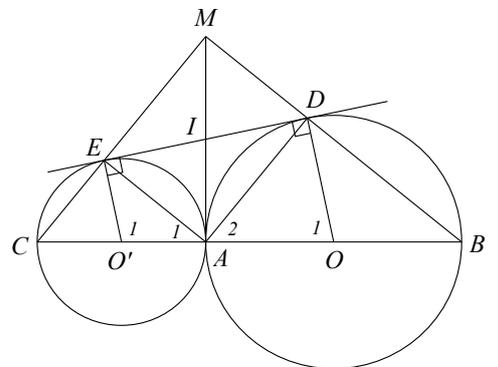
- Chỉ ra $O'E \parallel OD \Rightarrow \widehat{O}'_1 + \widehat{O}_1 = 180^\circ$ (trong cùng phía)

Chỉ ra $\widehat{A}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{O}'_1}{2}$ và $\widehat{A}_2 = \frac{180^\circ - \widehat{O}_1}{2}$

Khi đó $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAE} = 90^\circ$.

- Tứ giác $ADME$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo MA và DE cắt nhau tại $I \Rightarrow IA = ID = IM = IE$

Chỉ ra $\widehat{IAO'} = \widehat{IAE} + \widehat{A}_1 = \widehat{IEA} + \widehat{AEO} = \widehat{IEO'} = 90^\circ$ nên MA là tiếp tuyến của (O') và (O)



Bài 11: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên OA lấy điểm E . Gọi I là trung điểm của AE , qua điểm I vẽ dây cung $CD \perp AB$, vẽ đường tròn (O') đường kính EB cắt BC tại F .

- Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc tại B .
- Tứ giác $ACED$ là hình gì?
- Chứng minh IF là tiếp tuyến của (O')

Bài làm:

a) Ta có $OO' = OB - O'B$ nên (O) và (O') tiếp xúc tại B .

b) Chỉ ra AO là trung trực của CD nên $EC = ED$, $AC = AD$

$\triangle CAE$ có CI vừa là đường cao vừa là trung tuyến

$\Rightarrow \triangle CAE$ cân tại $C \Rightarrow CA = CE$

Khi đó $CA = CE = DE = DA$. Vậy $ACED$ là hình thoi.

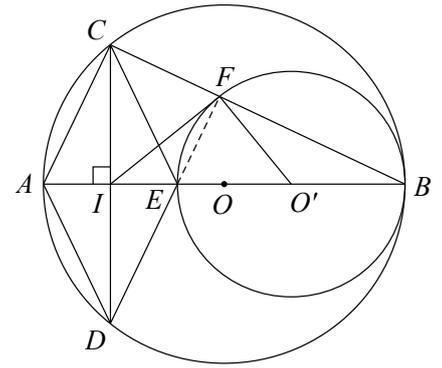
c) Chỉ ra $\triangle ABC$ vuông tại C nên $AC \perp BC$ và $EF \perp BC$

Mà $DE \parallel AC \Rightarrow DE \perp BC$. Vậy D, E, F thẳng hàng.

$\triangle CFD$ vuông tại F có FI là trung tuyến nên $IF = ID \Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{IFD}$.

$\triangle O'EF$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{O'FE} = \widehat{O'EF}$. Khi đó $\widehat{IFO'} = \widehat{IFE} + \widehat{EFO'} = \widehat{IDE} + \widehat{FEO'} = 90^\circ$

Vậy IF là tiếp tuyến của (O') .



Bài 12: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên đường tròn này lấy điểm C sao cho $BC = R$. Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AC tại D .

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại C .
- Tính AC, BD theo R .
- Vẽ đường tròn (O') đường kính BD . Chứng minh $O'C$ là tiếp tuyến của (O) và AB là tiếp tuyến của (O') .

Bài làm:

a) $\triangle ABC$ có CO là trung tuyến mà $CO = \frac{AB}{2}$

nên $\triangle ABC$ vuông tại C .

b) Chỉ ra $\triangle BOC$ đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 30^\circ$

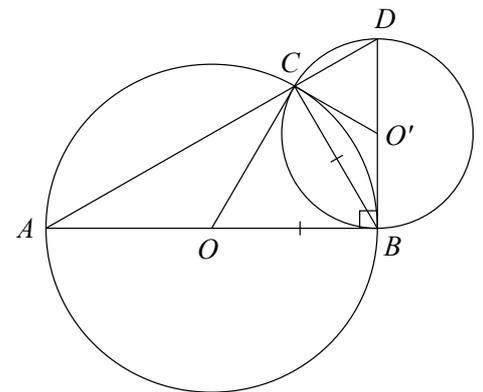
Khi đó $AC = AB \cdot \sin \widehat{ABC} = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Chỉ ra $\widehat{CBD} = 30^\circ$, khi đó $\cos \widehat{CBD} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{BC}{\cos \widehat{CBD}} = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

c) Chỉ ra $O'C = O'B = O'D \Rightarrow \triangle COO' = \triangle BOO' (c-c-c) \Rightarrow \widehat{OCO'} = \widehat{OBO'} = 90^\circ$

Nên $O'C$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Chỉ ra $O'B \perp OB \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Ôn tập chương 5.

Bài 1: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , tiếp tuyến Bx . Qua điểm C trên nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Bx tại M . Tia AC cắt Bx tại N .

- Chứng minh rằng $OM \perp BC$.
- Chứng minh M là trung điểm của BN
- Kẻ CH vuông góc với AB , AM cắt CH tại I . Chứng minh I là trung điểm của CH .

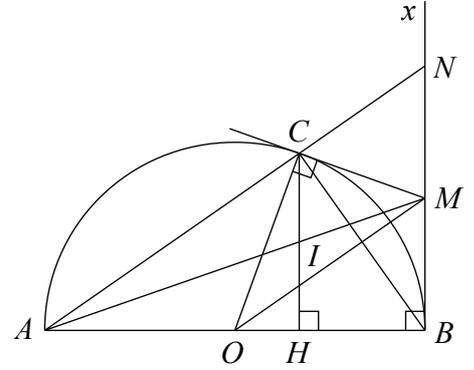
Bài làm:

- Chỉ ra OM là đường trung trực của đoạn BC
- Chỉ ra $OM \parallel AN$ (cùng $\perp BC$)

$$\triangle ABN \text{ có } \begin{cases} OA = OB \\ OM \parallel AN \end{cases} \Rightarrow MN = MB$$

- Chỉ ra $CH \parallel BN$

$$\Rightarrow \frac{IH}{BM} = \frac{AI}{AM} = \frac{CI}{MN} \text{ mà } MN = BM \Rightarrow IH = CI$$



Bài 2: Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn đó. Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ điểm M kẻ tiếp tuyến MC với (O) (C là tiếp điểm). Tia MC cắt By tại D .

- Chứng minh $MD = MA + BD$ và $\triangle OMD$ vuông.
- Cho $AM = 2R$. Tính BD và chu vi tứ giác $ABDM$.
- Tia AC cắt tia By tại K . Chứng minh $OK \perp BM$.

Bài làm:

- Chỉ ra $MC = MA$, $DC = DB$

$$\text{Suy ra } MD = MC + CD = MA + BD$$

$$\text{Chỉ ra } \widehat{AOM} = \widehat{COM} \text{ và } \widehat{COD} = \widehat{BOD}$$

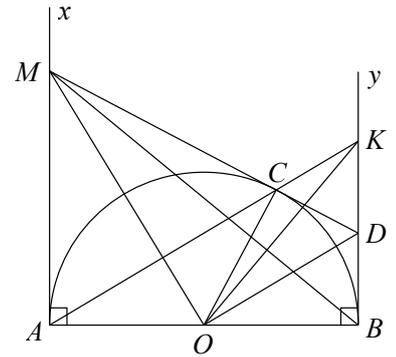
$$\text{Suy ra } \widehat{MOD} = \widehat{MOC} + \widehat{COD} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 90^\circ$$

- Chứng minh $\triangle MAO \sim \triangle OBD$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{MA}{OB} = \frac{AO}{BD} \Rightarrow BD = \frac{OA \cdot OB}{AM} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$

$$\text{Khi đó chu vi của tứ giác } ABDM \text{ là } AB + BD + DM + AM = 2R + \frac{R}{2} + \left(\frac{R}{2} + 2R + 2R \right) = 7R$$

- Từ $\triangle MAO \sim \triangle OBD \Rightarrow \frac{MA}{OB} = \frac{AO}{BD} = \frac{2AO}{2BD} = \frac{AB}{BK} \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle OBK$ ($c - g - c$)

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BKO}. \text{ Chỉ ra } \widehat{ABM} + \widehat{MBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BKO} + \widehat{MBK} = 90^\circ \Rightarrow BM \perp OK$$



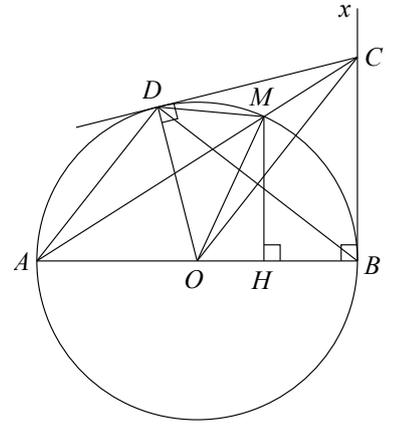
Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến Bx của (O) . Lấy điểm $M \in (O)$ (M khác A và B) sao cho AM cắt tiếp tuyến Bx tại C và $MA > MB$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD với (O) (với D là tiếp điểm).

- Chứng minh $OC \perp BD$
- Chứng minh O, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ MH vuông góc với AB tại H . Tìm vị trí của M để chu vi $\triangle OMH$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài làm:

- Chỉ ra OC là trung trực của $BD \Rightarrow OC \perp BD$
- Chỉ ra O, B, C, D cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm của OC .

- c) Chu vi $\triangle OMH = OM + MH + OH = R + MH + OH$
 Ta có $(MH + OH)^2 \leq 2(MH^2 + OH^2) \Rightarrow (MH + OH)^2 \leq 2 \cdot OM^2$
 $\Rightarrow MH + OH \leq R\sqrt{2}$
 Khi đó chu vi $\triangle OMH \leq R + R\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})R$
 Dấu "=" xảy ra khi $MH = OH$ hay $\widehat{MOH} = 45^\circ$
 $\Rightarrow M$ nằm chính giữa cung AB .

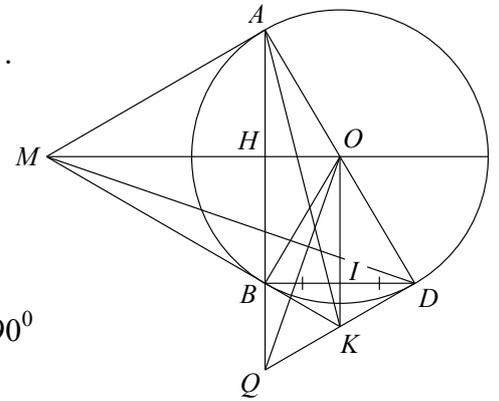


Bài 4: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Gọi MA, MB là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính AD của (O) . Gọi H là giao điểm của OM và AB , I là trung điểm của BD .

- Chứng minh $OHBI$ là hình chữ nhật.
- Cho biết OI cắt MB tại K . Chứng minh KD là tiếp tuyến (O) .
- Giả sử $OM = 2R$. Tính chu vi $\triangle AKD$ theo R .
- Đường thẳng qua O và vuông góc với MD cắt tia AB tại Q . Chứng minh K là trung điểm của DQ .

Bài làm:

- Chỉ ra $\triangle OBD$ cân tại $O \Rightarrow OI \perp BD$
 Chỉ ra $OM \perp AB$ và $AB \perp BD$
 Nên $OHBI$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh $\triangle OBK = \triangle ODK$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \widehat{ODK} = \widehat{OBK} = 90^\circ$
 Vậy KD là tiếp tuyến (O)



- $\triangle OMK$ vuông tại O có $OB \perp MK \Rightarrow \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OK^2}$
 $\Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} - \frac{1}{OM^2} = \frac{3}{4R^2} \Rightarrow OK^2 = \frac{4R^2}{3}$.

$$\text{Lại có } BK^2 = OK^2 - OB^2 = \frac{4R^2}{3} - R^2 = \frac{R^2}{3} \Rightarrow BK = \frac{R\sqrt{3}}{3} = KD$$

$$\triangle AKD \text{ vuông tại } D \Rightarrow AK^2 = AD^2 + DK^2 \Rightarrow AK = \sqrt{4R^2 + \frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{39}}{3} \Rightarrow C_{\triangle AKD}$$

- Chứng minh $\triangle KDO \sim \triangle KOM$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{KD}{KO} = \frac{DO}{MO}$ (1)

Gọi AB cắt DK tại Q' . Chỉ ra $OK \parallel AQ' \Rightarrow DK = KQ'$ thay vào (1) ta được $\frac{KQ'}{KO} = \frac{DO}{OM}$

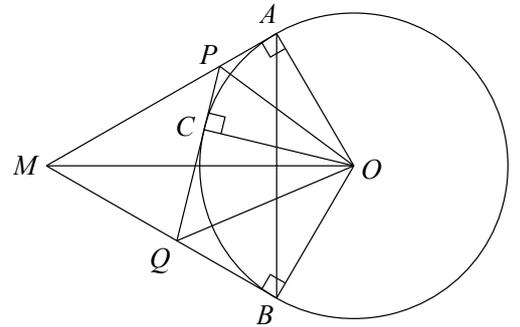
Chỉ ra $\widehat{OKQ'} = \widehat{DOK} + \widehat{ODK}$ (góc ngoài tam giác) $= \widehat{DOK} + 90^\circ = \widehat{DOK} + \widehat{KOM} = \widehat{DOM}$
 $\Rightarrow \triangle OKQ' \sim \triangle MOD$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \widehat{KOQ'} = \widehat{OMD} \Rightarrow \widehat{KOQ'} + \widehat{Q'OM} = \widehat{OMD} + \widehat{Q'OM} = 90^\circ$
 $\Rightarrow Q$ trùng $Q' \Rightarrow K$ là trung điểm của DQ

Bài 5: Cho đường tròn $(O; 3\text{ cm})$ và điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMB} = 60^\circ$.

- $\triangle AMB$ là tam giác gì?
- Qua điểm C trên cung nhỏ AB , kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB lần lượt tại P và Q .
Tính \widehat{POQ} .
- Tính chu vi $\triangle MPQ$.

Bài làm:

- Chỉ ra $MA = MB \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M
Lại có $\widehat{AMB} = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMB$ đều.
- Chỉ ra $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AOM} = 120^\circ$.
Chỉ ra OP là phân giác \widehat{AOC} và OQ là phân giác \widehat{COB}
 $\Rightarrow \widehat{POQ} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ$
- Chỉ ra $PC = PA, QC = QB$. Ta có $MA = AO \cdot \tan \widehat{AOM} = 3 \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}\text{ cm}$
Chu vi $\triangle MPQ$ bằng $MP + MQ + PQ = MP + MQ + (PC + QC) = MA + MB = 2MA = 6\sqrt{3}\text{ cm}$

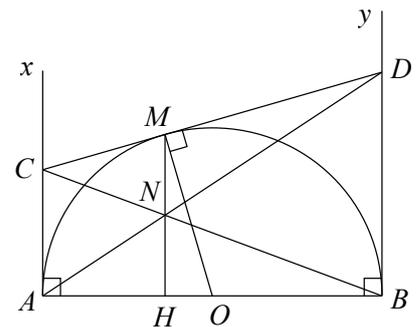


Bài 6: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , về cùng một phía vẽ các tiếp tuyến Ax, By . Qua điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D . Gọi N là giao điểm của AD và BC , H là giao điểm của MN và AB .

- Chứng minh $MN \perp AB$.
- Chứng minh $MN = NH$.

Bài làm:

- Chỉ ra $CA = AM, DM = DB$
Vì $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{CA}{BD} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MN \parallel BD$
Suy ra $MN \perp AB$.
- Chỉ ra $\frac{MN}{BD} = \frac{CN}{CB}$ và $\frac{NH}{BD} = \frac{AN}{AD}$, mà $\frac{CN}{CB} = \frac{AN}{AD}$
Suy ra $\frac{MN}{BD} = \frac{NH}{BD} \Rightarrow MN = NH$.

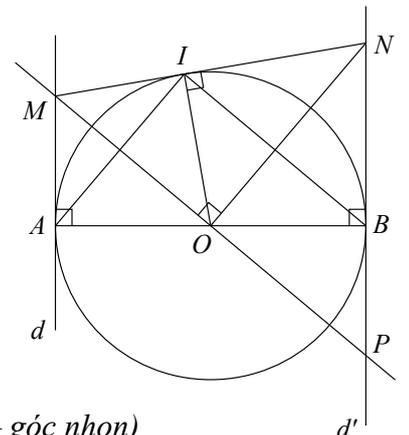


Bài 7: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến (d) và (d') với đường tròn (O) . Một đường thẳng đi qua O cắt (d) ở M và cắt (d') ở P . Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với MP và cắt (d') tại N . Kẻ $OI \perp MN$ tại I .

- Chứng minh $OM = OP$ và $\triangle NMP$ cân.
- Chứng minh $OI = R$ và MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Tính \widehat{AIB} .
- Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $AMNB$ nhỏ nhất.

Bài làm:

- Chứng minh $\triangle OAM = \triangle OBP$ ($g - c - g$) $\Rightarrow OM = OP$
 $\triangle NMP$ có NO vừa là đường cao vừa là trung tuyến
Nên $\triangle NMP$ cân tại N
- Chỉ ra NO là tia phân giác $\widehat{MNP} \Rightarrow \triangle ONI = \triangle ONB$ (*cạnh huyền - góc nhọn*)
 $\Rightarrow OI = OB = R$ khi đó MN là tiếp tuyến của đường tròn (O)



- c) Chỉ ra $\triangle AIB$ vuông tại $I \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$
d) Chỉ ra $AMNB$ là hình thang nên có diện tích là

$$S = \frac{1}{2}(AM + BN) \cdot AB = \frac{(MI + IN) \cdot AB}{2} = \frac{MN \cdot 2R}{2} = R \cdot MN$$

Để S nhỏ nhất thì MN nhỏ nhất hay $MN \perp AM \Rightarrow MN = AB$. Khi đó $AMNB$ là hình chữ nhật
Lại có $AM + BN = MN = AB = 2R \Rightarrow 2AM = 2R \Rightarrow AM = R$

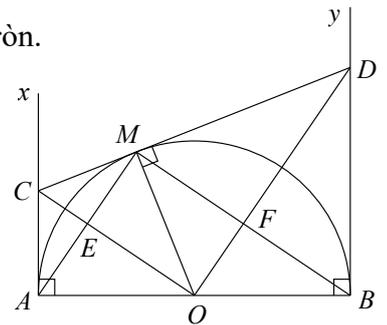
Vậy M nằm trên đường thẳng (d) sao cho $AM = R$.

Bài 8: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By về cùng phía với nửa đường tròn. Từ điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) vẽ tiếp tuyến tại M cắt Ax và By lần lượt tại C và D . Gọi E là giao điểm của CO và AM , F là giao điểm của DO và BM .

- a) Chứng minh A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh $AC + BD = CD$ và tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.
c) Chứng minh $AC \cdot BD$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

Bài làm:

- a) Chỉ ra A, C, M, O cùng thuộc đường tròn tâm là trung điểm của CO
b) Chỉ ra $CA = CM, DM = DB$
Khi đó $CD = CM + DM = AC + BD$
Chỉ ra $OC \perp AM, OD \perp BM$ và $AM \perp BM$
Nên tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.



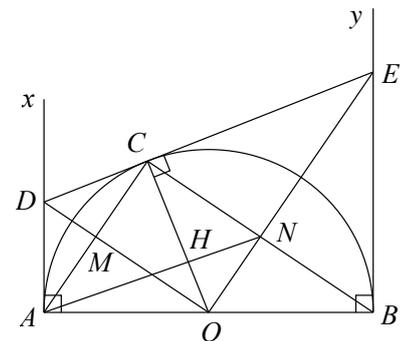
- c) Chỉ ra $\triangle OMC \sim \triangle OMD$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{OM}{DM} = \frac{CM}{OM} \Rightarrow OM^2 = DM \cdot CM = DB \cdot AC = R^2$

Bài 9: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Lấy điểm C tùy ý trên nửa đường tròn. Về cùng một phía với AB vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với đường tròn. Vẽ tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt Ax và By lần lượt tại D và E .

- a) Chứng minh $AD + BE = DE$
b) AC cắt DO tại M, BC cắt OE tại N . Tứ giác $CMON$ là hình gì? Vì sao?
c) Chứng minh $MO \cdot DM + ON \cdot NE$ không đổi.
d) AN cắt OC tại H . Khi C di chuyển trên nửa đường tròn $(O; R)$ thì H di chuyển trên đường nào? Vì sao?

Bài làm:

- a) Chỉ ra $DA = DC, EC = EB$
Suy ra $DE = DC + CE = AD + BE$
b) Chỉ ra $OD \perp AC, OE \perp BC, AC \perp BC$
Suy ra $CMON$ là hình chữ nhật.
c) Chỉ ra $MO \cdot DM = CM^2$ và $ON \cdot NE = CN^2$
Suy ra $MO \cdot DM + ON \cdot NE = CM^2 + CN^2 = MN^2 = CO^2 = R^2$
d) Chỉ ra $\triangle ABC$ có H là trọng tâm nên $OH = \frac{1}{3}OC = \frac{R}{3}$



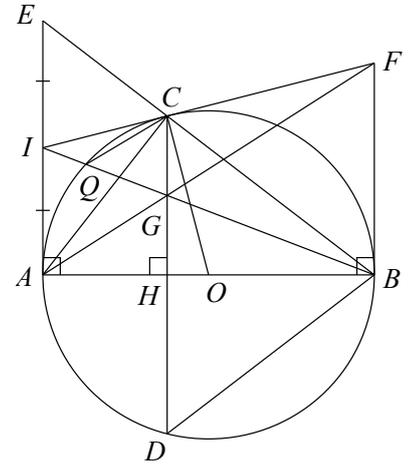
Như vậy H luôn cách O một khoảng bằng $\frac{R}{3}$. Vậy khi C di chuyển trên nửa đường tròn $(O; R)$ thì H di chuyển trên nửa đường tròn $\left(O; \frac{R}{3}\right)$.

Bài 10: Cho đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ đường kính AB . Lấy điểm H thuộc OA sao cho $OH = 1\text{ cm}$. Kẻ dây cung DC vuông góc với AB tại H .

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại A và tính AC .
- Tiếp tuyến tại A của đường (O) cắt BC tại E . Chứng minh $\triangle CBD$ cân và $\frac{EC}{DH} = \frac{EA}{DB}$
- Gọi I là trung điểm của EA , IB cắt (O) tại Q . Chứng minh CI là tiếp tuyến của (O)
- Tiếp tuyến tại B của (O) cắt IC tại F . Chứng minh ba đường thẳng IB , HC và AF đồng quy.

Bài làm:

- Chỉ ra $\triangle ABC$ có CO là trung tuyến mà $CO = \frac{AB}{2}$
Nên $\triangle ABC$ vuông tại C .
Chỉ ra $\triangle AHC \sim \triangle ACB$ ($g-g$) $\Rightarrow AC^2 = AH \cdot AB = 3.8$
 $\Rightarrow AC = \sqrt{24}\text{ cm}$.
- Chỉ ra OH là trung trực của $DC \Rightarrow BA$ là trung trực của CD
 $\Rightarrow BC = BD$ nên $\triangle BCD$ cân tại B . Chỉ ra $\widehat{HBD} = \widehat{HBC} = \widehat{EAC}$
 $\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle BHD$ ($g-g$) $\Rightarrow \frac{CE}{HD} = \frac{EA}{BD}$.
- Chỉ ra $\triangle CAE$ vuông tại C có CI là trung tuyến nên $CI = AI$
 $\Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của AC
Chỉ ra $\triangle IAO = \triangle ICO$ ($c-c-c$) $\Rightarrow \widehat{ICO} = \widehat{IAO} = 90^\circ$, hay IC là tiếp tuyến (O) .
- Gọi G là giao của IB với HC . Chỉ ra $CF = BF$
Chỉ ra $CG \parallel BF \Rightarrow \frac{IC}{CF} = \frac{IG}{GB} \Rightarrow \frac{IA}{BF} = \frac{IG}{GB}$ và $AI \parallel BF \Rightarrow \widehat{AIG} = \widehat{GBF}$
Suy ra $\triangle AIG \sim \triangle BGF$ ($c-g-c$) $\Rightarrow \widehat{IGA} = \widehat{BGF} \Rightarrow A, G, F$ thẳng hàng hay IB, HC, AF đồng quy.

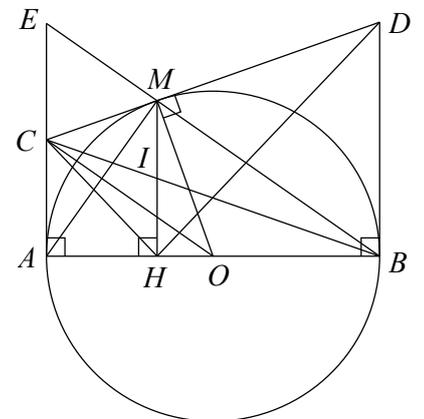


Bài 11: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M ($MA < MB$). Tiếp tuyến tại M cắt hai tiếp tuyến tại A và B lần lượt là C và D .

- Chứng minh $CD = AC + BD$
- Vẽ đường thẳng BM cắt tia AC tại E và vẽ $MH \perp AB$. Chứng minh $OC \parallel MB$ và $ME \cdot MB = AH \cdot AB$.
- Chứng minh HM là tia phân giác của \widehat{CHD} .

Bài làm:

- Chỉ ra $CA = CM, DM = DB$
Suy ra $CD = CM + MD = AC + DB$
- Chỉ ra $OC \perp AM$ và $BM \perp AM \Rightarrow OC \parallel BE$
Chỉ ra $ME \cdot MB = AM^2$ và $AH \cdot AB = AM^2$
Suy ra $ME \cdot MB = AH \cdot AB$.
- Chỉ ra $AE \parallel BD \Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{ME}{MB} = \frac{CE}{BD}$, mà $MC = CA, MD = BD$
Nên $\frac{CA}{BD} = \frac{ME}{MB}$. Chỉ ra $\frac{ME}{MB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{CA}{BD} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \triangle CAH \sim \triangle DBH$ ($c-g-c$) $\Rightarrow \frac{CA}{BD} = \frac{CH}{HD}$
Mà $\frac{CA}{BD} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow \frac{CH}{HD} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow HM$ là phân giác \widehat{CHD} .



Bài 12: Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến ME và MF đến đường tròn (E, F là các tiếp điểm).

- Chứng minh M, E, O, F cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ đường kính ED của $(O; R)$. Hạ $FK \perp ED$. Gọi P là giao điểm của MD và FK . Chứng minh P là trung điểm của FK .

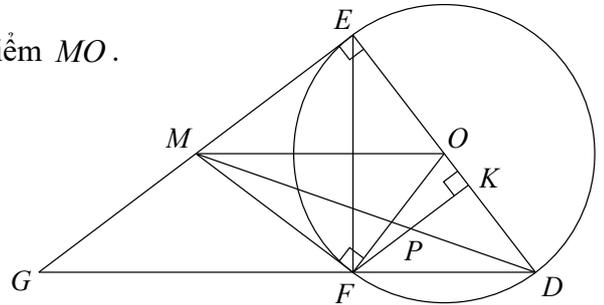
Bài làm:

- Chỉ ra $MEOF$ cùng thuộc đường tròn tâm là trung điểm MO .
- Gọi ME và DF cắt nhau tại G .

$$\text{Chỉ ra } \begin{cases} EF \perp MO \\ EF \perp GD \end{cases} \Rightarrow MO \parallel GD \Rightarrow ME = MG$$

$$\text{Chỉ ra } FK \parallel GE \Rightarrow \frac{PK}{ME} = \frac{DP}{DM} = \frac{PF}{MG} \Rightarrow PK = PF$$

Vì $ME = MG$.



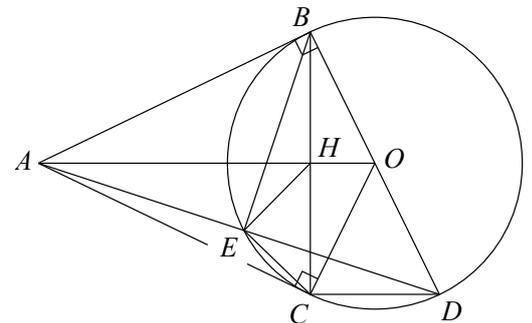
Bài 13: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

- Chứng minh A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh OA là đường trung trực của BC .
- Lấy D đối xứng với B qua O . Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) (E không trùng với D). Chứng minh $DE \cdot BA = BD \cdot BE$

Bài làm:

- Chỉ ra A, B, O, C cùng thuộc đường tròn tâm là trung điểm AO .
- Chỉ ra $AB = AC, OB = OC = R$ nên AO là trung trực của BC
- Chỉ ra BD là đường kính $\Rightarrow BE \perp AD$
Chứng minh $\triangle DEB \sim \triangle BEA$ ($g - g$)

$$\Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow DE \cdot AB = BD \cdot BE$$



Bài 14: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm)

- Chứng minh A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn và $BC \perp OA$ tại H .
- Kẻ đường kính BD của (O) . Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB , cắt OA tại E . Chứng minh $CD \parallel OA$ và tứ giác $OBEC$ là hình thoi.

Bài làm:

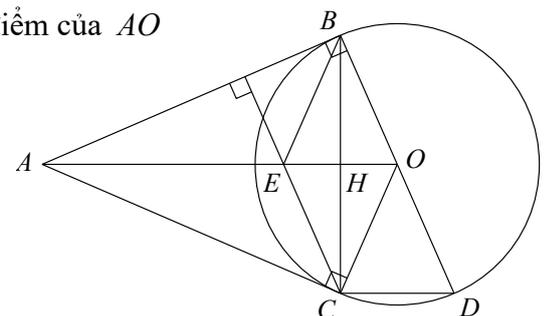
- Chỉ ra A, B, O, C cùng thuộc đường tròn tâm là trung điểm của AO
- Chỉ ra $OA \perp BC$ và $CD \perp BC$
Suy ra $OA \parallel CD$.

Chỉ ra $\triangle ABC$ có E là trực tâm $\Rightarrow BE \perp AC$

Chỉ ra $OC \perp AC \Rightarrow BE \parallel OC$

Khi đó $OBEC$ là hình bình hành lại có $OB = OC$

Nên là hình thoi.

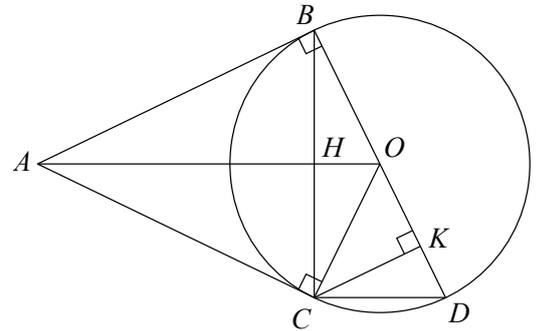


Bài 15: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) .

- Chứng minh $OA \perp BC$ tại H và bốn điểm A, B, C, O cùng nằm trên một đường tròn.
- Vẽ đường kính BD của (O) và $CK \perp BD$ tại K . Chứng minh $AC \cdot CD = CK \cdot AO$

Bài làm:

- Chỉ ra AO là trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC$
Chỉ ra A, B, C, O cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của AO .
- Chứng minh $\triangle ACO \sim \triangle CKD$ ($g - g$)
Vì có $\widehat{AOC} = \widehat{CDK}$ (cùng bằng \widehat{AOB})
 $\Rightarrow \frac{AC}{CK} = \frac{AO}{CD} \Rightarrow AC \cdot CD = CK \cdot AO$

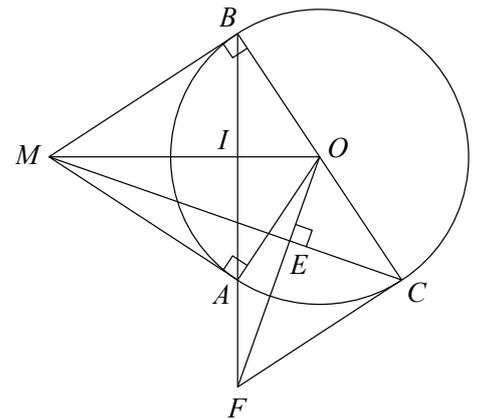


Bài 16: Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OM và AB . Kẻ đường kính BC của đường tròn (O) .

- Chứng minh A, B, O, M cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OI \cdot OM = OA^2$

Bài làm:

- Chỉ ra M, B, O, A cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm MO
- Chỉ ra $OM \perp AB \Rightarrow \triangle OIA \sim \triangle OAM$ ($g - g$)
 $\Rightarrow OA^2 = OI \cdot OM$



Bài 17: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO với AB .

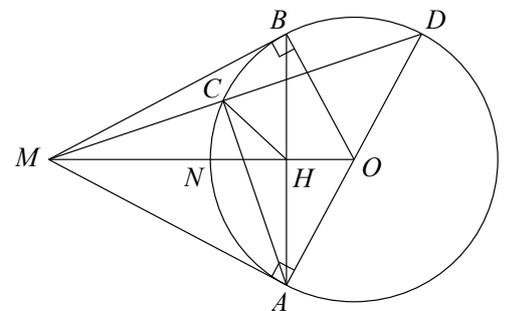
- Chứng minh M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $MO \perp AB$ tại H .
- Nếu $OM = 2R$. Tính MA theo R và số đo \widehat{AMB} .
- Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) , MD cắt (O) tại điểm thứ hai là C . Chứng minh rằng $\widehat{MHC} = \widehat{ADC}$.

Bài làm:

- Chỉ ra M, A, O, B cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của MO .
- Chỉ ra $MA = MB, OA = OB \Rightarrow AO$ là trung trực của $AB \Rightarrow MO \perp AB$ tại H .
- Gọi MO cắt (O) tại N . Vì $OM = 2R$ mà $ON = R \Rightarrow MN = R$

Chỉ ra $\triangle BON$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{AOM} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 30^\circ$.

$$AM = MO \cdot \sin \widehat{MOA} = 2R \cdot \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$



d) Chỉ ra $\triangle MHA \sim \triangle MAO$ (g - g) $\Rightarrow AM^2 = MH \cdot MO$

Chỉ ra $\triangle MCA \sim \triangle MAD$ (g - g) $\Rightarrow AM^2 = MC \cdot MD$. Từ đó suy ra

$MH \cdot MO = MC \cdot MD \Rightarrow \triangle MHC \sim \triangle MDO$ (c - g - c) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$.

Bài 18: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ sao cho $OM = 2R$. Từ điểm M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) . Gọi H là giao điểm của AB và OM .

a) Chứng minh 4 điểm A, O, B, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính tỉ số $\frac{OH}{OM}$.

Bài làm:

a) Chỉ ra A, O, B, M cùng thuộc đường tròn tâm là trung điểm của OM .

b) Chỉ ra $\triangle OHA \sim \triangle OAM$ (g - g) $\Rightarrow OA^2 = OH \cdot OM$

$$\Rightarrow \frac{OA^2}{OM^2} = \frac{OH}{OM} = \frac{R^2}{4R^2} = \frac{1}{4}.$$

