

CHƯƠNG II. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Để giải phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$, ta giải hai phương trình $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$. Sau đó lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Ví dụ 1. Giải phương trình $(2x + 1)(3x - 1) = 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2 - x = -2x + 2$.

Nhận xét. Trong Ví dụ 2, ta thực hiện việc giải phương trình theo hai bước:

Bước 1. Đưa phương trình về phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$;

Bước 2. Giải phương trình tích tìm được.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thường đặt điều kiện cho ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 và gọi đó là điều kiện xác định (viết tắt là ĐKXĐ) của phương trình.

Ví dụ 3. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{5x+2}{x-1} = 0$;

b) $\frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x-2}$.

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa tìm được.

Bước 4 (Kết luận). Trong các giá trị tìm được của ẩn ở Bước 3, giá trị nào thoả mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{(x+1)(x-2)}$. (3)

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.1. Giải các phương trình sau:

a) $x(x-2) = 0$;

b) $(2x+1)(3x-2) = 0$.

2.2. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 4) + x(x-2) = 0$;

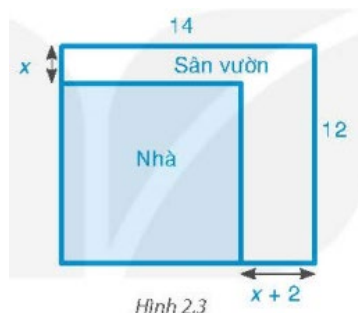
b) $(2x+1)^2 - 9x^2 = 0$.

2.3. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{(2x+1)(x+1)}$;

b) $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3x}{x^3+1}$.

2.4. Bác An có một mảnh đất hình chữ nhật với chiều dài 14m và chiều rộng 12m. Bác dự định xây nhà trên mảnh đất đó và dành một phần diện tích đất để làm sân vườn như Hình 2.3. Biết diện tích đất làm nhà là 100m^2 . Hỏi x bằng bao nhiêu mét?



2.5. Hai người cùng làm chung một công việc thì xong trong 8 giờ. Hai người cùng làm được 4 giờ thì người thứ nhất bị điều đi làm công việc khác. Người thứ hai tiếp tục làm việc trong 12 giờ nữa thì xong công việc. Gọi x là thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc (đơn vị tính là giờ, $x > 0$).

a) Hãy biểu thị theo x :

- Khối lượng công việc mà người thứ nhất làm được trong 1 giờ;
- Khối lượng công việc mà người thứ hai làm được trong 1 giờ.

b) Hãy lập phương trình theo x và giải phương trình đó. Sau đó cho biết, nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu mới xong công việc đó.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $A(x).B(x) = 0$

1. Phương pháp giải

- Giải hai phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$.
- Lấy tất cả các nghiệm thu được.
- Viết tập hợp nghiệm S .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình:

a) $(3x - 2)(4x + 5) = 0$;

b) $(2,3x - 6,9)(0,1x + 2) = 0$;

c) $(4x + 2)(x^2 + 1) = 0$;

d) $(2x + 7)(x - 5)(5x + 1) = 0$.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a) $(5x - 3)\left(\frac{4x - 1}{5} - \frac{2x + 1}{3}\right) = 0$;

b) $\left(\frac{2x - 1}{3} - \frac{1 - x}{3}\right)\left[\frac{2(x + 1)}{5} - (2x + 1)\right] = 0$.

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

1. Phương pháp giải:

$$a) \frac{2x-1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1}$$

$$b) \frac{5x}{2x+2} + 1 = -\frac{6}{x+1}$$

$$c) x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$d) \frac{x+3}{x+1} + \frac{x-3}{x} = 2.$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2};$$

$$b) \frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3};$$

$$c) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1};$$

$$d) 2x - \frac{2x^2}{x+3} = \frac{4x}{x+3} + \frac{2}{7}.$$

Ví dụ 4.

$$a) \frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}$$

$$b) \frac{3}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$c) 1 + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{8+x^3}$$

$$d) \frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}.$$

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$a) \left(\frac{1}{x} + 2\right) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1);$$

$$b) \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2;$$

DẠNG 4. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA A ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ BẰNG HẰNG SỐ K CHO TRƯỚC

1. Phương pháp giải

- Giả sử biểu thức chứa a là $A(a)$

- Muốn tìm giá trị của a để biểu thức $A(a)$ bằng k ta xem a như ẩn và giải phương trình $A(a) = k$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giá trị của a sao cho các biểu thức sau có giá trị bằng 2 :

$$a) \frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3}$$

$$b) \frac{10}{3} - \frac{3a-1}{4a+12} - \frac{7a+2}{6a+18}$$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Giải các phương trình:

$$a) (5x+2)(x-7) = 0;$$

$$b) 15(x+9)(x-3)(x+21) = 0;$$

$$c) (x^2-1)(x+3) = 0;$$

$$d) (x^2+1)(x^2+4x+4) = 0;$$

$$e) x^2 - x - 6 = 0;$$

$$g) x^2 + 5x + 6 = 0;$$

$$h) x^2 + x - 12 = 0;$$

$$i) x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$$

Câu 2. Giải các phương trình:

a) $(x-1)(x^2+5x-2)-x^3+1=0$;

b) $x^2+(x+2)(11x-7)=4$;

c) $x^3-x(x+1)+1=0$;

d) $x^3+x^2+x+1=0$

Câu 3. Giải các phương trình:

a) $x^2-7x+6=0$;

b) $2x^2-3x+5=0$;

c) $4x^2-12x+5=0$

Câu 4. Cho biểu thức: $A=(5x-3y+1)(7x+2y-2)$.

a) Tìm x sao cho với $y=2$ thì $A=0$.

b) Tìm y sao cho với $x=-2$ thì $A=0$

Câu 5. Giải các phương trình :

a) $9x(3x-7)(5x+6)=0$;

b) $\left(\frac{4x+1}{3}+1\right)\left(\frac{8x-3}{7}-3\right)=0$

Câu 6. Giải các phương trình :

a) $x^2-(x+3)(2x-11)=9$:

b) $(x-2)(x^2-3x+1)+8=x^3$.

Câu 7. Giải các phương trình :

a) $3x^2-4x-4=0$:

b) $x^3-3x+2=0$

Câu 8. Cho biểu thức $P=(8x+5y-4)(x-3y+6)=0$.

a) Tìm các giá trị của x sao cho với $y=4$ thì $P=0$;

b) Tìm các giá trị của y sao cho với $x=-1$ thì $P=0$.

Câu 9*. Cho phương trình : $2x^3+5x^2-8x-4m=0$ (1)

Biết $x=-2$ là một nghiệm của phương trình (1). Tìm các nghiệm còn lại của phương trình đó.

Câu 10. Giải phương trình:

a) $\frac{4x-8}{2x^2+1}=0$;

b) $\frac{x^2-x-6}{x-3}=0$

c) $\frac{x+5}{3x-6}-\frac{1}{2}=\frac{2x-3}{2x-4}$

d) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1+3x}{1-3x}$.

Câu 11. Giải các phương trình:

a) $5+\frac{96}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}$;

b) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{5}{x+2}=\frac{12}{x^2-4}+1$;

c) $\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}=\frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$.

Câu 12. Giải các phương trình:

$$a) \frac{x+5}{x-1} = \frac{x+1}{x-3} - \frac{8}{x^2-4x+3};$$

$$b) \frac{x+1}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{12}{x^2-4} + 1.$$

Câu 13. Với giá trị nào của a để các biểu thức sau có giá trị bằng 2 :

$$a) \frac{2a-9}{2a-5} + \frac{3a}{3a-2}$$

$$b) \frac{3a+2}{3a+4} + \frac{a-2}{a+4}.$$

Câu 14. Cho phương trình ẩn x :

a) Giải phương trình với $a = -3$.

b) Giải phương trình với $a = 1$.

c) Xác định a để phương trình có nghiệm $x = 0,5$.

Câu 15. Định a và b để phương trình $(x-1)a + (2x+1)b = x+2$ có tập nghiệm là \mathbb{R} (vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$).

Câu 16. Định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1}$.

Câu 17. Định m để phương trình sau vô nghiệm: $\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$

Câu 18. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{6}{3x+1}$$

$$b) \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} = \frac{10}{(x+3)(x-1)}.$$

Câu 19. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^2-x+1} = \frac{2x^2+1}{x^3+1};$$

$$b) \frac{3x+1}{x+1} - \frac{2x-5}{x-3} = 1 - \frac{4}{(x+1)(x-3)}.$$

Câu 20. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{2x-7} = \frac{13}{(x+3)(2x-7)};$$

$$b) \frac{2(x-5)}{x^2+4x+3} = \frac{x-5}{x^2+5x+6}.$$

Câu 21. Cho phương trình $\frac{1}{x+1} - \frac{2x^2-m}{x^3+1} = \frac{4}{x^2-x+1}$.

Biết $x = 0$ là một nghiệm của phương trình. Tìm các nghiệm còn lại.

Câu 22*. Cho hai biểu thức $A = \frac{x+1}{2x-3}$; $B = \frac{3x}{x^2-4}$, với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có cùng một giá trị ?

BÀI 5. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BẤT ĐẲNG THỨC

Nhắc lại thứ tự trên tập số thực:

Trên tập số thực, với hai số a và b có ba trường hợp sau:

- a) Số a bằng số b , kí hiệu $a = b$;
- b) Số a lớn hơn số b , kí hiệu $a > b$;
- c) Số a nhỏ hơn số b , kí hiệu $a < b$.

Số a lớn hơn hoặc bằng số b , tức là $a > b$ hoặc $a = b$, kí hiệu là $a \geq b$.

Số a nhỏ hơn hoặc bằng số b , tức là $a < b$ hoặc $a = b$, kí hiệu là $a \leq b$.

Khái niệm bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Chú ý

Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-3 < -2$ (hay $6 > 3$ và $8 > 5$) được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-2 > -3$ (hay $6 > 3$ và $5 < 8$) được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.

Ví dụ 1. Xác định vế trái và vế phải của các bất đẳng thức sau:

- a) $-2 > -7$;
- b) $a^2 + 1 > 0$.

Ví dụ 2. Viết bất đẳng thức để mô tả mỗi tình huống sau:

- a) Tuần tới, nhiệt độ t ($^{\circ}\text{C}$) tại Tokyo là trên -5°C .
- b) Nhiệt độ t ($^{\circ}\text{C}$) bảo quản của một loại sữa là dưới 4°C .
- c) Để được điều khiển xe máy điện thì số tuổi x của một người phải ít nhất là 16 tuổi.

Bất đẳng thức có tính chất quan trọng sau:

Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu của bất đẳng thức).

Chú ý. Tương tự, các thứ tự lớn hơn ($>$), lớn hơn hoặc bằng (\geq), nhỏ hơn hoặc bằng (\leq) cũng có tính chất bắc cầu.

Ví dụ 3. Chứng minh $\frac{2024}{2023} > \frac{2021}{2022}$.

II. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Ví dụ 4. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh $2023 + (-19)$ và $2024 + (-19)$.

III. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

- Với ba số a, b, c và $c > 0$, ta có:

Nếu $a < b$ thì $ac < bc$;

Nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$;

Nếu $a > b$ thì $ac > bc$;

Nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$.

- Với ba số a, b, c và $c < 0$, ta có:

Nếu $a < b$ thì $ac > bc$;

Nếu $a \leq b$ thì $ac \geq bc$;

Nếu $a > b$ thì $ac < bc$;

Nếu $a \geq b$ thì $ac \leq bc$.

Ví dụ 5. Thay ? trong các biểu thức sau bởi dấu thích hợp ($<$, $>$) để được khẳng định đúng.

a) $3 \cdot (-7) ? 3 \cdot (-5)$

b) $(-3) \cdot (-7) ? (-3) \cdot (-5)$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.6. Dùng kí hiệu để viết bất đẳng thức tương ứng với mỗi trường hợp sau:

a) x nhỏ hơn hoặc bằng -2 ;

b) m là số âm;

c) y là số dương;

d) p lớn hơn hoặc bằng 2024 .

2.7. Viết một bất đẳng thức phù hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô;

b) Xe buýt chờ được tối đa 45 người;

c) Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20000 đồng.

2.8. Không thực hiện phép tính, hãy chứng minh:

a) $2 \cdot (-7) + 2023 < 2 \cdot (-1) + 2023$;

b) $(-3) \cdot (-8) + 1975 > (-3) \cdot (-7) + 1975$.

2.9. Cho $a < b$, hãy so sánh:

a) $5a + 7$ và $5b + 7$;

b) $-3a - 9$ và $-3b - 9$.

2.10. So sánh hai số a và b , nếu:

a) $a + 1954 < b + 1954$

b) $-2a > -2b$.

2.11. Chứng minh rằng:

$$a) -\frac{2023}{2024} > -\frac{2024}{2023};$$

$$b) \frac{34}{11} > \frac{26}{9}.$$

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐÚNG SAI CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

1. Phương pháp giải

- Vận dụng thứ tự trên tập hợp số.
- Vận dụng liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Mỗi bất đẳng thức sau đúng hay sai ?

$$a) 5 + (-8) < 1;$$

$$b) (-2) \cdot (-7) > (-5) \cdot (-3).$$

Ví dụ 2. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

$$a) (-7)^2 - 9 \leq (-10) \cdot (-4);$$

b) Thương của 15 và -6 nhỏ hơn thương của -12 và 4 ?

Ví dụ 3. Mỗi bất đẳng thức sau đúng hay sai ? Giải thích.

$$a) x^2 + 3 \geq 3;$$

$$b) -x^2 + 1 \leq 1;$$

$$c) -(x+2)^2 - 5 \leq -5$$

DẠNG 2. SO SÁNH HAI SỐ

1. Phương pháp giải

Vận dụng liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho $a < b$, hãy so sánh :

$$a) a - 3 \text{ và } b - 3$$

$$b) -5a + 1 \text{ và } -5b + 1$$

Ví dụ 2. Cho số a bất kì, hãy so sánh :

$$a) a \text{ và } a - 4;$$

$$b) a - 7 \text{ và } a + 5.$$

Ví dụ 3. Cho số m bất kì, hãy so sánh m^2 với m .

DẠNG 3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Phương pháp giải

Cách 1. Để chứng minh $A > B$ ta chứng minh $A - B > 0$.

Để chứng minh $A < B$ ta chứng minh $A - B < 0$.

Cách 2. Dùng phương pháp biến đổi tương đương : $A > B \Leftrightarrow C > D \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow M > N$.

Nếu $M > N$ đúng thì $A > B$ đúng.

Cách 3. Dùng các tính chất của bất đẳng thức

Từ bất đẳng thức đã biết, ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Ví dụ 2. Cho $a > 0; b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$).

Ví dụ 3. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Ví dụ 4. Cho $a > b$ và $m > n$. Chứng minh rằng $a + m > b + n$.

Ví dụ 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$.

DẠNG 4. ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

1. Phương pháp giải

- Nếu $f(x) \geq k$ (k là hằng số) và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là k khi và chỉ khi $x = a$. Ta viết $\min f(x) = k$ khi và chỉ khi $x = a$.

- Nếu $f(x) \leq k$ (k là hằng số) và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là k khi và chỉ khi $x = a$. Ta viết $\max f(x) = k$ khi và chỉ khi $x = a$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - 6x + 10$

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 5x^2 - 10x + 3$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = -x^2 + 5x - 4$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D = 5 - x - \frac{1}{x}$ với $x > 0$.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = 2x^2 + 8x + y^2 - 10y + 43$.

Ví dụ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{2x-1}{x^2+2}$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Bất đẳng thức nào biểu thị đúng thứ tự các số? Vì sao?

- a) $-7 \leq -6 - 1$; b) $5(-3) > -16$;
c) $12 < (-3) \cdot 5$; d) $4(-2) > (-7)(-2)$

Câu 2.

$$c) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^2$$

Câu 15. Cho a, b cùng dấu, hãy so sánh hai số $(1+a)(1+b)$ và $1+a+b$

Câu 16. Chứng minh rằng nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau. Áp dụng : Tìm giá trị lớn nhất của $A = (1-x)(2-x)$ với $\frac{1}{2} < x < 1$.

Câu 17. Chứng minh rằng : Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau. Áp dụng : Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $B = \frac{(x+1)^2}{x}$ (với $x > 0$);

b) $C = x + \frac{1}{x-1}$ (với $x > 1$).

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $D = \frac{4x+3}{x^2+1}$.

BÀI 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0; ax + b \leq 0; ax + b \geq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$ được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .

Ví dụ 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn x ?

- a) $3x + 16 \leq 0$; b) $-5x + 5 > 0$; c) $x^2 - 4 > 0$ d) $-3x < 0$.

Nghiệm của bất phương trình

- Số x_0 là một nghiệm của bất phương trình $A(x) < B(x)$ nếu $A(x_0) < B(x_0)$ là khẳng định đúng.

- Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

II. CÁCH GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b < 0 (a \neq 0)$ được giải như sau: $ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b$

- Nếu $a > 0$ thì $x < -\frac{b}{a}$.

- Nếu $a < 0$ thì $x > -\frac{b}{a}$.

Chú ý. Các bất phương trình $ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$ được giải tương tự.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $-2x - 4 > 0$.

Ví dụ 3. Bạn Thanh có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 7 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

Vì số vở là số tự nhiên nên Thanh có thể mua nhiều nhất 11 quyển vở.

Chú ý. Ta cũng có thể giải được các bất phương trình một ẩn đưa được về dạng $ax + b < 0, ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$.

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình:

a) $2x + 5 < 3x - 4$;

b) $-3x + 5 \geq -4x + 3$.

Ví dụ 5. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là $7,4\%$ / năm. Bà Mai dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hằng năm ít nhất là 60 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Mai cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.16. Giải các bất phương trình sau:

a) $x - 5 \geq 0$;

b) $x + 5 \leq 0$;

c) $-2x - 6 > 0$;

d) $4x - 12 < 0$.

2.17. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x + 2 > 2x + 3$;

b) $5x + 4 < -3x - 2$.

2.18. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

2.19. Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

2.20. Người ta dùng một loại xe tải để chở bia cho một nhà máy. Mỗi thùng bia 24 lon nặng trung bình 6,7 kg. Theo khuyến nghị, trọng tải của xe (tức là tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5,25 tấn. Hỏi xe có thể chở được tối đa bao nhiêu thùng bia, biết bác lái xe nặng 65 kg ?

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. KIỂM TRA GIÁ TRỊ $x = a$ CÓ PHẢI LÀ MỘT NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG ?

1. Phương pháp giải

Thay $x = a$ vào hai vế của bất phương trình rồi tính giá trị của hai vế.

- Nếu được một bất đẳng thức đúng thì $x = a$ là một nghiệm.
- Nếu được một bất đẳng thức sai thì $x = a$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Kiểm tra xem $x = -5$ có phải là nghiệm của các bất phương trình sau không ?

a) $2x + 7 < 1 - 3x$

b) $x^2 > 5 - 4x$

Ví dụ 2. Cho tập hợp $M = \{-5; -4; \dots; -1; 0; 1; \dots; 5\}$.

Hãy cho biết những phần tử nào của tập hợp M là nghiệm của bất phương trình :

a) $|x| < 2$

b) $|x| > 3$

c) $|x - 4| \leq 5$

Ví dụ 3. Cho tập hợp $A = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$.

Hãy cho biết những phần tử nào của tập hợp A vừa là nghiệm của bất phương trình (1), vừa là nghiệm của bất phương trình (2) dưới đây :

$x^2 < 9$ (1)

$2x + 3 > 1$ (2)

DẠNG 2. LẬP BẤT PHƯƠNG TRÌNH CỦA BÀI TOÁN

1. Phương pháp giải

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Lập bất phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Lập bất phương trình của bài toán sau : Quãng đường AB dài 150 km. Một ô tô phải chạy từ A đến B trong thời gian không quá 3 giờ. Hỏi ô tô phải chạy với vận tốc nào ?

Ví dụ 2. Năm nay ông 69 tuổi, cháu 9 tuổi. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa thì tỉ số giữa tuổi ông và tuổi cháu nhỏ hơn 5.

DẠNG 3. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

1. Phương pháp giải

Vận dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân đưa bất phương trình về dạng $ax < m$ (hay $ax > m$).

Từ bất phương trình $ax < m$, suy ra :

* Nếu $a = 0$ thì bất phương trình $0x < m$:

- Có nghiệm là mọi x với $m > 0$;

Vô nghiệm với $m \leq 0$;

* Nếu $a > 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x < \frac{m}{a}$;

* Nếu $a < 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x > \frac{m}{a}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau :

a) $\frac{4x-1}{9} < \frac{5-3x}{6}$;

b) $\frac{2x-5}{18} < \frac{4x+3}{10}$.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau :

a) $\frac{5x+2}{5} < \frac{4x-3}{4}$

b) $\frac{3(2x+1)}{20} + 1 < \frac{3x+13}{10}$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình : $\frac{3x+17}{10} > \frac{5x+22}{15}$ (1) và

$\frac{x-4}{30} - 1 > \frac{2x-27}{24}$ (2)

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên âm của bất phương trình : $\frac{2x+4}{3} - \frac{4x-7}{18} > \frac{2x-5}{9} - \frac{2x-1}{15}$

Ví dụ 5. Giải bất phương trình : $\frac{3x-1}{x+3} > 2$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. a) Tìm trong tập hợp $\{-2; 1; 5; 2; 8\}$ số nào là nghiệm của bất phương trình $5y > 2(y-1) + 6$

b) Tìm trong tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ số nào là nghiệm của bất phương trình $13x + 7 < -12x + 57$.

Câu 2. Cho bất phương trình $3x + 5 > 3(x + 4)$.

a) Chứng tỏ rằng các giá trị $-1; 0; 3$ đều không phải là nghiệm của bất phương trình.

b) Tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình.

Câu 3. Cho bất phương trình $2x+1 < 2(x+3)$.

a) Chứng tỏ rằng các giá trị $-1; -1; 1; 2; \sqrt{2}$ đều là nghiệm của bất phương trình.

b) Tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình.

Câu 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $x+5 > 3$; b) $2x-7 < x$; c) $7x-2,4 < 0,4$; d) $2-3x \leq -1$

Câu 5. Dựa vào liên hệ giữa thứ tự và phép nhân, chứng tỏ rằng hai bất phương trình sau tương đương

$$x > 7 \Leftrightarrow x.m > 7.m (m > 0)$$

$$x > 7 \Leftrightarrow x.m < 7.m (m < 0)$$

Câu 6. Hai bất phương trình sau có tương đương không? tại sao? $|x| < 0$ và $5x+6 < 5(x+1)$

Câu 7. Bất phương trình $(x-4)^2 > x(x-12)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

Câu 8. Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn mỗi bất phương trình sau :

a) $9-5x > 1,5$;

b) $\frac{3x-17}{20} > \frac{5x+1}{15}$

Câu 9. Tìm nghiệm nguyên chung của hai bất phương trình :

a) $15x-4 > 8$ và $7-6x > -20$;

b) $\frac{2}{3}x+5 > 9$ và $\frac{x-18}{7} > 1$.

Câu 10. Tìm tập hợp các giá trị của x để biểu thức $\frac{3-2x}{5}$ lớn hơn giá trị của biểu thức $\frac{x-14}{10}$.

Câu 11. Cho phương trình $5x-4 = 3m+2$ (1) trong đó x là ẩn số, m là một số cho trước. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm dương.

Câu 12. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{3(2x+1)}{20} + 1 > \frac{3x+52}{10}$

b) $\frac{4x-1}{2} + \frac{6x-19}{6} \leq \frac{9x-11}{3}$.

Câu 13. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{2} - \frac{3x-3}{5} \geq x$

b) $\frac{5x-1}{5} + \frac{x+1}{2} \leq x$

c) $x - \frac{2x+3}{2} \leq \frac{x-1}{4}$

d) $\frac{z-1}{2} - \frac{2z+3}{8} - z \geq 2$

Câu 14. Với những số tự nhiên nào của a để:

a) Hiệu $(5-5a)-(3a-3)$ dương?

b) Tổng $(-25,5+5a)+(7,5-3a)$ âm?

Câu 15. Cho một hình chữ nhật có một cạnh là 8dm , tìm cạnh thứ hai, biết rằng chu vi của hình chữ nhật nhỏ hơn chu vi của hình vuông cạnh là 6dm .

Câu 16.

1) Chứng minh rằng:

a) $\frac{x^2 + 3x + 5}{2} > 0$ với mọi giá trị của x .

b) $\frac{-x^2 + 2x - 6}{3} < 0$ với mọi giá trị của x .

2) Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của các biểu thức sau nếu có:

a) $M = 4x^2 + 4x + 5$

b) $N = 6x - 3 - x^2$

Câu 17*. Giải bất phương trình : $\frac{13x-1}{5x+4} > 3$.

LUYỆN TẬP CHUNG

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Giải phương trình $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x}{x^3-1}$. (1)

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{-2x-6}{x^2-9}$. (2)

Ví dụ 3. Cho $a < b$. Chứng minh rằng:

a) $2a+1 < 2b+2$;

b) $-2a-5 > -2b-7$.

B. BÀI TẬP

2.12. Giải các phương trình sau:

a) $2(x+1) = (5x-1)(x+1)$;

b) $(-4x+3)x = (2x+5)x$.

2.13. Để loại bỏ $x\%$ một loại tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$C(x) = \frac{50x}{100-x}$ (triệu đồng), với $0 \leq x < 100$. Nếu bỏ ra 450 triệu đồng, người ta có thể loại bỏ được bao nhiêu phần trăm loại tảo độc đó?

2.14. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-2x+4} = \frac{x-4}{x^3+8}$

b) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3}{x+4} = \frac{x-12}{x^2-16}$.

2.15. Cho $a > b$, chứng minh rằng:

a) $4a+4 > 4b+3$;

b) $1-3a < 3-3b$.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Câu 1. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

b) $x^3 + 1 = 0$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = -1$ ($S = \{-1\}$)

Câu 2. Giải các phương trình sau:

1) $(x+2)(3-2x) = 0$;

2) $(5x+1)(1+x) = 0$

3) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

4) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

Câu 3. Giải phương trình có chứa ẩn số ở mẫu thức :

1) $\frac{x}{x-5} - \frac{35}{x-2} = \frac{15}{x^2-7x+10} + 1$

2) $\frac{-x}{x-10} \div \frac{8}{x-6} = \frac{4x}{x^2-16x+60} - 1$

Câu 4. Giải các phương trình sau:

1) $\frac{x+n}{m+n} + \frac{x-n}{m-n} = \frac{1}{m+n} - \frac{x-n}{m^2-n^2} + \frac{2x}{m}$

2) $\frac{a-x}{b-a} + \frac{3x}{a+b} = \frac{3a^2-ab-4b^2}{a^2-b^2}$

Câu 5. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{7}{x^2-1} + \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$$

$$b) \frac{1}{(3-2x)^2} - \frac{4}{(3+2x)^2} = \frac{3}{9-4x^2}$$

Câu 6. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{4-2x}{3} - \frac{4}{6x-3} = \frac{1,5x}{x-0,5} - \frac{4x^2}{3(2x-1)}$$

$$b) \frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{4}{x+2x^2+x^3} = \frac{5}{2x+2x^2}$$

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình:

$$a) \frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}$$

$$b) \frac{y^2}{y^2-6y} = \frac{4(3-2y)}{y(6-y)}$$

$$c) \frac{8y-5}{y} = \frac{9y}{y+2}$$

Câu 8. Giải phương trình sau: $\frac{3ax+12ab+5b^2}{9a^2-b^2} = \frac{2x-3b}{3a+b} - \frac{3x-4a}{b-3a}$.

Câu 9. So sánh các biểu thức sau:

$$a) 3,06 \cdot 2,05 \text{ và } 23,58 : 4,5$$

$$b) \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \text{ và } \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

$$c) 16 - 4\frac{1}{8} \text{ và } 15 - 4\frac{1}{8}$$

Câu 10. Cho $a < b$. Hãy so sánh các số sau:

$$a \text{ và } b+1; \quad a-2 \text{ và } b; \quad a-5 \text{ và } b+1; \quad a+5 \text{ và } b-1$$

Câu 11. Cho bất đẳng thức $a > b$ điền dấu $>$ hoặc $<$ vào các ô trống để được bất đẳng thức đúng:

$$a) -7,5a \quad \square \quad -7,5b$$

$$b) 0,12a \quad \square \quad 0,12b$$

$$c) \frac{a}{5} \quad \square \quad \frac{b}{5}$$

$$d) -\frac{1}{4}a \quad \square \quad -\frac{1}{4}b$$

Câu 12. Xác định dấu của a (a dương hoặc a âm) nếu ta có:

$$a) 5a < 3a,$$

$$b) 8a > 5a,$$

$$c) -19a < 19a$$

$$d) -2004a > -2003a$$

Câu 13. Chứng minh rằng $a > b$ và $c > d$ thì $a+c > b+d$

Câu 14. Chứng minh rằng nếu $a > b$ và $c > d$ và a, b, c, d đều là số dương thì $ac > bd$

Câu 15. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

Câu 16. Cho bốn số a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$(a.b + c.d)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

Câu 17. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $-1 \leq a, b, c \leq 4$ và $a + 2b + 3c \leq 4$. Chứng minh rằng $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 36$.

Câu 18. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Câu 19. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$.

Câu 20. Chứng minh bất đẳng thức $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

2.21. Nghiệm của bất phương trình $-2x+1 < 0$ là

- A. $x < \frac{1}{2}$. B. $x > \frac{1}{2}$. C. $x \leq \frac{1}{2}$. D. $x \geq \frac{1}{2}$.

2.22. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x}{2x+1} + \frac{3}{x-5} = \frac{x}{(2x+1)(x-5)}$ là

- A. $x \neq -\frac{1}{2}$. B. $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq -5$.
C. $x \neq 5$. D. $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 5$.

2.23. Phương trình $x-1 = m+4$ có nghiệm lớn hơn 1 với

- A. $m \geq -4$. B. $m \leq 4$. C. $m > -4$. D. $m < -4$.

2.24. Nghiệm của bất phương trình $1-2x \geq 2-x$ là

- A. $x > \frac{1}{2}$. B. $x < \frac{1}{2}$. C. $x \leq -1$. D. $x \geq -1$.

2.25. Cho $a > b$. Khi đó ta có:

- A. $2a > 3b$. B. $2a > 2b+1$. C. $5a+1 > 5b+1$. D. $-3a < -3b-3$.

B. TỰ LUẬN

2.26. Giải các phương trình sau:

- a) $(3x-1)^2 - (x+2)^2 = 0$; b) $x(x+1) = 2(x^2-1)$.

2.27. Giải các phương trình sau:

- a) $\frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2}{x^2-25}$; b) $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3}{x^3+1}$.

2.28. Cho $a < b$, hãy so sánh:

- a) $a+b+5$ với $2b+5$; b) $-2a-3$ với $-(a+b)-3$.

2.29. Giải các bất phương trình:

- a) $2x+3(x+1) > 5x-(2x-4)$; b) $(x+1)(2x-1) < 2x^2-4x+1$.

2.30. Một hãng viễn thông nước ngoài có hai gói cước như sau:

Gói cước A	Gói cước B
-------------------	-------------------

Cước thuê bao hàng tháng 32 USD	Cước thuê bao hàng tháng là 44 USD
45 phút miễn phí	Không có phút miễn phí
0,4 USD cho mỗi phút thêm	0,25 USD/phút

a) Hãy viết một phương trình xác định thời gian gọi (phút) mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau và giải phương trình đó.

b) Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào? Nếu khách hàng gọi 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào?

2.31. Thanh tham dự một kì kiểm tra năng lực tiếng Anh gồm 4 bài kiểm tra nghe, nói, đọc và viết. Mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10. Điểm trung bình của ba bài kiểm tra nghe, nói, đọc của Thanh là 6,7. Hỏi bài kiểm tra viết của Thanh cần được bao nhiêu điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên? Biết điểm trung bình được tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ nhất.

2.32. Để lập đội tuyển năng khiếu về bóng rổ của trường, thầy thể dục đưa ra quy định tuyển chọn như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 15 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được cộng 2 điểm; quả bóng ném ra ngoài bị trừ 1 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 15 điểm trở lên thì sẽ được chọn vào đội tuyển. Hỏi một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất bao nhiêu quả vào rổ?

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Câu 1. Giải các phương trình :

a) $x^2 - 9 = 2(x + 3)$;

b) $(x - 1)(3x + 10) = x^3 - x^2$.

Câu 2. Giải các phương trình :

a) $\frac{5x - 8}{7} - \frac{3(2x + 1)}{14} = \frac{4x - 5}{21} - 1,5$;

b) $\frac{(2x + 1)^2}{6} - \frac{(x - 3)^2}{10} = \frac{29x^2 - 22}{30} - \frac{x(6x - 19)}{15}$.

Câu 3. Giải các phương trình :

a) $\frac{x - 2}{x - 5} + \frac{x + 13}{x^2 - 25} = 1$;

b) $\frac{3x + 2}{x + 4} + \frac{2x + 1}{x - 2} = 5 - \frac{x - 32}{x^2 + 2x - 8}$

Câu 4. Giải các phương trình :

a) $\frac{10 - x}{51} + \frac{9 - x}{52} + \frac{8 - x}{53} + 3 = 0$;

b) $\frac{2x + 5}{195} + \frac{2x + 7}{197} = \frac{2x}{95}$.

Câu 5. Cho phương trình : $\frac{x + 2m}{x + 3} + \frac{x - m}{x - 3} = \frac{mx(x + 1)}{x^2 - 9}$

Giải phương trình trong các trường hợp sau :

a) $m = 1$;

b) $m = 2$;

c) $m = 1,6$.

Câu 6. So sánh các số sau: $\frac{5}{8}$ và $\frac{4}{7}$; 5,6784 và 5,6775; $\frac{9}{20}$ và 0,45; -17 và -19

Câu 7. Có bất đẳng thức sau không?

a) $2 \cdot \frac{1}{2} : \frac{3}{4} - 2 \frac{1}{3} > \left(1 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{3}\right) \cdot 4$?

b) $-7,65 + 4,35 < 4,5 - 8,35$?

Câu 8. Hai số a , b là số dương hay âm nếu ta có:

a) $a - 5 > b - 5$ và $b > 6$

b) $a - 10 > b - 10$ và $a < -14$

Câu 9. Cho bất đẳng thức $6 > -4$. Hãy viết những bất đẳng thức mới nếu:

a) Nhân hai vế của bất đẳng thức với $3; -1; 2; -4$

b) Chia hai vế của bất đẳng thức với $2; -2; -1$;

Câu 10. Cho bất đẳng thức $c \leq d$. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau là đúng:

a) $-5c \geq -5d$;

b) $0,05c - 1,7 \leq 0,05d - 1,7$

c) $\frac{c}{10} \leq \frac{d}{10}$

d) $4 - c \geq 4 - d$.

e) $3c + 15 \leq 3d + 15$

h) $0,8 - \frac{c}{5} \geq 0,8 - \frac{d}{5}$

Câu 11. Chứng minh rằng nếu $a > b$ và $a > 0, b > 0$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Câu 12. Chứng minh rằng nếu $a > b > 0$ thì $a^n > b^n$ (n là số nguyên)

Câu 13. Cho $10 < a < 16$, $2 < b < 4$. Hãy tìm $a + b; a - b; a \cdot b; a : b$

Câu 14. Người ta định xây một căn nhà mà mặt bằng là một hình chữ nhật với hai kích thước là a và b (m) mà $7,5 \leq a \leq 7,6$ và $5,4 \leq b \leq 5,5$. Có thể xây cả căn nhà với mặt bằng không nhỏ hơn $41m^2$ được không?

Câu 15. Giải các bất phương trình sau:

a) $5(x-1) + 7 \leq 1 - 3(x+2)$;

b) $4(x+8) - 7(x-1) < 12$

c) $4(x-1,5) - 1,2 \geq 6x - 1$

d) $1,7 - 3(1-x) < -(x-1,9)$

Câu 16. Với giá trị nào của x :

a) Giá trị của phân thức $\frac{9-3x}{8}$ lớn hơn giá trị của phân thức tương ứng $\frac{5x-9}{16}$.

b) Giá trị của phân thức $\frac{5+2x}{3}$ lớn hơn giá trị của phân thức tương ứng $\frac{3,5+3x}{6}$.

c) Giá trị nào của đa thức $7x+1$ nhỏ hơn giá trị của phân thức tương ứng $\frac{3x+2}{3}$.

d) Giá trị của phân thức $\frac{17-2x}{13}$ nhỏ hơn giá trị của đa thức tương ứng $x+4$

Câu 17. Dựa vào liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, chứng tỏ rằng hai bất phương trình sau tương đương: $x > 7 \Leftrightarrow x + m > 7 + m$ (m là số bất kì)

Câu 18. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{3+x}{4} + \frac{2-x}{3} < 0$

b) $x - \frac{x-3}{5} + \frac{2x-1}{10} < 4$

c) $\frac{4-y}{5} - 5y > 0$

d) $\frac{y-1}{2} - 1 + \frac{2y-1}{6} > y$

Câu 19. a) Với giá trị nào của x thì tổng hai phân thức $\frac{3x-1}{4}$ và $\frac{x-1}{5}$ là số dương?

b) Với giá trị nào của y thì hiệu hai phân thức $\frac{5y+1}{3}$ và $\frac{3-y}{5}$ là số âm?

Câu 20. Giải bất phương trình dạng $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) > 0$ (1) hoặc $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) < 0$ (2) với $a_1 < a_2 < a_3$

Câu 21. Giải các bất phương trình sau:

a) $(x-1)(x-3)(x-2) > 0$

b) $(x+2)(x-5)(x-6) < 0$

Câu 22. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geq \frac{1}{3}$.

Câu 23. Chứng minh rằng $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

Áp dụng : Cho $3x+4y=5$, chứng minh rằng $x^2+y^2 \geq 1$.

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $A = x^2 - 3x + 2$

b) $B = (x+y)^4 - 8(x+y)^2 + 17$

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

a) $C = -x^2 + 14x - 70$;

b) $D = -x^4 + 2x^2 + 9$

Câu 26. Giải bất phương trình

a) $\frac{x-5}{14} \leq \frac{3(1,5-2x)}{35}$

b) $\frac{2x-5}{4} > \frac{x+1}{2}$.

Câu 27. Cho bất phương trình $a^2x - ax > 3 - x$

a) Giải bất phương trình (1) khi $a = 2$.

b) Chứng minh rằng bất phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của a .

Câu 28. Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình :

$$(x-5)^2 < x^2 + x + 3 \quad (1) \qquad (x+1)(x-3) > x(x-4) \quad (2)$$

Câu 29. Tìm nghiệm nguyên dương của bất phương trình : $\frac{5x+1}{4} \leq \frac{5x+9}{6}$.

Câu 30. Giải bất phương trình : $\frac{x^2 - x + 5}{x^2 + x + 3} > 1$.

CHƯƠNG II. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Để giải phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$, ta giải hai phương trình $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$. Sau đó lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Ví dụ 1. Giải phương trình $(2x + 1)(3x - 1) = 0$.

Lời giải

Ta có $(2x + 1)(3x - 1) = 0$ nên $2x + 1 = 0$ hoặc $3x - 1 = 0$.

$$\cdot 2x + 1 = 0 \text{ hay } 2x = -1, \text{ suy ra } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\cdot 3x - 1 = 0 \text{ hay } 3x = 1, \text{ suy ra } x = \frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2 - x = -2x + 2$.

Lời giải

Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$x^2 - x = -2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) + 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0.$$

Ta giải hai phương trình sau:

$$\cdot x + 2 = 0 \text{ suy ra } x = -2.$$

$$x - 1 = 0 \text{ suy ra } x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2; x = 1$.

Nhận xét. Trong Ví dụ 2, ta thực hiện việc giải phương trình theo hai bước:

Bước 1. Đưa phương trình về phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$;

Bước 2. Giải phương trình tích tìm được.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thường đặt điều kiện cho ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 và gọi đó là điều kiện xác định (viết tắt là ĐKXĐ) của phương trình.

Ví dụ 3. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{5x + 2}{x - 1} = 0$;

b) $\frac{1}{x + 1} = 1 + \frac{1}{x - 2}$.

Lời giải

a) Vì $x - 1 \neq 0$ khi $x \neq 1$ nên ĐKXĐ của phương trình $\frac{5x + 2}{x - 1} = 0$ là $x \neq 1$.

b) Vì $x+1 \neq 0$ khi $x \neq -1$ và $x-2 \neq 0$ khi $x \neq 2$ nên ĐKXD của phương trình $\frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x-2}$ là $x \neq -1$ và $x \neq 2$.

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa tìm được.

Bước 4 (Kết luận). Trong các giá trị tìm được của ẩn ở Bước 3, giá trị nào thoả mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{(x+1)(x-2)}$. (3)

Lời giải

Điều kiện xác định $x \neq -1$ và $x \neq 2$.

Quy đồng mẫu và khử mẫu, ta được $\frac{2(x-2)+(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{(x+1)(x-2)}$, suy ra $2(x-2)+(x+1) = 3$
(3a)

Giải phương trình (3a) : $2(x-2)+(x+1) = 3 \Leftrightarrow 2x-4+x+1 = 3 \Leftrightarrow 3x-3 = 3 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Giá trị $x = 2$ không thoả mãn ĐKXD. Vậy phương trình (3) vô nghiệm.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.1. Giải các phương trình sau:

a) $x(x-2) = 0$;

b) $(2x+1)(3x-2) = 0$.

Lời giải

a) $x(x-2) = 0$. Suy ra $x = 0$ hoặc $x-2 = 0$. Do đó $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$ và $x = 2$.

b) $(2x+1)(3x-2) = 0$

Ta giải hai phương trình sau:

$2x+1 = 0$ hay $2x = -1$, suy ra $x = -\frac{1}{2}$.

$3x-2 = 0$ hay $3x = 2$, suy ra $x = \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ và $x = \frac{2}{3}$.

2.2. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 4) + x(x-2) = 0$;

b) $(2x+1)^2 - 9x^2 = 0$.

Lời giải

$$a) (x^2 - 4) + x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) + x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2 + x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x + 2) = 0$$

Ta giải hai phương trình sau:

$$x - 2 = 0, \text{ suy ra } x = 2.$$

$$2x + 2 = 0 \text{ hay } 2x = -2, \text{ suy ra } x = -1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2 ; x = -1$.

$$b) (2x + 1)^2 - 9x^2 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 - (3x)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1 - 3x)(2x + 1 + 3x) = 0 \Leftrightarrow (-x + 1)(5x + 1) = 0$$

Ta giải hai phương trình sau:

$$-x + 1 = 0, \text{ suy ra } x = 1.$$

$$5x + 1 = 0 \text{ hay } 5x = -1, \text{ suy ra } x = -\frac{1}{5}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1 ; x = -\frac{1}{5}$.

2.3. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{(2x+1)(x+1)};$$

$$b) \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3x}{x^3+1}.$$

Lời giải

$$a) \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{(2x+1)(x+1)};$$

Ta có:

$$2x + 1 \neq 0 \text{ khi } 2x \neq -1 \text{ hay } x \neq -\frac{1}{2}.$$

$$x + 1 \neq 0 \text{ khi } x \neq -1$$

Vì vậy, điều kiện xác định của phương trình đã cho là $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq -1$.

Quy đồng mẫu của phương trình, ta được:

$$\frac{2(x+1)}{(2x+1)(x+1)} + \frac{2x+1}{(2x+1)(x+1)} = \frac{3}{(2x+1)(x+1)} \Leftrightarrow \frac{2(x+1) + 2x+1}{(2x+1)(x+1)} = \frac{3}{(2x+1)(x+1)}$$

Khử mẫu của phương trình, ta được: $2(x+1) + 2x+1 = 3$.(*)

Giải phương trình (*): $2(x+1) + 2x+1 = 3 \Leftrightarrow 2x+2 + 2x+1 = 3 \Leftrightarrow 4x+3 = 3 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Giá trị $x = 0$ thỏa mãn điều kiện của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0$.

$$b) \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3x}{x^3+1}.$$

Ta có: $x+1 \neq 0$, suy ra $x \neq -1$

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Với mọi x ta luôn có $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, nên $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$.

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Khi đó $x^3 + 1 \neq 0$ khi $(x+1)(x^2 - x + 1) \neq 0$, hay $x+1 \neq 0$, tức là $x \neq -1$.

Vì vậy, điều kiện xác định của phương trình đã cho là $x \neq -1$.

Quy đồng mẫu của phương trình, ta được:

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{3x}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1 - x(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{3x}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

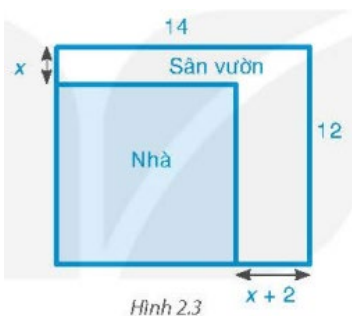
Khử mẫu của phương trình, ta được: $x^2 - x + 1 - x(x+1) = 3x$. (**)

Giải phương trình (**): $x^2 - x + 1 - x(x+1) = 3x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - x^2 - x - 3x = 0 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

Giá trị $x = \frac{1}{5}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{1}{5}$.

2.4. Bác An có một mảnh đất hình chữ nhật với chiều dài 14m và chiều rộng 12m. Bác dự định xây nhà trên mảnh đất đó và dành một phần diện tích đất để làm sân vườn như Hình 2.3. Biết diện tích đất làm nhà là 100m^2 . Hỏi x bằng bao nhiêu mét?



Lời giải

Chiều dài của phần đất làm nhà là: $14 - (x + 2) = 12 - x$ (m). Điều kiện $x < 12$. Chiều rộng của phần đất làm nhà là: $12 - x$ (m).

Diện tích đất làm nhà là: $(12-x)^2 (m^2)$.

Theo bài, diện tích đất làm nhà là $100 m^2$ nên ta có phương trình: $(12-x)^2 = 100$. (*)

Giải phương trình (*)

$$(12-x)^2 = 100 \Leftrightarrow (12-x)^2 - 10^2 = 0 \Leftrightarrow (12-x-10)(12-x+10) = 0 \Leftrightarrow (2-x)(22-x) = 0$$

Suy ra $2-x=0$ hoặc $22-x=0$. Do đó $x=2$ hoặc $x=22$. Ta thấy $x=2$ thỏa mãn điều kiện $x < 12$.

Vậy $x=2$.

2.5. Hai người cùng làm chung một công việc thì xong trong 8 giờ. Hai người cùng làm được 4 giờ thì người thứ nhất bị điều đi làm công việc khác. Người thứ hai tiếp tục làm việc trong 12 giờ nữa thì xong công việc. Gọi x là thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc (đơn vị tính là giờ, $x > 0$).

a) Hãy biểu thị theo x :

- Khối lượng công việc mà người thứ nhất làm được trong 1 giờ;
- Khối lượng công việc mà người thứ hai làm được trong 1 giờ.

b) Hãy lập phương trình theo x và giải phương trình đó. Sau đó cho biết, nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu mới xong công việc đó.

Lời giải

a) Do x là thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc (đơn vị tính là giờ, $x > 0$) nên khối lượng công việc mà người thứ nhất làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{x}$ (công việc).

Hai người cùng làm chung một công việc thì xong trong 8 giờ nên khối lượng công việc mà hai người làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{8}$ (công việc).

Khi đó, khối lượng công việc mà người thứ hai làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{8} - \frac{1}{x}$ (công việc).

b) Hai người cùng làm trong 4 giờ được khối lượng công việc là $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ (công việc).

Người thứ hai tiếp tục làm việc trong 12 giờ được khối lượng công việc là $12 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2} - \frac{12}{x}$ (công việc).

Theo bài, ta có phương trình: $\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{12}{x}\right) = 1$. (*)

Giải phương trình (*): $\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{12}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{12}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{2} - \frac{12}{x} = 1 \Leftrightarrow 2 - 1 = \frac{12}{x} \Leftrightarrow 1 = \frac{12}{x}$

Suy ra $x = 12$. Giá trị $x = 12$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$.

Khi đó, khối lượng công việc mà người thứ hai làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3}{24} - \frac{2}{24} = \frac{1}{24}$ (công việc).

Vậy nếu làm một mình, để hoàn thành công việc thì người thứ nhất cần 12 giờ và người thứ hai cần 24 giờ.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $A(x).B(x) = 0$

1. Phương pháp giải

- Giải hai phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$.
- Lấy tất cả các nghiệm thu được.
- Viết tập hợp nghiệm S .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình:

a) $(3x - 2)(4x + 5) = 0$;

b) $(2,3x - 6,9)(0,1x + 2) = 0$;

c) $(4x + 2)(x^2 + 1) = 0$;

d) $(2x + 7)(x - 5)(5x + 1) = 0$.

Lời giải

$$\text{a) } (3x - 2)(4x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 0 \\ 4x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ 4x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{5}{4}; \frac{2}{3} \right\}$.

$$\text{b) } (2,3x - 6,9)(0,1x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2,3x - 6,9 = 0 \\ 0,1x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,3x = 6,9 \\ 0,1x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -20 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-20; 3\}$.

$$\text{c) } (4x + 2)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x^2 = -1 \end{cases}. \text{ Ta thấy } x^2 = -1 \text{ vô nghiệm vì } x^2 \geq 0; \forall x.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

$$d) (2x+7)(x-5)(5x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7=0 \\ x-5=0 \\ 5x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{7}{2} \\ x=5 \\ x=-\frac{1}{5} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{7}{2}; 5; -\frac{1}{5}\right\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$a) (5x-3)\left(\frac{4x-1}{5}-\frac{2x+1}{3}\right)=0; \quad b) \left(\frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{3}\right)\left[\frac{2(x+1)}{5}-(2x+1)\right]=0.$$

Lời giải

a)

$$(5x-3)\left(\frac{4x-1}{5}-\frac{2x+1}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3=0 \\ \frac{4x-1}{5}-\frac{2x+1}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ 3(4x-1)-5(2x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ 12x-3-10x-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ 2x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ x=4 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{\frac{3}{5}; 4\right\}.$$

$$b) \left(\frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{3}\right)\left[\frac{2(x+1)}{5}-(2x+1)\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{3}=0 \\ \frac{2(x+1)}{5}-(2x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x-1)-3(1-x)=0 \\ 2x+2-5(2x+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2-3+3x=0 \\ 2x+2-10x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=5 \\ -8x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{7} \\ x=-\frac{3}{8} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{\frac{5}{7}; -\frac{3}{8}\right\}.$$

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

1. Phương pháp giải:

- Chuyển tất cả các số hạng sang về trái, về phải bằng 0.
- Rút gọn rồi phân tích đa thức thu được ở về trái thành nhân tử.
- Giải phương trình tích rồi kết luận.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Bằng cách phân tích về trái thành nhân tử, giải các phương trình sau:

$$a) 2x(x-3)+5(x-3)=0;$$

$$b) (x^2-4)+(x-2)(3-2x)=0;$$

$$c) x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0;$$

$$d) x(2x - 7) - 4x + 14 = 0;$$

$$e) (2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0;$$

$$f) x^2 - x - (3x - 3) = 0.$$

Lời giải

$$a) 2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{ 3; -\frac{5}{2} \right\}.$$

$$b) (x^2 - 4) + (x - 2)(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) + (x - 2)(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2 + 3 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(5 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 5 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{2; 5\}.$$

$$c) x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy } S = \{1\}.$$

d)

$$x(2x - 7) - 4x + 14 = 0 \Leftrightarrow x(2x - 7) - 2(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow (2x - 7)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 2; \frac{7}{2} \right\}.$$

e)

$$(2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5 - x - 2)(2x - 5 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(3x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 0 \\ 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{1; 7\}.$$

$$f) x^2 - x - (3x - 3) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - 3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}. \text{ Vậy}$$

$$S = \{1; 3\}.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$a) x(2x - 9) = 3x(x - 5);$$

$$b) 0,5x(x - 3) = (x - 3)(1,5x - 1);$$

$$c) 3x - 15 = 2x(x - 5);$$

$$d) \frac{3}{7}x - 1 = \frac{1}{7}x(3x - 7).$$

Lời giải

$$a) x(2x - 9) = 3x(x - 5) \Leftrightarrow x(2x - 9) - 3x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x(2x - 9 - 3x + 15) = 0 \Leftrightarrow x(-x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{0; 6\}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,5x(x-3) &= (x-3)(1,5x-1) \Leftrightarrow (x-3)0,5x - (x-3)(1,5x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(0,5x-1,5x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(-x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ -x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{1; 3\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3x-15 &= 2x(x-5) \Leftrightarrow 3(x-5) - 2x(x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ 3-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \\ \text{Vậy } S &= \left\{5; \frac{3}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{3}{7}x-1 &= \frac{1}{7}x(3x-7) \Leftrightarrow 3x-7 = x(3x-7) \Leftrightarrow (3x-7) - x(3x-7) = 0 \Leftrightarrow (3x-7)(1-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-7=0 \\ 1-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ x=1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{\frac{7}{3}; 1\right\}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (x^2 - 2x + 1) - 4 = 0; & \text{b) } x^2 - x = -2x + 2; \\ \text{c) } 4x^2 + 4x + 1 = x^2; & \text{d) } x^2 - 5x + 6 = 0. \end{array}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^2 - 2x + 1) - 4 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1-2)(x-1+2) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{3; -1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - x &= -2x + 2 \Leftrightarrow x(x-1) = -2(x-1) \Leftrightarrow x(x-1) + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{1; -2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4x^2 + 4x + 1 &= x^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (2x+1-x)(2x+1+x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 - 5x + 6 &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x-2) - 3(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{2; 3\}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$a) 2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x;$$

$$b) (3x-1)(x^2+2) = (3x-1)(7x-10).$$

Lời giải

$$a) 2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x \Leftrightarrow 2x^2(x+3) = x(x+3) \Leftrightarrow 2x^2(x+3) - x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x(x+3)(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+3=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{0; -3; \frac{1}{2}\right\}$$

$$b) (3x-1)(x^2+2) = (3x-1)(7x-10) \Leftrightarrow (3x-1)(x^2+2) - (3x-1)(7x-10) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x^2+2-7x+10) = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x^2-7x+12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ x^2-7x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x^2-3x-4x+12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x(x-3)-4(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ (x-3)(x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x-3=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x=3 \\ x=4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{1}{3}; 3; 4\right\}.$$

Tài liệu phát hành trên website Tailieuchuan.vn

DẠNG 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA ẨN Ở MẪU

1. Phương pháp giải

- Tìm ĐKXĐ.
- Quy đồng mẫu thức và bỏ mẫu thức.
- Giải phương trình không chứa ẩn ở mẫu.
- Kiểm tra ĐKXĐ.
- Viết tập nghiệm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

$$a) \frac{2x-5}{x+5} = 3;$$

$$b) \frac{x^2-6}{x} = x + \frac{3}{2};$$

$$c) \frac{(x^2+2x)-(3x+6)}{x-3} = 0;$$

$$d) \frac{5}{3x+2} = 2x-1.$$

Lời giải

$$a) \text{ĐKXĐ: } x \neq -5.$$

$$\frac{2x-5}{x+5} = 3 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+5} = \frac{3(x+5)}{x+5} \Leftrightarrow 2x-5 = 3(x+5) \text{ (khử mẫu: } x+5) \Leftrightarrow -x = 20 \Leftrightarrow x = -20 \text{ (thỏa ĐKXD)}.$$

Vậy $S = \{-20\}$.

b) ĐKXD: $x \neq 0$.

$$\frac{x^2-6}{x} = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x^2-6)}{2x} = \frac{2x^2+3x}{2x} \Leftrightarrow 2(x^2-6) = 2x^2+3x \text{ (khử mẫu } 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-12 = 2x^2+3x \Leftrightarrow -12 = 3x \Leftrightarrow x = -4 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}.$$

Vậy $S = \{-4\}$.

c) ĐKXD: $x \neq 3$.

$$\frac{(x^2+2x)-(3x+6)}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x(x+2)-3(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (vì } x \neq -3, \text{ theo ĐKXD)}$$

Vậy $S = \{-2\}$.

d) ĐKXD: $x \neq \frac{-2}{3}$.

$$\frac{5}{3x+2} = 2x-1 \Leftrightarrow 5 = (3x+2)(2x-1) \Leftrightarrow 5 = 6x^2+x-2 \Leftrightarrow 6x^2+x-7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-7}{6} \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}.$$

Vậy $S = \left\{1; \frac{-7}{6}\right\}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

a) $\frac{2x-1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1}$

b) $\frac{5x}{2x+2} + 1 = -\frac{6}{x+1}$

c) $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$

d) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x-3}{x} = 2$.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq 1$.

$$\frac{2x-1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow 3x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (không thỏa ĐKXD)}.$$

Vậy: $S = \emptyset$.

b) ĐKXĐ: $x \neq -1$.

$$\frac{5x}{2x+2} + 1 = -\frac{6}{x+1} \Leftrightarrow 5x + 2x + 2 = -12 \Leftrightarrow 7x = -14 \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy $S = \{-2\}$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 0$.

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 + x = x^4 + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^4 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3(1-x) - (1-x) = 0 \\ \Leftrightarrow (1-x)(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}.$$

Vậy: $S = \{1\}$.

d) ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

$$\frac{x+3}{x+1} + \frac{x-3}{x} = 2 \Leftrightarrow x(x+3) + (x-3)(x+1) = 2x(x+1) \Leftrightarrow x = -3 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}.$$

Vậy: $S = \{-3\}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$;

b) $\frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3}$;

c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$;

d) $2x - \frac{2x^2}{x+3} = \frac{4x}{x+3} + \frac{2}{7}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 2$.

$$\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1+3(x-2)}{x-2} = \frac{3-x}{x-2} \Leftrightarrow 1+3x-6 = 3-x \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (không thỏa mãn ĐKXĐ)}.$$

Vậy: $S = \emptyset$.

b) ĐKXĐ: $x \neq -7$ và $x \neq \frac{3}{2}$.

$$\frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3} \Leftrightarrow 6x^2 - 9x - 4x + 6 = 6x^2 + 42x + x + 7$$

$$\Leftrightarrow -9x - 4x - 42x - x = 7 - 6 \Leftrightarrow -56x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{56} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}.$$

Vậy: $S = \left\{-\frac{1}{56}\right\}$.

c) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2-1} = \frac{4}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn ĐKXD)}.$$

Vậy: $S = \emptyset$.

d) ĐKXD: $x \neq -3$

$$2x - \frac{2x^2}{x+3} = \frac{4x}{x+3} + \frac{2}{7} \Leftrightarrow 2x \cdot 7(x+3) - 7 \cdot 2x^2 = 7 \cdot 4x + 2(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 14x^2 + 42x - 14x^2 = 28x + 2x + 6 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}.$$

Vậy: $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Ví dụ 4.

$$\text{a) } \frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}$$

$$\text{b) } \frac{3}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$\text{c) } 1 + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{8+x^3}$$

$$\text{d) } \frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq 1$, MTC: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} - \frac{3x^2}{x^3 - 1} = \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 - 3x^2 = 2x^2 - 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 3x) + (x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1) + (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (không thỏa mãn ĐKXD)} \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy: $S = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$.

b) ĐKXD: $x \neq 1, x \neq 2$ và $x \neq 3$. MTC: $(x-1)(x-2)(x-3)$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-3) + 2(x-2) = x-1 \Leftrightarrow 3x-9+2x-4 = x-1 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (không thỏa mãn ĐKXD)}.$$

Vậy: $S = \emptyset$.

c) ĐKXD: $x \neq -2$, MTC: $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3 + 8} + \frac{x^2 - 2x + 4}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{12}{x^3 + 8}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8 + x^2 - 2x + 4 = 12 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x^2 - 1) + (x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x-1)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \text{ (không thỏa mãn DKXD) } \end{cases}$$

Vậy: $S = \{0; 1\}$.

d) ĐKXD: $x \neq \pm 3$ và $x \neq -\frac{7}{2}$, MTC: $(x-3)(x+3)(2x+7)$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{13(x+3)}{(x-3)(x+3)(2x+7)} + \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)(2x+7)} = \frac{6(2x+7)}{(x-3)(x+3)(2x+7)}$$

$$\Leftrightarrow 13(x+3) + (x-3)(x+3) = 6(2x+7) \Leftrightarrow 13x + 39 + x^2 - 9 = 12x + 42 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x(x-3) + 4(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ (không thuộc DKXD)} \\ x=-4 \end{cases}$$

Vậy: $S = \{-4\}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình:

a) $\left(\frac{1}{x} + 2\right) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1);$

b) $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2;$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq 0$.

$$\frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{1+2x}{x} = \frac{(1+2x)(x^2+1)}{x} \Leftrightarrow 1+2x = (1+2x)(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (1+2x)(x^2+1) - (1+2x) = 0 \Leftrightarrow (1+2x)(x^2+1-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+2x)x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (không thuộc DKXD) } \\ x=-1/2 \end{cases}$$

Vậy: $S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

DẠNG 4. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA A ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ BẰNG HẰNG SỐ K CHO TRƯỚC

1. Phương pháp giải

- Giả sử biểu thức chứa a là $A(a)$

- Muốn tìm giá trị của a để biểu thức $A(a)$ bằng k ta xem a như ẩn và giải phương trình $A(a) = k$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giá trị của a sao cho các biểu thức sau có giá trị bằng 2 :

a) $\frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3}$

b) $\frac{10}{3} - \frac{3a-1}{4a+12} - \frac{7a+2}{6a+18}$

Lời giải

a) Giải phương trình $\frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3} = 2$ với ẩn a .

ĐKXĐ: $a \neq -\frac{1}{3}$ và $a \neq -3$; MTC $(3a+1)(a+3)$.

$$\frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3} = 2 \Leftrightarrow \frac{(3a-1)(a+3) + (a-3)(3a+1)}{(3a+1)(a+3)} = \frac{2(3a+1)(a+3)}{(3a+1)(a+3)}$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)(a+3) + (a-3)(3a+1) = 2(3a+1)(a+3)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 9a - a - 3 + 3a^2 + a - 9a - 3 = 6a^2 + 18a + 2a + 6$$

$$\Rightarrow -20a = 12 \Leftrightarrow a = -\frac{12}{20} = -\frac{3}{5} \text{ (thuộc ĐKXĐ)}$$

Vậy với $a = -\frac{3}{5}$ thì $\frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3}$ có giá trị bằng 2.

b) Ta có $4a+12 = 4(a+3)$; $6a+18 = 6(a+3)$.

Ta giải phương trình: $\frac{10}{3} - \frac{3a-1}{4a+12} - \frac{7a+2}{6a+18} = 2$ (*)

ĐKXĐ: $a \neq -3$; MTC : $12(a+3)$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{40(a+3)}{12(a+3)} - \frac{3(3a-1)}{12(a+3)} - \frac{2(7a+2)}{12(a+3)} = \frac{24(a+3)}{12(a+3)} \Leftrightarrow 40(a+3) - 3(3a-1) - 2(7a+2) = 24(a+3)$$

$$\Leftrightarrow 40a + 120 - 9a + 3 - 14a - 4 = 24a + 72 \Leftrightarrow -7a = -47 \Leftrightarrow a = 47/7 \text{ (thuộc ĐKXĐ)}$$

Vậy với $a = \frac{47}{7}$ thì $\frac{10}{3} - \frac{3a-1}{4a+12} - \frac{7a+2}{6a+18}$ có giá trị bằng 2.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Giải các phương trình:

a) $(5x+2)(x-7)=0$;

b) $15(x+9)(x-3)(x+21)=0$;

c) $(x^2-1)(x+3)=0$;

d) $(x^2+1)(x^2+4x+4)=0$;

e) $x^2-x-6=0$;

g) $x^2+5x+6=0$;

h) $x^2+x-12=0$;

i) $x^4+2x^3-2x^2+2x-3=0$

Lời giải

a) $S = \left\{ -\frac{2}{5}; 7 \right\}$;

b) $S = \{-21; -9; 3\}$;

c) $S = \{-1; 1; -3\}$;

d) $S = \{-2\}$;

e) $(x+2)(x-3)=0$;

g) $(x+2)(x-3)=0$;

h) $(x-3)(x+4)=0$;

i) $(x-1)(x+3)(x^2+1)=0$

Câu 2. Giải các phương trình:

a) $(x-1)(x^2+5x-2)-x^3+1=0$;

b) $x^2+(x+2)(11x-7)=4$;

c) $x^3-x(x+1)+1=0$;

d) $x^3+x^2+x+1=0$

Lời giải

a) $(x-1)(x^2+5x-2)-(x^3-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)[(x^2+5x-2)-(x^2+x+1)]=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x-3)=0$

b) $(x^2-4)+(x+2)(11x-7)=0 \Leftrightarrow (x+2)(12x-9)=0$

c) $x^3+1-x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2=0$

d) $x^3+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)+(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=0$

Câu 3. Giải các phương trình:

a) $x^2-7x+6=0$;

b) $2x^2-3x+5=0$;

c) $4x^2-12x+5=0$

Lời giải

a) $S = \{1; 6\}$;

b) $S = \left\{ -1; \frac{5}{2} \right\}$;

c) $S = \left\{ \frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right\}$

Câu 4. Cho biểu thức: $A = (5x-3y+1)(7x+2y-2)$.a) Tìm x sao cho với $y=2$ thì $A=0$.b) Tìm y sao cho với $x=-2$ thì $A=0$ **Lời giải**

a) $x=1; x=-\frac{2}{7}$;

b) $y=-3; y=8$

Câu 5. Giải các phương trình :

a) $9x(3x-7)(5x+6) = 0$;

b) $\left(\frac{4x+1}{3}+1\right)\left(\frac{8x-3}{7}-3\right) = 0$

Lời giải

a) $S = \left\{0; \frac{7}{3}; -\frac{6}{5}\right\}$;

b) $S = \{-1; 3\}$.

Câu 6. Giải các phương trình :

a) $x^2 - (x+3)(2x-11) = 9$:

b) $(x-2)(x^2-3x+1)+8 = x^3$.

Lời giải

a) $(x+3)(x-3) - (x+3)(2x-11) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(-x+8) = 0$. Vậy $S = \{-3; 8\}$

b) $(x-2)(x^2-3x+1) - (x^3-8) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(-5x-3) = 0$. Vậy $S = \left\{2; -\frac{3}{5}\right\}$

Câu 7. Giải các phương trình :

a) $3x^2 - 4x - 4 = 0$:

b) $x^3 - 3x + 2 = 0$

Lời giải

a) $(x-2)(3x+2) = 0$. Vậy $S = \left\{2; -\frac{2}{3}\right\}$

b) $(x-1)(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0$; Vậy $S = \{1; -2\}$

Câu 8. Cho biểu thức $P = (8x+5y-4)(x-3y+6) = 0$.

a) Tìm các giá trị của x sao cho với $y = 4$ thì $P = 0$;

b) Tìm các giá trị của y sao cho với $x = -1$ thì $P = 0$.

Lời giải

a) Với $y = 4$ ta có: $(8x+20-4)(x-12+6) = 0 \Leftrightarrow (8x+16)(x-6) = 0 \Rightarrow x \in \{-2; 6\}$

b) Với $x = -1$ ta có: $(-8+5y-4)(-1-3y+6) = 0 \Leftrightarrow (5y-12)(-3y+5) = 0 \Rightarrow y \in \left\{\frac{12}{5}; \frac{5}{3}\right\}$.

Câu 9*. Cho phương trình : $2x^3 + 5x^2 - 8x - 4m = 0$ (1)

Biết $x = -2$ là một nghiệm của phương trình (1). Tìm các nghiệm còn lại của phương trình đó.

Lời giải

Thay $x = -2$ vào phương trình đã cho ta được: $-16 + 20 + 16 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 5$.

Với $m = 5$ thì phương trình đã cho trở thành: $2x^3 + 5x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow (2x+5)(x+2)(x-2) = 0$

$S = \left\{-\frac{5}{2}; -2; 2\right\}$

Vậy các nghiệm còn lại là $x = -\frac{5}{2}$ và $x = 2$.

Tài liệu phát hành trên website Tailieuchuan.vn

Câu 10. Giải phương trình:

a) $\frac{4x-8}{2x^2+1} = 0;$

b) $\frac{x^2-x-6}{x-3} = 0$

c) $\frac{x+5}{3x-6} - \frac{1}{2} = \frac{2x-3}{2x-4}$

d) $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} - \frac{1+3x}{1-3x}.$

Lời giải

a) $x = 2;$

b) $x = -2;$

c) $x = 25/7;$

d) $x = -1.$

Câu 11. Giải các phương trình:

a) $5 + \frac{96}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x};$

b) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{12}{x^2-4} + 1;$

c) $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}.$

Lời giải

a) MTC : $x^2-16; S = \{8\}.$

b) MTC : $9x^2-4; S = \{8/3\}.$

c) MTC : $x(x^4+x^2+1) = x[(x^2+1)^2-x^2] = x(x^2+x+1)(x^2-x+1).$

Vậy $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

Câu 12. Giải các phương trình:

a) $\frac{x+5}{x-1} = \frac{x+1}{x-3} - \frac{8}{x^2-4x+3};$

b) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{12}{x^2-4} + 1.$

Lời giải

a) MTC: $(x-1)(x-3); S = \emptyset.$

b) MTC : $x^2-4; S = \emptyset.$

Câu 13. Với giá trị nào của a để các biểu thức sau có giá trị bằng 2 :

a) $\frac{2a-9}{2a-5} + \frac{3a}{3a-2}$

b) $\frac{3a+2}{3a+4} + \frac{a-2}{a+4}.$

Lời giải

a) $a = -\frac{1}{4};$

b) $a = -\frac{8}{5}.$

Câu 14. Cho phương trình ẩn x :

a) Giải phương trình với $a = -3$.

b) Giải phương trình với $a = 1$.

c) Xác định a để phương trình có nghiệm $x = 0,5$.

Lời giải

a) Thay $a = -3$ ta có phương trình $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} + \frac{24}{x^2-9} = 0$.

Vậy $S = \{-2\}$.

b) $S = \emptyset$.

c) Thay $x = \frac{1}{2}$ được phương trình ẩn a . Giải được $a = 0, a = \frac{1}{3}$

Câu 15. Định a và b để phương trình $(x-1)a + (2x+1)b = x+2$ có tập nghiệm là \mathbb{R} (vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$).

Lời giải

$$(x-1)a + (2x+1)b = x+2 \Leftrightarrow (a+2b-1)x = a-b+2.$$

$$S = \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-1=0 \\ a-b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1. \end{cases}$$

Câu 16. Định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

ĐKXĐ : $x \neq m$ và $x \neq 1$.

$$\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow mx = -m+2.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-m}{m} \neq m \\ \frac{2-m}{m} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$$

Câu 17. Định m để phương trình sau vô nghiệm: $\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$

Lời giải

$$m = 1; m = 3.$$

Câu 18. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{6}{3x+1}$$

$$b) \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} = \frac{10}{(x+3)(x-1)}$$

Lời giải

$$a) x = 5;$$

$$b) x = 4,$$

Câu 19. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^2-x+1} = \frac{2x^2+1}{x^3+1};$$

$$b) \frac{3x+1}{x+1} - \frac{2x-5}{x-3} = 1 - \frac{4}{(x+1)(x-3)}$$

Lời giải

$$a) \text{DKXD: } x \neq -1, \text{ Biến đổi phương trình về dạng: } x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Giá trị $x = -1$ bị loại. Đáp số : $S = \{-4\}$.

$$b) \text{ĐKXD: } x \neq -1; x \neq 3.$$

Biến đổi phương trình về dạng : $3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$ (loại).

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 20. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{2x-7} = \frac{13}{(x+3)(2x-7)};$$

$$b) \frac{2(x-5)}{x^2+4x+3} = \frac{x-5}{x^2+5x+6}$$

Lời giải

$$a) x \neq \pm 3; x \neq \frac{7}{2}. \text{ Biến đổi phương trình về dạng } x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Giá trị $x = -3$ bị loại. Đáp số : $S = \{2\}$.

$$b) \text{ĐKXD: } x \neq -1; x \neq -2; x \neq -3.$$

Biến đổi phương trình về dạng :

$$(x-5) \cdot \left[\frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{2}{(x+1)(x+3)} \right] = 0$$

$$(x-5)(-x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}. \text{ Giá trị } x = -3 \text{ bị loại. Đáp số: } S = \{5\}$$

Câu 21. Cho phương trình $\frac{1}{x+1} - \frac{2x^2-m}{x^3+1} = \frac{4}{x^2-x+1}$.

Biết $x = 0$ là một nghiệm của phương trình. Tìm các nghiệm còn lại.

Lời giải

- Thay $x = 0$ vào phương trình đã cho ta được $m = 3$.

- Thay $m = 3$ vào phương trình đã cho được : $\frac{1}{x+1} - \frac{2x^2-3}{x^3+1} = \frac{4}{x^2-x+1}$

ĐKXĐ : $x \neq -1$.

Giải ra được $x = 0$ hoặc $x = -5$. Đáp số : $x = -5$.

Câu 22*. Cho hai biểu thức $A = \frac{x+1}{2x-3}$; $B = \frac{3x}{x^2-4}$, với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có cùng một giá trị ?

Lời giải

$$A = B \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x-3} = \frac{3x}{x^2-4}$$

ĐKXĐ : $x \neq \pm 2$; $x \neq \frac{3}{2}$. Biến đổi phương trình về dạng :

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x^2 + 4x + x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}. \text{ Đáp số : } x = 4 .$$

BÀI 5. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BẤT ĐẲNG THỨC

Nhắc lại thứ tự trên tập số thực:

Trên tập số thực, với hai số a và b có ba trường hợp sau:

- a) Số a bằng số b , kí hiệu $a = b$;
- b) Số a lớn hơn số b , kí hiệu $a > b$;
- c) Số a nhỏ hơn số b , kí hiệu $a < b$.

Số a lớn hơn hoặc bằng số b , tức là $a > b$ hoặc $a = b$, kí hiệu là $a \geq b$.

Số a nhỏ hơn hoặc bằng số b , tức là $a < b$ hoặc $a = b$, kí hiệu là $a \leq b$.

Khái niệm bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Chú ý

Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-3 < -2$ (hay $6 > 3$ và $8 > 5$) được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-2 > -3$ (hay $6 > 3$ và $5 < 8$) được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.

Ví dụ 1. Xác định vế trái và vế phải của các bất đẳng thức sau:

- a) $-2 > -7$;
- b) $a^2 + 1 > 0$.

Lời giải

- a) Vế trái là -2 , vế phải là -7 .
- b) Vế trái là $a^2 + 1$, vế phải là 0 .

Ví dụ 2. Viết bất đẳng thức để mô tả mỗi tình huống sau:

- a) Tuần tới, nhiệt độ t ($^{\circ}\text{C}$) tại Tokyo là trên -5°C .
- b) Nhiệt độ t ($^{\circ}\text{C}$) bảo quản của một loại sữa là dưới 4°C .
- c) Để được điều khiển xe máy điện thì số tuổi x của một người phải ít nhất là 16 tuổi.

Lời giải

- a) $t > -5$;
- b) $t < 4$;
- c) $x \geq 16$.

Bất đẳng thức có tính chất quan trọng sau:

Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu của bất đẳng thức).

Chú ý. Tương tự, các thứ tự lớn hơn ($>$), lớn hơn hoặc bằng (\geq) nhỏ hơn hoặc bằng (\leq) cũng có tính chất bắc cầu.

Ví dụ 3. Chứng minh $\frac{2024}{2023} > \frac{2021}{2022}$.

Lời giải

Ta có $\frac{2024}{2023} = 1 + \frac{1}{2023} > 1$ và $\frac{2021}{2022} = 1 - \frac{1}{2022} < 1$ nên $\frac{2024}{2023} > \frac{2021}{2022}$.

II. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Ví dụ 4. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh $2023 + (-19)$ và $2024 + (-19)$.

Lời giải

Vì $2023 < 2024$ nên $2023 + (-19) < 2024 + (-19) \leftarrow$ cộng vào hai vế với cùng một số -19 .

III. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

- Với ba số a, b, c và $c > 0$, ta có:

Nếu $a < b$ thì $ac < bc$;

Nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$;

Nếu $a > b$ thì $ac > bc$;

Nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$.

- Với ba số a, b, c và $c < 0$, ta có:

Nếu $a < b$ thì $ac > bc$;

Nếu $a \leq b$ thì $ac \geq bc$;

Nếu $a > b$ thì $ac < bc$;

Nếu $a \geq b$ thì $ac \leq bc$.

Ví dụ 5. Thay ? trong các biểu thức sau bởi dấu thích hợp ($<$, $>$) để được khẳng định đúng.

a) $3 \cdot (-7) ? 3 \cdot (-5)$

b) $(-3) \cdot (-7) ? (-3) \cdot (-5)$.

Lời giải

a) Vì $-7 < -5$ và $3 > 0$ nên $3 \cdot (-7) < 3 \cdot (-5) \leftarrow$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số dương.

b) Vì $-7 < -5$ và $-3 < 0$ nên $(-3) \cdot (-7) > (-3) \cdot (-5) \leftarrow$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số âm.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.6. Dùng kí hiệu để viết bất đẳng thức tương ứng với mỗi trường hợp sau:

a) x nhỏ hơn hoặc bằng -2 ;

b) m là số âm;

c) y là số dương;

d) p lớn hơn hoặc bằng 2024 .

Lời giải

- a) $x \leq -2$; b) $m < 0$; c) $y > 0$; d) $p \geq 2024$.

2.7. Viết một bất đẳng thức phù hợp trong mỗi trường hợp sau:

- a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô;
b) Xe buýt chở được tối đa 45 người;
c) Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20000 đồng.

Lời giải

- a) Gọi x (tuổi) là số tuổi của bạn, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho "Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô" là $x \geq 18$.
b) Gọi y (người) là số người xe buýt có thể chở được, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho "Xe buýt chở được tối đa 45 người" là $y \leq 45$.
c) Gọi z (đồng) là mức lương cho một giờ làm việc của người lao động, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho "Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20000 đồng" là $z \geq 20000$.

2.8. Không thực hiện phép tính, hãy chứng minh:

- a) $2 \cdot (-7) + 2023 < 2 \cdot (-1) + 2023$; b) $(-3) \cdot (-8) + 1975 > (-3) \cdot (-7) + 1975$.

Lời giải

- a) Vì $-7 < -1$ nên $2 \cdot (-7) < 2 \cdot (-1)$. Do đó $2 \cdot (-7) + 2023 < 2 \cdot (-1) + 2023$.
b) Vì $-8 < -7$ nên $(-3) \cdot (-8) > (-3) \cdot (-7)$. Do đó $(-3) \cdot (-8) + 1975 > (-3) \cdot (-7) + 1975$.

2.9. Cho $a < b$, hãy so sánh:

- a) $5a + 7$ và $5b + 7$; b) $-3a - 9$ và $-3b - 9$.

Lời giải

- a) Vì $a < b$ nên $5a < 5b$, suy ra $5a + 7 < 5b + 7$. Vậy $5a + 7 < 5b + 7$.
b) Vì $a < b$ nên $-3a > -3b$, suy ra $-3a - 9 > -3b - 9$. Vậy $-3a - 9 > -3b - 9$.

2.10. So sánh hai số a và b , nếu:

- a) $a + 1954 < b + 1954$ b) $-2a > -2b$.

Lời giải

- a) Ta có: $a + 1954 < b + 1954$. Suy ra: $a + 1954 - 1954 < b + 1954 - 1954$ hay $a < b$. Vậy $a < b$.
b) Ta có: $-2a > -2b$ nên $-2a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) < -2b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, hay $a < b$. Vậy $a < b$.

2.11. Chứng minh rằng:

- a) $-\frac{2023}{2024} > -\frac{2024}{2023}$; b) $\frac{34}{11} > \frac{26}{9}$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{2023}{2024} = \frac{2024-1}{2024} = 1 - \frac{1}{2024} < 1$ và $\frac{2024}{2023} = \frac{2023+1}{2023} = 1 + \frac{1}{2023} > 1$

Suy ra $\frac{2023}{2024} < \frac{2024}{2023}$, do đó $-\frac{2023}{2024} > -\frac{2024}{2023}$.

b) Ta có $\frac{34}{11} = \frac{33+1}{11} = 3 + \frac{1}{11} > 3$ và $\frac{26}{9} = \frac{27-1}{9} = 3 - \frac{1}{9} < 3$. Suy ra $\frac{34}{11} > \frac{26}{9}$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐÚNG SAI CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

1. Phương pháp giải

- Vận dụng thứ tự trên tập hợp số.
- Vận dụng liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Mỗi bất đẳng thức sau đúng hay sai ?

a) $5 + (-8) < 1$;

b) $(-2) \cdot (-7) > (-5) \cdot (-3)$.

Lời giải

a) $5 + (-8) < 1$ đúng vì $-3 < 1$ là bất đẳng thức đúng.

b) $(-2) \cdot (-7) > (-5) \cdot (-3)$ sai vì $14 > 15$ là bất đẳng thức sai.

Ví dụ 2. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $(-7)^2 - 9 \leq (-10) \cdot (-4)$;

b) Thương của 15 và -6 nhỏ hơn thương của -12 và 4 ?

Lời giải

a) $(-7)^2 - 9 = 40$; $(-10) \cdot (-4) = 40$. Vậy $(-7)^2 - 9 \leq (-10) \cdot (-4)$ là bất đẳng thức đúng.

b) $15 : (-6) = -2,5$; $(-12) : 4 = -3$. Vì $-2,5 > -3$ nên bất đẳng thức $15 : (-6) < (-12) : 4$ là bất đẳng thức sai.

Ví dụ 3. Mỗi bất đẳng thức sau đúng hay sai ? Giải thích.

a) $x^2 + 3 \geq 3$;

b) $-x^2 + 1 \leq 1$;

c) $-(x+2)^2 - 5 \leq -5$

Lời giải

a) Ta có $x^2 \geq 0$ với mọi x . Cộng thêm 3 vào hai vế ta được $x^2 + 3 \geq 3$. Vậy bất đẳng thức $x^2 + 3 \geq 3$ đúng.

b) Ta có $-x^2 \leq 0$ với mọi x . Cộng thêm 1 vào hai vế ta được $-x^2 + 1 \leq 1$. Vậy bất đẳng thức $-x^2 + 1 \leq 1$ đúng.

c) Ta có $-(x+2)^2 \leq 0$ với mọi x . Cộng thêm -5 vào hai vế ta được $-(x+2)^2 - 5 \leq -5$.

Vậy bất đẳng thức $-(x+2)^2 - 5 \leq -5$ đúng.

DẠNG 2. SO SÁNH HAI SỐ

1. Phương pháp giải

Vận dụng liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho $a < b$, hãy so sánh :

a) $a-3$ và $b-3$

b) $-5a+1$ và $-5b+1$

Lời giải

a) Ta có $a < b$. Cộng thêm -3 vào hai vế ta được $a-3 < b-3$.

b) Ta có $a < b$. Nhân hai vế với -5 ta được $-5.a > -5.b$. Cộng thêm 1 vào hai vế ta được $-5a+1 > -5b+1$.

Ví dụ 2. Cho số a bất kì, hãy so sánh :

a) a và $a-4$;

b) $a-7$ và $a+5$.

Lời giải

a) Ta có $0 > -4$. Cộng thêm a vào hai vế ta được $a > a-4$.

a) Ta có $-7 < 5$. Cộng thêm a vào hai vế ta được $a-7 < a+5$.

Ví dụ 3. Cho số m bất kì, hãy so sánh m^2 với m .

Lời giải

- Trường hợp $m < 0$ thì $m^2 > 0$, do đó $m^2 > m$.

- Trường hợp $m = 0$ thì $m^2 = 0$, do đó $m^2 = m$.

- Trường hợp $0 < m < 1$. Nhân hai vế với $m > 0$ ta được $m^2 < m$.

- Trường hợp $m = 1$ thì $m^2 = 1$, do đó $m^2 = m$.

- Trường hợp $m > 1$. Nhân hai vế với m ta được $m^2 > m$.

Tóm lại :

- Nếu $m = 0$ hoặc $m = 1$ thì $m^2 = m$.

- Nếu $m < 0$ hoặc $m > 1$ thì $m^2 > m$.

- Nếu $0 < m < 1$ thì $m^2 < m$.

Nhận xét: Qua kết quả trên ta thấy khẳng định m^2 luôn luôn lớn hơn m là một khẳng định sai.

DẠNG 3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Phương pháp giải

Cách 1. Để chứng minh $A > B$ ta chứng minh $A - B > 0$.

Để chứng minh $A < B$ ta chứng minh $A - B < 0$.

Cách 2. Dùng phương pháp biến đổi tương đương : $A > B \Leftrightarrow C > D \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow M > N$.

Nếu $M > N$ đúng thì $A > B$ đúng.

Cách 3. Dùng các tính chất của bất đẳng thức

Từ bất đẳng thức đã biết, ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Lời giải

Xét hiệu $(a^2 + b^2) - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Vậy $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$).

Ví dụ 2. Cho $a > 0; b > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{ab} \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$).

Ví dụ 3. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Lời giải

Ta có $a > b > 0$ nên $ab > 0$, do đó $\frac{1}{ab} > 0$.

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $a > b$ với số dương $\frac{1}{ab}$ ta được : $a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab}$ hay $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Do

đó $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Ví dụ 4. Cho $a > b$ và $m > n$. Chứng minh rằng $a + m > b + n$.

Lời giải

Ta có $a > b$. Cộng m vào hai vế ta được $a + m > b + m$ (1)

Ta có $m > n$. Cộng b vào hai vế ta được: $b + m > b + n$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $a + m > b + n$ (tính chất bắc cầu)

Ví dụ 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$.

Lời giải

$$\text{Xét vế trái : } T = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right).$$

$T \geq 2 + 2 + 2$ (Áp dụng kết quả ở ví dụ 2) $\Leftrightarrow T \geq 6$. (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$).

DẠNG 4. ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

1. Phương pháp giải

- Nếu $f(x) \geq k$ (k là hằng số) và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là k khi và chỉ khi $x = a$. Ta viết $\min f(x) = k$ khi và chỉ khi $x = a$.

- Nếu $f(x) \leq k$ (k là hằng số) và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là k khi và chỉ khi $x = a$. Ta viết $\max f(x) = k$ khi và chỉ khi $x = a$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - 6x + 10$

Lời giải

Ta có: $A = x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1 \geq 1$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$).

Do đó $\min A = 1$ khi và chỉ khi $x = 3$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 5x^2 - 10x + 3$.

Lời giải

$B = 5x^2 - 10x + 3 = 5x^2 - 10x + 5 - 2 = 5(x^2 - 2x + 1) - 2 = 5(x-1)^2 - 2 \geq -2$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$).

Vậy $\min B = -2$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = -x^2 + 5x - 4$.

Lời giải

$$C = -x^2 + 5x - 4 = -(x^2 - 5x + 4) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4\right) = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]$$

$$= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4} \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{5}{2}\text{)}$$

Vậy $\max C = \frac{9}{4}$ khi $x = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D = 5 - x - \frac{1}{x}$ với $x > 0$.

Lời giải

Ta có: $D = 5 - x - \frac{1}{x} = 5 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$. Vì $x + \frac{1}{x} \geq 2$ nên $D \leq 3$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$).

Vậy $\max D = 3$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = 2x^2 + 8x + y^2 - 10y + 43$.

Lời giải

Ta có: $E = 2x^2 + 8x + y^2 - 10y + 43 = 2x^2 + 8x + 8 + y^2 - 10y + 25 + 10$
 $= 2(x^2 + 4x + 4) + (y - 5)^2 + 10$
 $= 2(x + 2)^2 + (y - 5)^2 + 10 \geq 10$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -2$ và $y = 5$).

Vậy $\min E = 10$ khi và chỉ khi $x = -2$ và $y = 5$.

Ví dụ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{2x-1}{x^2+2}$.

Lời giải

Ta có $F = \frac{2x-1}{x^2+2} = \frac{x^2+2x+1-x^2-2}{x^2+2} = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} - \frac{x^2+2}{x^2+2} = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} - 1 \geq -1$. (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$)

Vậy $\min F = -1$ khi và chỉ khi $x = -1$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Bất đẳng thức nào biểu thị đúng thứ tự các số? Vì sao?

- a) $-7 \leq -6 - 1$;
- b) $5(-3) > -16$;
- c) $12 < (-3).5$;
- d) $4(-2) > (-7)(-2)$

Lời giải

- a) Đúng.
- b) Đúng.
- c) Sai.
- d) Sai.

Câu 2.

- a) So sánh $a - 1$ và a ; $-2b$ và $-2b + 1$.
- b) Cho $a < b$ so sánh $2a$ và $2b + 1$; $-3a$ và $-3b - 1$.

Lời giải

- a) $a - 1 < a$; $-2b < -2b + 1$.
- b) $2a < 2b + 1$; $-3a > -3b - 1$.

Câu 3.

- a) Cho $a \neq 0$, hãy so sánh a^2 và 0 ; $-a^2$ và 0 .

b) So sánh $a^2 + 1$ và 0 ; $-a^2 - 3$ và 0 .

Lời giải

a) $a^2 > 0$; $-a^2 < 0$.

b) $a^2 + 1 > 0$; $-a^2 - 3 < 0$.

Câu 4. Cho $0 < a < b$, hãy so sánh :

a) a^2 và ab ; b^2 và ab .

b) a^2 và b^2 ; a^3 và b^3 .

Lời giải

a) $a^2 < ab$; $ab < b^2$. b) $a^2 < b^2$; $a^3 < b^3$.

Câu 5. So sánh $2m$ với m .

Lời giải

Bạn phải xét ba trường hợp : $m = 0$; $m > 0$; $m < 0$.

Câu 6. Cho $a + 3 > b + 3$. Chứng minh rằng $-2a + 1 < -2b + 1$.

Lời giải

Ta có $a + 3 > b + 3 \Rightarrow a > b \Rightarrow -2a < -2b \Rightarrow -2a + 1 < -2b + 1$.

Câu 7. Cho $x > 0$ và $y < 0$. Chứng minh rằng $x^2y - xy^2 < 0$.

Lời giải

$x^2y - xy^2 = xy(x - y)$. Sau đó xét dấu của tích xy , xét dấu của hiệu $x - y$.

Câu 8. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $a < \frac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

Ta có $a < b + c$ (bất đẳng thức tam giác). $\Rightarrow 2a < a + b + c \Rightarrow a < \frac{a+b+c}{2}$.

Câu 9. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$.

Lời giải

a) $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

b) Ta có $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$. Do đó $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$).

Câu 10*. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $A = 2x^2 + 28x + 101$

b) $B = \frac{(x+1)^2}{x}$ với $x > 0$.

Lời giải

a) $A = 2x^2 + 28x + 98 + 3 = 2(x+7)^2 + 3 \geq 3$. Do đó $\min A = 3$ khi và chỉ khi $x = -7$.

b) $B = \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + 2$. Vì $x > 0$ nên $x + \frac{1}{x} \geq 2$, do đó $B \geq 4$.

Vậy $\min B = 4$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 11*. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

a) $C = -x^2 + 5x$

b) $D = 2(1-x)(2x-1)$.

Lời giải

a) $C = -x^2 + 5x = -(x^2 - 5x) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right)$
 $= -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$

Do đó $\max C = \frac{25}{4}$ khi và chỉ khi $x = \frac{5}{2}$.

b) $D = (2-2x)(2x-1) \leq \frac{[(2-2x)+(2x-1)]^2}{4} \Leftrightarrow D \leq \frac{1}{4}$.

Do đó $\max D = \frac{1}{4}$ khi và chỉ khi $2-2x = 2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Câu 12. Cho $a > b > 0$, chứng minh $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Lời giải

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

Câu 13.

a) Cho $a < b$ và $c < d$, chứng minh $a + c < b + d$.

b) a, b, c, d dương và $a < b, c < d$. Chứng minh $ac < bd$.

Lời giải

a) $\left. \begin{matrix} a < b \Rightarrow a + c < b + c \\ c < d \Rightarrow c + b < d + b \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c < b + d$.

b) $\left. \begin{matrix} a < b \Rightarrow ac < bc \\ c < d \Rightarrow bc < bd \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac < bd$.

Câu 14. Chứng minh các bất đẳng thức :

$$a) (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$$

$$b) x^2+y^2+z^2+3 \geq 2(x+y+z)$$

$$c) \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

Lời giải

$$a) (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2.$$

$$b) x^2+y^2+z^2+3 \geq 2(x+y+z) \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \geq 0.$$

$$c) \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0.$$

Câu 15. Cho a, b cùng dấu, hãy so sánh hai số $(1+a)(1+b)$ và $1+a+b$

Lời giải

$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab > 1+a+b$$

Câu 16. Chứng minh rằng nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau. Áp dụng : Tìm giá trị lớn nhất của $A = (1-x)(2-x)$ với $\frac{1}{2} < x < 1$.

Lời giải

Giả sử $x, y > 0$ và $x+y=k$ (không đổi). Ta có : $(x-y)+4xy = (x+y)^2 = k^2 \Rightarrow xy \leq \frac{k^2}{4}$.

$$A = \frac{1}{2}(2-2x)(2x-1) : \max A = \frac{1}{8}$$

Câu 17. Chứng minh rằng : Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau. Áp dụng : Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$a) B = \frac{(x+1)^2}{x} \text{ (với } x > 0 \text{) ;}$$

$$b) C = x + \frac{1}{x-1} \text{ (với } x > 1 \text{) .}$$

Lời giải

$$a) B = x + \frac{1}{x} + 2 \geq 4; \min B = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$b) C = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 3; \min C = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $D = \frac{4x+3}{x^2+1}$.

Lời giải

$$D = \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 1} - 1 \geq -1.$$

$$D = \frac{4(x^2 + 1) - (4x^2 - 4x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x-1)^2}{x^2 + 1} \leq 4.$$

$$\min D = -1, \max D = 4$$

BÀI 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0; ax + b \leq 0; ax + b \geq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$ được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .

Ví dụ 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn x ?

- a) $3x + 16 \leq 0$; b) $-5x + 5 > 0$; c) $x^2 - 4 > 0$ d) $-3x < 0$.

Lời giải

a), b), d) là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .

c) không là bất phương trình bậc nhất một ẩn x vì $x^2 - 4$ là một đa thức bậc hai.

Nghiệm của bất phương trình

- Số x_0 là một nghiệm của bất phương trình $A(x) < B(x)$ nếu $A(x_0) < B(x_0)$ là khẳng định đúng.

- Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

II. CÁCH GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b < 0 (a \neq 0)$ được giải như sau: $ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b$

- Nếu $a > 0$ thì $x < -\frac{b}{a}$.

- Nếu $a < 0$ thì $x > -\frac{b}{a}$.

Chú ý. Các bất phương trình $ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$ được giải tương tự.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $-2x - 4 > 0$.

Lời giải

Ta có $-2x - 4 > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 + 4 \leftarrow$ Cộng hai vế của bất phương trình với 4.

$\Leftrightarrow -2x > 4 \Leftrightarrow x < 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \leftarrow$ nhân hai vế với số âm $-\frac{1}{2}$ và đổi chiều bất đẳng thức. $x < -2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -2$.

Ví dụ 3. Bạn Thanh có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 7 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

Lời giải

Gọi x (quyển) là số vở mà Thanh có thể mua. Theo bài ra, ta có bất phương trình:

$$7x + 18 \leq 100 \Leftrightarrow 7x \leq 100 - 18 \Leftrightarrow 7x \leq 82 \Leftrightarrow x \leq \frac{82}{7}$$

Vì số vở là số tự nhiên nên Thanh có thể mua nhiều nhất 11 quyển vở.

Chú ý. Ta cũng có thể giải được các bất phương trình một ẩn đưa được về dạng $ax+b < 0$, $ax+b > 0$, $ax+b \leq 0$, $ax+b \geq 0$.

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình:

a) $2x+5 < 3x-4$;

b) $-3x+5 \geq -4x+3$.

Lời giải

a) Ta có $2x+5 < 3x-4 \Leftrightarrow 2x-3x < -4-5 \Leftrightarrow -x < -9 \Leftrightarrow x > 9$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 9$.

b) Ta có: $-3x+5 \geq -4x+3 \Leftrightarrow -3x+4x \geq 3-5 \Leftrightarrow x \geq -2$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -2$.

Ví dụ 5. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là 7,4%/ năm. Bà Mai dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hằng năm ít nhất là 60 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Mai cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là số tiền bà Mai cần gửi tiết kiệm. Ta có số tiền lãi gửi tiết kiệm x (triệu đồng) trong một năm là $0,074 \cdot x$ (triệu đồng).

Để có số tiền lãi ít nhất là 60 triệu đồng/năm thì ta phải có: $0,074x \geq 60 \Leftrightarrow x \geq 60 : 0,074$
 $\Leftrightarrow x \geq 810,81$.

Vậy bà Mai cần gửi ngân hàng ít nhất 811 triệu đồng.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.16. Giải các bất phương trình sau:

a) $x-5 \geq 0$;

b) $x+5 \leq 0$;

c) $-2x-6 > 0$;

d) $4x-12 < 0$.

Lời giải

a) $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq 5$.

b) $x+5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -5$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \leq -5$.

c) $-2x-6 > 0 \Leftrightarrow -2x > 6 \Leftrightarrow x < -3$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -3$.

d) $4x-12 < 0 \Leftrightarrow 4x < 12 \Leftrightarrow x < 3$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 3$.

2.17. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x+2 > 2x+3$;

b) $5x+4 < -3x-2$.

Lời giải

a) $3x + 2 > 2x + 3 \Leftrightarrow 3x - 2x > 3 - 2 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 1$.

b) $5x + 4 < -3x - 2 \Leftrightarrow 5x + 3x < -2 - 4 \Leftrightarrow 8x < -6 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{4}$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -\frac{3}{4}$.

2.18. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi tiết kiệm ($x > 0$).

Khi đó số tiền lãi 1 tháng là $0,4\% \cdot x = 0,004x$ (triệu đồng).

Để số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì ta phải có: $0,004x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 750$.

Vậy số tiền tiết kiệm ít nhất là 750 triệu đồng để có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng.

2.19. Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi x là số kilômét mà hành khách đó có thể di chuyển với 200 nghìn đồng ($x > 0$).

Giá tiền cho x km là $12x$ (nghìn đồng).

Giá mở cửa của taxi là 15 nghìn đồng nên số tiền cần thanh toán khi đi x km là: $15 + 12x$ (nghìn đồng).

Theo bài, ta có: $15 + 12x \leq 200 \Leftrightarrow 12x \leq 185 \Leftrightarrow x \leq \frac{185}{12}$

Mà $x > 0$ và làm tròn đến hàng đơn vị nên với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa 15 kilômét.

2.20. Người ta dùng một loại xe tải để chở bia cho một nhà máy. Mỗi thùng bia 24 lon nặng trung bình 6,7 kg. Theo khuyến nghị, trọng tải của xe (tức là tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5,25 tấn. Hỏi xe có thể chở được tối đa bao nhiêu thùng bia, biết bác lái xe nặng 65 kg ?

Lời giải

Đổi đơn vị: $5,25 \text{ tấn} = 5250 \text{ kg}$.

Gọi x (thùng) là số sữa mà xe có thể chở ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó, khối lượng sữa mà xe chở là: $10x(\text{kg})$.

Tổng khối lượng sữa và bác tài xê là: $65 + 10x(kg)$.

Do trọng tải (tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5250kg nên ta có:

$$65 + 10x \leq 5250 \Leftrightarrow 10x \leq 5185 \Leftrightarrow x \leq 518,5.$$

Mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên xe tải đó có thể chở tối đa 518 thùng sữa.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. KIỂM TRA GIÁ TRỊ $x = a$ CÓ PHẢI LÀ MỘT NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG ?

1. Phương pháp giải

Thay $x = a$ vào hai vế của bất phương trình rồi tính giá trị của hai vế.

- Nếu được một bất đẳng thức đúng thì $x = a$ là một nghiệm.

- Nếu được một bất đẳng thức sai thì $x = a$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Kiểm tra xem $x = -5$ có phải là nghiệm của các bất phương trình sau không ?

a) $2x + 7 < 1 - 3x$

b) $x^2 > 5 - 4x$

Lời giải

a) Thay $x = -5$ vào hai vế của bất phương trình đã cho ta được : $2 \cdot (-5) + 7 < 1 - 3(-5)$ hay $-3 < 16$ (bất đẳng thức đúng).

Vậy $x = -5$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Thay $x = -5$ vào hai vế của bất phương trình đã cho ta được: $(-5)^2 > 5 - 4(-5)$ hay $25 > 25$ (bất đẳng thức sai).

Vậy $x = -5$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Cho tập hợp $M = \{-5; -4; \dots; -1; 0; 1; \dots; 5\}$.

Hãy cho biết những phần tử nào của tập hợp M là nghiệm của bất phương trình :

a) $|x| < 2$

b) $|x| > 3$

c) $|x - 4| \leq 5$

Lời giải

a) Thử trực tiếp ta thấy các số $0; -1; 1$ là nghiệm của bất phương trình $|x| < 2$.

b) Thử trực tiếp ta thấy các số $-5; -4; 4; 5$ đều là nghiệm của bất phương trình $|x| > 3$.

c) Thử trực tiếp ta thấy các số $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$ đều là nghiệm của bất phương trình $|x - 4| \leq 5$.

Ví dụ 3. Cho tập hợp $A = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$.

Hãy cho biết những phần tử nào của tập hợp A vừa là nghiệm của bất phương trình (1), vừa là nghiệm của bất phương trình (2) dưới đây :

$$x^2 < 9 \quad (1)$$

$$2x + 3 > 1 \quad (2)$$

Lời giải

Thử trực tiếp ta thấy các số 0;1;2 của tập hợp A vừa là nghiệm của bất phương trình (1), vừa là nghiệm của bất phương trình (2).

DẠNG 2. LẬP BẤT PHƯƠNG TRÌNH CỦA BÀI TOÁN

1. Phương pháp giải

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Lập bất phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Lập bất phương trình của bài toán sau : Quãng đường AB dài 150km . Một ô tô phải chạy từ A đến B trong thời gian không quá 3 giờ. Hỏi ô tô phải chạy với vận tốc nào ?

Lời giải

Gọi vận tốc của ô tô là x km / h (với điều kiện $x > 0$ và nhỏ hơn hoặc bằng vận tốc tối đa cho phép xe chạy trên đường). Suy ra thời gian xe chạy quãng đường AB là $\frac{150}{x}$ (giờ).

Vì xe chạy không quá 3 giờ nên ta có bất phương trình : $\frac{150}{x} \leq 3$.

Ví dụ 2. Năm nay ông 69 tuổi, cháu 9 tuổi. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa thì tỉ số giữa tuổi ông và tuổi cháu nhỏ hơn 5.

Lời giải

Gọi x là số năm cần tìm ($x \in \mathbb{N}^*$).

Suy ra tuổi của ông lúc đó là $69 + x$. Tuổi của cháu lúc đó là $9 + x$.

Theo đề bài, tỉ số tuổi ông và tuổi cháu lúc đó nhỏ hơn 5 nên ta có bất phương trình : $\frac{69+x}{9+x} < 5$.

DẠNG 3. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

1. Phương pháp giải

Vận dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân đưa bất phương trình về dạng $ax < m$ (hay $ax > m$).

Từ bất phương trình $ax < m$, suy ra :

* Nếu $a = 0$ thì bất phương trình $0x < m$:

- Có nghiệm là mọi x với $m > 0$;

Vô nghiệm với $m \leq 0$;

* Nếu $a > 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x < \frac{m}{a}$;

* Nếu $a < 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x > \frac{m}{a}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau :

a) $\frac{4x-1}{9} < \frac{5-3x}{6}$;

b) $\frac{2x-5}{18} < \frac{4x+3}{10}$.

Lời giải

a) $\frac{4x-1}{9} < \frac{5-3x}{6} \Leftrightarrow \frac{2(4x-1)}{18} < \frac{3(5-3x)}{18} \Leftrightarrow 8x-2 < 15-9x$
 $\Leftrightarrow 8x+9x < 15+2 \Leftrightarrow 17x < 17 \Leftrightarrow x < 1$

b) $\frac{2x-5}{18} < \frac{4x+3}{10} \Leftrightarrow \frac{5(2x-5)}{90} < \frac{9(4x+3)}{90} \Leftrightarrow 10x-25 < 36x+27$
 $\Leftrightarrow 10x-36x < 27+25 \Leftrightarrow -26x < 52 \Leftrightarrow x > \frac{52}{-26} \Leftrightarrow x > -2$

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau :

a) $\frac{5x+2}{5} < \frac{4x-3}{4}$

b) $\frac{3(2x+1)}{20} + 1 < \frac{3x+13}{10}$.

Lời giải

a) $\frac{5x+2}{5} < \frac{4x-3}{4}$
 $\Leftrightarrow \frac{4(5x+2)}{20} < \frac{5(4x-3)}{20} \Leftrightarrow 20x+8 < 20x-15 \Leftrightarrow 20x-20x < -8-15 \Leftrightarrow 0x < -23$

Bất phương trình này vô nghiệm.

b) $\frac{3(2x+1)}{20} + 1 < \frac{3x+13}{10}$
 $\Leftrightarrow \frac{3(2x+1)}{20} + \frac{20}{20} < \frac{2(3x+13)}{20} \Leftrightarrow 6x+3+20 < 6x+26 \Leftrightarrow 6x-6x < 26-3-20 \Leftrightarrow 0x < 3$

Bất phương trình này có nghiệm bất kì.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình : $\frac{3x+17}{10} > \frac{5x+22}{15}$ (1) và

$\frac{x-4}{30} - 1 > \frac{2x-27}{24}$ (2)

Lời giải

Ta có $\frac{3x+17}{10} > \frac{5x+22}{15} \Leftrightarrow \frac{3(3x+17)}{30} > \frac{2(5x+22)}{30} \Leftrightarrow 9x+51 > 10x+44 \Leftrightarrow 9x-10x > 44-51$

$\Leftrightarrow -x > -7 \Leftrightarrow x < 7$ (*)

$$\text{Ta có } \frac{x-4}{30} - 1 > \frac{2x-27}{24} \Leftrightarrow \frac{4(x-4)}{120} - \frac{120}{120} > \frac{5(2x-27)}{120} \Leftrightarrow 4x-16-120 > 10x-135$$

$$\Leftrightarrow 4x-10x > 16+120-135 \Leftrightarrow -6x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{6} (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra nghiệm chung của hai bất phương trình là $x < -\frac{1}{6}$.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên âm của bất phương trình: $\frac{2x+4}{3} - \frac{4x-7}{18} > \frac{2x-5}{9} - \frac{2x-1}{15}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{2x+4}{3} - \frac{4x-7}{18} > \frac{2x-5}{9} - \frac{2x-1}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30(2x+4)}{90} - \frac{5(4x-7)}{90} > \frac{10(2x-5)}{90} - \frac{6(2x-1)}{90} \Leftrightarrow 60x+120-20x+35 > 20x-50-12x+6$$

$$\Leftrightarrow 60x-20x-20x+12x > -120-35-50+6 \Leftrightarrow 32x > -199 \Leftrightarrow x > \frac{-199}{32} \Leftrightarrow x > -6\frac{7}{32}$$

Vì x là số nguyên âm nên $x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Ví dụ 5. Giải bất phương trình: $\frac{3x-1}{x+3} > 2$.

Lời giải

ĐKXD: $x \neq -3$

$$\text{Ta có } \frac{3x-1}{x+3} > 2 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1-2x-6}{x+3} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-7}{x+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-7 > 0 \text{ và } x+3 > 0 \\ x-7 < 0 \text{ và } x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \text{ và } x > -3 \\ x < 7 \text{ và } x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ x < -3 \end{cases}$$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. a) Tìm trong tập hợp $\{-2; 1; 5; 2; 8\}$ số nào là nghiệm của bất phương trình $5y > 2(y-1) + 6$

b) Tìm trong tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ số nào là nghiệm của bất phương trình $13x + 7 < -12x + 57$.

Lời giải

a) $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình vì $5.2 > 2(2-1) + 6 \Leftrightarrow 10 > 8$.

b) $x = 0; x = 1$ là nghiệm của bất phương trình.

Thật vậy, với $x = 0$ ta có $0 + 7 < 0 + 57 \Leftrightarrow 7 < 57$; với $x = 1$ ta có $13.1 + 7 < -12.1 + 57 \Leftrightarrow 20 < 45$.

Câu 2. Cho bất phương trình $3x + 5 > 3(x + 4)$.

a) Chứng tỏ rằng các giá trị $-1; 0; 3$ đều không phải là nghiệm của bất phương trình.

b) Tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình.

Lời giải

a) $x = -1$ không là nghiệm của bất phương trình.

Thật vậy: với $x = -1$ ta có $3 \cdot (-1) + 5 > 3(-1 + 4) \Leftrightarrow 2 > 9$ (bất phương trình sai); với $x = 0; x = 3$ cũng lí luận tương tự.

b) Cũng bằng cách như trên ta thấy không có giá trị nào của x nghiệm đúng bất phương trình. Vậy tập nghiệm của bất phương trình bằng \emptyset (tập rỗng).

Câu 3. Cho bất phương trình $2x + 1 < 2(x + 3)$.

a) Chứng tỏ rằng các giá trị $-1; -1; 1; 2; \sqrt{2}$ đều là nghiệm của bất phương trình.

b) Tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình.

Lời giải

1) Thay $x = -2$ vào bất phương trình ta có $2 \cdot (-2) + 1 < 2(-2 + 3) \Leftrightarrow -3 < 2$ (luôn đúng). Vậy $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình.

Cũng tương tự với $x = -1; 1; 2; \sqrt{2}$ ta đều được bất phương trình đúng. Điều đó chứng tỏ các giá trị $-1; -1; 1; 2; \sqrt{2}$ đều là nghiệm của bất phương trình.

b) Lấy $x = a$ (a bất kì, $a \in \mathbb{R}$) thay vào bất phương trình ta có: $2a + 1 < 2a + 6$ (đó là bất đẳng thức đúng vì vế phải luôn lớn hơn vế trái 6 đơn vị). Vậy bất đẳng thức nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên tập nghiệm của bất phương trình là \mathbb{R} .

Câu 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $x + 5 > 3$; b) $2x - 7 < x$; c) $7x - 2,4 < 0,4$; d) $2 - 3x \leq -1$

Lời giải

a) $x + 5 > 3 \Leftrightarrow x > 3 - 5 \Leftrightarrow x > -2$

b) $2x - 7 < x \Leftrightarrow 2x - x < 7 \Leftrightarrow x < 7$

c) $7x - 2,4 < 0,4 \Leftrightarrow 7x < 2,8 \Leftrightarrow x < 2,8 : 7 \Leftrightarrow x < 0,4$

d) $2 - 3x \leq -1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1$

Câu 5. Dựa vào liên hệ giữa thứ tự và phép nhân, chứng tỏ rằng hai bất phương trình sau tương đương

$x > 7 \Leftrightarrow x \cdot m > 7 \cdot m (m > 0)$

$x > 7 \Leftrightarrow x \cdot m < 7 \cdot m (m < 0)$

Lời giải

Nếu $x = n$ là nghiệm của bất phương trình $x > 7$ thì $n > 7$. Theo tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép nhân thì từ $n > 7$ thì ta có $n \cdot m > 7 \cdot m (m > 0)$ suy ra $x = n$ là nghiệm của bất phương trình $x \cdot m > 7 \cdot m$

Ngược lại $x = n$ là nghiệm của bất phương trình $x \cdot m > 7 \cdot m$ thì ta có $n \cdot m > 7 \cdot m$ theo tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép nhân ta có bất đẳng thức $n > 7$, suy ra $x = n$ là nghiệm của bất phương trình $x > 7$. Do đó ta có $x > 7 \Leftrightarrow x \cdot m > 7 \cdot m (m > 0)$

Với $m < 0$ chứng minh hoàn toàn tương tự.

Câu 6. Hai bất phương trình sau có tương đương không? tại sao? $|x| < 0$ và $5x + 6 < 5(x + 1)$

Lời giải

$|x| < 0$, rõ ràng không có giá trị nào x thỏa mãn bất đẳng thức này vì $|x| \geq 0$. Vậy tập nghiệm của nó là \emptyset

Bất đẳng thức $5x + 6 < 5(x + 1) \Leftrightarrow 5x + 6 < 5x + 5$

Vế trái luôn lớn hơn vế phải 1 đơn vị, nên không có giá trị nào của x nghiệm đúng bất phương trình, vậy tập nghiệm của nó \emptyset

Do đó bất phương trình $|x| < 0$ và $5x + 6 < 5(x + 1)$ tương đương.

Câu 7. Bất phương trình $(x - 4)^2 > x(x - 12)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

Lời giải

Có ba nghiệm nguyên âm.

Câu 8. Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn mỗi bất phương trình sau :

a) $9 - 5x > 1,5$;

b) $\frac{3x - 17}{20} > \frac{5x + 1}{15}$

Lời giải

a) $x = 1$;

b) $x = -6$.

Câu 9. Tìm nghiệm nguyên chung của hai bất phương trình :

a) $15x - 4 > 8$ và $7 - 6x > -20$;

b) $\frac{2}{3}x + 5 > 9$ và $\frac{x - 18}{7} > 1$.

Lời giải

a) $x \in \{1; 2; 3; 4\}$;

b) $x > 25$.

Câu 10. Tìm tập hợp các giá trị của x để biểu thức $\frac{3 - 2x}{5}$ lớn hơn giá trị của biểu thức $\frac{x - 14}{10}$.

Lời giải

Giải bất phương trình : $\frac{3-2x}{5} > \frac{x-14}{10}$. Đáp số : $\{x \mid x < 4\}$.

Câu 11. Cho phương trình $5x-4=3m+2$ (1) trong đó x là ẩn số, m là một số cho trước. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm dương.

Lời giải

Giải phương trình (1) theo m được $x = \frac{3m+6}{5}$.

$$x > 0 \Leftrightarrow \frac{3m+6}{5} > 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

Câu 12. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{3(2x+1)}{20} + 1 > \frac{3x+52}{10}$

b) $\frac{4x-1}{2} + \frac{6x-19}{6} \leq \frac{9x-11}{3}$.

Lời giải

a) $0x > 81$. Bất phương trình vô nghiệm.
bất kì.

b) $0x \leq 0$. Bất phương trình có nghiệm

Câu 13. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{2} - \frac{3x-3}{5} \geq x$

b) $\frac{5x-1}{5} + \frac{x+1}{2} \leq x$

c) $x - \frac{2x+3}{2} \leq \frac{x-1}{4}$

d) $\frac{z-1}{2} - \frac{2z+3}{8} - z \geq 2$

Lời giải

a) $\frac{2x-1}{2} - \frac{3x-3}{5} \geq x \Leftrightarrow 5(2x-1) - 2(3x-3) \geq 10x$

$$\Leftrightarrow 10x - 5 - 6x + 6 \geq 10x \Leftrightarrow 10x - 6x - 10x \geq 5 - 6 \Leftrightarrow -6x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{6}$$

b) $\Leftrightarrow 10x - 2 + 5x + 5 \leq 10x \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{5}$

c) ĐS: $x \geq -5$

d) ĐS: $z \leq -\frac{23}{6}$

Câu 14. Với những số tự nhiên nào của a để:

a) Hiệu $(5-5a)-(3a-3)$ dương?

b) Tổng $(-25,5+5a)+(7,5-3a)$ âm?

Lời giải

a) a là nghiệm tự nhiên của bất phương trình: $(5-5a)-(3a-3) > 0 \Leftrightarrow 5-5a-3a+3 > 0$
 $\Leftrightarrow -8a > -8 \Leftrightarrow a < 1$

Vậy $a = 0$

b) Tương tự ta có $-25,5 + 5a + 7,5 - 3a < 0 \Leftrightarrow a < 9$. Vậy a là $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

Câu 15. Cho một hình chữ nhật có một cạnh là 8dm , tìm cạnh thứ hai, biết rằng chu vi của hình chữ nhật nhỏ hơn chu vi của hình vuông cạnh là 6dm .

Lời giải

Gọi cạnh kia của hình chữ nhật là $x, x > 0, x$ tính bằng dm .

Vậy chu vi của hình chữ nhật là $2(8+x)(\text{dm})$

Chu vi hình vuông là: $4 \cdot 6 = 24(\text{dm})$

Theo đề bài ta có bất phương trình $2(8+x) < 24 \Leftrightarrow 8+x < 12 \Leftrightarrow x < 4$

Vậy cạnh thứ hai của hình chữ nhật nhỏ hơn 4dm

Câu 16.

1) Chứng minh rằng:

a) $\frac{x^2 + 3x + 5}{2} > 0$ với mọi giá trị của x .

b) $\frac{-x^2 + 2x - 6}{3} < 0$ với mọi giá trị của x .

2) Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của các biểu thức sau nếu có:

a) $M = 4x^2 + 4x + 5$

b) $N = 6x - 3 - x^2$

Lời giải

1) a) $x^2 : 3x : 5 = x^2 : 2 \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

Vậy ta có $\frac{x^2 + 3x + 5}{2} = \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}{2}$ mà $\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}{2} > 0$ với mọi giá trị của x .

Do đó $\frac{x^2 + 3x + 5}{2} > 0$ với mọi giá trị của x .

b) $\frac{-x^2 + 2x - 6}{3} = \frac{-(x^2 - 2x + 1) - 5}{3} = \frac{-(x-1)^2 - 5}{3}$ mà $\frac{-(x-1)^2 - 5}{3} < 0$ với mọi giá trị của x .

Do đó $\frac{-x^2 + 2x - 6}{3} < 0$ với mọi giá trị của x .

2) a) $M = 4x^2 + 4x + 5 = (2x+1)^2 + 4 \geq 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $M = 4$ khi $x = -\frac{1}{2}$

b) $N = 6 - 9 + 6x - x^2 = 6 - (9 - 6x + x^2) = 6 - (3 - x)^2 \leq 6$. Vậy giá trị lớn nhất của $M = 6$ khi $x = 3$

Câu 17*. Giải bất phương trình : $\frac{13x-1}{5x+4} > 3$.

Lời giải

$$\frac{13x-1}{5x+4} > 3 \Leftrightarrow \frac{13x-1}{5x+4} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+13}{5x+4} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+13 > 0 \text{ và } 5x+4 < 0 \\ 2x+13 < 0 \text{ và } 5x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6,5 < x < -0,8$$

LUYỆN TẬP CHUNG

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Giải phương trình $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x}{x^3-1}$. (1)

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq 1$. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình:

$$\frac{(x^2+x+1)+2(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x}{x^3-1} \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-1}{x^3-1} = \frac{x^2+x}{x^3-1}$$

Suy ra $x^2+3x-1 = x^2+x$ hay $2x-1=0$.

Giải phương trình: $2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{-2x-6}{x^2-9}$. (2)

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq 3$ và $x \neq -3$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình: $\frac{x(x-3)-2(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{-2x-6}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-6}{x^2-9} = \frac{-2x-6}{x^2-9}$

Suy ra $x^2-5x-6 = -2x-6$ hay $x^2-3x=0$.

Giải phương trình $x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \end{cases}$

Ta thấy: $x=0$ (thỏa mãn ĐKXĐ) hoặc $x=3$ (không thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình (2) có nghiệm là $x=0$.

Ví dụ 3. Cho $a < b$. Chứng minh rằng:

a) $2a+1 < 2b+2$;

b) $-2a-5 > -2b-7$.

Lời giải

a) Từ $a < b$, ta có $2a < 2b$. Suy ra $2a+1 < 2b+1$. (1). Vì $1 < 2$ nên $2b+1 < 2b+2$. (2)

Theo tính chất bắc cầu, từ (1) và (2) suy ra $2a+1 < 2b+2$.

b) Từ $a < b$, ta có $-2a > -2b$. Suy ra $-2a-5 > -2b-5$. (3)

Vì $-5 > -7$ nên $-2b-5 > -2b-7$. (4)

Theo tính chất bắc cầu, từ (3) và (4) suy ra $-2a-5 > -2b-7$.

B. BÀI TẬP

2.12. Giải các phương trình sau:

a) $2(x+1) = (5x-1)(x+1)$;

b) $(-4x+3)x = (2x+5)x$.

Lời giải

a) $2(x+1) = (5x-1)(x+1) \Leftrightarrow 2(x+1) - (5x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2-5x+1) = 0$

$$(x+1)(3-5x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 5x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1$; $x = \frac{3}{5}$.

b) $(-4x+3)x = (2x+5)x \Leftrightarrow (-4x+3)x - (2x+5)x = 0 \Leftrightarrow x(-4x+3-2x-5) = 0$

$$\Leftrightarrow x(-6x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -6x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -6x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0$; $x = -\frac{1}{3}$.

2.13. Để loại bỏ $x\%$ một loại tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$C(x) = \frac{50x}{100-x}$ (triệu đồng), với $0 \leq x < 100$. Nếu bỏ ra 450 triệu đồng, người ta có thể loại bỏ được bao nhiêu phần trăm loại tảo độc đó?

Lời giải

Theo bài, chi phí để loại bỏ tảo độc là $C = 450$ triệu đồng, nên ta có phương trình: $\frac{50x}{100-x} = 450$.

Giải phương trình: $\frac{50x}{100-x} = 450 \Leftrightarrow 50x = 450 \cdot (100-x) \Leftrightarrow 50x = 45000 - 450x$

$$\Leftrightarrow 50x + 450x = 45000 \Leftrightarrow 500x = 45000 \Leftrightarrow x = 90$$

Giá trị $x = 90$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq x < 100$.

Vậy nếu bỏ ra 450 triệu đồng, người ta có thể loại bỏ được 90% loại tảo độc đó.

2.14. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-2x+4} = \frac{x-4}{x^3+8}$

b) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3}{x+4} = \frac{x-12}{x^2-16}$.

Lời giải

a) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-2x+4} = \frac{x-4}{x^3+8}$

ĐKXĐ: $x \neq -2$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, ta được

$$\frac{x^2 - 2x + 4 - 2(x+2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x-4}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x-4}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$$

Suy ra $x^2 - 4x = x - 4$. (*)

Giải phương trình (*) : $x^2 - 4x = x - 4 \Leftrightarrow x(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x-1=0 \end{cases}$

$x = 4$ (thỏa mãn ĐKXĐ) hoặc $x = 1$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 4$; $x = 1$.

b) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3}{x+4} = \frac{x-12}{x^2-16}$

ĐKXĐ: $x \neq 4$ và $x \neq -4$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình:

$$\frac{2x(x+4) + 3(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-12}{(x-4)(x+4)} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 11x - 12}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-12}{(x-4)(x+4)}$$

Suy ra $2x^2 + 11x - 12 = x - 12$. (*)

Giải phương trình (*):

$$\begin{aligned} 2x^2 + 11x - 12 &= x - 12 \Leftrightarrow 2x^2 + 11x - 12 - x + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 10x &= 0 \Leftrightarrow 2x(x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x+5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$x = 0$ (thỏa mãn ĐKXĐ) hoặc $x = -5$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0$; $x = -5$.

2.15. Cho $a > b$, chứng minh rằng:

a) $4a + 4 > 4b + 3$;

b) $1 - 3a < 3 - 3b$.

Lời giải

a) Vì $a > b$ nên $4a > 4b$, suy ra $4a + 3 > 4b + 3$. Mà $4a + 4 > 4a + 3$ nên $4a + 4 > 4b + 3$.

Vậy $4a + 4 > 4b + 3$.

b) Vì $a > b$ nên $-3a < -3b$, suy ra $3 - 3a < 3 - 3b$. Mà $1 - 3a < 3 - 3a$ nên $1 - 3a < 3 - 3b$.

Vậy $1 - 3a < 3 - 3b$.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Câu 1. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

b) $x^3 + 1 = 0$

Lời giải

Trước hết phân tích vế trái thành nhân tử: $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(x-3)$

Vậy $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

Vậy $S = \{2; 3\}$

b) $x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, nên $x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = -1$ ($S = \{-1\}$)

Câu 2. Giải các phương trình sau:

1) $(x+2)(3-2x) = 0$;

2) $(5x+1)(1+x) = 0$

3) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

4) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

Lời giải

1) Vì tích của hai số bằng 0 khi và chỉ khi một trong các thừa số bằng 0. Nên mỗi nghiệm của

phương trình (1) là một nghiệm của: $\begin{cases} x+2=0 \\ 3-2x=0 \end{cases}$ và ngược lại.

Do vậy muốn giải phương trình 1) ta giải hai phương trình này:

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$3-2x=0 \Leftrightarrow x=1,5$$

Vậy pt 1) có hai nghiệm $x = -2, x = 1,5$ hay viết $S = \{-2; 1,5\}$

2) ĐS: $x = -1$ và $x = \frac{1}{5}$ hay viết $S = \left\{-1; \frac{1}{5}\right\}$

3) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0$

Do đó phương trình có hai nghiệm $x = 2, x = 1$ hay viết $S = \{2; 1\}$

4) $x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x^2 - 1)(x+1) = (x+1)^2(x-1)$.

Nên $x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0$. Do đó $S = \{-1; 1\}$

Câu 3. Giải phương trình có chứa ẩn số ở mẫu thức :

1) $\frac{x}{x-5} - \frac{35}{x-2} = \frac{15}{x^2 - 7x + 10} + 1$

2) $\frac{-x}{x-10} \div \frac{8}{x-6} = \frac{4x}{x^2 - 16x + 60} - 1$

Lời giải

1) Trước hết phải phân tích $x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$. Vậy MTC: $(x-5)(x-2)$.

Từ đó ta có ĐKXĐ: $x \neq 5, x \neq 2$

Quy đồng mẫu thức và khử mẫu thức ở hai vế: $x(x-2) - 35(x-5) = 15 + (x-2)(x-5)$

$$x^2 - 2x - 35x + 175 = 15 + x^2 - 7x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35x - x^2 + 7x = -175 + 15 + 10$$

$$\Leftrightarrow -30x = -150 \Leftrightarrow x = 5 \text{ không thỏa mãn ĐKXĐ nên phương trình vô nghiệm.}$$

2) Vì $x^2 - 16x + 60 = (x-6)(x-10)$, nên pt đã cho có thể viết: $\frac{-x}{x-10} - \frac{8}{x-6} = \frac{4x}{x^2 - 16x + 60} - 1$

$x \neq 10, x \neq 6$ nên ĐKXĐ = $x \neq 6, x \neq 10$. MTC: $(x-6)(x-10)$

Quy đồng và trục mẫu thức ta có: $-x(x-6) - 8(x-10) = 4x - (x^2 - 16x + 60)$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8x + 80 = 4x - x^2 + 16x - 60 \Leftrightarrow -x^2 + x^2 + 6x - 8x - 4x - 16x = -60 - 80.$$

$$\Leftrightarrow 18x = -140$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-140}{-18} = \frac{70}{9} \Leftrightarrow x = \frac{70}{9} \text{ thỏa mãn ĐKXĐ nên phương trình có nghiệm là } x = \frac{70}{9}.$$

Câu 4. Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{x+n}{m+n} + \frac{x-n}{m-n} = \frac{1}{m+n} - \frac{x-n}{m^2-n^2} + \frac{2x}{m}$$

$$2) \frac{a-x}{b-a} + \frac{3x}{a+b} = \frac{3a^2 - ab - 4b^2}{a^2 - b^2}$$

Lời giải

1) Trước hết ĐKXĐ của phương trình là $m+n \neq 0 \Rightarrow m \neq -n, m \neq n, m \neq 0$.

MTC $(m-n)(m+n)m$. Ta có phương trình:

$$m(x+n)(m-n) + (x-n)(m+n)m = m(m-n) - (x-n)m + 2x(m^2-n^2)$$

$$\Leftrightarrow m^2x - mnx + m^2n - mn^2 + m^2x + mnx - m^2n - mn^2 = m^2 - mn - xm + mn + 2m^2x - 2n^2x$$

$$\Leftrightarrow 2m^2x + mx - 2m^2x + 2n^2x = mn^2 - m^2n + m^2n + mn^2 + m^2 - mn + mn$$

$$\Leftrightarrow x(2n^2 + m) = 2mn^2 + m^2 = m(2n^2 + m)$$

$$\text{Nếu } 2n^2 + m \neq 0 \Rightarrow m \neq -2n^2 \text{ thì } x = \frac{m(2n^2 + m)}{2n^2 + m} = m$$

Như vậy với $m \neq -n, m \neq n, m \neq -2n^2$ thì pt có nghiệm $x = m$

2) Trước hết $b-a \neq 0 \Rightarrow b \neq a, a+b \neq 0 \Rightarrow a \neq -b$. Vậy ĐKXĐ: $a \neq b, a \neq -b$.

MTC: $(a-b)(a+b)$. Ta có phương trình: $-(a-x)(a+b) + 3x(a-b) = 3a^2 - ab - 4b^2$

$$\Leftrightarrow -a^2 - ab + ax + bx + 3ax - 3bx = 3a^2 - ab - 4b^2 \Leftrightarrow 4ax - 2bx = 3a^2 - ab + a^2 - 4b^2 + ab$$

$$\Leftrightarrow 2(2a-b)x = 4a^2 - 4b^2 = 4(a^2 - b^2) \Leftrightarrow 2(2a-b)x = 4a^2 - 4b^2 = 4(a^2 - b^2)$$

Với $2a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b/2$ thì $x = \frac{4(a^2 - b^2)}{2(2a - b)} = \frac{2(a^2 - b^2)}{2a - b}$

Như vậy với $a \neq b, a \neq -b, a \neq b/2$ thì pt có nghiệm $x = \frac{2(a^2 - b^2)}{2a - b}$

Câu 5. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{7}{x^2 - 1} + \frac{8}{x^2 - 2x + 1} = \frac{37 - 9x}{x^3 - x^2 - x + 1}$

b) $\frac{1}{(3 - 2x)^2} - \frac{4}{(3 + 2x)^2} = \frac{3}{9 - 4x^2}$

Lời giải

a) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x - 1)$

Nên phương trình đã cho có thể viết: $7(x - 1) + 8(x + 1) = 37 - 9x \Leftrightarrow x = 1,5$ thỏa mãn ĐKXD nên phương trình có một nghiệm $x = 1,5$

b) $9 - 4x^2 = (3 + 2x)(3 - 2x)$ vì $3 + 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}, 3 - 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$.

Vậy ĐKXD $x \neq \frac{3}{2}, x \neq -\frac{3}{2}$

MTC: $(3 - 2x)^2(3 + 2x)^2$

Quy đồng và khử mẫu thức ta có: $(3 + 2x)^2 - 4(3 - 2x)^2 = 3(9 - 4x^2) \Leftrightarrow x = 0,9$

$x = 0,9$ thỏa mãn ĐKXD, nên nghiệm của phương trình là $x = 0,9$ ($S = \{0,9\}$)

Câu 6. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4 - 2x}{3} - \frac{4}{6x - 3} = \frac{1,5x}{x - 0,5} - \frac{4x^2}{3(2x - 1)}$

b) $\frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{4}{x + 2x^2 + x^3} = \frac{5}{2x + 2x^2}$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \frac{1}{2}$, MTC: $3(2x - 1)$

Quy đồng và khử mẫu thức ta có: $(4 - 2x)(2x - 1) - 4 = 9x - 4x^2 \Leftrightarrow x = 8$

$x = 8$ thỏa mãn ĐKXD nên phương trình có một nghiệm $x = 8$ ($S = \{8\}$)

b) $x^y + 2x + 1 = (x + 1)^2; x + 2x^2 + x^3 = x(x + 1)^2; 2x + 2x^2 = 2x(x + 1)$

Vậy ĐKXD: $x \neq 0, x \neq -1$

MTC: $2x(x + 1)^2$

Quy đồng và khử mẫu thức ta có: $2x + 8 = 5 \cdot 2x \Leftrightarrow x = 1$

$x = 1$ thỏa mãn ĐKXD nên $S = \{1\}$.

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình:

$$a) \frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}$$

$$b) \frac{y^2}{y^2-6y} = \frac{4(3-2y)}{y(6-y)}$$

$$c) \frac{8y-5}{y} = \frac{9y}{y+2}$$

Lời giải

$$a) \frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4} \quad \text{ĐKXD: } x \neq -2, x \neq 4, \text{ MTC: } (x+2)(x-4)$$

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4} \Rightarrow (x-2)(x-4) = (x+3)(x+2) \Leftrightarrow x = \frac{2}{11}$$

$$x = \frac{2}{11} \text{ thỏa mãn điều kiện xác định nên } S = \left\{ \frac{2}{11} \right\}$$

$$b) y \neq 0, y \neq 6, \text{ MTC: } y(y-6)$$

$$\frac{y^2}{y(y-6)} = \frac{4(3-2y)}{y(6-y)} \Rightarrow y^2 = -4(3-2y) \Leftrightarrow (y-6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 6, y = 2$$

$y = 6$ không thỏa mãn ĐKXD nên bị loại ; $y = 2$ thỏa mãn ĐKXD nên $S = \{2\}$.

$$c) \text{ĐKXD: } y \neq 0, y \neq -2$$

$$\frac{8y-5}{y} = \frac{9y}{y+2} \Rightarrow 8y^2 + 11y - 10 = 9y^2 \Leftrightarrow y^2 - 11y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y - 10y + 10 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-10) = 0 \Leftrightarrow y = 1, y = 10,$$

$y = 1, y = 10$ đều thỏa mãn điều kiện xác định, nên $S = \{1; 10\}$.

Câu 8. Giải phương trình sau:
$$\frac{3ax+12ab+5b^2}{9a^2-b^2} = \frac{2x-3b}{3a+b} - \frac{3x-4a}{b-3a}$$

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } 3a+b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{b}{3}, 3a-b \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{b}{3} \quad \text{MTC: } 9a^2-b^2 = (3a-b)(3a+b).$$

Phương trình đã cho có dạng:

$$3ax+12ab+5b^2 = (2x-3b)(3a-b) + (3x-4a)(3a+b) \Leftrightarrow -12ax-bx = -25ab-2b^2-12a^2$$

$$\Leftrightarrow -(12a+b)x = -(12a+b)(a+2b) \text{ Với } 12a+b \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{b}{12} \text{ thì } x = \frac{-(12a+b)(a+2b)}{-(12a+b)} = a+2b$$

Câu 9. So sánh các biểu thức sau:

$$a) 3,06 \cdot 2,05 \text{ và } 23,58 : 4,5$$

$$b) \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \text{ và } \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

$$c) 16 - 4\frac{1}{8} \text{ và } 15 - 4\frac{1}{8}$$

Lời giải

$$a) 3,06 \cdot 2,05 = 6,27;$$

$$23,58 : 4,5 = 5,24$$

$$\text{nên } 3,06 \cdot 2,05 > 23,58 : 4,5$$

$$b) \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \text{ nên } \frac{1}{3} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

$$c) 16 > 15 \text{ nên } 16 - 4\frac{1}{8} > 15 - 4\frac{1}{8}$$

Câu 10. Cho $a < b$. Hãy so sánh các số sau:

$$a \text{ và } b+1; \quad a-2 \text{ và } b; \quad a-5 \text{ và } b+1; \quad a+5 \text{ và } b-1$$

Lời giải

$$a < b \text{ nên } a+1 < b+1 \text{ nên } a < b+1$$

$$a < b \text{ nên } a-2 < b-2 \text{ nên } a-2 < b$$

$$\text{Tương tự ta có } a-5 < b+1$$

$$a+5 \text{ và } b-1 \text{ không so sánh được.}$$

Câu 11. Cho bất đẳng thức $a > b$ điền dấu $>$ hoặc $<$ vào các ô trống để được bất đẳng thức đúng:

$$a) -7,5a \quad \square \quad -7,5b$$

$$b) 0,12a \quad \square \quad 0,12b$$

$$c) \frac{a}{5} \quad \square \quad \frac{b}{5}$$

$$d) -\frac{1}{4}a \quad \square \quad -\frac{1}{4}b$$

Lời giải

$$a) -7,5a < -7,5b;$$

$$b) 0,12a > 0,12b$$

$$c) \frac{a}{5} > \frac{b}{5};$$

$$d) -\frac{1}{4}a < -\frac{1}{4}b$$

Câu 12. Xác định dấu của a (a dương hoặc a âm) nếu ta có:

$$a) 5a < 3a,$$

$$b) 8a > 5a,$$

c) $-19a < 19a$

d) $-2004a > -2003a$

Lời giải

a) ta có $5 > 3$ mà $5a < 3a$ thì $a < 0$

b) $8 > 5$ mà $8a > 5$ thì $a > 0$

c) $-19a < 19a$ nên $-19a + 19a < 19a + 19a \Rightarrow 38a > 0 \Rightarrow a > 0$

d) $-2004a > -2003a$ nên $-2004a + 2003a > -2003a + 2003a$

$\Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a < 0$

Câu 13. Chứng minh rằng $a > b$ và $c > d$ thì $a + c > b + d$

Lời giải

Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$ mà $c > d$ thì $a + b > d + b$.

Vậy theo tính chất bắc cầu thì $a + c > b + d$ (đpcm)

Câu 14. Chứng minh rằng nếu $a > b$ và $c > d$ và a, b, c, d đều là số dương thì $ac > bd$

Lời giải

$a > b$ thì $ac > bc$ (vì $c > 0$), $c > d$ nên $bc > bd$ (vì $d > 0$)

Vậy theo tính chất bắc cầu $ac > bd$ (đpcm).

Câu 15. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

Lời giải

Xét hiệu: $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0, \forall a, b$.

Vậy $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Nhận xét:

- Để chứng minh $A > B$ ta xét hiệu $A - B$ và chứng tỏ $A - B > 0$.

- Bất đẳng thức (1) có thể viết lại như sau:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

và $(1.a + 1.b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2)$.

Kết quả tổng quát của bất đẳng thức này được chứng minh trong câu 16 sau đây.

Câu 16. Cho bốn số a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$(a.b + c.d)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$ hay $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (với $bd \neq 0$).

Lời giải

Ta có (2) $\Leftrightarrow a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \leq a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2$

$$\Leftrightarrow 2abcd \leq a^2d^2 + c^2b^2 \Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi a, b, c, d nên bất đẳng thức (2) cũng đúng với mọi a, b, c, d .

Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$ hay $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Lưu ý: Khi b hoặc $d = 0$, hiển nhiên (2) trở thành đẳng thức; ở đây ta xét $b, d \neq 0$.

Câu 17. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $-1 \leq a, b, c \leq 4$ và $a + 2b + 3c \leq 4$. Chứng minh rằng $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 36$.

Lời giải

$$\text{Vì } -1 \leq a \leq 4 \text{ nên } \begin{cases} a + 1 \geq 0 \\ a - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (a + 1)(a - 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 3a + 4 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = -1$ hoặc $a = 4$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có: $b^2 \leq 3b + 4 \Rightarrow 2b^2 \leq 6b + 8 \quad (2)$

và $c^2 \leq 3c + 4 \Rightarrow 3c^2 \leq 9c + 12 \quad (3)$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 3(a + 2b + 3c) + 24 \leq 3 \cdot 4 + 24$$

$$\Rightarrow a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 36 \text{ (dpcm).}$$

$$\begin{cases} (a + 1)(a - 4) = 0 \\ (b + 1)(b - 4) = 0 \\ (c + 1)(c - 4) = 0 \\ a + 2b + 3c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} (a + 1)(a - 4) = 0 \\ (b + 1)(b - 4) = 0 \\ (c + 1)(c - 4) = 0 \\ a + 2b + 3c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}$$

Câu 18. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$a < b + c \Leftrightarrow a^2 < ab + ca \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$b^2 < bc + ab \quad (2)$$

$$c^2 < ca + bc \quad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức (1), (2) và (3), ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Câu 19. Chứng minh bất đẳng thức : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} &= \frac{y(x+y) + x(x+y) - 4xy}{xy(x+y)} \\ &= \frac{xy + y^2 + x^2 + xy - 4xy}{xy(x+y)} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}. \end{aligned}$$

Ta có $(x-y)^2 \geq 0$ (dấu "=" khi và chỉ khi $x = y$).

$$xy(x+y) > 0 \text{ (vì } x, y > 0\text{)}. \text{ Do đó } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} \geq 0.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ (dấu "=" khi và chỉ khi } x = y\text{)}.$$

Câu 20. Chứng minh bất đẳng thức $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng (dấu "=" khi và chỉ khi $a = b = c$).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

2.21. Nghiệm của bất phương trình $-2x+1 < 0$ là

- A. $x < \frac{1}{2}$. B. $x > \frac{1}{2}$. C. $x \leq \frac{1}{2}$. D. $x \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $-2x+1 < 0 \Leftrightarrow -2x < -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của bất phương trình $-2x+1 < 0$ là $x > \frac{1}{2}$.

2.22. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x}{2x+1} + \frac{3}{x-5} = \frac{x}{(2x+1)(x-5)}$ là

- A. $x \neq -\frac{1}{2}$. B. $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq -5$.
C. $x \neq 5$. D. $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(2x+1)(x-5) \neq 0$ khi $2x+1 \neq 0$; $x-5 \neq 0$.

$2x+1 \neq 0$ khi $2x \neq -1$ hay $x \neq -\frac{1}{2}$ $x-5 \neq 0$ khi $x \neq 5$.

Vậy điều kiện xác định của phương trình đã cho là $x \neq -\frac{1}{2}$; $x \neq 5$.

2.23. Phương trình $x-1 = m+4$ có nghiệm lớn hơn 1 với

- A. $m \geq -4$. B. $m \leq 4$. C. $m > -4$. D. $m < -4$.

Lời giải

Chọn C

Từ $x-1 = m+4$, suy ra $x = m+5$. Theo bài, phương trình $x-1 = m+4$ có nghiệm lớn hơn 1 nên ta có: $x > 1$.

Suy ra $m+5 > 1$, do đó $m > -4$.

2.24. Nghiệm của bất phương trình $1-2x \geq 2-x$ là

A. $x > \frac{1}{2}$.

B. $x < \frac{1}{2}$.

C. $x \leq -1$.

D. $x \geq -1$.

Lời giải

Chọn C

$$1 - 2x \geq 2 - x \Leftrightarrow -2x + x \geq 2 - 1 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \leq -1$.

2.25. Cho $a > b$. Khi đó ta có:

A. $2a > 3b$.

B. $2a > 2b + 1$.

C. $5a + 1 > 5b + 1$.

D. $-3a < -3b - 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a > b$, suy ra $5a > 5b$, do đó $5a + 1 > 5b + 1$. Vậy ta chọn phương án C.

B. TỰ LUẬN

2.26. Giải các phương trình sau:

a) $(3x - 1)^2 - (x + 2)^2 = 0$;

b) $x(x + 1) = 2(x^2 - 1)$.

Lời giải

$$a) (3x - 1)^2 - (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 1 - x - 2)(3x - 1 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{3}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{4}$.

$$b) x(x + 1) = 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow x(x + 1) - 2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) - 2(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ -x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1$ hoặc $x = 2$.

2.27. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2}{x^2-25}$;

b) $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3}{x^3+1}$.

Lời giải

a) $\frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2}{x^2-25}$

ĐKXĐ: $x \neq 5$ và $x \neq -5$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, ta được: $\frac{x(x+5)-2(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{x^2}{(x-5)(x+5)}$.

Suy ra $x(x+5)-2(x-5) = x^2$.(*)

Giải phương trình (*):

$x(x+5)-2(x-5) = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2x + 10 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -10 \Rightarrow x = -\frac{10}{3}$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{10}{3}$

$$\text{b) } \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3}{x^3+1}$$

ĐKXĐ: $x \neq -1$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, ta được: $\frac{x^2-x+1-x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}$

Suy ra $x^2-x+1-x(x+1) = 3$.(**)

Giải phương trình (**): $x^2-x+1-x(x+1) = 3 \Leftrightarrow x^2-x+1-x^2-x = 3 \Leftrightarrow -2x = 2$

$x = -1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1$.

2.28. Cho $a < b$, hãy so sánh:

a) $a+b+5$ với $2b+5$;

b) $-2a-3$ với $-(a+b)-3$.

Lời giải

a) Do $a < b$, nên $a+b < b+b$ hay $a+b < 2b$. Suy ra $a+b+5 < 2b+5$. Vậy $a+b+5 < 2b+5$.

b) Do $a < b$, nên $a+a < a+b$ hay $2a < a+b$. Suy ra $-2a > -(a+b)$, do đó $-2a-3 > -(a+b)-3$.

Vậy $-2a-3 > -(a+b)-3$.

2.29. Giải các bất phương trình:

a) $2x+3(x+1) > 5x-(2x-4)$;

b) $(x+1)(2x-1) < 2x^2-4x+1$.

Lời giải

a) $2x+3(x+1) > 5x-(2x-4) \Leftrightarrow 2x+3x+3 > 5x-2x+4 \Leftrightarrow 5x+3 > 3x+4$

$\Leftrightarrow 5x-3x > 4-3 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > \frac{1}{2}$.

$$b) (x+1)(2x-1) < 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2x - 1 < 2x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 2x - 2x^2 + 4x < 1 + 1 \Leftrightarrow 5x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{5}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < \frac{2}{5}$.

2.30. Một hãng viễn thông nước ngoài có hai gói cước như sau:

Gói cước A	Gói cước B
Cước thuê bao hàng tháng 32 USD	Cước thuê bao hàng tháng là 44 USD
45 phút miễn phí	Không có phút miễn phí
0,4 USD cho mỗi phút thêm	0,25 USD/phút

a) Hãy viết một phương trình xác định thời gian gọi (phút) mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau và giải phương trình đó.

b) Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào? Nếu khách hàng gọi 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào?

Lời giải

a) Gọi x (phút) là thời gian gọi trong một tháng ($x > 0$).

Theo bài, phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau, mà cước thuê bao hàng tháng của gói A nhỏ hơn gói B ($32 < 44$) nên thời gian gọi phải nhiều hơn 45 phút do tính thêm phí cho phút gọi thêm. Tức là $x > 45$.

- Đối với gói cước A :

- thời gian gọi thêm là: $x - 45$ (phút);

- phí cần trả cho số phút gọi thêm là: $0,4 \cdot (x - 45)$ (USD);

- phí phải trả cho hãng viễn thông là: $T_1 = 32 + 0,4 \cdot (x - 45)$ (USD).

- Đối với gói cước B:

- Phí cần trả cho x phút gọi là: $0,25x$ (USD);

- Phí phải trả cho hãng viễn thông là: $T_2 = 44 + 0,25x$ (USD).

Để phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau thì ta có phương trình sau:

$$T_1 = T_2, \text{ hay } 44 + 0,25x = 32 + 0,4 \cdot (x - 45). (*)$$

$$\text{Giải phương trình } (*) : 44 + 0,25x = 32 + 0,4 \cdot (x - 45) \Leftrightarrow 44 + 0,25x = 32 + 0,4x - 0,4 \cdot 45$$

$$\Leftrightarrow 0,25x - 0,4x = 32 - 18 - 44 \Leftrightarrow -0,15x = -30$$

$x = 200$ (thỏa mãn điều kiện $x > 45$).

Vậy thời gian gọi mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước như nhau là 200 phút.

b) - Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng, tức là $x \leq 180$ thì:

$$\cdot x - 45 \leq 180 - 45 \text{ hay } x - 45 \leq 135$$

Suy ra $0,4 \cdot (x - 45) \leq 54$ nên $32 + 0,4 \cdot (x - 45) \leq 32 + 54$ hay $T_1 \leq 86$.

$$\cdot 0,25x \leq 45 \text{ nên } 44 + 0,25x \leq 44 + 45 \text{ hay } T_2 \leq 89.$$

Khi đó, khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước A để mất chi phí rẻ hơn.

Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 500 phút trong 1 tháng, tức là $x \leq 500$ thì:

$$\cdot x - 45 \leq 500 - 45 \text{ hay } x - 45 \leq 455$$

Suy ra $0,4 \cdot (x - 45) \leq 182$ nên $32 + 0,4 \cdot (x - 45) \leq 32 + 182$ hay $T_1 \leq 214$.

$$0,25x \leq 125 \text{ nên } 44 + 0,25x \leq 44 + 125 \text{ hay } T_2 \leq 169.$$

Khi đó, khách hàng chỉ gọi tối đa là 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước B để mất chi phí rẻ hơn.

2.31. Thanh tham dự một kì kiểm tra năng lực tiếng Anh gồm 4 bài kiểm tra nghe, nói, đọc và viết. Mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10. Điểm trung bình của ba bài kiểm tra nghe, nói, đọc của Thanh là 6,7. Hỏi bài kiểm tra viết của Thanh cần được bao nhiêu điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên? Biết điểm trung bình được tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ nhất.

Lời giải

Tổng điểm của ba môn nghe, nói, đọc của Thanh khoảng: $6,7 \cdot 3 = 20,1 \approx 20$ (do mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10).

Gọi x là điểm bài kiểm tra viết của Thanh ($0 < x \leq 10, x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó điểm trung bình bốn bài kiểm tra của Thanh là: $\frac{20+x}{4}$.

Để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên thì: $\frac{20+x}{4} \geq 7,0 \Leftrightarrow 20+x \geq 28 \Leftrightarrow x \geq 8$.

Mà $0 < x \leq 10, x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \{8; 9; 10\}$.

Vậy bài kiểm tra viết của Thanh cần được 8 điểm hoặc 9 điểm hoặc 10 điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên.

2.32. Để lập đội tuyển năng khiếu về bóng rổ của trường, thầy thể dục đưa ra quy định tuyển chọn như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 15 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được cộng 2 điểm; quả bóng ném ra ngoài bị trừ 1 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 15 điểm trở lên thì sẽ được chọn vào đội tuyển. Hỏi một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất bao nhiêu quả vào rổ?

Lời giải

Gọi x là số quả bóng học sinh cần ném vào rổ ($0 \leq x \leq 15, x \in \mathbb{N}^*$).

Số quả bóng ném ra ngoài là: $15 - x$ (quả).

Ném vào rổ x quả bóng được cộng $2x$ (điểm).

Ném ra ngoài quả bóng bị trừ $15 - x$ (điểm).

Vì vậy, sau khi ném 15 quả bóng thì học sinh đó sẽ có số điểm là:

$$2x - (15 - x) = 2x - 15 + x = 3x - 15 \text{ (điểm).}$$

Theo bài, để được vào đội tuyển thì học sinh cần có số điểm từ 15 trở lên, nên ta có bất phương trình:

$$3x - 15 \geq 15 \Leftrightarrow 3x \geq 30 \Leftrightarrow x \geq 10.$$

Mà $0 \leq x \leq 15, x \in \mathbb{N}^*$ nên học sinh đó cần phải ném vào rổ ít nhất là 10 quả bóng thì mới được chọn vào đội tuyển.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Câu 1. Giải các phương trình :

a) $x^2 - 9 = 2(x + 3)$;

b) $(x - 1)(3x + 10) = x^3 - x^2$.

Lời giải

a) $x^2 - 9 = 2(x + 3) \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) - 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-3; 5\}$.

b) $(x - 1)(3x + 10) = x^3 - x^2$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x + 10) - x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x + 10 - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 3x - 10) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-2; 1; 5\}$.

Câu 2. Giải các phương trình :

a) $\frac{5x - 8}{7} - \frac{3(2x + 1)}{14} = \frac{4x - 5}{21} - 1,5$; b) $\frac{(2x + 1)^2}{6} - \frac{(x - 3)^2}{10} = \frac{29x^2 - 22}{30} - \frac{x(6x - 19)}{15}$.

Lời giải

a) $\frac{5x - 8}{7} - \frac{3(2x + 1)}{14} = \frac{4x - 5}{21} - 1,5 \Leftrightarrow 6(5x - 8) - 9(2x + 1) = 2(4x - 5) - 63$

$$\Leftrightarrow 30x - 48 - 18x - 9 = 8x - 10 - 63 \Leftrightarrow 30x - 18x - 8x = -10 - 63 + 48 + 9$$

$$\Leftrightarrow 4x = -16 \Leftrightarrow x = -4$$

$$b) \frac{(2x+1)^2}{6} - \frac{(x-3)^2}{10} = \frac{29x^2 - 22}{30} - \frac{x(6x-19)}{15}$$

$$\Leftrightarrow 5(4x^2 + 4x + 1) - 3(x^2 - 6x + 9) = 29x^2 - 22 - 2x(6x - 19)$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 + 20x + 5 - 3x^2 + 18x - 27 = 29x^2 - 22 - 12x^2 + 38x \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Phương trình nghiệm đúng với mọi x .

Câu 3. Giải các phương trình :

$$a) \frac{x-2}{x-5} + \frac{x+13}{x^2-25} = 1;$$

$$b) \frac{3x+2}{x+4} + \frac{2x+1}{x-2} = 5 - \frac{x-32}{x^2+2x-8}$$

Lời giải

$$a) \frac{x-2}{x-5} + \frac{x+13}{x^2-25} = 1 \quad (1)$$

ĐKXĐ : $x \neq \pm 5$.

$$(1) \Rightarrow (x-2)(x+5) + x+13 = x^2 - 25 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 + x + 13 = x^2 - 25 \Leftrightarrow 4x = -28 \Rightarrow x = -7 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Vậy $S = \{-7\}$.

$$b) \frac{3x+2}{x+4} + \frac{2x+1}{x-2} = 5 - \frac{x-32}{x^2+2x-8} \quad (2)$$

$$\text{Ta có : } x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$$

ĐKXĐ : $x \neq -4; x \neq 2$.

$$(2) \Rightarrow (3x+2)(x-2) + (2x+1)(x+4) = 5(x^2+2x-8) - (x-32)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2x - 4 + 2x^2 + 8x + x + 4 = 5x^2 + 10x - 40 - x + 32$$

$$\Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (không thỏa mãn ĐKXĐ)}.$$

Vậy $S = \emptyset$.

Câu 4. Giải các phương trình :

$$a) \frac{10-x}{51} + \frac{9-x}{52} + \frac{8-x}{53} + 3 = 0;$$

$$b) \frac{2x+5}{195} + \frac{2x+7}{197} = \frac{2x}{95}.$$

Lời giải

a)

$$\frac{10-x}{51} + \frac{9-x}{52} + \frac{8-x}{53} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{10-x}{51} + 1\right) + \left(\frac{9-x}{52} + 1\right) + \left(\frac{8-x}{53} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{61-x}{51} + \frac{61-x}{52} + \frac{61-x}{53} = 0$$

$$\Leftrightarrow (61-x) \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53}\right) = 0 \Leftrightarrow 61-x = 0 \left(\text{vì } \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} \neq 0\right) \Leftrightarrow x = 61$$

Vậy $S = \{61\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2x+5}{195} + \frac{2x+7}{197} = \frac{2x}{95} &\Leftrightarrow \left(\frac{2x+5}{195} - 1\right) + \left(\frac{2x+7}{197} - 1\right) = \frac{2x}{95} - 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-190}{195} + \frac{2x-190}{197} = \frac{2x-190}{95} \Leftrightarrow (2x-190)\left(\frac{1}{195} + \frac{1}{197} - \frac{1}{95}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-190 = 0 \left(\text{vì } \frac{1}{195} + \frac{1}{197} - \frac{1}{95} \neq 0\right) \Leftrightarrow 2x = 190 \Leftrightarrow x = 95 \end{aligned}$$

Vậy $S = \{95\}$.

Câu 5. Cho phương trình: $\frac{x+2m}{x+3} + \frac{x-m}{x-3} = \frac{mx(x+1)}{x^2-9}$

Giải phương trình trong các trường hợp sau:

a) $m = 1$;

b) $m = 2$;

c) $m = 1,6$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x = \pm 3$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow (x+2m)(x-3) + (x-m)(x+3) &= mx(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2mx - 6m + x^2 + 3x - mx - 3m = mx^2 + mx \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - mx^2 = 9m \Leftrightarrow (2-m)x^2 = 9m \end{aligned}$$

Khi $m = 1$ ta được $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ (loại).

Khi $m = 2$ ta được $0x^2 = 18$, vô nghiệm.

Khi $m = 1,6$ ta được $0,4x^2 = 14,4 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy khi $m = 1$ hoặc $m = 2$ thì phương trình vô nghiệm khi $m = 1,6$ thì phương trình có nghiệm $x = \pm 6$.

Câu 6. So sánh các số sau: $\frac{5}{8}$ và $\frac{4}{7}$; $5,6784$ và $5,6775$; $\frac{9}{20}$ và $0,45$

-17 và -19

Lời giải

$$\frac{5}{8} = \frac{35}{56}; \quad \frac{4}{7} = \frac{32}{56} \quad \text{mà} \quad \frac{35}{56} > \frac{32}{56} \Rightarrow \frac{5}{8} > \frac{4}{7}$$

$5,678$ và $5,6775$ có phần nguyên bằng nhau, phần thập phân chữ số thập phân thứ nhất và thứ hai bằng nhau. Chữ số thập phân thứ ba

$$8 > 7 \text{ nên } 5,678 > 5,6775$$

$$\frac{9}{20} = 0,45; \quad -17 > -19$$

Câu 7. Có bất đẳng thức sau không?

a) $2 \cdot \frac{1}{2} : \frac{3}{4} - 2 \frac{1}{3} > \left(1 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{3}\right) \cdot 4$?

b) $-7,65 + 4,35 < 4,5 - 8,35$?

Lời giải

a) $2\frac{1}{2} : \frac{3}{4} - 2\frac{1}{3} = \frac{5}{2} : \frac{3}{4} - \frac{7}{3} = \frac{20}{6} - \frac{7}{3} = \frac{10}{3} - \frac{7}{3} = 1$

$\left(1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}\right) \cdot 4 = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) \cdot 4 = \frac{2}{3}$ mà $1 > \frac{2}{3}$

Nên có bất đẳng thức (hay nói khác đi bất đẳng thức trên là đúng)

b) $-7,65 + 4,35 = -3,30$

$4,5 - 8,35 = -3,85$ mà $-3,30 > -3,85$

Nên bất đẳng thức trên là sai. (không có bất đẳng thức)

Câu 8. Hai số a, b là số dương hay âm nếu ta có:

a) $a - 5 > b - 5$ và $b > 6$

b) $a - 10 > b - 10$ và $a < -14$

Lời giải

a) $a - 5 > b - 5$ suy ra $a > b$ mà $b > 6$ vậy $a > 6$ nên a, b đều là số dương

b) $a - 10 > b - 10$ suy ra $a > b$ mà $a < -12$, nên $b < -12$ vậy a, b đều là số âm.

Câu 9. Cho bất đẳng thức $6 > -4$. Hãy viết những bất đẳng thức mới nêu:

a) Nhân hai vế của bất đẳng thức với 3; -1; 2; -4

b) Chia hai vế của bất đẳng thức với 2; -2; -1;

Lời giải

a)

$6 > -4$ thì $6 \cdot 3 > -4 \cdot 3 \Rightarrow 18 > -12$

$6 > -4$ thì $6 \cdot (-1) < -4 \cdot (-1) \Rightarrow -6 < 4$

$6 > -4$ thì $6 \cdot 2 > -4 \cdot 2 \Rightarrow 12 > -8$

$6 > -4$ thì $6 \cdot (-4) < -4 \cdot (-4) \Rightarrow -24 < 16$

b)

$6 > -4$ thì $6 \cdot \frac{1}{2} > -4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 3 > -2$

Tương tự ta có $-3 < 2$; $-6 < 4$

Câu 10. Cho bất đẳng thức $c \leq d$. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau là đúng:

a) $-5c \geq -5d$;

b) $0,05c - 1,7 \leq 0,05d - 1,7$

$$c) \frac{c}{10} \leq \frac{d}{10}$$

$$d) 4 - c \geq 4 - d$$

$$e) 3c + 15 \leq 3d + 15$$

$$h) 0,8 - \frac{c}{5} \geq 0,8 - \frac{d}{5}$$

Lời giải

$$a) c \leq d \text{ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với } -5 \text{ thì ta có: } -5 \cdot c \geq -5 \cdot d \text{ hay } -5c \geq -5d$$

$$b) c \leq d \text{ nên } 0,05c \leq 0,05d \Rightarrow 0,05c - 1,7 \leq 0,05d - 1,7$$

$$c) c \leq d \text{ nên } \frac{1}{10} \cdot c \leq \frac{1}{10} \cdot d \Rightarrow \frac{c}{10} \leq \frac{d}{10}$$

$$e) c \leq d \text{ nên } (-1) \cdot c \geq (-1) \cdot d \Rightarrow -c \geq -d \text{ nên } 4 - c \geq 4 - d$$

$$h) \text{ Tương tự ta có bất đẳng thức } 0,8 - \frac{c}{5} \geq 0,8 - \frac{d}{5}$$

Câu 11. Chứng minh rằng nếu $a > b$ và $a > 0, b > 0$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Lời giải

$$a > 0 \text{ và } b > 0 \text{ nên } ab > 0, \text{ suy ra } \frac{1}{ab} > 0$$

$$\text{Nhân cả hai vế của bất phương trình } a > b \text{ với } \frac{1}{ab} > 0 \text{ ta có: } a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab} \text{ nên } \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

Câu 12. Chứng minh rằng nếu $a > b > 0$ thì $a^n > b^n$ (n là số nguyên)

Lời giải

$$\begin{array}{r} a > b \\ a > b \\ \times \\ \dots\dots\dots \\ \hline a > b \\ \hline a^n > b^n \end{array}$$

Câu 13. Cho $10 < a < 16, 2 < b < 4$. Hãy tìm $a + b; a - b; a \cdot b; a : b$

Lời giải

$$\begin{array}{l} 12 < a + b < 20 \\ 6 < a - b < 14 \end{array};$$

$$20 < a.b < 64$$

$$\frac{5}{2} < a : b < 8$$

Câu 14. Người ta định xây một căn nhà mà mặt bằng là một hình chữ nhật với hai kích thước là a và b (m) mà $7,5 \leq a \leq 7,6$ và $5,4 \leq b \leq 5,5$. Có thể xây cả căn nhà với mặt bằng không nhỏ hơn 41m^2 được không?

Lời giải

$$40,5 \leq a.b \leq 41,8$$

Như vậy có thể xây dựng căn nhà có diện tích không nhỏ hơn 41m^2 . Đó là căn nhà với chiều dài $a = 7,6\text{m}$ và chiều rộng $b = 5,5\text{m}$.

Câu 15. Giải các bất phương trình sau:

a) $5(x-1)+7 \leq 1-3(x+2)$;

b) $4(x+8)-7(x-1) < 12$

c) $4(x-1,5)-1,2 \geq 6x-1$

d) $1,7-3(1-x) < -(x-1,9)$

Lời giải

a) $\Leftrightarrow 5x-5+7 \leq 1-3x-6 \Leftrightarrow 5x+3x \leq 5-7+1-6 \Leftrightarrow 8x \leq -7 \Leftrightarrow x \leq \frac{-7}{8}$

b) $\Leftrightarrow 4x+32-7x+7 < 12 \Leftrightarrow -3x < -27 \Leftrightarrow x > 9$

c) $\Leftrightarrow 4x-6-1,2 \geq 6x-1 \Leftrightarrow 4x-6x \geq -1+6+1,2 \Leftrightarrow -2x \geq 6,2 \Leftrightarrow x \leq -3,1$

d) $1,7-3+3x < -x+1,9 \Leftrightarrow 3x+x < 1,9-1,7+3 \Leftrightarrow 4x < 3,2 \Leftrightarrow x < 0,8$

Câu 16. Với giá trị nào của x :

a) Giá trị của phân thức $\frac{9-3x}{8}$ lớn hơn giá trị của phân thức tương ứng $\frac{5x-9}{16}$.

b) Giá trị của phân thức $\frac{5+2x}{3}$ lớn hơn giá trị của phân thức tương ứng $\frac{3,5+3x}{6}$.

c) Giá trị nào của đa thức $7x+1$ nhỏ hơn giá trị của phân thức tương ứng $\frac{3x+2}{3}$.

d) Giá trị của phân thức $\frac{17-2x}{13}$ nhỏ hơn giá trị của đa thức tương ứng $x+4$

Lời giải

a) $\frac{9-3x}{8} > \frac{5x-9}{16} \Leftrightarrow 2(9-3x) > 5x-9 \Leftrightarrow 18-6x > 5x-9$

$\Leftrightarrow -6x-5x > -9-18 \Leftrightarrow -11x > -27 \Leftrightarrow x < \frac{27}{11}$

$$b) \frac{5+2x}{3} > \frac{3,5+3x}{6} \Leftrightarrow 2(5+2x) > 3,5+3x \Leftrightarrow 10+4x > 3,5+3x \Leftrightarrow 4x-3x > 3,5-10 \Leftrightarrow x > -6,5$$

$$c) 7x+1 < \frac{3x+2}{3} \Leftrightarrow 21x+3 < 3x+2 \Leftrightarrow 18x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{18}$$

$$d) \frac{17-2x}{3} < x+4 \Leftrightarrow 17-2x < 3x+12 \Leftrightarrow -5x < -5 \Leftrightarrow x > 1$$

Câu 17. Dựa vào liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, chứng tỏ rằng hai bất phương trình sau tương đương: $x > 7 \Leftrightarrow x+m > 7+m$ (m là số bất kì)

Lời giải

Nếu $x = n$ là nghiệm của bất phương trình thì $n > 7$.

Theo tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng thì từ $n > 7$ ta có $n+m > 7+m$ nên $x = n$ cũng là nghiệm của bất đẳng thức $x+m > 7+m$

Ngược lại nếu $x = n$ là nghiệm của bất phương trình: $x+m > 7+m$ thì ta có $n+m > 7+m$, cũng theo tính chất trên thì ta cũng có $n > 7$ có nghĩa là $x = n$ là nghiệm của bất phương trình $x > 7$

Tóm lại $x > 7 \Leftrightarrow x+m > 7+m$.

Câu 18. Giải các bất phương trình sau

$$a) \frac{3+x}{4} + \frac{2-x}{3} < 0$$

$$b) x - \frac{x-3}{5} + \frac{2x-1}{10} < 4$$

$$c) \frac{4-y}{5} - 5y > 0$$

$$d) \frac{y-1}{2} - 1 + \frac{2y-1}{6} > y$$

Lời giải

$$a) \frac{3+x}{4} + \frac{2-x}{3} < 0 \Leftrightarrow 3(3+x) + 4(2-x) < 0 \Leftrightarrow x > 17 \quad b)$$

$$\Leftrightarrow 10x - 2(x-3) + 2x - 1 < 40 \Leftrightarrow x < 3,5$$

$$c) \text{ĐS: } y < \frac{2}{13}$$

$$d) \text{ĐS: } y < -3$$

Câu 19. a) Với giá trị nào của x thì tổng hai phân thức $\frac{3x-1}{4}$ và $\frac{x-1}{5}$ là số dương?

b) Với giá trị nào của y thì hiệu hai phân thức $\frac{5y+1}{3}$ và $\frac{3-y}{5}$ là số âm?

Lời giải

$$a) x \text{ là nghiệm của bất phương trình } \frac{3x-1}{4} + \frac{x-1}{5} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(3x-1) + 4(x-1) > 0 \Leftrightarrow 19x > 9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{19}.$$

b) y là nghiệm của bất phương trình $\frac{5y+1}{3} - \frac{3-y}{5} < 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{7}$

Câu 20. Giải bất phương trình dạng $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) > 0$ (1) hoặc $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) < 0$ (2) với $a_1 < a_2 < a_3$

Lời giải

Ta làm như sau: Đặt $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$

- Nếu $x = x_0 > a_3$ thì $x_0 - a_1 > 0, x_0 - a_2 > 0, x_0 - a_3 > 0$ nên $P(x) > 0$.

$a_1 < x_0 < a_2$ thì $x_0 - a_1 > 0, x_0 - a_2 < 0, x_0 - a_3 < 0$ nên $P(x) > 0$

- Nếu $a_2 < x_0 < a_3$ thì $x_0 - a_1 > 0, x_0 - a_2 > 0, x_0 - a_3 < 0$ nên $P(x) < 0$

- Nếu $x_0 < a_1$ thì $x_0 - a_1 < 0, x_0 - a_2 < 0, x_0 < a_3$ nên $P(x) < 0$.

Từ đó ta có thể kết luận tập hợp nghiệm của phương trình (1): $\{x / x > a_3\} \cup \{x / a_1 < x < a_2\}$

Tập hợp nghiệm của phương trình (2): $\{x / a_2 < x < a_3\} \cup \{x / x < a_1\}$

Câu 21. Giải các bất phương trình sau:

a) $(x-1)(x-3)(x-2) > 0$

b) $(x+2)(x-5)(x-6) < 0$

Lời giải

a) Bất phương trình a) tương đương với bất phương trình sau: $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là $x > 3$ và $1 < x < 2$ hay $S_a = \{x / x > 3\} \cup \{x / 1 < x < 2\}$

b) Phương trình b) tương đương với bất phương trình: $(x-(-2))(x-5)(x-6) < 0$

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là : $\{x / x < -2\} \cup \{x / 5 < x < 6\}$

Câu 22. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 3x + 3 - x^2 - x - 1}{3(x^2 + x + 1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{3(x^2 + x + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)^2}{3(x^2 + x + 1)} \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng (dấu "=" khi và chỉ khi $x = 1$).

Câu 23. Chứng minh rằng $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.

Áp dụng : Cho $3x + 4y = 5$, chứng minh rằng $x^2 + y^2 \geq 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \Leftrightarrow (ax+by)^2 - (a^2+b^2)(x^2+y^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 - b^2y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng (dấu "=" khi và chỉ khi $ay = bx$).

$$\text{Áp dụng: } (3x+4y)^2 \leq (3^2+4^2)(x^2+y^2)$$

$$5^2 \leq 25(x^2+y^2). \text{ Do đó } x^2+y^2 \geq 1 \text{ (dấu "=" khi và chỉ khi } \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \text{)}.$$

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

$$\text{a) } A = x^2 - 3x + 2$$

$$\text{b) } B = (x+y)^4 - 8(x+y)^2 + 17$$

Lời giải

$$\text{a) } A = x^2 - 3x + 2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{3}{2} \text{)}.$$

$$\text{Vậy } \min A = -\frac{1}{4} \text{ khi } x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } B = (x+y)^4 - 8(x+y)^2 + 17 = \left[(x+y)^2 - 4\right]^2 + 1 \geq 1 \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } (x+y)^2 = 4 \text{ hay } x+y = \pm 2 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } \min A = 1 \text{ khi } x+y = \pm 2.$$

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

$$\text{a) } C = -x^2 + 14x - 70;$$

$$\text{b) } D = -x^4 + 2x^2 + 9$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } C = -x^2 + 14x - 70 = -x^2 + 14x - 49 - 21 = -(x-7)^2 - 21 \leq -21 \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x = 7 \text{)}$$

$$\text{Vậy } \max C = -21 \text{ khi } x = 7.$$

$$\text{b) Ta có } D = -x^4 + 2x^2 + 9 = -x^4 + 2x^2 - 1 + 10$$

$$= -(x^2 - 1)^2 + 10 \leq 10 \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x^2 = 1 \text{ hay } x = \pm 1 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } \max D = 10 \text{ khi } x = \pm 1.$$

Câu 26. Giải bất phương trình

$$\text{a) } \frac{x-5}{14} \leq \frac{3(1,5-2x)}{35}$$

$$\text{b) } \frac{2x-5}{4} > \frac{x+1}{2}.$$

Lời giải

a) Ta có : $\frac{x-5}{14} \leq \frac{3(1,5-2x)}{35} \Leftrightarrow 5(x-5) \leq 6(1,5-2x) \Leftrightarrow 5x-25 \leq 9-12x \Leftrightarrow 17x \leq 34 \Leftrightarrow x \leq 2.$

b) Ta có $\frac{2x-5}{4} > \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 2x-5 > 2x+2 \Leftrightarrow 0x > 7.$

Bất phương trình này vô nghiệm.

Câu 27. Cho bất phương trình $a^2x - ax > 3 - x$

a) Giải bất phương trình (1) khi $a = 2.$

b) Chứng minh rằng bất phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của $a.$

Lời giải

a) Khi $a = 2$ thì (1) trở thành $4x - 2x > 3 - x$

$$\Leftrightarrow 4x - 2x + x > 3 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1.$$

b) $a^2x - ax > 3 - x \Leftrightarrow a^2x - ax + x > 3 \Leftrightarrow (a^2 - a + 1)x > 3.$

Vì $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi giá trị của a nên $x > \frac{1}{a^2 - a + 1}.$

Vậy bất phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của $a.$

Câu 28. Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình :

$$(x-5)^2 < x^2 + x + 3 \quad (1)$$

$$(x+1)(x-3) > x(x-4) \quad (2)$$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 - x^2 - x < 3 \Leftrightarrow -11x < 3 - 25 \Leftrightarrow -11x < -22 \Leftrightarrow x > 2.$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + x - 3 > x^2 - 4x \Leftrightarrow -3x + x + 4x > 3 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

Kết hợp hai kết quả lại ta được nghiệm chung của (1) và (2) là $x > 2.$

Câu 29. Tìm nghiệm nguyên dương của bất phương trình : $\frac{5x+1}{4} \leq \frac{5x+9}{6}.$

Lời giải

Ta có $\frac{5x+1}{4} \leq \frac{5x+9}{6} \Leftrightarrow 3(5x+1) \leq 2(5x+9) \Leftrightarrow 15x+3 \leq 10x+18$

$$\Leftrightarrow 15x - 10x \leq 18 - 3 \Leftrightarrow 5x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq 3$$

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1; 2; 3\}.$

Câu 30. Giải bất phương trình : $\frac{x^2 - x + 5}{x^2 + x + 3} > 1.$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + x + 3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 5 - (x^2 + x + 3)}{x^2 + x + 3} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 2}{x^2 + x + 3} > 0$$

$$\text{Vì } x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \text{ với mọi } x \text{ nên ta có } -2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$$