PHƯỜNG NGHĨA ĐÔ

*Đề thi gồm **01 trang***

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

NĂM HỌC 2025 – 2026

Môn thi: TOÁN

*Thời gian làm bài **150 phút** (không kể thời gian giao đề)*

Bài 1.

1. Cho biểu thức $A=\frac{2}{x}+\frac{x^2-1}{x^4-1}-\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}$ với $x\neq 0; x\neq \pm 1$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Chứng minh: Không tồn tại số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

2. Tìm tất cả các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=10(x-y) \end{cases}$.

Bài 2.

1. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất để tổng hai chữ số của số được chọn bằng với chữ số tận cùng của số 2026^{2025}.

2. Với a,b,c là các số nguyên, c là số chẵn thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$(ab-1)^2=c\left(a^2+b^2\right)+ab+1$ và $a^2+b^2=c^2+ab$. Chứng minh: $c+1$ là số chính phương.

Bài 3.

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn: $x^2+xy-2y^2+x-y+3=0$.

2. Với các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^3+b^3+8}+\frac{1}{b^3+c^3+8}+\frac{1}{c^3+a^3+8}.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, không cân có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H; các đường thẳng AH, BC cắt EF lần lượt tại G và S; M là trung điểm của BC; đường thẳng MH cắt SA tại L; SH cắt AM tại K.

1. Chứng minh: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$ và $\frac{EF}{BC}=\cos A$.

2. Chứng minh: $\widehat{AFE}=\widehat{BFD}$ và $AG.HD=AD.GH$.

3. Chứng minh: L,K,G thẳng hàng.

Bài 5. Hình vuông 15×15 được chia thành x hình vuông 2×2 và y hình vuông 3×3 với x,y là các số tự nhiên.

1. Chứng minh: $y=1$ không thỏa mãn đề bài.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của y.

---------- **HẾT** ---------

2 Lời giải

Bài 1:

1) Cho biểu thức $A = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2-1}{x^4-1} - \dfrac{2}{x(x^2+1)}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 1$.

(a) Rút gọn biểu thức A.

(b) Chứng minh: Không tồn tại số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

2) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=10(x-y) \end{cases}$.

Lời giải:

1) (a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{x}{x(x^2+1)} - \frac{2}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{2x^2+2+x-2}{x(x^2+1)} = \frac{2x^2+x}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{x(2x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{2x+1}{x^2+1} \end{aligned}$$

(b) Tồn tại giá trị nguyên $x = 2$ để biểu thức A nhận giá trị nguyên. Do đó, mệnh đề *"Chứng minh không tồn tại số nguyên x..."* của đề bài là **không chính xác**.

2) Từ phương trình thứ nhất, ta có $5 = x^2 + y^2$. Thay thế số 5 vào phương trình thứ hai, ta được:

$$x^3 + 2y^3 = 2(x^2+y^2)(x-y)$$

Khai triển vế phải và rút gọn:

$$\begin{aligned} x^3+2y^3 &= 2(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) \\ x^3+2y^3 &= 2x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 2y^3 \\ 0 &= x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 4y^3 \\ 0 &= x^2(x-2y) + 2y^2(x-2y) \\ 0 &= (x-2y)(x^2+2y^2) \end{aligned}$$

Ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $x^2+2y^2=0$ Vì $x^2 \geq 0$ và $2y^2 \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, nên đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = 0$ và $y = 0$. Thay $(0; 0)$ vào phương trình thứ nhất: $0^2 + 0^2 = 0 \neq 5$. Vậy trường hợp này vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$. Thay $x = 2y$ vào phương trình thứ nhất:

$$\begin{aligned} (2y)^2 + y^2 &= 5 \\ 4y^2 + y^2 &= 5 \\ 5y^2 &= 5 \\ y^2 = 1 &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $y = 1 \implies x = 2$. Ta được nghiệm $(2; 1)$.
- Với $y = -1 \implies x = -2$. Ta được nghiệm $(-2; -1)$.

Hệ phương trình có hai cặp nghiệm thỏa mãn là $(x; y) \in \{(2; 1), (-2; -1)\}$.

Bài 2:

(a) Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất để tổng hai chữ số của số được chọn bằng với chữ số tận cùng của số 2026^{2025}.

(b) Với a, b, c là các số nguyên, c là số chẵn thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $(ab-1)^2 = c(a^2 + b^2) + ab + 1$ và $a^2 + b^2 = c^2 + ab$. Chứng minh rằng $c + 1$ là số chính phương.

Lời giải:

(a) Ta thấy $2026 \equiv 1 \pmod 5$ nên $2026^{2025} \equiv 1 \pmod 5$ nên 2026^{2025} có chữ số tận cùng là 1 hoặc 6. Mà 2026^{2025} là số chẵn nên nó có tận cùng là 6.

Có tất cả 6 số tự nhiên có hai chữ số mà tổng hai chữ số bằng 6 là 15, 24, 33, 42, 51, 60 vì vậy xác suất để số được chọn có tổng hai chữ số của nó bằng chữ số tận cùng của 2026^{2025} là $\dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$.

(b) Từ $a^2 + b^2 = c^2 + ab$ suy ra

$$\begin{aligned}(ab-1)^2 &= c(a^2+b^2) + ab + 1 = c(c^2+ab) + ab + 1\\ &= (c+1)(c^2-c+1) + ab(c+1) = (c+1)(c^2-c+1+ab)\end{aligned}$$

Đặt $d = (c+1; c^2-c+1+ab)$. Khi đó $(ab-1)^2 \,\vdots\, d^2$ dẫn tới $ab - 1 \,\vdots\, d$.

Mặt khác do $c \equiv -1 \pmod d$ nên $0 \equiv c^2 - c + 1 + ab \equiv 1 + 1 + 1 + ab \pmod d$ hay $ab + 3 \,\vdots\, d$.

Từ hai điều trên suy ra $4 \,\vdots\, d$. Mà c chẵn nên $c+1$ lẻ suy ra d lẻ từ đó ta phải có $d = 1$.

Vậy $(c+1; c^2-c+1+ab) = 1$. Mà $(c+1)(c^2-c+1+ab) = (ab-1)^2$ nên $c+1$ là số chính phương.

Bài 3:

(a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 + xy - 2y^2 + x - y + 3 = 0$.

(b) Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^3+b^3+8} + \frac{1}{b^3+c^3+8} + \frac{1}{c^3+a^3+8}$$

Lời giải:

(a) Ta có biến đổi

$$\begin{aligned}x^2 + xy - 2y^2 + x - y + 3 &= 0\\ (x-y)(x+2y) + x - y + 3 &= 0\\ (x-y)(x+2y+1) &= -3\end{aligned}$$

Do x, y là các số nguyên nên xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y+1=-3 \end{cases} \implies y=-\dfrac{5}{3}$ (KTM).

TH2: $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+2y+1=3 \end{cases} \implies x=0,\ y=1.$

TH3: $\begin{cases} x-y=3 \\ x+2y+1=-1 \end{cases} \implies y=-\dfrac{5}{3}$ (KTM).

TH4: $\begin{cases} x-y=-3 \\ x+2y+1=1 \end{cases} \implies x=-2,\ y=1.$

Vậy $(x;y)=(0;1),\ (-2;1)$ là hai cặp nghiệm nguyên duy nhất của phương trình.

(b) Bổ đề: Với mọi số thực dương x, y, ta luôn có:

$$x^3+y^3 \geq xy(x+y)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} x^3+y^3-xy(x+y) &= (x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y) \\ &= (x+y)(x^2-2xy+y^2) \\ &= (x+y)(x-y)^2 \geq 0 \quad \text{(Luôn đúng vì } x,y>0) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Áp dụng bổ đề trên ta có

$$a^3+b^3+8 \geq ab(a+b)+8$$

$8=abc$ vào vế phải:

$$a^3+b^3+8 \geq ab(a+b)+abc = ab(a+b+c)$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^3+b^3+8} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^3+c^3+8} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+8} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$P \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}$$

$$P \leq \frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$P \leq \frac{1}{a+b+c}\cdot\frac{c+a+b}{abc}$$

$$P \leq \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc}$$

$$P \leq \frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{1}{8}$.

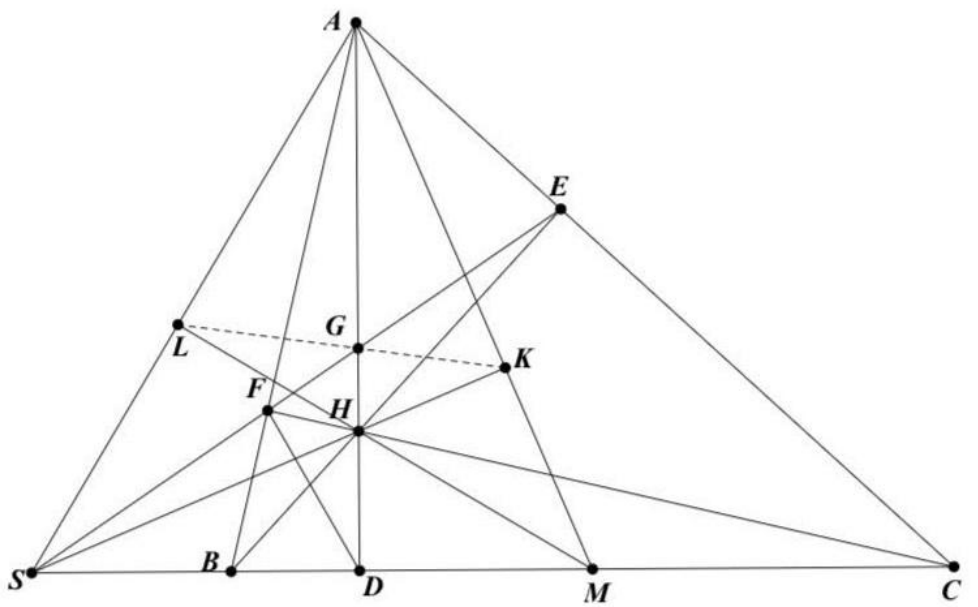
Bài 4: Cho tam giác ABC nhọn, không cân có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, các đường thẳng AH, BC cắt EF lần lượt tại G và S, M là trung điểm của BC, đường thẳng MH cắt SA tại L, SH cắt AM tại K.

(a) Chứng minh $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ và $\dfrac{EF}{BC} = \cos A$.

(b) Chứng minh $\angle AFE = \angle BFD$ và $AG \cdot HD = AD \cdot GH$.

(c) Chứng minh L, K, G thẳng hàng.

Lời giải:



(a) Ta có $\triangle AEB \backsim \triangle AFC$ suy ra $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$ dẫn tới $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$.

Khi đó $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$ suy ra $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AE}{AB} = \cos A$ (do tam giác AEB vuông tại E).

(b) Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AHB với E, F, G thẳng hàng ta có:

$$\frac{GH}{GA} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{EB}{EH} = 1 \implies \frac{GH}{GA} = \frac{FB}{FA} \cdot \frac{EH}{EB}$$

Áp dụng định lí Ceva cho tam giác AHB với BD, HF, AE đồng quy ta có

$$\frac{DH}{DA}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{EB}{EH}=1 \implies \frac{DH}{DA}=\frac{FB}{FA}\cdot\frac{EH}{EB}$$

Từ hai điều trên suy ra $\dfrac{GH}{GA}=\dfrac{DH}{DA}\implies AG\cdot HD=AD\cdot GH$.

(c) Áp dụng định lí Ceva cho tam giác ASH với SD, HL, AK đồng quy ta có:

$$\frac{DH}{DA}\cdot\frac{LA}{LS}\cdot\frac{KS}{KH}=1$$

Mà $\dfrac{GH}{GA}=\dfrac{DH}{DA}$ nên $\dfrac{GH}{GA}\cdot\dfrac{LA}{LS}\cdot\dfrac{KS}{KH}=1$. Áp dụng định lí Menelaus đảo cho tam giác ASH ta suy ra L, G, K thẳng hàng, ta có đpcm.

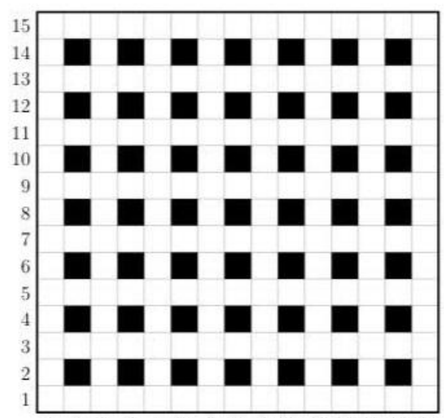
Bài 5: Hình vuông 15×15 được chia thành x hình vuông 2×2 và y hình vuông 3×3 với x,y là các số tự nhiên.

1. Chứng minh: $y=1$ không thỏa mãn đề bài.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của y.

Lời giải:

Gọi x là số hình vuông 2×2 và y là số hình vuông 3×3. Diện tích hình vuông lớn: $15\times 15=225$. Ta có phương trình: $4x+9y=225\quad(1)$.

Bây giờ ta tô màu các ô vuông trong bảng bởi hai màu đen trắng như sau:



- Tổng số ô đen trên bảng là: $7\times 7=49$ ô.
- Một hình vuông 2×2 bất kỳ luôn chứa đúng 1 ô đen.
- Một hình vuông 3×3 bất kỳ chứa ít nhất 1 ô đen.

Khi đó ta phải có $x+y\le 49\quad(2)$.

Từ (1) ta có $x=\dfrac{225-9y}{4}$. Thay vào (2):

$$\frac{225-9y}{4}+y\le 49$$

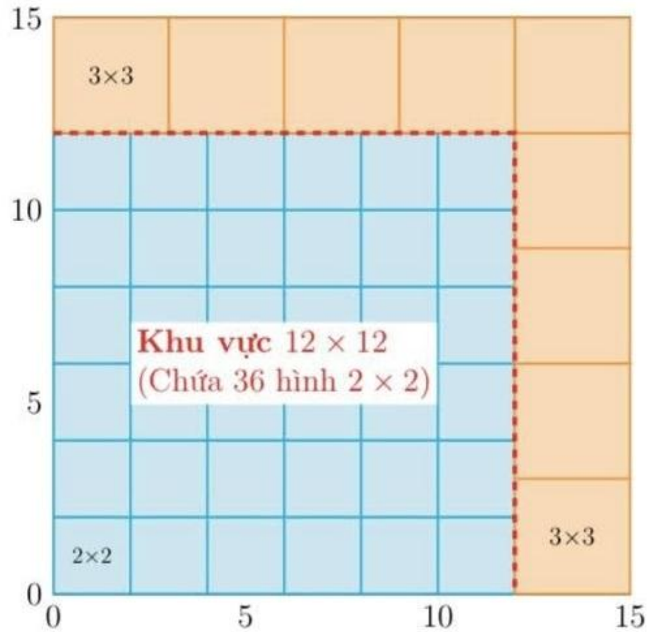
$$\Leftrightarrow 225 - 9y + 4y \leq 196$$

$$\Leftrightarrow 225 - 196 \leq 5y$$

$$\Leftrightarrow 29 \leq 5y \Leftrightarrow y \geq 5.8$$

Mặt khác, từ (1): $4x + 9y = 225$. Khi đó $y \equiv 1 \pmod 4$.

Số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn $y \geq 5.8$ và y chia 4 dư 1 là $y = 9$. Dưới đây là một cách chia khi $y = 9$.



Vậy $y_{\min} = 9$.