

Câu 1 (4,5 điểm): Thực hiện phép tính.

a) $A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - [635 - 2^3 \cdot (7^8 : 7^6 + 2023^0)]\}$

b) $B = \frac{-14}{27} : \frac{7}{3} + \frac{-14}{27} : \frac{2}{3} - 1\frac{5}{7}$

c) $C = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{9999}\right)$

Câu 2 (4,5 điểm):

1) Tìm tất cả các cặp chữ số (x,y) sao cho $\overline{18x2y}$ chia hết cho 45

2) Tìm x biết:

a) $x : \frac{1}{2} + x : \frac{1}{4} + x : \frac{1}{8} + \dots + x : \frac{1}{512} = 511$

b) $x : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{9900}\right) = 100$

Câu 3 (4,0 điểm):

1) Cho $M = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023}$. Chứng minh rằng $4M + 1$ là số chính phương.

2) Tìm số nguyên tố x, y thỏa mãn $x^3 + 335 = y^3$

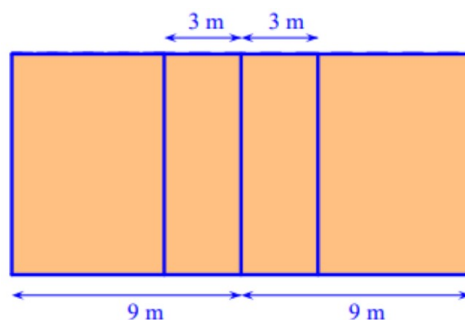
3) So sánh P và Q biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Câu 4 (4,0 điểm):

Sân bóng chuyền có dạng hình chữ nhật có chiều dài 18m, chiều rộng 9m. Để chống mài mòn và giảm chấn thương, người ta phủ lên mặt sân một lớp thảm PVC có giá tiền một m^2 là 400000 đồng.

a) Tính số tiền mua thảm PVC phủ lên mặt sân.

b) Sau khi làm xong lớp nền, đội thi công kẻ vạch bằng sơn để hoàn thiện sân (là các đường kẻ như hình vẽ), độ rộng của các vạch sơn là 5cm. Biết 1 lít sơn kẻ được $5 m^2$. Hỏi để kẻ vạch cho sân bóng chuyền thì cần bao nhiêu lít sơn?



Câu 5 (3,0 điểm): Cho $M = \frac{5n+2}{2n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

a) Chứng tỏ rằng M là phân số tối giản với mọi số nguyên n.

b) Tìm số nguyên n để A có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó của A.

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

I. HƯỚNG DẪN CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ là đưa ra các bước giải và khung điểm bắt buộc cho từng bước. Bài làm phải có lập luận chặt chẽ và biến đổi hợp lý mới cho điểm, những cách làm khác đúng vẫn cho điểm tối đa. Trong bài làm các bước có liên quan với nhau, bước trước sai mà bước sau đúng thì không cho điểm.

- Điểm thành phần cho chi tiết tới 0,25 điểm. Điểm toàn bài là tổng các điểm thành phần không làm tròn.

II. HƯỚNG DẪN CỤ THỂ:

Câu	ý	Đáp án	Điểm
1 (4,5 đ)	a (1,5 đ)	$A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - [635 - 2^3 \cdot (7^8 : 7^6 + 2023^0)]\}$	
		$A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - [635 - 2^3 \cdot (7^2 + 1)]\}$	
		$A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - [635 - 2^3 \cdot (49 + 1)]\}$	0,25
		$A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - [635 - 2^3 \cdot 50]\}$	0,25
		$A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - [635 - 8 \cdot 50]\}$	0,25
		$A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - [635 - 400]\}$	0,25
		$A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - 235\}$	
		$A = (-2)^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot 165$	0,25
		$A = (-10)^2 - 3 \cdot 165$	
		$A = -1000 - 495 = -1495$	0,25
	b (1,5 đ)	$B = \frac{-14}{27} : \frac{7}{3} + \frac{-14}{27} : \frac{2}{3} - 1\frac{5}{7}$	
		$B = \frac{-14}{27} \cdot \frac{3}{7} + \frac{-14}{27} \cdot \frac{3}{2} - 1\frac{5}{7}$	0,5
		$B = \frac{-2}{9} + \frac{-7}{9} - 1\frac{5}{7}$	0,25
		$B = \frac{-9}{9} - 1\frac{5}{7}$	0,25
		$B = (-1) - 1\frac{5}{7}$	0,25
		$B = -2\frac{5}{7}$	0,25

	3 (1,5 đ)	$C = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{9999}\right)$	
		$C = \left(\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{8}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{15}{15} + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(\frac{9999}{9999} + \frac{1}{9999}\right)$	0,25
		$C = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdots \frac{10000}{9999}$	0,25
		$C = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdots \frac{100.100}{99.101}$	0,5
		$C = \frac{2.3.4 \cdots 100}{1.2.3 \cdots 99} \cdot \frac{2.3.4 \cdots 100}{3.4.5 \cdots 101}$	0,25
		$C = 100 \cdot \frac{2}{101} = \frac{200}{101}$	0,25
2 (4,5 đ)	1 (1,5 đ)	<i>Tìm tất cả các cặp chữ số (x,y) sao cho $\overline{18x2y}$ chia hết cho 45</i>	
		Có $45 = 5.9$ Mà $U_{\text{CLN}}(5, 9) = 1$ Do đó để $\overline{18x2y}$ chia hết cho 45 thì $\overline{18x2y}$ chia hết cho cả 5 và 9	0,25
		Để $\overline{18x2y} : 5$ thì $\overline{18x2y}$ có tận cùng là 0 hoặc 5 Suy ra $y \in \{0; 5\}$	0,25
		+) Nếu $y = 0$ ta được số có dạng $\overline{18x20}$ Vì $\overline{18x20} : 9$ nên $(1+8+x+2+0) : 9$ hay $(9+x+2) : 9$ suy ra $(x+2) : 9$ Mà x là chữ số nên $x = 7$	0,25
		+) Nếu $y = 5$ ta được số có dạng $\overline{18x25}$ Vì $\overline{18x25} : 9$ nên $(1+8+x+2+5) : 9$ hay $(9+x+7) : 9$ suy ra $(x+7) : 9$ Mà x là chữ số nên $x = 2$	0,25
		Vậy tìm được các cặp chữ số (x, y) thỏa mãn là (7; 0), (2; 5)	0,25
	2a (1,5 đ)	$x : \frac{1}{2} + x : \frac{1}{4} + x : \frac{1}{8} + \dots + x : \frac{1}{512} = 511$	
		$x.2 + x.4 + x.8 + \dots + x.512 = 511$ $x.(2+4+8+\dots+512) = 511$	0,25
		Đặt $D = 2+4+8+\dots+512$ khi đó ta được $x.D = 511$ (1)	

		$2D = 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$	0,25
		$2D - D = (4 + 8 + 16 + \dots + 1024) - (2 + 4 + 8 + \dots + 512)$ $D = 1022$	0,25
		Thay $D = 1022$ vào (1) ta được $x \cdot 1022 = 511$ $x = 511 : 1022$	0,25
		$x = \frac{1}{2}$	0,25
		Vậy $x = \frac{1}{2}$	0,25
	2b (1,5 đ)	$x : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{9900} \right) = 100$	
		$x : \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) = 100$	0,25
		$x : \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 100$ $x : \left(1 - \frac{1}{100} \right) = 100$	0,25
		$x : \left(\frac{100}{100} - \frac{1}{100} \right) = 100$ $x : \frac{99}{100} = 100$	0,25
		$x = 100 \cdot \frac{99}{100}$	0,25
		$x = 99$	0,25
		Vậy $x = 99$	0,25
	3 (4,0 đ)	Cho $M = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023}$. Chứng minh rằng $4M + 1$ là số chính phương.	
		$M = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023}$ $5M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2024}$	0,25
		$5M - M = (5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2024}) - (1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023})$ $4M = 5^{2024} - 1$	0,25 0,25
		Suy ra $4M + 1 = 5^{2024} = (5^{1012})^2$	0,25
		Vì 5^{1012} là số tự nhiên nên $(5^{1012})^2$ là số chính phương	0,25

		Do đó $4M + 1$ là số chính phương	0,25
	2 (1,25 đ)	<i>Tìm các số nguyên tố x, y thoả mãn $x^3 + 335 = y^3$</i>	
		Vì x là số nguyên tố nên $x \geq 2$ suy ra $x^3 + 335 > 335 > 3^3$	0,25
		Suy ra $y > 3$ mà y là số nguyên tố nên y là số nguyên tố lẻ Suy ra y^3 là số lẻ	0,25
		do đó $x^3 + 335$ là số lẻ Mà 335 là số lẻ nên x^3 là số chẵn suy ra x là số chẵn Lại có x là số nguyên tố nên $x = 2$	0,25
		Khi đó ta có $2^3 + 335 = y^3$ suy ra $y^3 = 343$ suy ra $y = 7$ (Thoả mãn)	0,25
		Vậy $x = 2; y = 7$	0,25
	3 (1,25 đ)	<i>So sánh P và Q biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$</i>	
		+) Có $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ $= \frac{2011-1}{2011} + \frac{2012-1}{2012} + \frac{2010+2}{2010}$ $= 1 - \frac{1}{2011} + 1 - \frac{1}{2012} + 1 + \frac{2}{2010}$ $= 3 + \left(\frac{2}{2010} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} \right)$	0,25
		Vì $\frac{1}{2010} > \frac{1}{2011}$ và $\frac{1}{2010} > \frac{1}{2012}$ nên $\frac{2}{2010} > \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}$ hay $\frac{2}{2010} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} > 0$ suy ra $3 + \left(\frac{2}{2010} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} \right) > 3$ Do đó $P > 3$ (1)	0,25
		+) Có $Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$ $Q = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{17} \right)$ $Q < \frac{3}{3} + \frac{6}{6} + \frac{6}{11} = 2\frac{6}{11} < 3$ Hay $Q < 3$ (2)	0,25
			0,25

		Từ (1) và (2) suy ra $P > Q$	0,25
4 (4,0 đ)		Sân bóng chuyền có dạng hình chữ nhật có chiều dài 18m, chiều dài gấp đôi rộng. Để chống mài mòn và giảm chấn thương, người ta phủ lên mặt sân một lớp thảm PVC có giá tiền một m^2 là 400000 đồng. a) Tính số tiền mua thảm PVC phủ lên mặt sân. b) Sau khi làm xong lớp nền, đội thi công kẻ vạch bằng sơn để hoàn thiện sân (là các đường kẻ như hình vẽ), độ rộng của các vạch sơn là 5cm. Biết 1 lít sơn kẻ được $5 m^2$. Hỏi để kẻ vạch cho sân bóng chuyền thì cần bao nhiêu lít sơn?	
	a (1,75 đ)	Chiều rộng sân bóng chuyền là: $18 : 2 = 9$ (m)	0,5
		Diện tích sân bóng chuyền là: $18 \cdot 9 = 162$ (m^2)	0,5
		Số tiền mua thảm PVC phủ lên mặt sân là: $162 \cdot 400\,000 = 64\,800\,000$ (đồng)	0,5
		Vậy số tiền mua thảm PVC là 64 800 000 đồng	0,25
	b (2,25 đ)	Đổi $5\text{ cm} = 0,05\text{ m}$	0,25
		Diện tích phần vạch sơn bao quanh sân là: $0,05 \cdot (18 + 9) \cdot 2 - 0,05 \cdot 0,05 \cdot 4 = 2,69$ (m^2)	0,5
		Diện tích 3 vạch sơn giữa sân là: $3 \cdot 0,05 \cdot (9 - 2 \cdot 0,05) = 1,335$ (m^2)	0,5
		Diện tích phần vạch sơn cho cả sân bóng là: $2,69 + 1,335 = 4,025$ (m^2)	0,5
		Số lít sơn cần dùng là: $1 : 5 \cdot 4,025 = 0,805$ (lít)	0,25
		Vậy số lít sơn cần dùng là 0,805 lít	0,25
5 (3,0 đ)		Cho $M = \frac{5n+2}{2n+1}$ (với $n \in \mathbb{Z}$) a) Chứng tỏ rằng M là phân số tối giản với mọi số nguyên n. b) Tìm số nguyên n để A có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó của A.	
	a (1,5 đ)	Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên $5n+2 \in \mathbb{Z}$; $2n+1 \in \mathbb{Z}$ và $2n+1 \neq 0$ Do đó M là phân số (1)	0,25
		Gọi d là ước chung của $5n+2$ và $2n+7$ ($d \in \mathbb{Z}$) Suy ra $\begin{cases} (5n+2):d \\ (2n+1):d \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} 2 \cdot (5n+2):d \\ 5 \cdot (2n+1):d \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} (10n+4):d \\ (10n+5):d \end{cases}$	0,25
		Suy ra $(10n+5) - (10n+4):d$ suy ra $1:d$	

		Suy ra $d \in \{-1; 1\}$	0,25
		Do đó $5n+2$ và $2n+7$ chỉ có ước chung là 1 và -1 (2)	0,25
		Từ (1) và (2) suy ra M là phân số tối giản	0,25
		Vậy với mọi số nguyên n thì M là phân số tối giản	0,25
	b (1,5 đ)	Có $M = \frac{5n+2}{2n+1}$ suy ra $2M = \frac{10n+4}{2n+1} = \frac{5 \cdot (2n+1) - 1}{2n+1} = 5 - \frac{1}{2n+1}$	0,25
		Để M có giá trị lớn nhất thì 2M cũng có giá trị lớn nhất Suy ra $5 - \frac{1}{2n+1}$ có giá trị lớn nhất	0,25
		Suy ra $\frac{1}{2n+1}$ có giá trị nhỏ nhất	
		Suy ra $2n+1$ là số âm lớn nhất (1)	0,25
		Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên $2n+1 \in \mathbb{Z}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $2n+1$ nguyên âm lớn nhất Suy ra $2n+1 = -1$ suy ra $n = -1$	0,25
		Khi đó $M = \frac{5 \cdot (-1) + 2}{2 \cdot (-1) + 1} = 3$	0,25
		Vậy với $n = -1$ thì M có giá trị lớn nhất là 3	0,25