

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 120 phút (không tính thời gian giao đề)

Bài I (1.5 điểm)

1) Qua điều tra, một lớp học ở trường THCS P.Hung gồm 40 học sinh thi khảo sát chất lượng môn Toán có kết quả dạng bảng ghép nhóm như sau:

Nhóm	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số học sinh	2	5	12	18	3

Hãy cho biết tần số và tần số tương đối của nhóm [6; 8)?

2) Có 15 quả bi-a giống nhau và ghi số lần lượt từ số 1 đến 15 trong hộp kín. Bạn Kẹo lấy ngẫu nhiên một quả bi-a trong hộp. Xét biến cố M : “Kẹo lấy được quả bi-a trong hộp có ghi là số nguyên tố”. Tính xác suất của biến cố M .

Bài II (1.5 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-6}{1-x}$ (với $x \geq 0$, $x \neq 1$).

1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{4}{\sqrt{x}+1}$.

3) Đặt $H = A:B$. So sánh H và H^2 .

Bài III (2.5 điểm)

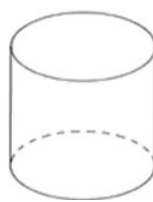
1) Bác Huy sau tết năm 2024 có 250 triệu đồng và bác đầu tư vào hai loại: Thứ nhất gửi ngân hàng với lãi suất 5%/năm, thứ hai mua vàng. Sau một năm bác Huy tính được lãi mua vàng là 7%/năm. Sau tết 2025 là được đúng một năm bác Huy thu tổng lãi hai loại là 15 triệu đồng. Vậy bác Huy đầu tư cho mỗi loại bao nhiêu tiền?

2) Nhà trường THPT Sơn Tây được công nhận là trường THPT chuyên Sơn Tây từ ngày 15/01/2025. Nhà trường nhờ một tổ Công nhân làm Lôgo mới với số lượng 1800 chiếc cho hơn 1760 học sinh trong một số ngày dự định. Nhưng vì tổ công nhân làm chưa khoa học nên đã làm chậm mỗi ngày 20 sản phẩm Lôgo so với dự định. Vì thế tổ công nhân đã xong sau dự định 3 ngày. Hỏi theo dự định tổ công nhân sẽ cần làm mỗi ngày bao nhiêu Lôgo? (Với giả định các ngày tổ công nhân làm số Lôgo giống nhau)

3) Biết rằng phương trình bậc hai: $-x^2 - bx + 1 = 0$ có một nghiệm $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Tìm tổng nghịch đảo hai nghiệm của phương trình này.

Bài IV (4.0 điểm)

1) Một ly nước hình trụ có chiều cao 15 cm, đường kính đáy là 6 cm đựng đầy nước tinh khiết



và đặt trên mặt bàn bằng phẳng (như hình bên).

a) Tính thể tích nước có trong ly.

b) Nếu ta thả 5 quả cầu giống nhau có bán kính mỗi quả cầu 1 cm vào ly nước sao cho các quả cầu ngập chìm trong ly nước thì sau khi nước trong ly tràn ra, thể tích nước còn lại trong ly sẽ là bao nhiêu? (Coi độ dày ly không đáng kể, giả thiết lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

2) Cho đường tròn tâm $(O; R)$ và điểm I nằm ngoài đường tròn. Qua I dựng hai tiếp tuyến IA và IB (A, B là hai tiếp điểm) và một đường thẳng qua điểm I không đi qua tâm O , cắt đường tròn $(O; R)$ tại M, N sao cho N thuộc cung nhỏ cung AB , B thuộc cung lớn cung MN . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng MN .

a) Chứng minh 4 điểm A, I, B, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi J là giao điểm của đoạn thẳng IO với (O) . Chứng minh J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác IAB .

c) Tia AH cắt đường tròn (O) tại điểm D (khác điểm A), chứng minh $MN \parallel BD$. Khi J vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác IAB , tính diện tích lớn nhất của tam giác MID đạt được theo R .

Bài V (0.5 điểm) Ban phụ huynh của một trường THCS dự định chụp ảnh kỷ yếu cho học sinh khối 9 của trường. Một nhóm thợ chụp ảnh báo ban phụ huynh nhà trường mức thu một học sinh là 800 nghìn đồng, khi đó học sinh lớp 9 của nhà trường đăng ký chỉ được 40 em. Vì muốn khuyến khích học sinh lớp 9 nhà trường đăng ký chụp ảnh kỷ yếu nhiều hơn, nhóm chụp ảnh đã điều tra khảo sát và thu được kết quả: Cứ mỗi lần nhóm chụp ảnh thu giảm 20 nghìn đồng một học sinh thì số học sinh đăng ký sẽ tăng 4 em. Hãy tính xem nhóm chụp ảnh sẽ đưa mức thu mỗi học sinh là bao nhiêu để có doanh thu lớn nhất và tính doanh thu lúc đó. (Biết nhà trường có 3 lớp 9, mỗi lớp 9 có khoảng 35 đến 40 em học sinh).

-----Hết-----
(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Họ và tên của cán bộ coi thi:.....Chữ ký của cán bộ coi thi:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Đáp án	Điểm	Ghi chú
Bài I	1) Tần số của nhóm [6; 8) là 18.	0.25	
	Tần số tương đối của của nhóm [6; 8): $\frac{18}{40} \cdot 100 = 45\%$.	0.5	
	2) Số kết quả có thể của không gian mẫu là $n(\Omega) = 15$.	0.25	
	Các quả bi ghi số nguyên tố là $\{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$ nên số các kết quả thuận lợi của biến cố M là $n(M) = 6$.	0.25	
	Vậy xác suất của biến cố M là $P(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.	0.25	
Bài II	1) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta có $A = \frac{4}{\sqrt{25}-1} = \frac{4}{5-1} = 1$.		
	Vậy $A = 1$ khi $x = 25$.	0.25	
	2) Chứng minh $B = \frac{4}{\sqrt{x}+1}$		
	Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có:		
	$B = \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-6}{1-x} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0.25	
	$= \frac{2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0.25	
	$= \frac{4(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$		
	$= \frac{4}{\sqrt{x}+1}$	0.25	
	3) Đặt $H = A \cdot B$. So sánh H và H^2 .		
	Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:		
	$H = A \cdot B = \frac{4}{\sqrt{x}-1} : \frac{4}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$		
	Xét $H - H^2 = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2 = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2}$	0.25	
	$= \frac{x-1 - (x+2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-2-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2}$		
	Với giả thiết với $x \geq 0, x \neq 1$, suy ra $H - H^2 < 0$.		

	Vậy $H < H^2$.	0.25	
Bài III	1) Gọi x, y lần lượt là số tiền mà bác Huy đầu tư vào ngân hàng và mua vàng năm 2024, ($0 \leq x \leq 250, 0 \leq y \leq 250$, đơn vị triệu đồng) Vì bác Huy đầu tư 250 triệu đồng nên ta có $x + y = 250$. Lãi suất ngân hàng 5%/năm nên tiền lãi ngân hàng sau một năm là $\frac{5}{100}x$ (triệu đồng). Sau một năm bác Huy tính được lãi mua vàng là 7%/năm nên số tiền lãi mua vàng là $\frac{7}{100}y$ (triệu đồng). Theo giả thiết tổng lãi cả hai loại là 15 triệu đồng nên ta có phương trình: $\frac{5}{100}x + \frac{7}{100}y = 15.$ Vậy x, y thỏa mãn $\begin{cases} x + y = 250 \\ \frac{5}{100}x + \frac{7}{100}y = 15 \end{cases}.$ Giải hệ ta được: $x = 125, y = 125$ (thỏa mãn). Vậy bác Huy đầu tư mỗi loại 125 triệu đồng.	0.25	
	2) Gọi số sản phẩm mỗi ngày tổ công nhân làm theo dự định là x (sản phẩm, $x \in \mathbb{N}^*$). Số ngày tổ công nhân làm theo dự định hết 1800 sản phẩm sẽ là $\frac{1800}{x}$ ngày. Thực tế tổ công nhân làm chậm hơn mỗi ngày 20 sản phẩm nên mỗi ngày tổ công nhân làm được $x - 20$ sản phẩm. Do đó thực tế tổ công nhân làm hết 1800 sản phẩm sẽ phải là $\frac{1800}{x-20}$ ngày. Theo giả thiết tổ công nhân làm chậm hơn theo dự định 3 ngày nên ta có phương trình: $\frac{1800}{x-20} - \frac{1800}{x} = 3$. $\frac{20}{(x-20)x} = \frac{1}{600}.$ $x^2 - 20x - 12000 = 0.$ $(x - 120)(x + 100) = 0.$ $x = 120$ (thỏa mãn); $x = -100$ (không thỏa mãn). Vậy mỗi ngày dự định tổ công nhân cần làm 120 sản phẩm	0.25	
	3) Theo giả thiết phương trình $-x^2 - bx + 1 = 0$ (*) có một nghiệm $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ nên ta có $-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - b \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$. $b = -\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$	0.25	

	trung trực của AB và IO cũng là tia phân giác của $\widehat{AIB}$. (4) $\widehat{OAI} = 90^\circ$ (vì IA là tiếp tuyến đường tròn tâm O) nên $\widehat{IAJ} + \widehat{JAO} = 90^\circ$. Tam giác OAJ cân tại O ($OA = OJ = R$) nên $\widehat{JAO} = \widehat{OJA}$. Mà $\widehat{OJA} + \widehat{JAB} = 90^\circ$ (IO là đường trung trực của AB nên IO vuông góc với AB). Suy ra $\widehat{IAJ} = \widehat{JAB}$, hay AJ là tia phân giác của góc $\widehat{IAB}$. (5) Từ (4) và (5) nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IAB. c) * Chứng minh $MN \parallel BD$. $\widehat{BDA} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (tính chất góc nội tiếp) mà OI là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{IOA} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$. Để chứng minh 4 điểm O, H, A, I nằm trên đường tròn đường kính OI. Nên $\widehat{IOA} = \widehat{IHA}$ (hai góc cùng nội tiếp đường tròn đường kính OI và cùng chắn cung AI). Vậy $\widehat{BDA} = \widehat{IHA}$ mà hai góc vị trí đồng vị nên $BD \parallel MN$. * Khi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB, tính diện tích lớn nhất của tam giác MID đạt được theo R. Khi J vừa là tâm đường tròn nội tiếp vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB thì tam giác IAB đều, nên $OI = 2R, IB = IA = AB = R\sqrt{3}$. $S_{\Delta MID} = S_{\Delta MIB} = \frac{1}{2} IB \cdot MQ$ (Dựng MQ vuông góc với IB tại Q). Mà $MQ \leq BP$ (với BP là đường kính đường tròn tâm O). Suy ra $S_{\Delta MID} = S_{\Delta MIB} \leq \frac{1}{2} IB \cdot BP = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot 2R = \sqrt{3}R^2$. Vậy diện tích lớn nhất tam giác MID đạt được là: $\sqrt{3}R^2$.	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25	
Bài V	Gọi số lần mà nhóm chụp ảnh giảm là x, (số lần giảm, $x \in \mathbb{N}^*$). Khi đó giá chụp ảnh của một học sinh sau x lần giảm: $800 - 20x$ (nghìn đồng); Số học sinh tham gia sau x lần giảm sẽ là: $40 + 4x$ (học sinh). Tổng doanh thu của nhóm chụp ảnh là: $T = (800 - 20x) \cdot (40 + 4x)$ $= 20(40 - x) \cdot 4(10 + x)$ $= 80(40 - x) \cdot (10 + x)$ $= 80(-x^2 + 30x + 400)$ $= -80[(x - 15)^2 - 625]$ $= -80(x - 15)^2 + 50000$	0.25	

	Do $-80(x - 15)^2 \leq 0$ nên $T \leq 50000$ Doanh thu mà nhóm chụp ảnh không quá 50 triệu đồng khi $x = 15$ (thỏa mãn yêu cầu). Như vậy khi nhóm chụp ảnh giảm mức thu một học sinh 15 lần, với mức thu của một học sinh là: $800 - 20.15 = 500$ (nghìn đồng) thì doanh thu nhóm chụp ảnh lớn nhất và là 50 triệu đồng. Khi đó số lượng học sinh nhà trường đăng ký: $40 + 4.15 = 100$ (học sinh) (thỏa mãn yêu cầu bài toán).	0.25	
--	--	------	--

Ghi chú: Học sinh có cách làm đúng và phù hợp vẫn được điểm tương ứng.