CHUYÊN ĐỀ ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

CHỦ ĐỀ 1: CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN VÀ BÀI TOÁN ƯCLN VÀ BCNN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Ước: Số tự nhiên $d \neq 0$ được gọi là ước của số tự nhiên a khi và chỉ khi a chia hết cho d. Ta nói d là ước của a.

Nhận xét: Tập hợp các ước của a là $Ư(a) = \{d \in \mathbb{N} : d \mid a\}$

Bội: Số tự nhiên m được gọi là bội của $a \neq 0$ khi và chỉ khi m chia hết cho a hay a là một ước số m.

Nhận xét: Tập hợp các bội của a $(a \neq 0)$ là $B(a) = \{0; a; 2a; ...; ka\}, k \in Z$

2) Tính chất:

- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.

- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

- Nếu $Ư(a) = \{1; a\}$ thì a là số nguyên tố.

- Số lượng các ước của một số : Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x.b^y.c^z$ … thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$ …

Thật vậy ước của A là số có dạng mnp …trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1,\ a,\ a^2,\ \ldots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1,\ b,\ b^2,\ \ldots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1,\ c,\ c^2,\ \ldots, c^z$),…

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

II. Ước chung và bội chung

1) Định nghĩa

Ước chung (ƯC): Nếu hai tập hợp $\text{Ư}(a)$ và $\text{Ư}(b)$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là ước số chung của a và b. Kí hiệu: $\text{ƯC}(a;b)$.

Nhận xét: Nếu $\text{ƯC}(a;b)=\{1\}$ thì a và b nguyên tố cùng nhau.

Ước chung lớn nhất (ƯCLN): Số $d\in\mathbb{N}$ được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b $(a;b\in\mathbb{Z})$ khi d là phần tử lớn nhất trong tập hợp $\text{ƯC}(a;b)$. Kí hiệu ước chung lớn nhất của a và b là $\text{ƯCLN}(a;b)$ hoặc $(a;b)$ hoặc $gcd(a;b)$.

Bội chung (BC): Nếu hai tập hợp $\text{B}(a)$ và $\text{B}(b)$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là bội số chung của a và b. Kí hiệu $\text{BC}(a;b)$.

Bội chung nhỏ nhất (BCNN): Số $m\neq 0$ được gọi là bội chung nhỏ nhất của a và b khi m là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp $\text{BC}(a;b)$. Kí hiệu bội chung nhỏ nhất của a và b là BCNN $(a;b)$ hoặc $[a;b]$ hoặc $lcm(a;b)$.

2) Tính chất

Một số tính chất của ước chung lớn nhất:

- Nếu $(a_1;a_2;...;a_n)=1$ thì ta nói các số $a_1;a_2;...;a_n$ nguyên tố cùng nhau.

- Nếu $(a_m;a_k)=1,\forall m\neq k,\{m,k\}\in\{1;2;....;n\}$ thì ta nói các số $a_1;a_2;...;a_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

- $c\in$ ƯC$(a;b)$ thì $\left(\frac{a}{c};\frac{b}{c}\right)=\frac{(a;b)}{c}$.

- $d=(a;b)\Leftrightarrow\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right)=1$.

- $(ca;cb)=c(a;b)$.

- $(a;b)=1$ và $(a;c)=1$ thì $(a;bc)=1$

- $(a;b;c)=((a;b);c)$

- Cho $a>b>0$

- Nếu $a=b.q$ thì $(a;b)=b$.

- Nếu $a=bq+r\,(r\neq 0)$ thì $(a;b)=(b;r)$.

Một số tính chất của bội chung nhỏ nhất:

- Nếu $[a;b]=M$ thì $\left(\frac{M}{a};\frac{M}{b}\right)=1$.

- $[a;b;c]=[[a;b];c]$

- $[ka,kb]=k[a,b]$;

- $[a;b].(a;b)=a.b$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Các tính chất và bài toán cơ bản về ƯCLN và BCNN

I. Phương pháp giải

Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x.b^y.c^z$ … thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$ …

Thật vậy ước của A là số có dạng mnp …trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1,\ a,\ a^2,\ \ldots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1,\ b,\ b^2,\ \ldots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1,\ c,\ c^2,\ \ldots, c^z$),…

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số ước của số 18^{96}.

<u>Lời giải:</u>

Ta có : $18^{96} = \left(3^2.2\right)^{96} = 3^{192}.2^{96}.$

Vậy số ước của số 18^{96} là $(96+1)(192+1) = 97.193 = 18721.$

Bài 2: Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 0 là số chính phương khi và chỉ khi số ước số của nó là số lẻ.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}....p_k^{a_k}$ với p_i nguyên tố và $a_i \in N^*$.

n là số chính phương khi và chỉ khi $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số chẵn khi đó $(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)$ là số lẻ.

Mặt khác $(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)$ là số các số ước của n, do đó bài toán được chứng minh.

Bài 3: Một số tự nhiên n là tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n không thể có đúng 17 ước số.

<u>Lời giải</u>

Tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp có dạng :

$n = (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = 3m^2 + 2$ không thể là số chính phương.

Nếu n có đúng 17 ước số thì n là số chính phương (bài toán 1), vô lí. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3: Cho $(a,b) = 1; a > b.$ Chứng minh rằng:

a) $(a, a+b)=1$

b) $(b, a-b)=1$

c) $(ab, a+b)=1$

d) $(a^2, a-b)=1$

Lời giải

a) Đặt $(a, a+b)=d (d\in N^*) \Rightarrow \begin{cases} a \vdots d \\ a+b \vdots d \end{cases} \Rightarrow b \vdots d \Rightarrow d \in UC(a,b) \Rightarrow d \in U(UC(a,b)) \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1$

c) $(ab, a+b)=d \Rightarrow \begin{cases} ab \vdots d \\ a+b \vdots d \end{cases}$

Giả sử $d \neq 1$. Gọi p là số ước nguyên tố của d (1 số tự nhiên khác 1 bào giờ cũng tồn tại ít nhất một ước nguyên tố) $\Rightarrow d \vdots p \Rightarrow \begin{cases} ab \vdots p \\ a+b \vdots p \end{cases}$

Ta có: $ab \vdots p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots b \Rightarrow b \vdots p \\ b \vdots p \Rightarrow a \vdots p \end{array} \right. \Rightarrow p \in UC(a,b) \Rightarrow p \in U(ucln(a,b)) \Rightarrow 1 \vdots p \Rightarrow p=1$ (vô lý)

Vậy $d=1 \Rightarrow (ab; a+b)=1$

d) $\begin{cases} a^2 b \vdots d \\ a-b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 b \vdots p \\ a-b \vdots p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2 \vdots p \Rightarrow a \vdots p \Rightarrow b \vdots p \\ b \vdots p \Rightarrow a \vdots p \end{array} \right. \\ a-b \vdots p \end{cases}$

Bài 3: Biết rằng $\overline{abc}$ là bội chung của $\overline{ab}; \overline{ac}; \overline{bc}$. Chứng minh rằng:

a) $\overline{abc}$ là bội của $\overline{bc}$

b) $\overline{abc}$ là bội của 11

Lời giải

a) $\overline{abc} : \overline{ab} \Leftrightarrow 10\overline{ab} + c \vdots \overline{ab} \Leftrightarrow c \vdots \overline{ab} \Leftrightarrow c=0$ (do c có một chữ số, $\overline{ab}$ có hai chữ số)

- $\begin{cases} \overline{abc} \vdots \overline{ac} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow (100a+10b) \vdots 10a \Rightarrow b \vdots a$

Đặt $b=ak (k \in N^*)$

- $\begin{cases} \overline{abc} \vdots \overline{ba} \\ c=0; b=ak \end{cases} \Rightarrow 100a+10b \vdots (10b+a) \Rightarrow 99a \vdots 10b+a \Rightarrow 99a \vdots 10ak+a \Rightarrow 99 \vdots 10k+1 \Rightarrow 10k+1=11$

$\Leftrightarrow k=1 \Rightarrow a=b; c=0$

Vì $\overline{abc} \vdots \overline{ac} \Rightarrow \overline{abc} \vdots \overline{bc} \Rightarrow$ đpcm

b) $\overline{abc}=\overline{aa0}=110a \vdots 11 \Rightarrow$ đpcm

Bài 4: Biết rằng $[a,b].(a,b)=ab$

a. $[a,b]=600; (a,b)$ nhỏ hơn 10 lần (a, b). Số thứ nhất là 120, tìm số thứ hai

b. (a, b) = 12, [a, b] lớn gấp 6 lần (a, b). Số thứ nhất là 24, tìm số thứ hai

c. Tổng cuả hai số bằng 60, tổng giữa UCLN và BCNN của chúng là 84. Tìm hai số đó

Lời giải

a. Ta có: $(a,b)=600:10=60; (a,b).[a,b]=ab \Rightarrow 60.60=120.b \Rightarrow b=300$

b. Số thứ hai là 36

c. Gọi hai số phải tìm là: a và b

$(a,b)=d$, đặt $a=dm; b=dn \Rightarrow \begin{cases}(m,n)=1\\ m,n \in N^*\end{cases}$; $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}=\dfrac{d^2.m.n}{d}=dmn$

Có: $d+dmn=4 \Leftrightarrow d(mn+1)=4(1)$

Vì tổng của hai bằng 60 nên $d(m+n)=60(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow 1,2,3,4,6,12=d \Rightarrow d=12(thoa.man) \Rightarrow m=2; n=3 \Leftarrow a=24; b=36$

Hoặc $m=3; n=2 \Rightarrow a=36; b=24$

Dạng 2: Tìm số nguyên n để thỏa mãn điều kiện chia hết

I. Phương pháp giải

Tách số bị chia thành phần chứa ẩn số chia hết cho số chia và phần nguyên dư, sau đó để thỏa mãn chia hết thì số chia phải là ước của phần số nguyên dư, từ đó ta tìm được số nguyên n thỏa mãn điều kiện.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để $5n+14$ chia hết cho $n+2$.

Lời giải:

Ta có: $5n+14=5.(n+2)+4$

Mà $5.(n+2)$ chia hết cho $(n+2)$

Do đó $(5n+14)$ chia hết cho $(n+2)\Leftrightarrow 4$ chia hết cho $(n+2)\Leftrightarrow (n+2)$ là ước của 4.

$\Leftrightarrow (n+2)\in\{1\,;2\,;4\}$

Do đó $n\in\{0;2\}$

Vậy với $n\in\{0;2\}$ thì $(5n+14)$ chia hết cho $(n+2)$.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Lời giải:

Để $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì $(n+15)$ chia hết cho $(n+3)$.

$\left[(n+15)-(n+3)\right]$ chia hết cho $(n+3)$.

$\Leftrightarrow 12$ chia hết cho $(n+3)$.

$\Leftrightarrow (n+3)$ là $Ư(12)=\{1;2;3;4;6;12\}$.

$\Leftrightarrow n\in\{0;1;3;9\}$.

Vậy với $n\in\{0;1;3;9\}$ thì $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n để $(n^2+3n+6)\vdots(n+3)$.

Lời giải:

Ta có: $(n^2+3n+6)\vdots(n+3)$

Suy ra: $\left[n(n+3)+6\right]\vdots(n+3)\ \Leftrightarrow\ 6\vdots(n\ +\ 3)$

Do đó $n+3\ \in\ Ư(6)=\{1;2;3;6\}$

Vậy $n=0; n=3$ thì $\left(n^2+3n+6\right)\vdots(n+3)$.

Bài 4: Tìm số nguyên n để phân số $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

<u>Lời giải:</u>

Ta có: $\dfrac{4n+5}{2n-1}=\dfrac{4n-2+7}{2n-1}=\dfrac{2(2n-1)+7}{2n-1}=2+\dfrac{7}{2n-1}$

Vì 2 là số nguyên nên để $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên thì $\dfrac{7}{2n-1}$ là số nguyên

Suy ra $2n-1\in Ư(7)=\{-7;-1;1;7\}$

$\Leftrightarrow\ 2n\in\{-6;0;2;8\}\Leftrightarrow\ n\in\{-3;0;1;4\}$

Vậy với $n\in\{-3;0;1;4\}$ thì $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên:

$$B=\frac{2n+2}{n+2}+\frac{5n+17}{n+2}-\frac{3n}{n+2}$$

<u>Lời giải</u>

Ta có:

$$B=\frac{2n+2}{n+2}+\frac{5n+17}{n+2}-\frac{3n}{n+2}=\frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2}=\frac{4n+19}{n+2}=\frac{4(n+2)+11}{n+2}=4+\frac{11}{n+2}$$

Để B là số tự nhiên thì $\dfrac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow\ 11\vdots(n+2)\Rightarrow\ n+2\in Ư(11)=\{-11;-1;1;11\}$

Do $n+2>1$ nên $n+2=11\Rightarrow n=9$.

Vậy $n=9$ thì B là số tự nhiên.

Bài 6: Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số $n=\dfrac{(k+1)^2}{k+23}$ là một số nguyên dương.

<u>Lời giải</u>

Ta có: $n=\dfrac{(k+1)^2}{k+23}=\dfrac{k^2+2k+1}{k+23}=\dfrac{(k+23)(k-21)+484}{k+23}=k-1+\dfrac{484}{k+23}, k\in Z^+$ n là một số nguyên dương khi và chỉ khi $k+23\,|\,484,\ k+23>23$

Ta có $484=22^2=4.121=44.21\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k+23=121\\k+23=44\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=98\\k=21\end{array}\right.$

Với $k=98$, ta có $n=81$

Với $k=21$, ta có $n=11$

Vậy giá trị k lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 98.

Dạng 3: Tìm số tự nhiên khi biết điều kiện về tổng, tích, thương các số và dữ kiện về ƯCLN, BNCC.

I. Phương pháp giải

- Biết ƯCLN(a, b) = k thì $a=km$ và $b=kn$ với ƯCLN(m, n) = 1 (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b

- Biết BCNN(a, b) = k thì ta gọi ƯCLN(a, b) = d thì $a=md$ và $b=nd$ với ƯCLN(m, n) = 1 (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm hai số nguyên dương $a;b$ biết $a+b=128$ và ƯCLN(a, b) = 16.

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $a,b\in\mathbb{Z}^+$

Giả sử $0<a\le b$. Ta có ƯCLN(a, b) = 16

$\Rightarrow a=16m;b=16n$ với $(m,n\in Z^+)$; ƯCLN$(m,n)=1;m\le n$

Biết $a+b=128\Rightarrow16(m+n)=128\Rightarrow m+n=8$

Vì ƯCLN$(m,n)=1$ nên ta có hai trường hợp của m và n

Trường hợp 1: $m=1,n=7\Rightarrow a=16,b=112$

Trường hợp 2: $m=3,n=5\Rightarrow a=48,b=80$

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên a, b, biết rằng: $a+b=162$ và ƯCLN$(a,\ b)=18$

Lời giải:

Điều kiện: $a,b\in\mathbb{N}$. Giả sử $a\le b$

Ta có: $a+b=162,\ (a,b)=18$

Đặt $\begin{cases}a=18m\\ b=18n\end{cases}$ với $(m,\mathrm{n})=1, m\le n$

Từ $a+b=162\Rightarrow 18(m+n)=162\Rightarrow m+n=9$

Do $(m,n)=1$, lập bảng:

m	1	2	3	4
n	8	7	6	5
a	18	36	loai	72
b	144	126		90

Kết luận: Các số cần tìm là: $(18;144);(36;126);(72;90)$

Bài 3: Tìm hai số nhỏ hơn 200, biết hiệu của chúng bằng 90 và ƯCLN là 15

Lời giải:

Gọi hai số cần tìm là $a;b\quad (a,b\in\mathbb{N};a,b<200)$

Ta có: $a-b=90;\ (a,b)=15$

Đặt $\begin{cases}a=15m\\ b=15n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(m,n)=1\\ 15(m-n)=90\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(m,n)=1\\ m-n=6\end{cases}$

Lại có: $a,b<200\Rightarrow\begin{cases}15m<200\\ 15n<200\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\le 13\\ n\le 13\end{cases}$

m	n	a	b
13	7	195	105
11	5	65	75

7	1	85	15

Vậy: $(a,b)=(195;105),(65;75),(85;15)$.

Bài 4: Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 432 và ƯCLN bằng 6.

Lời giải:

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a,b. Điều kiện: $a,b\in\mathbb{N}$.

Ta có: $ab=432;\ (a,b)=6\ (a\le b)$

Đặt $a=6m,b=6n$ với (m, n) = 1 và m ≤ n $\Rightarrow 36mn=432\Rightarrow mn=12$

Ta được:

m	n	a	b
1	12	6	72
3	4	18	24

Vậy $(a,\text{b})=(6;72),(18,24)$.

Bài 5: Tìm hai số a,b biết $7a=11b$ và ƯCLN$(a;b)=45$.

Lời giải

Từ $7a=11b$ suy ra $a>b$

Từ ƯCLN$(a;b)=45 \Rightarrow \begin{cases}a=45a_1\\ b=45b_1\end{cases}\quad (a_1;b_1)=1,(a_1\ge b_1)$

Mà: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{11}{7}\Rightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{11}{7}\Rightarrow\begin{cases}a_1=11\\ b_1=7\end{cases}$ vì $(a_1;b_1)=1 \Rightarrow \begin{cases}a=45.11=495\\ b=45.7=315\end{cases}$

Vậy hai số a,b cần tìm là $a=495$ và $b=315$.

Bài 6: Cho $a=1980,b=2100$.

a) Tìm (a,b) và $[a,b]$.

b) So sánh $[a,b].(a,b)$ với ab. Chứng minh nhận xét đó đối với hai số tự nhiên a và b khác 0 tùy ý.

Lời giải

a) $1980=2^2.3^2.5.11,\qquad 2100=2^2.3.5^2.7.$

ƯCLN(1980, 2100) $= 2^2.3.5 = 60$

$BCNN\left(1980,2100\right) = 2^2.3^2.5^2.7.11 = 69300.$

b) $\left[1980,2100\right].\left(1980,2100\right) = 1980.2100$ (đều bằng 4158000). Ta sẽ chứng minh rằng $\left[a,b\right].\left(a,b\right) = a.b$

Cách 1. Trong cách giải này, các thừa số riêng cũng được coi như các thừa số chung, chẳng hạn a chứa thừa số $11, b$ không chứa thừa số 11 thì ra coi như b chứa thừa số 11 với số mũ bằng 0. Với cách viết này, trong ví dụ trên ta có:

$1980 = 2^2.3^2.5.7^0.11.$

$2100 = 2^2.3.5^2.7.11^0.$

$\left(1980,2100\right)$ là tích các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất $2^2.3^2.5.7^0.11^0 = 60$. $\left[1980,2100\right]$ là tích các thừa số chung với số mũ lớn nhất $2^2.3^2.5^2.7.11 = 69300.$

Bây giờ ta chứng minh trong trường hợp tổng quát:

$\left[a,b\right].\left(a,b\right) = a.b \qquad (1)$

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, các thừa số nguyên tố ở hai vế của $\left(1\right)$ chính là các thừa số nguyên tố có trong a và b. Ta sẽ chứng tỏ rằng hai vế chứa các thừa số nguyên tố như nhau với số mũ tương ứng bằng nhau.

Gọi p là thừa số nguyên tố tùy ý trong các thừa số nguyên tố như vậy. Giả sử số mũ của p trong a là x, số mũ của p trong b là y trong đó x và y có thể bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \geq y$. Khi đó vế phải của (1) chứa p với số mũ $x + y$. Còn ở vế trái, [a, b] chứa p với số mũ x, (a, b) chứ p với số mũ y nên vế trái cũng chứa p với số mũ $x + y$.

Cách 2. Gọi $d = (a,b)$ thì $a = da', b = db'$ (1), trong đó $(a',b') = 1$.

Đặt $\dfrac{ab}{d} = m$ $\left(2\right)$, ta cần chứng minh rằng $\left[a,b\right] = m$.

Để chứng minh điều này, cần chứng tỏ tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho $m = ax$, $m = by$ và (x, y) = 1.

Thật vậy từ (1) và (2) suy ra $m = a.\dfrac{b}{d} = ab'$,

$m = b.\dfrac{a}{d} = ba'$. Do đó, ta chọn $x = b', y = a'$, thế thì $(x,y) = 1$ vì $(a',b') = 1$.

Vậy $\dfrac{ab}{d} = [a,b]$, tức là $[a,b].(a,b) = ab.$

Bài 7: Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 10, BCNN của chúng bằng 900.

<u>Lời giải</u>

Gọi các số phải tìm là a và b. Điều kiện: $a,b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a \le b$.

Ta có $(a,b) = 10$ nên. $a = 10a'$, $b = 10b'$, $(a',b') = 1, a' \le b'$. Do đó $ab = 100a'b'$ (1). Mặt khác $ab = [a,b].(a,b) = 900.10 = 9000$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a'b' = 90$. Ta có các trường hợp :

a'	1	2	3	4
b'	90	45	18	10

Suy ra:

a	10	20	50	90
b	900	450	180	100

Bài 5: Tìm hai số tự nhiên a,b sao cho tổng của ƯCLN và BCNN là 15.

<u>Lời giải</u>

Điều kiện: $a,b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a < b$.

Gọi d = ƯCLN(a; b) $\Rightarrow \begin{cases} a = d.a_1 \\ b = d.b_1 \end{cases}$ $(a_1 < b_1), (a_1;b_1) = 1$, và d < 15

Nên BCNN(a; b) = $a_1.b_1.d$

Theo bài ra ta có: $d + a_1.b_1d = 15 => d(1 + a_1.b_1) = 15 => d \in U(15) = \{1;3;5;15\}$, Mà d < 15, Nên

TH1 : $d = 1 \Rightarrow a_1.b_1 = 14 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ b_1 = 14 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 2 \\ b_1 = 7 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$

TH2 : $d = 3 \Rightarrow a_1.b_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ b_1 = 4 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$

TH3 : $d=5\Rightarrow a_1.b_1=2 => \begin{cases} a_1=1\Rightarrow a=5 \\ b_1=2\Rightarrow b=10 \end{cases}$

Vậy các cặp số (a ; b) cần tìm là : (1 ;14), (2 ; 7), (3 ; 12), (5 ; 10) và đảo ngược lại.

Bài 8: Tìm hai số nguyên dương a,b biết $ab=216$ và ƯCLN$(a,b)=6$.

Lời giải

Điều kiện: $a,b\in\mathbb{Z}^+$. Giả sử $a\le b$. Ta có ƯCLN$(a,b)=6$.

$\Rightarrow a=6m;b=6n\left(m,n\in Z^+\right);UCLN(m,n)=1;m\le n$

Biết $ab=216\Rightarrow 6m.6n=36mn=216\Rightarrow mn=6$

Vì ƯCLN$(m,n)=1$ nên ta có hai trường hợp

Trường hợp 1: $m=1,n=6\Rightarrow a=6,b=36$

Trường hợp 2: $m=2,n=3\Rightarrow a=12,b=18$

Vậy hai số cần tìm là $(a,b)\in\{(6;36);(12;18)\}$.

Bài 9: Tìm hai số nguyên dương a,b biết $\frac{a}{b}=2,6$ và ƯCLN$(a,b)=5$.

Lời giải

Điều kiện: $a,b\in\mathbb{Z}^+$

ƯCLN$(a,b)=5$ $\Rightarrow a=5m;b=5n\left(m,n\in Z^+\right);$ƯCLN$(m,n)=1$

Biết $\frac{a}{b}=2,6\Rightarrow\frac{m}{n}=2,6=\frac{13}{5}$ với ƯCLN (m, n) = 1.

$\Rightarrow m=13$ và $n=5\Rightarrow a=65$ và $b=25$.

Bài 10: Tìm a,b biết $a+b=42$ và $BCNN(a,b)=72$.

Lời giải

Gọi $d=$ƯCLN$(a,b)\Rightarrow a=md;b=nd$ với $m,n\in Z^+$; ƯCLN$(m,n)=1$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\le b$ nên $m\le n$

Biết $a+b=42 \Rightarrow dm+dn=d\left(m+n\right)=42\left(1\right)$

Biết $BCNN\left(a,b\right)=72 \Rightarrow m.n.d=72\left(2\right)$

$\Rightarrow d$ là ước chung của 42 và 72 $\Rightarrow d \in \{1;2;3;6\}$

Lần lượt thay các giá trị của d và (1) và (2) để tính m, n ta thấy chỉ có trường hợp $d=6$ thì $m+n=7$ và $mn=12$

$\Rightarrow m=3;n=4$ (thỏa mãn các điều kiện của m và n)

Vậy $d=6$ và $a=3.6=18;b=4.6=24$.

Bài 11: Tìm hai số nguyên dương a,b biết $ab=180$, $BCNN\left(a,b\right)=60$.

Lời giải

Điều kiện: $a,b \in \mathbb{Z}^{+}$

Đặt ƯCLN$\left(a,b\right)=d \Rightarrow a=md;b=nd$ với ƯCLN$\left(m,n\right)=1 \Rightarrow BCNN\left(a,b\right)=m.n.d$

Biết $ab=180 \Rightarrow m.n.d^2=180 \Rightarrow d=$ ƯCLN$\left(a,b\right)=\dfrac{ab}{BCNN\left(a,b\right)}=\dfrac{180}{60}=3$

Từ đây bài toán đã biết $ab=180$ và ƯCLN$\left(a,b\right)=3$

$\Rightarrow a=3;b=60$ hoặc $a=12;b=15$.

Bài 12: Tìm a,b biết $\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{5}$ và $BCNN\left(a,b\right)=140$.

Lời giải

Đặt ƯCLN$\left(a,b\right)=d$.

Vì $\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{5}$, mặt khác ƯCLN$\left(4,5\right)=1 \Rightarrow a=4d;b=5d$

Mà $BCNN\left(a,b\right)=140$, nên ƯCLN$\left(a,b\right)=7$

Từ đây bài toán đã biết $\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{5}$ và ƯCLN$\left(a,b\right)=7$

$\Rightarrow a = 28; b = 35$.

Bài 13: Tìm hai số tự nhiên a, b biết $a - b = 7$ và $BCNN(a,b) = 140$

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$.

Gọi $d =$ ƯCLN$(a,b) \Rightarrow a = md; b = nd\left(m, n \in Z^+\right)$; ƯCLN$(m,n) = 1$

Biết $a - b = 7 \Rightarrow dm - dn = d(m-n) = 7(1)$

Biết $BCNN(a,b) = 140 \Rightarrow m.n.d = 140(2)$

$\Rightarrow d$ là ước chung của 7 và 140

$\Rightarrow d \in \{1; 7\}$

Thay lần lượt các giá trị d vào (1) và (2) để tính m, n ta được kết quả duy nhất $d = 7$ thì $m - n = 1$ và $mn = 20 \Rightarrow m = 5; n = 4$ (thỏa mãn ƯCLN$(m,n) = 1$)

Vậy $d = 7$ và $a = 5.7 = 35; b = 4.7 = 28$.

Bài 14: Tìm hai số tự nhiên a, b biết $a + b = 96$ và ƯCLN$(a,b) = 6$

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a > b$.

Biết ƯCLN$(a,b) = 6 \Rightarrow a = 6m; b = 6n\left(m, n \in Z^+\right)$; ƯCLN$(m,n) = 1; m > n$

Mà $a + b = 96$ nên $6m + 6n = 96 \Rightarrow m + n = 16$

Mà ƯCLN$(m,n) = 1$ nên có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m = 11; n = 5 \Rightarrow a = 66; b = 30$

Trường hợp 2: $m = 13; n = 3 \Rightarrow a = 78; b = 18$

Trường hợp 3: $m = 15; n = 1 \Rightarrow a = 90; b = 6$

Vậy hai số cần tìm là $(a,b) \in \{(66;30);(78;18);(90;6)\}$.

Bài 15: Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 504 và ƯCLN của chúng bằng 42

Lời giải

Gọi các số phải tìm là a và b. Điều kiện: $a,b\in\mathbb{N}$. Giả sử $a>b$.

Biết ƯCLN$(a,b)=42\Rightarrow a=42m;b=42n\left(m,n\in Z^{+}\right)$;ƯCLN$(m,n)=1(m>n)$

Mà $a+b=504\Rightarrow 42m+42n=504\Rightarrow m+n=12$

Vì ƯCLN$(m,n)=1,$ nên có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m=11;n=1\Rightarrow a=462;b=42$

Trường hợp 2: $m=7;n=5\Rightarrow a=294;b=210$

Vậy hai số cần tìm là $(a,b)\in\{(462;42);(294;210)\}$.

Bài 16: Cho $n\in\mathbb{N}$, tìm số nguyên tố p có 2 chữ số sao cho $p=$ ƯC$(2n-3;3n+15)$

Lời giải

Vì số $p=$ ƯC$(2n-3;3n+15)$

$\Rightarrow p$ cũng là ước của hiệu $2(3n+15)-3(2n-3)=39$

Mà p là số nguyên tố có hai chữ số nên $p=13$.

Vậy số nguyên tố cần tìm là $p=13$.

Bài 17: Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 300 và ƯCLN bằng 5.

Lời giải

Gọi các số phải tìm là a và b. Điều kiện: $a,b\in\mathbb{N}$. Giả sử $a>b$.

Biết ƯCLN$(a,b)=5\Rightarrow a=5.m;b=5.n\left(m,n\in Z^{+}\right)$; ƯCLN$(m,n)=1(m>n)$

Mà $ab=300$ nên $\Rightarrow m.5.n.5=300\Rightarrow mn=12$

Mà ƯCLN$(m,n)=1$ nên có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m=12;n=1\Rightarrow a=60;b=5$

Trường hợp 2: $m=4;n=3\Rightarrow a=20;b=15$

Vậy hai số cần tìm là $(a,b)\in\{(60;5);(20;15)\}$.

Bài 18: Tìm hai số tự nhiên a và b $(a<b)$, biết: ƯCLN$(a,b)=300;BCNN(a,b)=900$.

Lời giải

Điều kiện: $a,b\in\mathbb{N}$.

Vì ƯCLN$(a,b)=10$ và $a<b$

$\Rightarrow a=10m;b=10n\left(m,n\in Z^{+}\right)$; ƯCLN$(m,n)=1(m<n)\Rightarrow BCNN(a,b)=10.m.n$

Mà $BCNN(a,b)=900$ nên $mn=90.$ Khi đó có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m=5;n=18\Rightarrow a=50;b=180$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $m=9;n=10\Rightarrow a=90;b=100$ (thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là $(a,b)\in\{(50;180);(90;100)\}$.

Bài 19: Tìm hai số tự nhiên a và b, biết: $BCNN(a,b)=300;$ ƯCLN$(a,b)=15;a+15=b$.

Lời giải

Điều kiện: $a,b\in\mathbb{N}$.

Vì ƯCLN$(a,b)=15,$ nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

$a=15m;b=15n(1)$ và ƯCLN$(m,n)=1$ (2)

Vì $BCNN(a,b)=300,$ nên theo trên ta suy ra $BCNN(15m,15n)=300=15.20\Rightarrow BCNN(m,n)=20$

Vì $a+15=b\Rightarrow 15m+15+15n\Rightarrow 15(m+1)=15n\Rightarrow m+1=n$

Trong các trường hợp thỏa mãn điều kiện (2) và (3) thì chỉ có trường hợp $m=4;n=5$ là thỏa mãn điều kiện (4)

Vậy $m=4;n=5$ ta được các số phải tìm là $a=15.4=60;b=15.5=75$.

Bài 20: Tìm hai số tự nhiên a và b, biết: $BCNN(a,b)=420;$ ƯCLN$(a,b)=21;a+21=b$

Lời giải

Điều kiện: $a,b\in\mathbb{N}$.

Vì ƯCLN$(a,b)=21,$ nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

$a=21m;b=21n\ (1)$ và ƯCLN$(m,n)=1\ (2)$

Vì $BCNN(a,b)=420\Rightarrow BCNN(21m,21n)=420=21.20\Rightarrow BCNN(m,n)=20(3)$

Vì $a+21=b\Rightarrow 21m+21=21n\Rightarrow 21(m+1)=21n\Rightarrow m+1=n(4)$

Trong các trường hợp thỏa mãn điều kiện (2) và (3) thì chỉ có trường hợp $m=4;n=5$ hoặc $m=2;n=3$ là thỏa mãn điều kiện (4)

Vậy $m=4;n=5$ hoặc $m=2;n=3$ ta được các số phải tìm là: $a=21.4=84;b=21.5=105$.

Bài 21: Tìm hai số tự nhiên a và b, biết: ƯCLN$(a,b)=5;BCNN(a,b)=300$.

Lời giải

Điều kiện: $a,b\in\mathbb{N}$. Giả sử $a>b.$

Biết ƯCLN$(a,b)=5\Rightarrow a=5m;b=5n\left(m,n\in Z^{+}\right)$; ƯCLN$(m,n)=1,m>n$

$\Rightarrow BCNN(a,b)=5mn$

Mà $BCNN(a,b)=300\Rightarrow 5mn=300\Leftrightarrow mn=50$

Vì ƯCLN$(m,n)=1$ nên ta có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m=60,n=1\Rightarrow a=300,b=5$

Trường hợp 2: $m=20,n=3\Rightarrow a=100,b=15$

Trường hợp 3: $m=12,n=5\Rightarrow a=60,b=25$

Vậy hai số cần tìm là $(a,b)\in\{(300;5);(100;15);(60;25)\}$.

Bài 22: Tìm hai số tự nhiên a và b, biết: $BCNN(a,b)=180;$ƯCLN$(a,b)=12$

Lời giải

Điều kiện: $a,b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a > b$.

Biết $ƯCLN(a,b) = 12 \Rightarrow a = 12m; b = 12n\left(m,n \in \mathbb{Z}^+\right)$; $ƯCLN\ (m,n) = 1, m > n$

$\Rightarrow BCNN(a,b) = 12mn$

Mà $BCNN(a,b) = 180 \Rightarrow mn = 15$

Vì ƯCLN$(m,n) = 1$ nên ta có các trường hợp của số m,n như sau

Trường hợp 1: $m = 15, n = 1 \Rightarrow a = 180, b = 12$

Trường hợp 2: $m = 5, n = 3 \Rightarrow a = 100, b = 15$

Trường hợp 3: $m = 12, n = 5 \Rightarrow a = 60, b = 25$

Vậy hai số cần tìm là $(a,b) \in \{(180;12);(100;15);(60;25)\}$.

Bài 23: Tìm hai số tự nhiên biết tổng ƯCLN và BCNN của chúng bằng 23

Lời giải

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a,b và giả sử $a > b$

Đặt ƯCLN$(a,b) = d \Rightarrow a = md; b = nd$ với $m,n \in Z^+$; ƯCLN$(m,n) = 1, m > n \Rightarrow BCNN(a,b) = dmn$

Mà ƯCLN$(a,b) + BCNN(a,b) = 23$ nên $d(m.n+1) = 23 \Rightarrow d$ là ước của 23 hay $d \in \{1;23\}$

Xét $d = 1,$ ta có $mn + 1 = 23 \Leftrightarrow mn = 22$ với ƯCLN$(m,n) = 1$ nên ta có các trường hợp của m,n như sau:

Trường hợp 1: $m = 22, n = 1 \Rightarrow a = 22, b = 1$

Trường hợp 2: $m = 11, n = 2 \Rightarrow a = 11, b = 2$

Xét $d = 3,$ ta có $mn + 1 = 1 \Leftrightarrow mn = 0$ (không thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là $(a,b) \in \{(22;1);(11;2)\}$

Bài 24: Tìm hai số tự nhiên biết hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN của chúng bằng 28 và các số đó trong khoảng từ 300 đến 400.

Lời giải

Gọi các số phải tìm là a và b. Điều kiện: $a,b \in \mathbb{N}$.

Ta có ƯCLN$(a,b)=28 \Rightarrow a=28k; b=28q$ với $k,q \in \mathbb{N}^*$ và k,q nguyên tố cùng nhau

Ta có $a-b=84 \Rightarrow k-q=3$

Theo bài ra ta có $300 \le b < a \le 440 \Rightarrow 10 < q < k < 16$. Chọn hai số có hiệu bằng 3 trong khoảng từ 11 đến 15 là 11 và 14; 12 và 15

Chỉ có 11 và 14 là hai số nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow q=11; k=14 \Rightarrow a=28.11=308; b=28.14=392$

Vậy hai số cần tìm là 308 và 392.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG

Bài 1: Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0: a và b, sao cho: $(a,b)=1$ và $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}=\dfrac{7}{25}$.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh năm 1992 – 1993)

Lời giải

Gọi $(a+b, a^2+b^2)=d \Rightarrow a+b \vdots d$ và $a^2+b^2 \vdots d$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2 \vdots d \Rightarrow 2ab \vdots d$ vì $(a,b)=1$

$\Rightarrow (ab, a+b)=1 \Rightarrow (2ab, a+b)=(2, a+b)$

$\Rightarrow d$ là ước số của $(2ab, a+b) \Rightarrow d$ là ước số của $(2, a+b)$

$\Rightarrow d$ là ước số của 2 $\Rightarrow d=1$ hoặc $d=2$.

Nếu $d=1 \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$

Nếu $d=2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=14 \\ a^2+b^2=50 \end{cases}$ vô nghiệm.

Tóm lại $(a,b) \in \{(3;4)(4;3)\}$

Bài 2: Tìm tất cả các cặp số (a,b) nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a,b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a,b là 1.

ii) Số $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

(Trích đề học sinh giỏi toán Đăk Lăk năm học 2017-2018)

Lời giải

Ta có: $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số:

$1;a;b(ab+1)(2ab+1);b;a(ab+1)(2ab+1);(ab+1);(2ab+1);(ab+1)(2ab+1);ab;$
$ab(ab+1);ab(2ab+1);N;a(ab+1);a(2ab+1);b(ab+1);b(2ab+1)$

Hay $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có 16 ước dương Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì $a;b;ab+1;2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a,b>1\Rightarrow ab+1>2$

Nếu a,b cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a=2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý)$\Rightarrow b=3$.

Vậy $a=2;b=3$.

Bài 3: Cho hai số tự nhiên m và n thoả mãn $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{n+1}{m}$ là số nguyên.

Chứng minh ước chung lớn nhất của m và n không lớn hơn $\sqrt{m+n}$.

(Trích đề học sinh giỏi Hải Dương năm học 2004-2005)

Lời giải

Gọi d là ƯCLN(m,n) suy ra m^2,n^2,mn cùng chia hết cho d^2.

Do $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{n+1}{m}=\dfrac{m^2+n^2+m+n}{mn}$ là số nguyên nên m^2+n^2+m+n cũng chia hết cho d^2.

Suy ra $m+n$ chia hết cho $d^2\Rightarrow m+n\ge d^2\Rightarrow\sqrt{m+n}\ge d$.

Bài 4: Cho ba số nguyên dương a,b,c đôi một khác nhau và đồng thời thỏa mãn các điều kiện:

i) a là ước của $b+c+bc$,

ii) b là ước của $a+c+ac$,

iii) c là ước của $a+b+ab$,

a) Hãy chỉ ra bộ ba số (a,b,c) thỏa mãn các điều kiện trên.

b) Chứng minh rằng a,b,c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

(Trích đề vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2007-2008)

Lời giải

a) Dễ thấy bộ số $(a,b,c)=(1,3,7)$ thỏa mãn đề bài

b) Đặt $S=a+b+c+ab+bc+ca$.

Từ giả thiết suy ra S chia hết cho a,b,c.

Vì a,b,c đôi một khác nhau, do đó a,b,c đồng thời là các số nguyên tố thì $S \vdots abc$ hay $S=k.abc$ $(k\in\mathbb{N})$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a<b<c$.

Nếu $a=2$ thì b,c đều lẻ $\Rightarrow b+c+bc$ lẻ nên không chia hết cho 2.

Do đó $a\ge 3$ nên $b\ge 5, c\ge 7$. Từ $S=k.abc$ $(k\in\mathbb{N})$ suy ra

$$0<k=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}<1\Rightarrow k\notin\mathbb{N}$$

Vậy a,b,c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Bài 5: Tìm a,b biết:

a) $[a,b]+(a,b)=55$

b) $[a,b]-(a,b)=5$

c) $[a,b]+(a,b)=35$

Lời giải

a) Gọi $a=da';b=db'$ và $(a',b')=1$. Ta có: $[a,b]=\dfrac{ab}{d}=da'b'$

Theo đề bài, ta có: $da'b'+d=55$ hay $d\left(a'b'+1\right)=55$. Như vậy $a'b'+1$ là ước của 55, mặt khác $a'b'+1\geq 2$.

Ta có lần lượt

d	$a'b'+1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
11	5	$4=2^2$	1	4	11	44
5	11	$10=2.5$	1 2	10 5	5 10	50 25
1	55	$54=2.3^3$	1 2	54 27	1 2	54 27

b) Giải tương tự câu a) ta được: $d\left(a'b'-1\right)=5$. Từ đó:

d	$a'b'-1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
1	5	6	6	1	6	1
			3	2	3	2
5	1	2	2	1	10	5

c) Có 6 cặp số (1, 36), (4, 9), (5, 40), (7, 42), (14, 21), (35, 70).

Bài 6: Tìm $\left[n,n+1,n+2\right]$

<u>Lời giải</u>

Đặt $A=\left[n,n+1\right]$ và $B=\left[A,n+2\right]$. Áp dụng tính chất $\left[a,b,c\right]=\left[\left[a,b\right],c\right]$, ta có $B=\left[n,n+1,n+2\right]$

Dễ thấy $\left(n,n+1\right)=1$, suy ra $\left[n,n+1\right]=n\left(n+1\right)$ do $\left[a,b\right].\left(a,b\right)=ab$

Lại áp dụng tính chất $\left[a,b\right]=\dfrac{ab}{\left(a,b\right)}$ thế thì $\left[n,n+1,n+2\right]=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{\left(n\left(n+1\right),n+2\right)}$

Gọi $d=\left(n\left(n+1\right),n+2\right)$. Do $\left(n+1,n+2\right)=1$ nên $d=\left(n,n+2\right)=\left(n,2\right)$

Xét hai trường hợp:

- Nếu n chẵn thì $d=2$, suy ra $\left[n,n+1,n+2\right]=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}$

- Nếu n lẻ thì $d=1$, suy ra $\left[n,n+1,n+2\right]=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

Bài 7: Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ *biết* $n<30$ để các số $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung lớn hơn 1.

Lời giải

Gọi d là một ước chung của $3n+4$ và $5n+1$ $\left(d\in\mathbb{N}^*\right)$

Ta có $3n+4\,\vdots\, d$ và $5n+1\,\vdots\, d$ nên $5\left(3n+4\right)-3\left(5n+1\right)\vdots\, d\Leftrightarrow 17\Rightarrow d\in\left\{1;17\right\}$

Để $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung lớn hơn 1, ta phải có $3n+4\,\vdots\,17$

Hay $3\left(n-10\right)\vdots\,17$ mà ƯCLN$\left(3,17\right)=1$ nên $\left(n-10\right)\vdots\,17$

Do đó $n-10=17k$ $\left(k\in\mathbb{N}\right)$.

Vì $n\in\mathbb{N}^*,n<30\Rightarrow -10\le n-10<20$ nên $k\in\left\{0;1\right\}$.

Với $k=0\Rightarrow n=10$, khi đó $3.10+4\,\vdots\,17$ và $5.10+1\,\vdots\,17$ (thỏa mãn)

Với $k=1\Rightarrow n=27$, khi đó $3.27+4\,\vdots\,17$ và $5.27+1\,\vdots\,17$ (thỏa mãn)

Vậy $n\in\left\{10;27\right\}$.

Bài 8: Tìm hai số nguyên dương biết $a+2b=48$ và ƯCLN$\left(a,b\right)+3.BCNN\left(a,b\right)=114$.

Lời giải

Gọi ƯCLN$\left(a,b\right)=d\Rightarrow\begin{cases}a=d.a_1\\ b=d.b_1\end{cases};\left(a_1,b_1\right)=1$

Mà : $a+2b=48\Rightarrow d.a_1+2d.b_1=48\Rightarrow d\left(a_1+2b_1\right)=48\Rightarrow d\in U\left(48\right)$ (1)

Ta lại có: ƯCLN $\left(a,b\right)+3.BCNN\left(a,b\right)=114$

$\Rightarrow d+3.a_1.b_1.d=114\Rightarrow d\left(1+3.a_1.b_1\right)=114\Rightarrow d\in U\left(114\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $d\in UC\left(48,114\right)=\left\{1;2;3;6\right\}$

Mà: $d\left(1+3.a_1.b_1\right)=114=3.38\Rightarrow d\,\vdots\,3\Rightarrow d=3$ hoặc $d=6$

TH1: $d=3\Rightarrow\begin{cases}a_1+2b_1=16\\ 1+3a_1.b_1=38\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+2b_1=16\\ 3a_1.b_1=37\end{cases}$ (loại)

TH2: $d=6\Rightarrow\begin{cases}a_1+2b_1=8\\1+3a_1.b_1=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+2b_1=8\\a_1.b_1=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2\Rightarrow a=12\\b_1=3\Rightarrow b=18\end{cases}$

Vậy $a=12$ và $b=18$.

Bài 9: Cho $m,n\in\mathbb{N},1\le m<n.$ Chứng minh rằng: $\left(2^{2^n}+1,2^{2^n}+1\right)=1.$

<u>Lời giải</u>

Ta có:

$$\begin{aligned}2^{2^n}-1&=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-1}}-1\right)\\&=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}-1\right)\\&=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)...\left(2^{2^m}+1\right)\left(2^{2^m}-1\right)\vdots d\end{aligned}$$

Do đó $\left(2^{2^n}+1\right)-\left(2^{2^n}-1\right)=2\vdots d\Rightarrow d=1$ (vì d lẻ)

Vậy $\left(2^{2^n}+1,2^{2^n}+1\right)=1.$

Bài 10: Cho $1\le m,n\in\mathbb{N}.$ Tìm $\left(2^m-1,2^n-1\right)$

<u>Lời giải</u>

Đặt $d=(m,n)$. Khi đó tồn tại các số tự nhiên r,s sao cho $rn-sm=d$.

Đặt $d_1=\left(2^m-1,2^n-1\right)\Rightarrow d_1$ lẻ.

Ta có:

$2^n-1\vdots 2^d-1$ (vì $n\vdots d$)

$2^m-1\vdots 2^d-1$ (vì $m\vdots d$)

Do đó $d_1\vdots 2^d-1$

Mặt khác: $\begin{cases} 2^n - 1 \vdots d_1 \Rightarrow 2^{rn} - 1 \vdots d_1 \\ 2^m - 1 \vdots d_1 \Rightarrow 2^{sm} - 1 \vdots d_1 \end{cases} \Rightarrow 2^{rn} - 2^{sm} = 2^{sm}\left(2^{rn-sm} - 1\right) = 2^{sm}\left(2^d - 1\right) \vdots d_1$

Mà $\left(2, d_1\right) = 1 \Rightarrow 2^d - 1 \vdots d_1$

Từ đó suy ra $d_1 = 2^d - 1$.

Vậy $\left(2^m - 1, 2^n - 1\right) = 2^{(m,n)} - 1$.

Bài 11: Cho a, m là các số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng: $\left(1 + a + a^2 + ... + a^{m-1}, a - 1\right) = \left(m, a - 1\right)$.

<u>Lời giải</u>

Giả sử $d \mid \left(1 + a + ... + a^{m-1}\right)$ và $d \mid \left(a - 1\right)$, suy ra:

$d \mid \left(a^{m-1} - 1\right) + \left(a^{m-2} - 1\right) + ... + \left(a - 1\right) + m \Rightarrow d \mid m$.

Vậy $d \mid m$ và $d \mid \left(a - 1\right)$.

Ngược lại, nếu $d \mid a$ và $d \mid \left(a - 1\right)$ thì $d\left(m^{m-1} + ... + a + 1\right)$

Vậy $\left(1 + a + a^2 + ... + a^{m-1}, a - 1\right) = \left(m, a - 1\right)$.

Bài 12: Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số lẻ thì $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = \left(a, b, c\right)$.

<u>Lời giải</u>

Giả sử $d \mid a, b \mid d, c \mid d$ thì d lẻ.

Ta có $a + b \vdots d$ và $a + b \vdots 2 \Rightarrow a + b \vdots 2d$ (do $\left(2, d\right) = 1$) $\Rightarrow \frac{a+b}{2} \vdots d$

Tương tự: $\frac{b+c}{2} \vdots d$ và $\frac{c+a}{2} \vdots d$

Vậy d là ước của $\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}$.

Ngược lại, giả sử d là ước của $\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}$ thì d là ước của $\frac{a+b}{2}+\frac{c+a}{2}-\frac{b+c}{2}=a.$

Tương tự $d\,|\,b$ và $d\,|\,c.$

Vậy: $\left(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\right)=\left(a,b,c\right).$

Bài 13: Tìm tất cả các cặp số $\left(a;b\right)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) $a;b$ đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của $a;b$ là 1.

ii) Số $N=ab\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

<u>Lời giải</u>

Ta có: $N=ab\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right)$ chia hết cho các số :

$1;a;b\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right);b;a\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right);ab+1;ab\left(2ab+1\right);2ab+1;N;ab;$
$\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right);b\left(ab+1\right);a\left(2ab+1\right);a\left(ab+1\right);b\left(2ab+1\right)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì $a;b;ab+1;2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a,b>1\Rightarrow ab+1>2$

Nếu $a;b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ thì suy ra $a=2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý), suy ra $b=3$.

Vậy $a=2,b=3$.

Bài 14: Tổng các số tự nhiên $a_1,a_2,...,a_{49}$ bằng 999. Hỏi ước số chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

<u>Lời giải</u>

Giả sử $d=\left(a_1,a_2,...,a_{49}\right)$,khi đó $a_1+a_2+...+a_{49}=999\,\vdots\,d$, suy ra d là ước của $999=3^3.37$.

Vì $d\,|\,a_k\,(k=1,2,...,49)$ nên $a_k \geq d, \forall k \Rightarrow 999 = a_1 + a_2 + ... + a_{49} \geq 49d \Rightarrow d \leq \dfrac{99}{29} < 21$. Vậy d chỉ có thể nhận các giá trị $1, 3, 9$.

Giá trị d lớn nhất bằng 9 khi $a_1 = a_2 = ... = a_{48} = 9; a_{49} = 567$ (vì $9.48 + 567 = 999$)

Bài 15: Cho $(a,b)=1$. Tìm $(11a+2b, 18a+5b)$

<u>Lời giải</u>

Giả sử $d=(11a+2b, 18a+5b)$, khi đó $d\,|\,18a+5b$ và $d\,|\,11a+2b$, suy ra

$d\,|\,11(18a+5b)-18(11a+2b)=19b \Rightarrow d\,|\,19$ hoặc $d\,|\,b$.

- Nếu $d\,|\,b$ thì từ $d\,|\,5(11a+2b)-3(18a+5b)=a-5b \Rightarrow d\,|\,a \Rightarrow d\,|\,(a,b)=1 \Rightarrow d=1$.
- Nếu $d\,|\,19$ thì $d=1$ hoặc $d=19$.

Vậy $(11a+2b, 18a+5b)$ bằng 1 hoặc bằng 19.

HẾT

CHUYÊN ĐỀ

ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

CHỦ ĐỀ 2: CHỨNG MINH HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ước và Bội của một số nguyên

Với $a,b \in Z$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b. Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a.

2. Nhận xét

- Nếu $a = bq$ thì ta nói a chia cho b được q và viết $a : b = q$.
- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.
- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

3. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Ước chung của các số a, b, c được kí hiệu là ƯC(a, b, c).

4. Ước chung lớn nhất

- Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

5. Các tính chất

- ƯCLN$(a,1) = 1; BCNN\left(a,1\right) = a$

- Nếu $a \,\vdots\, b \Rightarrow$ ƯCLN$(a,b) = b; BCNN\left(a,b\right) = a$

- Nếu a, b nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (a,b) = 1; \left[a,b\right] = a.b$

- ƯC(a, b) = Ư(ƯCLN(a, b)) và BC(a ,b) = B(BCNN(a, b))

- Nếu ƯCLN$(a,b) = d; \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases} \Rightarrow$ ƯCLN$(m,n) = 1;$

Ví dụ ƯCLN$(10,15)=5;\begin{cases}10=2.5\\15=3.5\end{cases}\Rightarrow$ ƯCLN$(2,3)=1$

- Nếu $BCNN(a,b)=c;\begin{cases}c=am\\c=bn\end{cases}\Rightarrow$ ƯCLN$(m,n)=1;$

Ví dụ $BCNN(10,15)=30;\begin{cases}30=10.3\\30=15.2\end{cases}\Rightarrow$ ƯCLN$(2,3)=1$

- $ab=$ ƯCLN(a,b).BCNN(a,b)

PHẦN II. BÀI TẬP:

Dạng 1: Tìm ƯCLN của các số:

I. Phương pháp giải

Bài toán: Tìm ƯCLN$(a_1,a_2,...,a_n)$

Phương pháp giải thường dùng: Giả sử ƯCLN$(a_1,a_2,...,a_n)=d$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1\,\vdots\,d\\a_2\,\vdots\,d\\...\\a_n\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow d=?$$

II.Bài toán

Bài 1: Cho $n\in N^*$. Chứng minh rằng

a) ƯCLN$(n+3,2n+5)=1$

b) ƯCLN$(3n+3,4n+9)=1$

Lời giải:

a) Gọi ƯCLN$(n+3,2n+5)=d(d\in N^*)$

$$\Rightarrow\begin{cases}n+3\,\vdots\,d\\2n+5\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2n+6\,\vdots\,d\\2n+5\,\vdots\,d\end{cases}$$

$\Rightarrow\left[(2n+6)-(2n+5)\right]\vdots\,d$

$\Rightarrow(2n+6-2n-5)\,\vdots\,d$

$\Rightarrow 1\,\vdots\,d\Rightarrow d=1$

Vậy $(n+3;2n+5)=1$.

b) Gọi ƯCLN$(3n+3,4n+9)=d(d\in N^*)\Rightarrow\begin{cases}4(3n+7)\,\vdots\,7\\3(4n+9)\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12n+28\,\vdots\,d\\12n+27\,\vdots\,d\end{cases}$

$\Rightarrow\left[(12n+28)-(12n+27)\right]\vdots\,d$

$\Rightarrow(12n+28-12n-27)\,\vdots\,d$

$\Rightarrow 1\,\vdots\,d\Rightarrow d=1$

Vậy ƯCLN$(3n+3,4n+9)=1$.

Bài 2: Cho a, b là số tự nhiên lẻ, $b\in N$. Chứng minh rằng ƯCLN$(a,ab+128)=1$.

Lời giải:

Đặt $d=$ ƯCLN$(a,ab+128)\Rightarrow\begin{cases}a\,\vdots\,d\\ab+128\,\vdots\,d\end{cases}$ và d lẻ $\Rightarrow 128\,\vdots\,d$ và d lẻ

$\Rightarrow$ $2^7\,\vdots\,d$ và d lẻ $\Rightarrow$ $2\,\vdots\,d$ và d lẻ $\Rightarrow d=1$.

Vậy $(a,ab+128)=1$

Bài 3: Chứng tỏ rằng nếu $17n^2+1\,\vdots\,6(n\in N^*)$ thì ƯCLN$(n,2)=1$; ƯCLN$(m,3)=1$.

Lời giải:

+) Theo đầu bài ta có: $17n^2+1 \vdots 6 \Rightarrow 17n^2+1 \vdots 2 \Rightarrow 17n^2+1$ chẵn $\Rightarrow n$ lẻ $\Rightarrow n \not\vdots 2 \Rightarrow (n,2)=1$

+) Vì $17n^2+1 \vdots 6 \Rightarrow 17n^2+1 \vdots 3 \Rightarrow n \not\vdots 3 \Rightarrow (n,3)=1$

(nếu $n \vdots 3 \Rightarrow 17n^2 \vdots 3 \Rightarrow 17n^2+1 \vdots 3 \Rightarrow$ loại $\Rightarrow n \not\vdots 3$).

Bài 4: Cho hai số nguyên tố cùng nhau a và b. Chứng tỏ rằng $11a+2b$ và $18a+5b$ hoặc là số nguyên tố cùng nhau hoặc có 1 ước chung là 19.

Lời giải

Gọi $d=(11a+2b,18a+5b)$

$\Rightarrow 5(11a+2b)-2(18a+5b) \vdots d$

$\Rightarrow 19a \vdots d$

Đặt $19a=dk (k \in N^*) \Rightarrow d.k \vdots 19 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d \vdots 19 \\ k \vdots 19 \end{array}\right. \Rightarrow$ đpcm

- Nếu $k \vdots 19 \Rightarrow k=19q \Rightarrow 19a=dk=d.19.q \Rightarrow a=dq \Rightarrow a \vdots d$

$\Rightarrow \begin{cases} 2b \vdots d \\ 5b \vdots d \end{cases} \Rightarrow b \vdots d \Rightarrow d \in \text{ƯC}(a,b)=1 \Rightarrow d=1$.

Bài 5: Chứng minh rằng: $\text{ƯCLN}(a,b)=1$ và a, b khác tính chẵn lẻ thì $\text{ƯCLN}(a^m+b^n,a^m-b^n)=1 \forall m,n \in N^*$ và $a^m-b^n>0$.

Lời giải:

a) $d=\text{ƯCLN}(a^m+b^n,a^m-b^n) \Rightarrow \begin{cases} a^m+b^n \vdots d \\ a^m-b^n \vdots d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^m \vdots d \\ 2b^n \vdots d \end{cases}$.

Vì a, b khác tính chẵn lẻ nên d lẻ $\Rightarrow \begin{cases} a^m \vdots d \\ b^n \vdots d \end{cases}$

Giả sử $d>1\Rightarrow d$ có ít nhất một ước số là số nguyên tố, giả sử ước nguyên tố đó là p

$\begin{cases} a^m \vdots p \\ b^n \vdots p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots p \\ b \vdots p \end{cases} \Rightarrow p \in \text{ƯC}(a,b); ma:(a,b)=1 \Rightarrow 1 \vdots p \Rightarrow p=1 \Rightarrow$ vô lý

Vậy $d\le 1\Rightarrow d=1\Rightarrow$ đpcm.

Bài 6: Tìm ƯCLN của $2n+1$ và $3n+1$ với $n\in N$.

Lời giải:

Gọi $d=\text{ƯCLN}(2n+1,2n+3)\Rightarrow d\in N^*$

Khi đó ta có : $\begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 3n+2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1) \vdots d \\ 2(3n+2) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3 \vdots d \\ 6n+4 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow (6n+4)-(6n+3) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$

$\Rightarrow d \in \text{Ư}(1)=\{1;-1\}$

Do đó $\text{ƯC}(2n+1,3n+1)$ là ước của d, hay là ước của 1

Vì ước của 1 hay ước của -1 có chung 1 tập hợp

Vậy $\text{ƯC}(2n+1,3n+1)=\text{Ư}(1)=\{-1;1\}$.

Bài 7: Tìm ƯCLN của $9n+24$ và $3n+4$.

Lời giải:

Gọi $\text{ƯCLN}(9n+24,3n+4)=d\Rightarrow d\in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 9n+12 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow (9n+24)-(9n+12)=d\Rightarrow 12 \vdots d$

$\Rightarrow d \in Ư(12) = \{\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12\}$

Do $(3n+4)\vdots d$, mà $3n+4$ không chia hết cho 3, nên $d \in \{3;6;13\}$ (loại)

Do đó $d \in \{1;2;4\}$

- Để $d = 2$ thì n phải chẵn

- Để $d = 4$ thì n phải chia hết cho 4

- Để $d = 1$ thì n là số lẻ

Vậy $n = 4k+2 (k \in N)$ thì $ƯCLN(9n+24, 3n+4) = 2$

$n = 4k (k \in N)$ thì $ƯCLN(9n+24, 3n+4) = 4$

$n = 2k+1 (k \in N)$ thì $ƯCLN(9n+24, 3n+4) = 1$.

Bài 8: Cho n là số tự nhiên, tìm ƯCLN của $21n+5$ và $14n+3$

Lời giải:

a) Gọi $ƯCLN(21n+5, 14n+3) \Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 14n+3 \vdots d \\ 21n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(14n+3) \vdots d \\ 2(21n+4) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42n+9 \vdots d \\ 42n+8 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow (42n+9) - (42n+8) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Vậy $ƯCLN(21n, 14n+3) = 1$

Bài 9: Cho n là số tự nhiên, tìm ƯCLN của $18n+2$ và $30n+3$

Lời giải:

Gọi $ƯCLN(18n+2, 30n+3) \Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases}18n+2\,\vdots\,d\\30n+3\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5(18n+2)\,\vdots\,d\\3(30n+3)\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}90n+10\,\vdots\,d\\90n+9\,\vdots\,d\end{cases}$

$\Rightarrow (90n+10)-(90n+9)\,\vdots\,d\Rightarrow 1\,\vdots\,d\Rightarrow d=1$

Vậy ƯCLN$(18n+2,30n+3)=1$

Bài 10: Cho n là số tự nhiên, tìm ƯCLN của $24n+7$ và $18n+5$

Lời giải:

Gọi ƯCLN$(24n+7,18n+5)\Rightarrow d\in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases}24n+7\,\vdots\,d\\18n+5\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3(24n+7)\,\vdots\,d\\4(18n+5)\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}72n+21\,\vdots\,d\\72n+20\,\vdots\,d\end{cases}$

$\Rightarrow (72n+21)-(72n+20)\,\vdots\,d\Rightarrow 1\,\vdots\,d\Rightarrow d=1$

Vậy ƯCLN$(24n+7,18n+5)=1$.

Bài 11: Biết ƯCLN$(a,b)=95$. Tìm ƯCLN$(a+b,a-b)$.

Lời giải:

Gọi $(a+b,a-b)=d\Rightarrow d\in N^*$

$\begin{cases}a+b\,\vdots\,d\\a-b\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow 2b\,\vdots\,d\Rightarrow d\in$ Ư(2) hoặc $d\in$ Ư(b)

và $\begin{cases}a+b\,\vdots\,d\\a-b\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow 2a\,\vdots\,d\Rightarrow$ hoặc $d\in$ Ư(2) hoặc d $\in$ Ư(a)

mà $(a,b)=95$, nên $d=95$ hoặc $d=2$

Vậy $(a+b,a-b)=2$ hoặc $d=95$.

Bài 12: Cho m, n là hai số tự nhiên. Gọi A là tập hợp các ước số chung của m và n, B là tập hợp các ước số chung của $11m+5n$ và $9m+4n$. Chứng minh rằng $A=B$

Lời giải:

Gọi $d = \text{ƯCLN}(11m+5n, 9m+4n) \Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 11m+5n \vdots d \\ 9m+4n \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9(11m+5n) \vdots d \\ 11(9m+4n) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 99m+45n \vdots d \\ 99m+44n \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow (99m+45n)-(99m+44n) \vdots d \Rightarrow n \vdots d \qquad (1)$

Tương tự ta có: $\begin{cases} 11m+5n \vdots d \\ 9m+4n \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(11m+5n) \vdots d \\ 5(9m+4n) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 44m+20n \vdots d \\ 45m+20n \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow (45m+20n)-(44m+20n) \Rightarrow m \vdots d \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có : $d \in \text{ƯC}(m,n) \Rightarrow d \in \text{Ư}(A)$

và $B \in \text{Ư}(d) = \text{Ư}(A)$. Vậy $A=B$

Bài 13: Tìm ƯC của $2n+1$ và $3n+1$ với $n \in N$

Lời giải:

Gọi $d = \text{ƯCLN}(2n+1, 3n+1) \Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có :

$\begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 3n+2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1) \vdots d \\ 2(3n+2) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3 \vdots d \\ 6n+4 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow (6n+4)-(6n+3) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d \in \text{Ư}(1) = \{1;-1\}$

Do đó $\text{ƯC}(2n+1, 3n+1)$ là ước của d, hay là ước của 1

Vì ước của 1 hay ước của -1 có chung 1 tập hợp

Vậy $\text{ƯC}\left(2n+1,3n+1\right)=\text{Ư}\left(1\right)=(1,-1)$

Bài 14: Cho hai số $3n+1$ và $5n+4$ là hai số không nguyên tố cùng nhau, tìm $\text{ƯCLN}\left(3n+1,5n+4\right)$

Lời giải:

Gọi $\text{ƯCLN}\left(3n+1,5n+4\right)=d$

Khi đó

$$\begin{cases}3n+1\,\vdots\,d\\5n+4\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\left(3n+1\right)\vdots\,d\\3\left(5n+4\right)\vdots\,d\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\left(5n+4\right)-5\left(3n+1\right)\vdots\,d\Rightarrow 7\,\vdots\,d\Rightarrow d\in\left\{1;7\right\}$$

Mà $d\neq 1$ nên $d=7$

Bài 15: Tìm $\text{ƯCLN}\left(2n-1,9n+4\right)$ với $n\in N$

Lời giải:

Gọi $d=\text{ƯCLN}\left(2n-1,9n+4\right)$, $\Rightarrow d\in N^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases}2n-1\,\vdots\,d\\9n+4\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9\left(2n-1\right)\vdots\,d\\2\left(9n+4\right)\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}18n-9\,\vdots\,d\\18n+8\,\vdots\,d\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(18n+8\right)-\left(18n-9\right)\vdots\,d\Rightarrow 17\,\vdots\,d$$

$$\Rightarrow d\in\text{Ư}\left(17\right)=\left\{\pm1;\pm17\right\}$$

Mà là các số dương nên ta có : $d=1$ hoặc $d=17$

Vậy $\text{ƯCLN}\left(2n-1,\ 9n+4\right)=1$ hoặc 17

Dạng 2: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau

I. Phương pháp giải

Bài toán: Chứng minh hai số a, b nguyên tố cùng nhau: $\text{ƯCLN}\left(a,b\right)=1$

Phương pháp giải: Giả sử $d=\text{ƯCLN}\left(a,b\right)$

Cách 1: Chỉ ra $d=1$

Cách 2:

+) Giả sử $d\neq 1(d\geq 2)$ (phương pháp phản chứng)

+) Gọi p là ước nguyên tố của d

+) Chỉ ra rằng $p=1$ (vô lý)

+) Kết luận $d=1$

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng hai số $n+1$ và $3n+4\left(n\in N\right)$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $d=\text{ƯCLN}\left(n+1,3n+4\right)\Rightarrow d\in N^{*}$, nên ta có:

$$\begin{cases} n+1\,\vdots\, d \\ 3n+4\,\vdots\, d \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3n+3\,\vdots\, d \\ 3n+4\,\vdots\, d \end{cases}\Rightarrow\left(3n+4\right)-\left(3n+3\right)\vdots\, d\Rightarrow 1\,\vdots\, d$$

Vậy hai số $n+1$ và $3n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau với $\left(n\in N\right)$.

Bài 2: Chứng minh rằng $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $d = \text{ƯCLN}\left(2n+1, 2n+3\right) \Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 2n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \left(2n+3\right)-\left(2n+1\right) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \text{Ư}\left(2\right)=\left\{1;2\right\}$

Mà ta lại có $\left(2n+1\right) \vdots d$ mà $2n+1$ là số lẻ nên $d=2$ (loại), do đó $d=1$

Vậy hai số $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 3: Chứng minh rằng $14n+3$ và $21n+4\left(n \in N\right)$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

Gọi $d = \text{ƯCLN}\left(2n+1, 2n+3\right) \Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có:

$\begin{cases} 14n+3 \vdots d \\ 21n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(14n+3\right) \vdots d \\ 2\left(21n+4\right) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42n+9 \vdots d \\ 42n+8 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \left(42n+9\right)-\left(42n+8\right) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$

Vậy hai số $14n+3$ và $21n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 4: Cho m là số tự nhiên lẻ, n là số tự nhiên. Chứng minh rằng m và $mn+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Giả sử m và ($mn+4$) cùng chia hết cho số tự nhiên d, khi đó ta có:

$\begin{cases} m \vdots d \\ m.n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m.n \vdots d \\ m.n+4 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow 4 \vdots d \Rightarrow d \in \left\{2;4;1\right\}$, do $m \vdots d$ và m lẻ $\Rightarrow d=2$ hoặc $d=4$ (loại)

Vậy $d=1$

Khi đó m và $mn+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 5: Cho ƯCLN$(a,b)=1$. Chứng tỏ rằng $8a+3$ và $5b+1$ là nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi ƯCLN$(8a+3,5b+1)=d \Rightarrow d \in N^*$

$$\begin{cases} 8a+3b \vdots d \\ 5a+b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(8a+3b) \vdots d \\ 8(5a+b) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40a+15b \vdots d \\ 40a+8b \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (40a+15b)-(40a+7b) \Rightarrow 7b \vdots d$$

và $\begin{cases} 8a+3b \vdots d \\ 3(5a+b) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a+3b \vdots d \\ 15a+3b \vdots d \end{cases}$

$$\Rightarrow (15a+3b)-(8a+3b) \vdots d \Rightarrow 7a \vdots d$$

Vì ƯCLN$(a,b)=1$ nên $d=1$ hoặc $d=7$.

Bài 6: Chứng minh rằng $2n+1$ và $6n+5$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

Gọi $d=$ ƯCLN$(2n+1,6n+5)$, $\Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 6n+5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1) \vdots d \\ 6n+5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3 \vdots d \\ 6n+5 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+5)-(6n+3) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in Ư(2)=\{1;2\}$$

Do $2n+1 \vdots d$, mà $2n+1$ lại là số lẻ nên $d=2$ loại, do đó $d=1$

Vậy hai số 14n+3 và 21n+4 là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 7: Chứng minh rằng với mọi $n \in N$ thì các số $7n+10$ và $5n+7$ ngyên tố cùng nhau

Lời giải:

Gọi $d = \text{ƯCLN}(7n+10, 5n+7)$, $\Rightarrow d \in N^*$ Khi đó ta có :

$\Rightarrow (35n+50)-(35n+49) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$

Do đó $d=1$

Vậy hai số $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi $n \in N$ thì các số $2n+3$ và $4n+8$ ngyên tố cùng nhau

Lời giải:

Gọi $d = \text{ƯCLN}(2n+3,\ 4n+8)$, $\Rightarrow d \in N^*$ Khi đó ta có: $\begin{cases} 2n+3 \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3) \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6 \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow (4n+8)-(4n+6) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1;2\}$

Vì $2n+3 \vdots d$, mà $2n+3$ là số lẻ nên $d=2$ (loại)

Khi đó $d=1$

Vậy hai số $2n+3$ và $4n+8$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 9: Cho $\text{ƯCLN}(a,b)=1$. Chứng minh rằng $\text{ƯCLN}(a,a+b)=1$

Lời giải:

Ta có đặt $d = \text{ƯCLN}(a+b,\ a), \Rightarrow d \in N^*$

$\begin{cases} a+b \vdots d \\ a \vdots d \end{cases} \Rightarrow a+b-a \vdots d \Rightarrow b \vdots d$ mà a⋮d nên $d \in \text{ƯC}(a,b)$ hay $d \in \text{Ư}(1) \Rightarrow d=1$

Bài 10: CMR: $\text{ƯCLN}(12n+1, 30n+1)=1$ với mọi số tự nhiên n

Lời giải:

Gọi ƯCLN$\left(12n+1,30n+1\right)=d$, suy ra $d\in N^*$ khi đó ta có :

$$\begin{cases}12n+1\vdots d\\30n+1\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\left(12n+1\right)\vdots d\\2\left(30n+1\right)\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}60n+5\vdots d\\60n+2\vdots d\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(60n+5\right)\left(60n+2\right)\vdots d\Rightarrow 3\vdots d\Rightarrow d\in\{1;3\}$$

Vì $12n+1$ là một số không chia hết cho 3 nên $d=3$ loại

Vậy $d=1$, khi đó ƯCLN$\left(12n+1,30n+1\right)=1$

Bài 11: Cho a, b là hai số nguyên tố cùng nhau. CMR các số sau cũng nguyên tố cùng nhau :

a) a^2 và $a+b$ b) ab và $a+b$

Lời giải:

a) Giả sử a^2 và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d

Khi đó $a\vdots d$, do đó $b\vdots d\Rightarrow$ a,b cùng chia hết cho số nguyên tố d, trái với giả thiết ƯCLN$\left(a;b\right)=1$

Vậy a^2 và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau

b) Giả sử ab và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d

Suy ra tồn tại một trong hai số a hoặc b chia hết cho d

Khi $a\vdots d\Rightarrow b\vdots d$, hoặc $b\vdots d\Rightarrow a\vdots d$

a và b cùng chia hết cho d, trái với $\left(a,\ b\right)=1$

Vậy ab và $a+b$ nguyên tố cùng nhau

Dạng 3: Tìm điều kiện để hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 1: Tìm $n \in N$ để: $7n+10$ và $5n+7$ là hai số sau ngyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $d=(7n+10;5n+7) \Rightarrow d \in N^*$

Khi dó ta có:

$$\begin{cases} 7n+10 \vdots d \\ 5n+7 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(7n+10) \vdots d \\ 7(5n+7) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35n+50 \vdots d \\ 35n+49 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (35n+50)-(35n+49) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$$

Do đó $d=1$

Vậy với mọi $n \in N$ hai số $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 2: Tìm $n \in N$ để: $(2n+3)$ và $(4n+8)$ là hai số sau ngyên tố cùng nhau

Lời giải :

Gọi $d=(2n+3;4n+8) \Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 2n+3 \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3) \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6 \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+8)-(4n+6) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1;2\}$$

Vì $(2n+3) \vdots d$, mà $(2n+3)$ là một số lẻ nên $d=2$ (loại)

Khi đó $d=1$.

Vậy với mọi $n \in N$ hai số $(2n+3)$ và $(4n+8)$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 3: Tìm $n \in N$ để: $18n+3$ và $21n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $UCLN\left(18n+3,21n+7\right)=d\Rightarrow d\in N^{*}$

Khi đó ta có: $\begin{cases}18n+3\,\vdots\,d\\21n+7\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7\left(18n+3\right)\vdots\,d\\6\left(21n+7\right)\vdots\,d\end{cases}$

$\Rightarrow\left(126n+42\right)-\left(126n+21\right)\vdots\,d\Rightarrow 21\,\vdots\,d$

$\Rightarrow d\in\text{Ư}\left(21\right)=\left\{\pm1;\pm3;\pm7;\pm21\right\}$

Do $\left(21n+7\right)\vdots\,7$, mà $21n+7$ không chia hết cho 3 nên $d=1$ hoặc $d=7$

Để hai số $18n+3$ và $21n+7$ là hai số nguyên tố thì d khác 7, hay

$18n+3\not\vdots\,7\Rightarrow 18n+3-21\not\vdots\,7\Rightarrow 18n-18\not\vdots\,7\Rightarrow 18\left(n-1\right)\not\vdots\,7\Rightarrow n-1\not\vdots\,7\Rightarrow n-1\neq 7k\Rightarrow n\neq 7k+1$ Vậy $n\neq 7k+1$ với k là số tự nhiên thì $18n+3$ và $21n+7$ là hai số nguyên tố.

Bài 3: Tìm ƯCLN$(7n+3,8n-1)$ với $(n\in N^{*})$. Khi nào thì hai số đó nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $d=\text{ƯCLN}\left(7n+3,8n-1\right),\Rightarrow d\in N^{*}$

Khi đó ta có:

$\begin{cases}7n+3\,\vdots\,d\\8n-1\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8\left(7n+3\right)\vdots\,d\\7\left(8n-1\right)\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}56n+24\,\vdots\,d\\56n-7\,\vdots\,d\end{cases}$

$\Rightarrow 56n+24-56n+7\,\vdots\,d\Rightarrow 31\,\vdots\,d\Rightarrow d=1$ hoặc $d=31$.

Để $d=1$ thì $d\neq 31$ hay $7n+3\not\vdots\,31\Rightarrow 7n+3-31\not\vdots\,31\Rightarrow 7n-28\not\vdots\,31$

$\Rightarrow 7\left(n-4\right)\not\vdots\,31\Rightarrow n-4\not\vdots\,31$

Hay $n-4\neq 31k\Rightarrow n\neq 31k+4$ (k là số tự nhiên)

Vậy để $7n+3$ và $8n-1$ là hai số nguyên tố cùng nhau thì $n \neq 31k+4$ (k là số tự nhiên)

Bài 4: Tìm n để $9n+24$ và $3n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau $(n \in N)$.

Lời giải:

Gọi $d = \text{ƯCLN}(9n+24, 3n+4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 3(3n+4) \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (9n+24)-(9n+12) \vdots d \Rightarrow 12 \vdots d$$

$$\Rightarrow d \in \{\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12\}$$

Nếu $d \in \{\pm2; \pm4; \pm6; \pm12\} \Rightarrow 9n+24$ chẵn và, $3n+4$ chẵn $\Rightarrow$ $d \in \{\pm2; \pm4; \pm6; \pm12\}$ loại

Nếu $d = \pm3 \Rightarrow 3n+4 \vdots 3$ Vô lý $\Rightarrow$ d=3(loại)

Nếu $d = 1 \Rightarrow$ $9n+24, 3n+4$ là số lẻ $\Rightarrow 9n+24$ lẻ $\Rightarrow n$ lẻ và $3n+4$ lẻ $\Rightarrow n$ lẻ

Vậy n lẻ

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để $4n+3$ và $2n+3$ nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi ƯCLN(4n+3; 2n+3) =d, $\Rightarrow$ d $\in N^*$

$$\begin{cases} 4n+3 \vdots d \\ 2n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+3 \vdots d \\ 4n+6 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+6)-(4n+3) \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d \Rightarrow d \in \{1; 3\}$$

Để $4n+3$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau thì d khác 3 hay

$$2n+3 \not\vdots 3 \Rightarrow 2n \not\vdots 3 \Rightarrow n \not\vdots 3 \Rightarrow n \neq 3k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Vậy $n \neq 3k\ \ (k \in \mathbb{N})$ thì $4n+3$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 6: Tìm số tự nhiên n để $7n+13$ và $2n+4$ nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

b, Gọi $\text{ƯCLN}\left(7n+13,\ 2n+4\right)=d$, $\Rightarrow d \in N^*$

$$\begin{cases} 7n+13 \vdots d \\ 2n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14n+26 \vdots d \\ 14n+28 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(14n+28\right)-\left(14n+26\right) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \left\{1;2\right\}$$

Để $7n+13$ và $2n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau thì d khác 2 hay

$7n+13 \not\vdots 2 \Rightarrow 7n \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2 \Rightarrow n$ chẵn

Vậy n chẵn thì $7n+13$ và $2n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 7: Tìm số tự nhiên n để các số $18n+3$ và $21n+7$ nguyên tố cùng nhau .

Lời giải:

Gọi $d = \text{ƯCLN}\left(18n+3, 21n+7\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18n+3 \vdots d \\ 21n+7 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n+3) \vdots d \\ 6\left(21n+7\right) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126n+21 \vdots d \\ 126n+42 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(126n+42\right)-\left(126n+21\right) \vdots d \Rightarrow 21 \vdots d \Rightarrow d \in \text{Ư}\left(21\right)=\left\{1;3;7;21\right\}$$

Nếu $d=3 \Rightarrow 21n+7 \vdots 3$ (Vô lý)

Nếu $d \in \left\{1;7\right\}$, để 2 số trên là nguyên tố thì

$d \neq 7 \Rightarrow 18n+3 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n+3-21 \not\vdots 7 \Rightarrow n-1 \not\vdots 7 \Rightarrow n \neq 7k+1$

Vậy với $n \neq 7k+1\left(k \in N\right)$ thì hai số trên nguyên tố cùng nhau

Bài 8: Chứng minh rằng: có vô số số tự nhiên n để $n+15$ và $n+72$ là 2 số nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

Gọi $d \in \text{ƯC}(n+15, n+72) \Rightarrow 57 \vdots d$, do $n+15 \vdots d, 57 \vdots d$,

Nên tồn tại n sao cho $n+15 = 57k+1$ thì $d=1$, với $k = 1;2;3;\ldots$

Vậy có vô số n

HẾT

CHUYÊN ĐỀ ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

CHỦ ĐỀ 3: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM ƯCLN, BCNN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Kiến thức cần nhớ

1. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

2. Ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai hay nhiếu số là số lớn nhất trong các ước chung của các số đó.

3. Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiếu số lớn hơn 1 , ta thực hiện ba bước sau:

- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

4. Để tìm ước chung của nhiều số, ta có thể tìm ƯCLN của các số đó rồi tìm ước của ƯCLN đó.

5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

6. Bội chung nhỏ nhất (BCNN) của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác 0 trong các bội chung của các số đó.

7. Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1 , ta thực hiện ba bước sau:

- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

- Chọn ra các thừa sổ nguyên tố chung và riêng.

- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó. Tích đó là BCNN phải tìm.

8. Để tìm bội chung của nhiều số, ta có thể tìm BCNN của các số đó rồi nhân BCNN đó lần lượt với $0,1,2,3,\ldots$

2. Các tính chất

1. Khi cần kí hiệu gọn, ta có thể viết ƯCLN (a,b) là (a,b) , viết $BCNN(a,b)$ là $[a,b]$

2. Nếu $ab\,\vdots\,c$ và $(b,c)=1$ thì $a\,\vdots\,c$.

3. Nếu $a\,\vdots\,m$ và $a\,\vdots\,n$ thì $a\,\vdots\,BCNN(m,n)$. Đặc biệt, nếu $a\,\vdots\,m, a\,\vdots\,n$ và $(m,n)=1$ thì $a\,\vdots\,mn$

4. Nếu ƯCLN $(a,b)=d$ thì $a=dm, b=dn$ với $(m,n)=1$.

5. Nếu $BCNN(a,b)=c$ thì $c=am, c=bn$ với $(m,n)=1$.

6. ƯCLN $(a,b)\cdot BCNN(a,b)=a.b$.

7. Người ta chứng minh được rằng:

Cho hai số tự nhiên a và b trong đó $a > b$.

+ Nếu a chia hết cho b thì ƯCLN $(a,b) = b$.

+ Nếu a không chia hết cho b thì ƯCLN (a,b) bằng ƯCLN của b và số dư trong phép chia a cho b .

Từ đó, ta có thuật toán Euclide tìm ƯCLN của hai số mà không cần phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố như sau:

- Chia số lớn cho số nhỏ.
- Nếu phép chia còn dư, lấy số chia đem chia cho số dư.
- Nếu phép chia này còn dư, lại lấy số chia mới chia cho số dư mới.
- Cứ tiếp tục làm như vậy cho đến khi được số dư bằng 0 thì số chia cuối cùng là ƯCLN phải tìm.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Phương pháp phân tích ra các thừa số nguyên tố

I. Phương pháp giải

Muốn tìm ƯCLN, BCNN của hai hay nhiều số ta làm như sau

Bước 1: Phân tích các số ra thừa số nguyên tố với số mũ tương ứng

Bước 2: Tìm các thừa số chung và riêng

Bước 3: ƯCLN là tích các thừa số nguyên tố chung với số mũ nhỏ nhất

BCNN là tích của các thừa số nguyên tố chung và riêng với số mũ lớn nhất

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho khi chia $364, 414, 539$ cho n , ta được ba số dư bằng nhau.

Lời giải:

$364, 414, 539$ chia cho n có cùng số dư nên các hiệu của hai số trong ba số ấy chia hết cho n .

Ta có:

$539 - 414 \vdots n$, tức là $125 \vdots n$,

$539 - 364 \vdots n$, tức là $175 \vdots n$,

$414 - 364 \vdots n$, tức là $50 \vdots n$.

Để n lớn nhất thì n là ƯCLN $(125, 175, 50)$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố:

$125 = 5^3$

$175 = 5^2.7$

$50 = 5^2.2$

ƯCLN $(125, 175, 50) = 5^2 = 25$

Vậy $n = 25$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n nhỏ hơn 30 để các số $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung khác 1 .

Lời giải:

Gọi d là một ước chung của $3n+4$ và $5n+1$.

Ta có $3n+4 \vdots d$ và $5n+1 \vdots d$ nên $5(3n+4)-3(5n+1) \vdots d$, tức là $17 \vdots d$

Suy ra $d \in \{1;17\}$.

Để $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung khác 1 , ta phải có $3n+4 \vdots 17$ tức là $3n+4-34 \vdots 17$ hay $3(n-10) \vdots 17$

Ta lại có $(3,17)=1$ nên $n-10 \vdots 17$.

Do $n<30$ nên $n=10$ hoặc $n=27$.

Thử lại $n=10$, $n=27$ thỏa mãn. Vậy $n=10$,

Bài 3: Tổng của năm số tự nhiên bằng 156 . Ước chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi năm số tự nhiên đã cho là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , ước chung lớn nhất của chúng là d .

Ta có: $a_1 = dk_1, a_2 = dk_2, a_3 = dk_3, a_4 = dk_4, a_5 = dk_5$

nên $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = d\left(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5\right)$

do đó $156 = d\left(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5\right)$

Suy ra d là ước của 156 .

Ta lại có $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 \geq 5$ nên $5d \leq 156$, suy ra $d \leq 31$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $156 = 2^2.3.13$.

Ước lớn nhất của 156 không vượt quá 31 là 26 .

Giá trị lớn nhất của d là 26 , xảy ra khi chẳng hạn $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 26$ và $a_5 = 52$ hoặc các hoán vị của chúng.

Bài 4: Có ba đèn tín hiệu, chúng phát sáng cùng một lúc vào 8 giờ sáng. Đèn thứ nhất cứ 4 phút phát sáng một lần, đèn thứ hai cứ 6 phút phát sáng một lần, đèn thứ ba cứ 7 phút phát sáng một lần. Thời gian đầu tiên để cả ba đèn cùng phát sáng sau 12 giờ trưa là lúc mấy giờ?

Lời giải:

Gọi thời gian ít nhất để sau đó, cả ba đèn lại cùng phát sáng là a (phút).

Ta có a là $BCNN(4,6,7)$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $4. = 2^2, 6 = 2.3, 7 = 7$ nên $BCNN(4,6,7) = 2^2 \cdot 3.7 = 84$

Sau 84 phút, cả ba đèn cùng phát sáng. Chúng cùng phát sáng vào lúc 9 giờ 24 phút, 10 giờ 48 phút, 12 giờ 12 phút. . .

Thời gian đầu tiên sau 12 giờ trưa để cả ba đèn cùng phát sáng là lúc 12 giờ 12 phút.

Bài 5: Điền các chữ số thích hợp vào dấu * để số $A = \overline{679^{***}}$ chia hết cho tất cả các số $5,6,7,9$

Lời giải:

Điều kiện để A chia hết cho tất cả các số $5,6,7,9$ là A chia hết cho $BCNN(5,6,7,9)$
$BCNN(5,6,7,9) = 2.3^2 \cdot 5.7 = 630$

Ta thấy 679999 chia 630 được 1079 , dư 229 nên $679999 - 229 = 679770$ chia hết cho 630 , $679770 - 630 = 679140$ chia hết cho 630 .

Đáp số: 679770 và 679140 .

Bài 6: Tìm các số tự nhiên a và b $(a < b)$ biết ƯCLN $(a,b) = 12, BCNN(a,b) = 240$

Lời giải:

Ta có $ab =$ ƯCLN $(a,b).BCNN(a,b) = 12.240 = 2880$ (1)

ƯCLN $(a,b) = 12$ nên $a = 12\text{m}, b = 12n$ trong đó $(m,n) = 1$

Suy ra $ab = 12\text{m}.12n = 144mn.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $144mn = 2880$ hay $mn = 20$.

Ta có $a < b$ nên $m < n$. Các số m,n nguyên tố cùng nhau và có tích bằng 20 nên

m	1	4

n	20	5

Suy ra

a	12	48
b	240	60

Bài 7: Cho $a = 24, b = 70, c = 112$. Tìm $(a,b);(a,b,c);[a,b];[a,b,c]$. Từ đó kiểm tra công thức

ƯCLN $(a,b,c) =$ ƯCLN(ƯCLN $(a,b),c)$; $BCNN(a,b,c) = BCNN(BCNN(a,b),c)$

Lời giải:

Ta có: $a = 24 = 2^3.3; b = 70 = 2.5.7; c = 112 = 24.7; (a,b) = 2; (a,b,c) = 2; [a,b] = 2^3.35.7 = 840$

$[a,b,c] = 2^4.3.5.7 = 1680$

ƯCLN $(a,b,c) = 2$; ƯCLN $(a,b) = 2$ $\Rightarrow$ ƯCLN(ƯCLN $(a,b),c) =$ ƯCLN $(2,112) = 2$

$BCNN(a,b,c) = 1680; BCNN(BCNC(a,b),c) = BCNN(840,112) = 1680$

Bài 8: Tìm ƯCLN, BCNN của các số sau

a) $793016, 308, 3136$

b) $1323, 19845, 1287, 315$

Lời giải:

a) Ta có: $793016 = 2^3.7^3.17^2$; $308 = 2^2.7.11$; $3136 = 2^6.7^2$

$\Rightarrow$ ƯCLN $(793016, 308, 3136) = 2^2.7 = 28$; $BCNN = 2^6.7^3.11 = 17^2$

b) Ta có

$1323 = 3^3.7^2$; $19845 = 3^4.5.7^2$; $1287 = 3^2.11.13$; $315 = 3^2.5.7$

$\Rightarrow$ ƯCLN $(1323, 19845, 1287, 315) = 3^2 = 9$; $BCNN = 3^4.5.7^2.11.13$

Bài 9: Một trường tổ chức cho khoảng 700 và 800 học sinh đi tham quan. Tính số học sinh biết rằng nếu xếp 40 người hoặc 50 người lên xe ô tô thì vừa đủ.

Lời giải:

Gọi số học sinh của trường là: $n\left(n \in N^*\right)$

Theo bài ta có: $700 \le n \le 800$

Vì $n \vdots 45; n \vdots 40 \Rightarrow n \in BC(40,45) \Rightarrow n \in B(BCNN(40,45))$

Ta có: $40=2^3.5; 45=3^2.5$

$BCNN(40,45)=2^3.3^2.5=360$

$\Rightarrow \begin{cases} n\in B(360) \\ 700\le n\le 800 \end{cases} \Rightarrow n=700$

Vậy Số học sinh là 700 .

Dạng 2: Thuật toán EUCLID để tìm ƯCLN

Trong toán học, giải thuật Euclid (hay thuật toán Euclid) là một giải thuật để tính ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai số nguyên, là số lớn nhất có thể chia được bởi hai số nguyên đó với số dư bằng không. Giải thuật này được đặt tên theo nhà toán học người Hy Lạp cổ đại Euclid, người đã viết nó trong bộ *Cơ sở* của ông (khoảng năm 300 TCN). Nó là một ví dụ về *thuật toán*, một chuỗi các bước tính toán theo điều kiện nhất định và là một trong số những thuật toán lâu đời nhất được sử dụng rộng rãi.

Giải thuật Euclid dựa trên nguyên tắc là ước chung lớn nhất của hai số nguyên không thay đổi khi thay số lớn hơn bằng hiệu của nó với số nhỏ hơn. Chẳng hạn, 21 là ƯCLN của 252 và 105 (vì $252=21.12$ và $105=21.5$) và cũng là ƯCLN của 105 và $252-105=147$. Khi lặp lại quá trình trên thì hai số trong cặp số ngày càng nhỏ đến khi chúng bằng nhau, và khi đó chúng là ƯCLN của hai số ban đầu. Bằng cách đảo ngược lại các bước, ƯCLN này có thể được biểu diễn thành tổng của hai số hạng, mỗi số hạng bằng một trong hai số đã cho nhân với một số nguyên dương hoặc âm (đồng nhất thức Bézout), chẳng hạn, $21=5.105+(-2).252$.

Dạng ban đầu của giải thuật như trên có thể tốn nhiều bước thực hiện phép trừ để tìm ƯCLN nếu một trong hai số lớn hơn rất nhiều so với số còn lại. Một dạng khác của giải thuật rút ngắn lại các bước này, thay vào đó thế số lớn hơn bằng số dư của nó khi chia cho số nhỏ hơn (dừng lại khi số dư bằng không). Dạng thuật toán này chỉ tốn số bước nhiều nhất là năm lần số chữ số của số nhỏ hơn trên hệ thập phân. Gabriel Lamé chứng minh được điều này vào năm 1844, đánh dấu sự ra đời của lý thuyết độ phức tạp tính toán. Nhiều phương pháp khác để tăng hiệu quả của thuật toán cũng đã được phát triển trong thế kỷ 20.

Giải thuật Euclid có rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết và thực tế. Nó được dùng để rút gọn phân số về dạng tối giản và thực hiện phép chia trong số học module. Thuật toán cũng là một thành phần then chốt trong giao thức mật mã để bảo mật kết nối Internet và được dùng để phá vỡ hệ thống mật mã này qua phân tích số nguyên. Nó cũng được áp dụng để giải phương trình Diophantine, chẳng hạn như tìm một số thỏa mãn nhiều biểu thức đồng dư theo định lý số dư Trung Quốc, để xây dựng liên phân số hay tìm xấp xỉ gần đúng nhất cho số thực. Cuối cùng, nó là công cụ cơ bản để chứng minh nhiều định lý trong lý thuyết số như định lý bốn số chính phương của Lagrange và tính duy nhất của phân tích số nguyên ra thừa số nguyên tố. Thuật toán Euclid ban đầu chỉ được giới hạn về số tự nhiên và độ dài hình học (số thực), nhưng đến thế kỷ 19 đã được mở rộng cho nhiều dạng số khác như số nguyên Gauss và đa thức một biến, dẫn đến các khái niệm về đại số trừu tượng như miền Euclid.

Giải thuật Euclid dùng để tính ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai số tự nhiên a và b. Ước chung lớn nhất g là số lớn nhất chia được bởi cả a và b mà không để lại số dư và được ký hiệu là ƯCLN (a,b) hoặc (a,b).

Nếu ƯCLN $(a,b)=1$ thì a và b được gọi là hai số nguyên tố cùng nhau. Tính chất này không khẳng định b là số nguyên tố. Chẳng hạn, 6 và 35 đều không phải là số nguyên tố vì chúng đều có thể được phân tích thành tích của các thừa số nguyên tố: $6=2.3$ và $35=5.7$. Tuy nhiên, 6 và 35 nguyên tố cùng nhau vì chúng không có một thừa số chung nào.

Gọi $g=$ ƯCLN (a,b). Vì a và b đều là bội của g nên chúng có thể được viết thành $a=mg$ và $b=ng$, và không tồn tại số $G>g$ nào để các biểu thức trên đúng. Hai số tự nhiên m và n phải nguyên tố cùng nhau vì có thể phân tích bất kỳ thừa số chung nào từ m và n để g lớn hơn. Do đó, một số c bất kỳ được chia bởi a và b cũng được chia bởi g. Ước chung lớn nhất g của a và b là ước chung (dương) duy nhất của chúng có thể chia được bởi một ước chung c bất kỳ.

ƯCLN có thể được minh họa như sau: Xét một hình chữ nhật có kích thước là $a\times b$ và một ước chung c bất kỳ có thể chia được hết cả a và b. Cả hai cạnh của hình chữ nhật có thể được chia thành các đoạn thẳng bằng nhau có độ dài là c để chia hình chữ nhật thành các hình vuông có cạnh bằng c. Ước chung lớn nhất g chính là giá trị lớn nhất của c để điều này có thể xảy ra. Chẳng hạn, một hình chữ nhật có kích thước 24×60 có thể được chia thành các hình vuông có cạnh là $1, 2, 3, 4, 6$ hoặc 12, nên 12 là ước chung lớn nhất của 24 và 60, tức là hình chữ nhật trên có hai hình vuông nằm trên một cạnh ($\frac{24}{12}=2$) và năm hình vuông nằm trên cạnh còn lại ($\frac{60}{12}=5$).

Ước chung lớn nhất của hai số a và b là tích của các thừa số nguyên tố chung của hai số đã cho, trong đó một thừa số có thể được nhân lên nhiều lần, chỉ khi tích của các thừa số đó chia được cả a và b. Chẳng hạn, ta phân tích được $1386=2.3.3.7.11$ và $3213=3.3.3.7.17$ nên ước chung lớn nhất 1386 và 3213 bằng $63=3.3.7$ (là tích của các thừa số nguyên tố chung). Nếu hai số không có một thừa số nguyên tố chung nào thì ước chung lớn nhất của chúng bằng 1 (một trường hợp của tích rỗng), hay nói cách khác chúng nguyên tố cùng nhau. Một ưu điểm quan trọng của giải thuật Euclid là nó có thể tính được ƯCLN đó mà không cần phân tích ra thừa số nguyên tố. Bài toán phân tích các số nguyên lớn là rất khó và tính bảo mật của nhiều giao thức mật mã phổ biến được dựa trên tính chất này.

ƯCLN của ba số trở lên bằng tích của các thừa số nguyên tố chung của cả ba số đã cho, nhưng nó cũng có thể được tính bằng cách tìm ƯCLN của từng cặp số trong ba số đó. Chẳng hạn,

ƯCLN
$(a,b,c)=\text{ƯCLN}\left(a,\text{ƯCLN}(b,c)\right)=\text{ƯCLN}\left(\text{ƯCLN}(a,b),c\right)=\text{ƯCLN}\left(\text{ƯCLN}(a,c),b\right).$

ư Vì vậy, giải thuật Euclid, vốn dùng để tính ƯCLN của hai số nguyên cũng có thể được áp dụng để tính ƯCLN của một số lượng số nguyên bất kỳ.

Giải thuật Euclid gồm một dãy các bước mà trong đó, đầu ra của mỗi bước là đầu vào của bước kế tiếp. Gọi k là số nguyên dùng để đếm số bước của thuật toán, bắt đầu từ số không (khi đó bước đầu tiên tương ứng với $k=0$, bước tiếp theo là $k=1$,...)

Mỗi bước bắt đầu với hai số dư không âm r_{k-1} và r_{k-2}. Vì thuật toán giúp đảm bảo số dư luôn giảm dần theo từng bước nên r_{k-1} nhỏ hơn r_{k-2}. Mục tiêu của bước thứ k là tìm thương q_k và số dư r_k thỏa mãn $r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k$ và $0\le r_k<r_{k-1}$. Nói cách khác, từ số lớn hơn r_{k-2}, trừ đi bội của số nhỏ hơn r_{k-1} đến khi phần dư r_k nhỏ hơn r_{k-1}.

Ở bước đầu tiên ($k=0$), số dư r_{k-2} và r_{k-1} bằng a và b, hai số cần tìm ƯCLN. Đến bước kế tiếp ($k=1$), hai số dư lần lượt bằng b và số dư r_0 ở bước đầu tiên,... Do đó, thuật toán có thể được viết thành một dãy các bước:

$$a=q_0b+r_0$$
$$b=q_1r_0+r_1$$
$$r_0=q_2r_1+r_2$$
$$r_1=q_3r_2+r_3$$
...

Nếu a nhỏ hơn b thì thuật toán đảo ngược vị trí của hai số. Chẳng hạn, nếu $a<b$ thì thương q_0 bằng không và số dư r_0 bằng a. Do đó, r_k luôn nhỏ hơn r_{k-1} với mọi $k\ge 0$.

Vì các số dư luôn giảm dần theo từng bước nhưng không thể là số âm nên số dư sau cùng r_n phải bằng không và thuật toán dừng lại tại đó. Số dư khác không cuối cùng r_{n-1} chính là ước chung lớn nhất của a và b. Số n không thể là vô hạn vì chỉ có một số lượng hữu hạn các số nguyên dương nằm giữa số dư ban đầu r_0 và 0.

Tính đúng đắn của giải thuật Euclid có thể được chứng minh qua hai bước lập luận.

Bước thứ nhất, cần chứng minh số dư khác không cuối cùng r_{n-1} chia được cả a và b. Vì r_{n-1} là một ước chung nên nó phải nhỏ hơn hoặc bằng với ước chung lớn nhất g.

Bước thứ hai, cần chứng minh rằng bất kỳ ước chung nào của a và b, trong đó có g cần phải chia được r_{n-1}; từ đó, g phải nhỏ hơn hoặc bằng r_{n-1}. Hai kết luận trên là mâu thuẫn trừ khi $r_{n-1}=g$.

Để chứng tỏ r_{n-1} chia được cả a và b, cần biết r_{n-1} chia được số dư liền trước r_{n-2} : $r_{n-2}=q_nr_{n-1}$ vì số dư cuối cùng r_n bằng không. r_{n-1} cũng chia được số dư r_{n-3} : $r_{n-3}=q_{n-1}r_{n-2}+r_{n-1}$ vì nó chia được cả hai số hạng trong vế phải của phương trình. Chứng minh tương tự, r_{n-1} cũng chia được tất cả số dư liền trước nó kể cả a và b. Không có số dư liền trước r_{n-2}, r_{n-3},... chia bởi a và b cho số dư bằng không. Vì r_{n-1} là ước chung của a và b nên $r_{n-1}\le g$.

Trong bước thứ hai, một số tự nhiên c bất kỳ chia được cả a và b (là ước chung của a và b) cũng chia được số dư r_k . Theo định nghĩa thì a và b có thể được viết thành bội của c : $a = mc$ và $b = nc$ với m và n là các số tự nhiên. Ta có $r_0 = a - q_0 b = mc - q_0 nc = \left(m - q_0 n\right)c$ nên c là một ước của số dư ban đầu r_0 . Chứng minh như bước thứ nhất, ta thấy c cũng là ước của các số dư liền sau $r_1, r_2, \ldots$ Từ đó, ước chung lớn nhất g là ước của r_{n-1} hay $g \le r_{n-1}$. Kết hợp hai kết luận thu được, ta có $g = r_{n-1}$. Vậy g là ước chung lớn nhất của tất cả cặp số liền sau:

$$g = \text{ƯCLN}\left(a,b\right) = \text{ƯCLN}\left(b,r_0\right) = \text{ƯCLN}\left(r_0,r_1\right) = \ldots = \text{ƯCLN}\left(r_{n-2},r_{n-1}\right) = r_{n-1}.$$

I. Phương pháp giải

Muốn tìm ƯCLN của a và b (giả sử $a \ge b$)

Bước 1: Chia a cho b có số dư là r

Bước 2:

+ Nếu $r = 0$ thì ƯCLN $\left(a,b\right) = b$. Việc tìm ƯCLN dừng lại.

+ Nếu $r > 0$, ta chia tiếp b cho r , được số dư r_1

- Nếu $r_1 = 0$ thì $r_1 = \text{ƯCLN}\left(a,b\right)$. Dừng lại việc tìm ƯCLN

- Nếu $r_1 > 0$ thì ta thực hiện phép chia r cho r_1 và lập lại quá trình như trên.

ƯCLN $\left(a,b\right)$ ***là số dư khác*** 0 ***nhỏ nhất trong dãy phép chia nói trên.***

II. Bài toán

Bài 1: Hãy tìm ƯCLN $\left(1575,343\right)$ bằng thuật toán Ơclide

Lời giải:

Ta có: $1575 = 343.4 + 203$

$343 = 203.1 + 140$

$203 = 140.1 + 63$

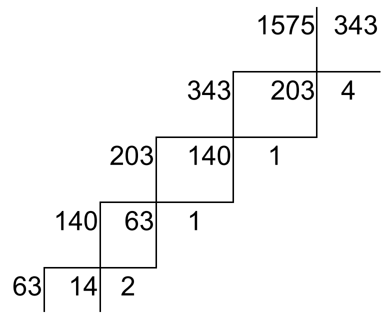
$140 = 63.2 + 14$

$63 = 14.4 + 7$

$14 = 7.2 + 0$ (chia hết)

Vậy ƯCLN $\left(1575,343\right) = 7$

Trong thực hành làm như sau:



Vậy ƯCLN $(1575,343)=7$

Bài 2: Tìm ƯCLN $(58005,2835)$ bằng thuật toán Euclide

Lời giải:

Ta có: $58005=20.2835+1305 \Rightarrow (58005,2835)=(2835,1305); 2835=2.1305+225; 1305=5.225+180$

$225=1.180+45; 180=4.45 \Rightarrow$ ƯCLN $=45$.

Bài 3: Chứng minh rằng ƯCLN $(n+1,3n+4)=1, n\in\mathbb{N}$.

Lời giải:

Cách 1:

Gọi $d=UCLN(n+1,3n+4), d\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases}3n+4\,\vdots\, d\\ n+1\,\vdots\, d\end{cases} \Rightarrow (3n+4)-3(n+1)\,\vdots\, d \Rightarrow 1\,\vdots\, d \Rightarrow d=1$.

Vậy ƯCLN $(n+1,3n+4)=1, n\in\mathbb{N}$.

Cách 2:

Ta có: $3n+4=3n+3+1=3(n+1)+1$

Mà $3(n+1)\,\vdots\,(n+1) \Rightarrow 3(n+1)+1$ chia cho $(n+1)$ dư 1

Suy ra ƯCLN $(n+1,3n+4)=(n+1;1)=1, n\in\mathbb{N}$

Bài 4: Chứng minh rằng $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Cách 1:

Gọi $d=UCLN(2n+1,2n+3), d\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases}2n+1\,\vdots\, d\\ 2n+3\,\vdots\, d\end{cases} \Rightarrow (2n+3)-(2n+1)\,\vdots\, d \Rightarrow 2\,\vdots\, d \Rightarrow d\in\{1;2\}$.

Mà $2n+1\vdots d$ và $2n+1$ lẻ nên d lẻ. Suy ra $d=1$.

Vậy $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Cách 2:

Ta có: $2n+3=2n+1+2 \quad \Rightarrow 2n+3$ chia cho $2n+1$ dư 2

Suy ra ƯCLN $(2n+3,2n+1)=\left(2n+1;2\right)=1, n\in\mathbb{N}$ (Vì $2n+1$ lẻ , 2 là số chẵn).

Vậy $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 5: Biết số A gồm 2015 chữ số 2 và B gồm 8 chữ số 2 . Hãy tìm ƯCLN $\left(A,B\right)$

Lời giải:

Ta có $A=\underbrace{22...2}_{2015}=\underbrace{2.2.....2}_{2008}\underbrace{0....0}_{7}+\underbrace{2.2......2}_{7.chu.so.2}$

Vì $\underbrace{2.2.....2}_{2008}\underbrace{0....0}_{7}\vdots\underbrace{2.2.....2}_{8}\rightarrow(A,B)=(\underbrace{2.2.....2}_{8},\underbrace{2.2.....2}_{7})$

Ta có: $\underbrace{2.2.....2}_{8}=\underbrace{2.2.....2}_{7}0+2\rightarrow(\underbrace{2.2.....2}_{8},\underbrace{2.2.....2}_{7})=(\underbrace{2.2.....2}_{7},2)=2\Rightarrow(A,B)=2$

Bài 6: Số X gồm 2002 chữ số 9 , Y gồm 9 chữ số 9 . Tìm ƯCLN $\left(X,Y\right)$

Lời giải:

Có: $2002=222.9+4; X=\underbrace{99....9}_{2002}=\underbrace{99....9}_{1998}\underbrace{0000}_{4}+\underbrace{9999}_{4}; X=BS(Y)+9999(1)$

$Y=\underbrace{9999....9}_{9}=\underbrace{9999....9}_{8}\underbrace{0}_{1}+9\rightarrow Y=BS(9999)+9(2);9999=BS(9)(3)$

Từ $(1)(2)(3)\Rightarrow$ ƯCLN $(X,Y)=9$

Bài 7: Tìm số tự nhiên n , biết rằng khi chia 239 và 373 cho n thì số dư lần lượt là 14 và 23

Lời giải:

Theo đầu bài ta có:

$$\left.\begin{array}{l}239-14=225\vdots n\\373-23=350\vdots n\end{array}\right\}\Rightarrow n\in UC(225,350)\Rightarrow n\in U(UCLN(225,350));225=3^2.5^2;350=2.5^2.7$$

ƯCLN $(225,350)=25\Rightarrow n\in UC(25)$

Vì 373 chia cho n dư 23 $\Rightarrow\begin{cases}n>23\\n\in U(25)\end{cases}\Rightarrow n=25$

Vậy $n=25$

Bài 8: Người ta đếm số trứng trog một rổ. Nếu đếm theo từng chục cũng như theo tá hoặc theo từng 15 quả thì lần nào cũng dư 1 quả. Tính số trứng trong rổ, biết rằng số trứng đó lớn hơn 150 và nhỏ hơn 200 quả.

Lời giải:

Gọi số trứng trong rổ là n ($n \in N^*$)

Ta có: $150 < n < 200 (1); (n-1) \vdots 10,12,15 \Rightarrow (n-1) \in BC(10,12,15) \Rightarrow n-1 \in B(60)$

Theo (1) $\Rightarrow 149 < n-1 < 199 \Rightarrow n-1 = 180 \Rightarrow n = 181$

Vạy số trứng trong rổ là 181 quả

Bài 9: Một trường học có số lượng học sinh không quá 1000 . Khi xếp hàng $20,25,30$ thì đều dư 15 . Nhưng khi xếp hàng 41 thì vừa đủ. Tính số học sinh của trường?

Lời giải:

Gọi số học sinh của trường là: n ($n \in N^*$)

Theo bài ra ta có: $n \le 1000$

Lại có: $n-15 \vdots 20,25,30; n \vdots 41; n-15 \in BC(20,25,30) \in B(BCNN(20,25,30) = 300 \Rightarrow n-15 \in B(300)$

Mà $n-15 \le 1000-15 = 985 \Rightarrow n-1 \in \{300,600,900\} \Rightarrow \begin{cases} n \in \{315,615,915\} \\ n \vdots 41 \end{cases} \Rightarrow n = 615$

Vậy số học sinh của trường là 615 (học sinh).

Bài 10: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng khi chia số đó cho $12,18,23$ thì số dư lần lượt là $11,17,9$

Lời giải:

Gọi số tự nhiên cần tìm là: a ($a \in N$)

Theo bài ta có: $a = 12k + 1 = 18q + 17 = 2.3.p + 9 (k,p,q \in N)$

Ta tìm số b sao cho: $a + b \vdots 12,18,23$

Nhận thấy: $a + 37 = 12k + 48 \vdots 12; a + 37 = 18q + 54 \vdots 18; a + 37 = 23p + 46 \vdots 23 \Rightarrow a + 37 \in BC(12,18,23)$

Vì a nhỏ nhất

$\Rightarrow a + 37 = BCNN(12,18,23); 12 = 2^2.3; 18 = 2.3^2; 23 = 23 \Rightarrow BCNN(12,18,23) = 2^2.3^2.23 = 828$

$\Rightarrow a = 828 - 37 = 791$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 791 .

Bài 11: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6 , chia cho 4 dư 1 , chia cho 19 dư 11

Lời giải:

Gọi số cần tìm là a , ta có: $(a-6) \vdots 11; (a-1) \vdots 4; (a-11) \vdots 19$

$\Rightarrow (a-6+33)\vdots 11;(a-1+28)\vdots 4;(a-11+38)\vdots 19$

$\Rightarrow (a+27)\vdots 11;(a+27)\vdots 4;(a+27)\vdots 19$

Mà a nhỏ nhất $\Rightarrow (a+27)$ nhỏ nhất $\Rightarrow (a+27)=BCNN(11,4,9)$

Do ƯCLN $(4;11;9)=1 \Rightarrow BCNN(11;4;9)=11.14.9=396$

$\Rightarrow a+27=396 \Rightarrow a=369$

Vậy số tự nhiên cần tìm là: 369 .

Bài 12: Cho a,b là các số tự nhiên khác 0 sao cho $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}$ là số tự nhiên. Gọi d là ƯCLN của a,b . Chứng minh rằng: $a+b \ge d^2$

Lời giải:

$d=(a,b)$, đặt $a=dm, b=dn; \dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}=\dfrac{a^2+b^2+a+b}{ab}\in N \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+a+b \vdots ab \\ ab=d^2.m.n \vdots d^2 \end{cases} \rightarrow a^2+b^2+a+b \vdots d^2$

$\left.\begin{matrix} a^2=d^2m^2 \vdots d^2 \\ b^2=d^2n^2 \vdots d^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow a+b \vdots d^2 \rightarrow a+b \ge d^2 \rightarrow dpcm$

Bài 13: Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5 , chia cho 13 dư 4 . Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi số đó là a

Vì a chia cho 7 dư 5 , chia cho 13 dư 4 $\Rightarrow a+9 \vdots 7; a+9 \vdots 13$

mà ƯCLN $(7,13)=1$ nên $\Rightarrow (a+9)\vdots 7.13=91$

$\Rightarrow (a+9)=91k \Rightarrow a=91k-9=91k-91+82=91(k-1)+82 (k\in N)$

Vậy a chia cho 91 dư 82 .

Bài 14: Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 355 cho a ta được số dư là 13 và khi chia 836 cho a có số dư là 8 .

Lời giải:

Theo đề khi chia 355 cho a ta được số dư là 13 nên ta có $355=a.m+13$ với $m\in N^*$ và $a>13$ hay $a.m=342=18.19$ (1) và khi chia 836 cho a có số dư là 8 $\Rightarrow 836=a.n+8 \Rightarrow a.n=828=18.46$ với $n\in N^*$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a=18$ là số tự nhiên cần tìm.

Bài 15: Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi số đã cho là A. Theo bài ra ta có: $A=7a+3=17b+12=23c+7$

Mặt khác: $A+39=7a+3+39=17b+12+39=23c+7+39=7(a+6)=17(b+3)=23(c+2)$

Như vậy $A+39$ đồng thời chia hết cho $7,17$ và 23.

Nhưng ƯCLN $(7,17,23)=1$ $\Rightarrow (A+39) \vdots 7.17.23 \Rightarrow (A+39) \vdots 2737 \Rightarrow A+39=2737.k$

$\Rightarrow A=2737k-39=2737(k-1)+2698$

Do $2698<2737$ nên 2698 là số dư của phép chia số A cho 2737.

Bài 16: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là a ($a \in N, 100 \le a \le 999$)

Vì a chia cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28 nên:

$$\begin{cases} a-7 \vdots 8 \\ a-28 \vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-7+8 \vdots 8 \\ a-28+31 \vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 \vdots 8 \\ a+3 \vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+64 \vdots 8 \\ a+3+62 \vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+65 \vdots 8 \\ a+65 \vdots 31 \end{cases}$$

Vì $(8,31)=1 \Rightarrow (a+65) \vdots 248 \Leftrightarrow a=248k-65 \left(k \in N^*\right)$

Vì a là số có 3 chữ số lớn nhất nên $k=4$, khi đó $a=248.4-65=927$

Vậy số cần tìm là 927.

Bài 17: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số biết rằng số đó chia cho $4,6,7$ đều dư 3.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là a. điều kiện $a \in N, a \ge 100$

Vì a chia cho $4,6,7$ đều dư 3 $\Rightarrow (a-3) \vdots 4,6,7$

Mà a nhỏ nhất nên $a-3$ nhỏ nhất $\Rightarrow a-3=BCNN(4,6,7)$

Mà ƯCLN $(4,6,7)=1 \Rightarrow BCNN(4,6,7)=4.6.7=168$

$\Rightarrow a-3=168 \Leftrightarrow a=171$

Vậy số cần tìm là 171.

Bài 18: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 5 thì dư 3, a chia cho 7 thì dư 4.

Lời giải:

Ta có a chia cho 5 thì dư 3 , a chia cho 7 thì dư 4

$\Rightarrow (a-3) \vdots 5$ và $(a-4) \vdots 7 \Rightarrow \Rightarrow (a-3+20) \vdots 5$ và $(a-4+21) \vdots 21$

$\Rightarrow (a+17) \vdots 5$ và $\Rightarrow (a+17) \vdots 7 \Rightarrow a+17$ là bội chung của 5 và 7

Vì a là số tự nhiên nỏ nhất nên $a+17 = BCNN(5,7) = 35 \Rightarrow a = 18$.

Bài 19: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3 , cho 4 , cho 5 , cho 6 đều dư là 2 , còn chia cho 7 thì dư 3 .

Lời giải:

Gọi số tự nhiên cần tìm là a $\quad (a \in N, a > 3)$

Ta có khi chia a cho 3 , cho 4 , cho 5 , cho 6 đều dư là 2

$\Rightarrow a-2 \in BC(3;4;5;6) = \{60;120;180;240;....\}$

Nên a nhận các giá trị $62;122;182;242;...$

Mặt khác a là số nhỏ nhất chia cho 7 thì dư 3 tức là $(a-3)$ là số nhỏ nhất chia hết cho 7

$\Rightarrow a = 122$ (vì $a = 62$ thì $62-3 = 59$ không chia hết cho 7).

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84 và ƯCLN bằng 6 .

Lời giải:

Gọi 2 số cần tìm là a và b , giả sử $a < b$ $\left(a, b \in \mathbb{N}^*\right)$

Vì ƯCLN $(a;b) = 6$

Ta có $a+b = 84 \Rightarrow 6m+6n = 84 \Rightarrow m+n = 14$

Lập bảng:

m	1	3	5
n	13	11	9
a	6	18	30
b	78	30	54

Vậy hai số cần tìm là 6 và 78 ; 18 và 66 ; 30 và 54 .

Bài 2: Tìm số tự nhiên n biết $(3n+14)$ chia hết cho $(n+1)$.

Lời giải:

Ta có $(3n+14) = 3(n-1)+7$

Vì $3(n-1)\vdots(n-1)$ nên để $(3n+14)\vdots(n-1)$ thì $7\vdots(n-1)$

$\Rightarrow (n-1)$ phải là ước của 7 $\Rightarrow n-1 \in \{-7;-1;1;7\} \Rightarrow n \in \{-6;0;2;8\}$

Mà $n \in N$, nên $n \in \{0;2;8\}$

Vậy $n \in \{0;2;8\}$ thì $(3n+14)$ chia hết cho $(n+1)$.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n biết $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Lời giải:

Để $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì $(n+15)$ chia hết cho $(n+3)$

$\Rightarrow \left[(n+15)-(n+3)\right]$ chia hết cho $(n+3) \Leftrightarrow 12$ chia hết cho $(n+3)$

Mà $n \in N$ nên $(n+3)$ phải là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3 và đồng thời là ước của 12

$\Rightarrow n+3 \in \{3;4;6;12\} \Rightarrow n \in \{0;1;3;9\}$

Vậy $n \in \{0;1;3;9\}$ thì $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n biết $(n^2+3n+6)\vdots(n+3)$

Lời giải:

Ta có $n^2+3n+6 = n(n+3)+6$

Vì $n(n+3)\vdots(n+3)$, nên để $(n^2+3n+6)\vdots(n+3)$ thì $6\vdots(n+3)$

Mà $n \in N$, nên $(n+3)$ phải là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 3 và đồng thời là ước của 6

$\Rightarrow (n+3) \in \{3;6\} \Rightarrow n \in \{0;3\}$

Vậy $n \in \{0;3\}$ thì $(n^2+3n+6)\vdots(n+3)$

Bài 5: Tìm số tự nhiên n biết $\dfrac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải:

Ta có $\dfrac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên khi $(n+1)\vdots(n-2)$

Ta có $n+1=(n-2)+3,$ do đó $(n+1)\vdots(n-2)$ khi $3\vdots(n-2)$

$\Rightarrow(n-2)$ là ước của 3

$\Rightarrow(n-2)\in\{-3;-1;1;3\}\Rightarrow n\in\{-1;1;3;5\}$

Vậy $n\in\{-1;1;3;5\}$ thì $\dfrac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên biết hiệu của chúng bằng 84 , ƯCLN của chúng bằng 28 và các số đó trong khoảng từ 300 đến 400 .

Lời giải:

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a,b và giả sử $a>b$

Đặt ƯCLN $(a,b)=d\Rightarrow a=md;b=nd$ với $m,n\in Z^+;UCLN(m,n)=1,m>n\Rightarrow BCNN(a,b)=dmn$

Mà ƯCLN $(a,b)+BCNN(a,b)=23$ nên $d(m.n+1)=23\Rightarrow d$ là ước của 23 hay $d\in\{1;23\}$

Xét $d=1,$ ta có $mn+1=23\Leftrightarrow mn=22$ với ƯCLN $(m,n)=1$ nên ta có các trường hợp của m, n như sau:

Trường hợp 1: $m=22,n=1\Rightarrow a=22,b=1$

Trường hợp 2: $m=11,n=2\Rightarrow a=11,b=2$

Trường hợp 3: $m=11,n=2\Rightarrow a=11,b=2$

Xét $d=3,$ ta có $mn+1=1\Leftrightarrow mn=0$ (không thỏa mãn)

Bài 7: Cho $n\in N^*$. Tìm ƯCLN của $2n-1$ và $9n+4$

Lời giải:

Gọi $d=(2n-1,9n+4)(d\in N^*)\Rightarrow\begin{cases}2n-1\vdots d(1)\\9n+4\vdots d(2)\end{cases}\Rightarrow 2(9n+4)-9(2n-1)\vdots d\Rightarrow 17\vdots d\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d=1\\d=17\end{array}\right.$

-Nếu $d=17\Rightarrow(9n+4)-4(2n-1)=n+8\vdots 17\Rightarrow n=17+9k(k\in N)\Rightarrow 9n+4=9(17k+9)+4=9.17k+85\vdots 17$
$2n-1=2(17k+9)-1=2.17k+17\vdots 17$

Vậy nếu n có dạng $17k+9(k\in N)$ thì $UCLN(2n-1;9n+4)=17$

Bài 8: Tìm ƯCLN $(1+2+3+...+n,2n+1)$ với $n\in N,n\geq 2$

Lời giải:

$\left(\dfrac{n(n+1)}{2},2n+1\right)=d\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{n(n+1)}{2}\\2n+1\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n(n+1)\vdots d\\2n+1\vdots d\end{cases}$

Giả sử $d > 1$, p là ước nguyên tố của d

$\Rightarrow n(n+1) \vdots d \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n \vdots p \\ n+1 \vdots p \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n+1 \vdots p \\ n \vdots p \end{array}\right. \Rightarrow (n+1)-n = 1 \vdots p \Rightarrow 1 \vdots p$ (vô lý) $\Rightarrow d = 1$

Bài 9: Tìm ƯCLN của $9n+24$ và $3n+4$

Lời giải:

Gọi ƯCLN $(9n+24;3n+4) = d \Rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 9n+12 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (9n+24)-(9n+12) = d \Rightarrow 12 \vdots d$

$\Rightarrow d \in U(12) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

Do $(3n+4) \vdots d$, mà $3n+4$ không chia hết cho 3 , nên $d = 3;6;13$ (loại)

Do đó $d \in \{1;2;4\}$

- Để $d = 2$ thì n phải chẵn
- Để $d = 4$ thì n phải chia hết cho 4
- Để $d = 1$ thì n là số lẻ

Vậy $n = 4k+2 (k \in N)$ thì ƯCLN $(9n+24;3n+4) = 2$

$n = 4k (k \in N)$ thì ƯCLN $(9n+24;3n+4) = 4$

$n = 2k+1 (k \in N)$ thì ƯCLN $(9n+24;3n+4) = 1$.

Bài 10: Biết $(a,b) = 95$. Tìm $(a+b, a-b)$

Lời giải:

Gọi ƯCLN $(a+b, a-b) = d \Rightarrow d \in N^*$

$\begin{cases} a+b \vdots d \\ a-b \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2b \vdots d \Rightarrow d \in U(2)$ hoặc $d \in U(b)$

và $\begin{cases} a+b \vdots d \\ a-b \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2a \vdots d \Rightarrow$ hoặc $d \in U(2)$ hoặc $d \in U(a)$

mà ƯCLN $(a,b) = 95$, nên $d = 95$ hoặc $d = 2$

Vậy ƯCLN $(a+b, a-b) = 2$ hoặc $d = 95$.

Bài 11: Học sinh khối 6 khi xếp hàng; nếu xếp hàng 10 , hàng 12 , hàng 15 đều dư 3 học sinh. Nhưng khi xếp hàng 11 thì vừa đủ. Biết số học sinh khối 6 chưa đến 400 học sinh. Tính số học sinh khối 6?

Lời giải:

Gọi số học sinh khối 6 là a $\left(3 < a < 400\right)$

Vì khi xếp hàng 10 , hàng 12 , hàng 15 đều dư 3 học sinh

$\Rightarrow$ $a-3 \vdots 10;12;15$

$\Rightarrow$ $a-3 \in BC(10,12,15)$

Ta có: $BCNN\left(10;12;15\right) = 60$

$\Rightarrow$ $a-3 \in \left\{60;120;180;240;300;360;420;....\right\}$

$\Rightarrow$ $a \in \left\{63;123;183;243;303;363;423;...\right\}$

mà $a \vdots 11; a < 400 \Rightarrow a = 363$

Vậy số học sinh khối 6 là 363 học sinh.

Bài 12: Một người bán năm giỏ xoài và cam. Mỗi giỏ chỉ đựng một loại quả với số lượng là: $65kg$; $71kg$; $58kg$; $72kg$; $93kg$. Sau khi bán một giỏ cam thì số lượng xoài còn lại gấp ba lần số lượng cam còn lại. Hãy cho biết giỏ nào đựng cam, giỏ nào đựng xoài?

Lời giải:

Tổng số xoài và cam lúc đầu: $65+71+58+72+93 = 359\left(kg\right)$

Vì số xoài còn lại gấp ba lần số cam còn lại nên tổng số xoài và cam còn lại là số chia hết cho 4 , mà 359 chia cho 4 dư 3 nên giỏ cam bán đi có khối lượng chia cho 4 dư 3 .

Trong các số $65;71;58;72;93$ chỉ có 71 chia cho 4 dư 3 .

Vậy giỏ cam bán đi là giỏ $71kg$.

Số xoài và cam còn lại: $359-71 = 288\left(kg\right)$

Số cam còn lại: $288:4 = 72\left(kg\right)$

Vậy: các giỏ cam là giỏ đựng $71kg$; $72kg$.

Các giỏ xoài là giỏ đựng $65kg;58kg;93kg$.

Bài 13: Hai lớp 6A; 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Lớp 6A có 1 bạn thu được $26kg$ còn lại mỗi bạn thu được $11kg$. Lớp 6B có 1 bạn thu được $25kg$ còn lại mỗi bạn thu được $10kg$. Tính số học sinh mỗi lớp biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng $200kg$ đến $300kg$.

Lời giải:

Gọi số giấy mỗi lớp thu được là $x(kg) \Rightarrow (x-26) \vdots 11$ và $(x-25) \vdots 10$

Do đó $(x-15) \in BC(10;11)$ và $200 < x < 300 \Rightarrow x-15 = 220 \Rightarrow x = 235$

Số học sinh lớp 6A là: $(266-26):11+1 = 20$ (học sinh)

Số học sinh lớp 6B là: $(235-25):10+1 = 22$ (học sinh)

Bài 14: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng $10;12;15$ đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Lời giải:

Gọi số học sinh là $a\left(a \in N^*\right)$

Vì số học sinh khi xếp hàng $10;12;15$ đều dư 3 $\Rightarrow a-3 \in BC(10;12;15)$

Mà $BCNN(10;12;15) = 60 \Rightarrow a-3 = 60k\left(k \in N^*\right) \Rightarrow a = 6kk+3$

Ta có bảng sau:

k	1	2	3	4	5	6	7
a	63	123	183	243	303	363	423

Vì số học sinh chưa đến 400 bạn và khi xếp hàng 11 thì không dư nên $a < 400$ và $a \vdots 11$

Trong các giá trị trên, chỉ có $a = 363$ thỏa mãn bài toán

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Bài 15: Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng, mỗi hàng có 20 người, hoặc 25 người, hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người thì vừa đủ (không có hàng nào thiếu, không có ai ở ngoài hàng). Hỏi đơn vị có bao nhiêu người, biết rằng số người của đơn vị chưa đến 1000 ?

Lời giải:

Gọi số người của đơn vị bộ đội là $x\left(x \in N^*; 41 < x < 100\right)$

Ta có $a:20$ dư $15 \Rightarrow (x-15) \vdots 20$

$a:25$ dư $15 \Rightarrow (x-15) \vdots 25$

$a:30$ dư $15 \Rightarrow (x-15) \vdots 30$

$\Rightarrow (x-15) \in BC(20,25,35)$

Ta có $20=2^2.5;25=5^2;30=2.3.5 \Rightarrow BCNN(20,25,30)=2^2.5^2.3=300$

$\Rightarrow BC(20,25,35)=300k\,(k\in N) \Rightarrow x-15=300k \Leftrightarrow x=300k+15$

Mà $x<1000$ nên chỉ xét $k\in\{1;2;3\}$, khi đó $x\in\{315;615;915\}$

Vì số bộ đội khi xếp mỗi hàng 41 người thì vừa đủ tức là: $x\,\vdots\,41,$ do đó có $x=615$ thỏa mãn bài toán

Vậy đơn vị bộ đội có 615 người.

Bài 16: Cho m,n là hai số tự nhiên. Gọi A là tập hợp các ước chung của m và n . B là tập hợp các ước số chung của $11m+5n$ và $9m+4n$. Chứng minh rằng $A=B.$

Lời giải:

Gọi $d=ƯCLN(11m+5n,9m+4n) \Rightarrow d\in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases}11m+5n\,\vdots\,d\\9m+4n\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}9(11m+5n)\,\vdots\,d\\11(9m+4n)\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}99m+45n\,\vdots\,d\\99m+44n\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow n\,\vdots\,d \qquad (1)$

Tương tự ta có: $\begin{cases}11m+5n\,\vdots\,d\\9m+4n\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4(11m+5n)\,\vdots\,d\\5(9m+4n)\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}44m+20n\,\vdots\,d\\45m+20n\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow m\,\vdots\,d \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $d\in ƯC(m;n) \Rightarrow d\in A \Rightarrow B\subset A$

Mà $A\subset B$

Suy ra $A=B$.

HẾT

CHUYÊN ĐỀ ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

CHỦ ĐỀ 4: CÁC BÀI TOÁN QUY VỀ TÌM ƯCLN VÀ BCNN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ước và Bội của một số nguyên

Với $a, b \in Z$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b. Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a.

2. Nhận xét

- Nếu $a = bq$ thì ta nói a chia cho b được q và viết $a : b = q$

- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.

- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

3. Liên hệ phép chia có dư với phép chia hết.

Nếu số tự nhiên a chia cho số tự nhiên b được số dư là k thì số $(a-k) \vdots b$

4. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Ước chung của các số $a,\ b,\ c$ được kí hiệu là $\text{ƯC}(\text{a, b, c})$.

5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

Bội chung của các số $a,\ b,\ c$ được kí hiệu là: $BC(a,\ b,\ c)$.

6. Ước chung lớn nhất. Bội chung nhỏ nhất

- Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

- Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác không trong tập hợp các bội chung của các số đó.

7. Các tính chất

- $(a,1) = 1; [a,1] = a$

- Nếu $a \vdots b \Rightarrow (a,b) = b; [a,b] = a$

- Nếu $a,\ b$ nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (a,b) = 1; [a,b] = a.b$

- $\text{Ư}C(a,\ b) = \text{Ư}(\text{Ư}CLN(a,\ b))$ và $BC(a\ ,b) = B(BCNN(a,\ b))$

- Nếu $(a,b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases}$ với $(m,n) = 1$

- Nếu $[a,b]=c \Rightarrow \begin{cases} c=am \\ c=bn \end{cases}$ $với\,(m,n)=1$

- $ab=(a,b).[a,b]$

8. Phương pháp giải

- Nếu số tự nhiên a chia cho số tự nhiên b được số dư là k $\Rightarrow (a-k)\vdots b$

- Nếu $a\vdots b$ và $a\vdots c$ mà Ư $CLN(a,b)=1$

$\Rightarrow a$ chia hết cho tích bc với $(a,b,c\in N)$

- Nếu $a\vdots b$ và $a\vdots c$ mà a là số nhỏ nhất

$\Rightarrow a=BCNN(a,b)(a,b,c\in N)$

- Nếu $a\vdots b$ và $m\vdots b$ mà b lớn nhất

$\Rightarrow b=UCLN(a,m)(a,b,m\in N)$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1. Bài toán đưa về tìm ƯCLN và BCNN của hai hay nhiều số

I. Phương pháp giải.

*** Phương pháp giải bài toán đưa về tìm ƯCLN**

- Nếu $a\vdots x, b\vdots x$, x lớn nhất thì $x\in$ ƯCLN(a,b)

- Tìm ƯCLN theo ba bước

Bước 1: Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

Bước 2: Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

Bước 3: Lập tích các thừa số đã chọn mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

- Kết luận bài toán

*** Phương pháp giải bài toán đưa về tìm BCNN**

- Nếu $x\vdots a, x\vdots b$, x nhỏ nhất thì $x\in$ BCNN(a,b)

- Tìm BCNN theo ba bước

Bước 1: Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

Bước 2: Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng.

Bước 3: Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó. Tích đó là BCNN phải tìm.

- Kết luận bài toán

II.Bài toán.

Bài 1.Tìm số tự nhiên x lớn nhất biết rằng $125 \vdots x$, $100 \vdots x$, $150 \vdots x$

Lời giải

Vì $125 \vdots x$, $100 \vdots x$, $150 \vdots x$ và x lớn nhất nên $x = ƯCLN(125,100,150)$

Ta có: $125 = 5^3$

$100 = 2^2.5^2$

$150 = 2.3.5^2$

$ƯCLN(125,100,150) = 5^2 = 25$

$\Rightarrow x = 25$

Vậy $x = 25$

Bài 2.Tìm số tự nhiên x lớn nhất biết rằng $480 \vdots x$, $600 \vdots x$

Lời giải

Vì $480 \vdots x$, $600 \vdots x$ và x lớn nhất nên $x = ƯCLN(480,600)$

Ta có: $480 = 2^5.3.5$

$600 = 2^3.3.5^2$

$ƯCLN(480,600) = 2^3.3.5 = 120$

$\Rightarrow x = 120$

Vậy $x = 120$

Bài 3. Lan có một tấm bìa hình chữ nhật, kích thước 75 cm và 105 cm, Lan muốn cắt tấm bìa thành các mảnh nhỏ hình vuông bằng nhau sao cho tấm bìa được cắt hết không còn thừa mảnh nào,Tính độ dài lớn nhất cạnh hình vuông?

Lời giải

Gọi độ dài lớn nhất cạnh hình vuông là a (cm)

Theo bài ra ta có: $75 \vdots a$, $105 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a = ƯCLN(75,105)$

Ta có: $75 = 3.5^2$

$105 = 3.5.7$

$ƯCLN(75,105) = 3.5 = 15$

$\Rightarrow a = 15$

Vậy độ dài lớn nhất cạnh hình vuông là $15cm$.

Bài 4. Phần thưởng cho học sinh của một lớp học gồm 128 vở, 48 bút chì, 192 nhãn vở. Có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu phần thưởng như nhau, mỗi phần thưởng gồm bao nhiêu vở, bút chì, nhãn vở?

Lời giải

Gọi số phần thưởng được chia là a (phần thưởng), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $128 \vdots a, 48 \vdots a, 192 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a = ƯCLN(128, 48, 192)$

Ta có: $128 = 2^7$

$48 = 3.2^4$

$192 = 2^6.3$

$ƯCLN(128, 48, 192) = 2^4 = 16$

$\Rightarrow a = 16$

Vậy có thể chia được nhiều nhất 16 phần thưởng

Mỗi phần thưởng có số vở là $128 : 16 = 8$ (vở)

Mỗi phần thưởng có số bút chì là $48 : 16 = 3$ (bút chì)

Mỗi phần thưởng có số nhãn vở là $192 : 16 = 12$ (nhãn vở)

Bài 5. Hùng có một tấm bìa hình chữ nhật, kích thước 60 cm và 96 cm, Hùng muốn cắt tấm bìa thành các mảnh nhỏ hình vuông bằng nhau sao cho tấm bìa được cắt hết không còn thừa mảnh nào,Tính độ dài lớn nhất cạnh hình vuông?

Lời giải

Gọi độ dài lớn nhất cạnh hình vuông là a (cm)

Theo bài ra ta có: $60 \vdots a, 96 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a = ƯCLN(60, 96)$

Ta có: $60 = 2^2.3.5$

$96 = 2^5.3$

$ƯCLN(60, 96) = 2^2.3 = 12$

$\Rightarrow a = 12$

Vậy độ dài lớn nhất cạnh hình vuông là $12cm$

Bài 6. Một đội y tế có 24 bác sĩ và 108 y tá. Có thể chia đội y tế đó nhiều nhất thành mấy tổ để các bác sĩ cũng như các y tá được chia đều vào mỗi tổ ?

Lời giải

Gọi số tổ được chia là a (tổ), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $24 \vdots a$, $108 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a =$ ƯCLN$(24,108)$

Ta có: $24 = 2^3.3$

$108 = 2^2.3^3$

ƯCLN$(24,108) = 2^2.3 = 12$

$\Rightarrow a = 12$

Vậy có thể chia được nhiều nhất 12 tổ.

Bài 7. Khối lớp 6 có 84 học sinh, khối lớp 7 có 63 học sinh, khối lớp 8 có 105 học sinh. Trong một buổi chào cờ học sinh cả ba khối xếp thành các hàng dọc như nhau. Hỏi có thể xếp nhiều nhất thành bao nhiêu hàng dọc để mỗi khối đều không có ai lẻ hàng ?

Lời giải

Gọi số hàng dọc được xếp là a (hàng), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $84 \vdots a$, $63 \vdots a$, $105 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a =$ ƯCLN$(84,63,105)$

Ta có: $84 = 2^2.3.7$

$63 = 3^2.7$

$105 = 3.7.5$

ƯCLN$(84,63,105) = 3.7 = 21$

$\Rightarrow a = 21$

Vậy có thể xếp được nhiều nhất 21 hàng dọc.

Bài 8. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0 biết rằng $a \vdots 15$, $a \vdots 20$

Lời giải

Vì $a \vdots 15$, $a \vdots 20$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a =$ BCNN$(15, 20)$

Ta có: $15 = 3.5$

$20 = 2^2.5$

BCNN$(15,20) = 2^2.3.5 = 60$

$\Rightarrow a = 60$

Vậy $a = 60$

Bài 9. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0 biết rằng a chia hết cho 15 và a chia hết cho 18 .

Lời giải

Vì $a \vdots 15, a \vdots 18$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = \text{BCNN}(15, 20)$

Ta có: $15 = 3.5$

$18 = 3^2.2$

$\text{BCNN}(15, 20) = 2.3^2.5 = 90$

$\Rightarrow a = 90$

Vậy $a = 90$

Bài 10. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0 biết rằng a chia hết cho $15, 18$ và 25

Lời giải

Vì $a \vdots 15, a \vdots 18, a \vdots 25$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = \text{BCNN}(15, 20, 25)$

Ta có: $15 = 3.5$

$18 = 3^2.2$

$25 = 5^2$

$\text{BCNN}(15, 20, 25) = 2^2.3.5^2 = 300$

$\Rightarrow a = 300$

Vậy $a = 300$

Bài 11. Hai bạn Tùng và Hải thường đến thư viện đọc sách, Tùng cứ 8 ngày đến thư viện một lần, Hải 10 ngày một lần. Lần đầu cả hai bạn cùng đến thư viện vào 1 ngày. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày nữa thì hai bạn lại cùng đến thư viện?

Lời giải

Gọi số ngày ít nhất để hai bạn cùng đến thư viện là a (ngày), $a \in N^*$

Vì $a \vdots 8, a \vdots 10$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = \text{BCNN}(8, 10)$

Ta có: $8 = 2^3$

$10 = 2.5$

$\text{BCNN}(8, 10) = 2^3.5 = 40$

$\Rightarrow a = 40$

Vậy sau 40 ngày hai bạn lại cùng đến thư viện.

Bài 12. Hai bạn An và Bách cùng trực nhật, An cứ 10 ngày lại trực nhật còn Bách 12 ngày lại trực nhật. Lần đầu cả hai bạn cùng trực nhật vào 1 ngày. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày nữa thì hai bạn lại cùng trực nhật?

Lời giải

Gọi số ngày ít nhất để hai bạn cùng trực nhật là a (ngày), $a \in N^*$

Vì $a \vdots 10, a \vdots 12$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = \text{BCNN}(10, 12)$

Ta có: $10 = 2.5$

$12 = 2^2.3$

$\text{BCNN}(10,12) = 2^2.3.5 = 60$

$\Rightarrow a = 60$

Vậy sau 60 ngày hai bạn lại cùng trực nhật.

Bài 13. Hai bạn Minh và Nhâm cùng trực nhật, Minh cứ 12 ngày lại trực nhật còn Nhâm 18 ngày lại trực nhật. Lần đầu cả hai bạn cùng trực nhật vào 1 ngày. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày nữa thì hai bạn lại cùng trực nhật?

Lời giải

Gọi số ngày ít nhất để hai bạn cùng trực nhật là a (ngày), $a \in N^*$

Vì $a \vdots 12, a \vdots 18$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = \text{BCNN}(12, 18)$

Ta có: $12 = 2^2.3$

$18 = 2.3^2$

$\text{BCNN}(12,18) = 2^2.3^2 = 36$

$\Rightarrow a = 36$

Vậy sau 36 ngày hai bạn lại cùng trực nhật.

Bài 14. Ba con tàu cập bến theo cách sau: Tàu I cứ 15 ngày cập bến một lần, tàu II cứ 20 ngày cập bến một lần, tàu III cứ 12 ngày cập bến một lần. Lần đầu cả ba tàu cùng cập bến vào một ngày. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày cả ba tàu lại cùng cập bến ?

Lời giải

Gọi số ngày ít nhất để ba tàu lại cùng cập bến là a (ngày), $a \in N^*$

Vì $a \vdots 15$, $a \vdots 20$, $a \vdots 12$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = \text{BCNN}(15,20,12)$

Ta có: $15 = 3.5$

$20 = 2^2.5$

$12 = 2^2.3$

$\text{BCNN}(15,20,12) = 2^2.3.5 = 60$

$\Rightarrow a = 60$

Vậy sau 60 ngày ba tàu lại cùng cập bến.

Bài 15. : Ba ô tô chở khách cùng khởi hành lúc $6h$ sáng từ 1 bến xe đi theo ba hướng khác nhau, xe thứ nhất quay về bến sau $1h5$ phút và sau 10 phút lại đi, xe thứ hai quay về bến sau 56 phút và lại đi sau 4 phút, xe thứ ba quay về bến sau 48 phút và sau 2 phút lại đi, hãy tính khoảng thời gian ngắn nhất để 3 xe cùng xuất phát lần thứ hai trong ngày và đó là lúc mấy giờ?

Lời giải.

Đổi $1h5$ phút = 65 phút

Gọi thời gian ngắn nhất để ba xe cùng xuất lần thứ 2 trong ngày là a (phút), $a \in N^*$

Thời gian xe thứ nhất đi chuyến thứ 2 là $65 + 10 = 75$ (phút)

Thời gian xe thứ hai đi chuyến thứ 2 là $56 + 4 = 60$ (phút)

Thời gian xe thứ ba đi chuyến thứ 2 là $48 + 2 = 50$ (phút)

Vì $a \vdots 75$, $a \vdots 60$, $a \vdots 50$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = \text{BCNN}(75,60,50)$

Ta có:

$75 = 3.5^2$ $60 = 2^2.3.5$

$50 = 2.5^2$

$\text{BCNN}(75,60,50) = 2^2.3.5^2 = 300$

$\Rightarrow a = 300$ (phút) $= 5$ (giờ)

Vậy sau 5 giờ thì ba xe lại cùng xuất phát lần thứ 2 . Lúc đó là $11h$ trưa.

Dạng 2. Bài toán đưa về tìm BCNN của hai hay nhiều số thỏa mãn điều kiện cho trước.

I. Phương pháp giải.

– Phân tích đề bài, suy luận để đưa về việc tìm bội chung của hai hay nhiều số cho trước.

Nếu $x \vdots a, x \vdots b \Rightarrow x \in \mathrm{BCNN}(a,b)$

Nếu x chia cho a dư n, x chia cho b dư $n \Rightarrow x-n \in \mathrm{BCNN}(a,b)$

– Tìm BCNN của các số đó.

– Tìm BC của các số là các bội của BCNN này .

– Chọn trong số đó các bội thỏa mãn điều kiện đã cho.

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm số tự nhiên x biết rằng $x \vdots 12, x \vdots 21, x \vdots 28$ và $150 < x < 200$

Lời giải

Vì $x \vdots 12, x \vdots 21, x \vdots 28$ nên $x \in \mathrm{BC}(12,21,28)$

Ta có: $12 = 2^2.3$

$21 = 3.7$

$28 = 2^2.7$

$\mathrm{BCNN}(12,21,28) = 2^2.3.7 = 84$

$\mathrm{BC}(12,21,28) = \mathrm{B}(84) = \{0;84;168;252;336;...\}$

Vì $150 < x < 200$ nên $x = 168$

Vậy $x = 168$

Bài 2. Tìm số tự nhiên x biết rằng $x \vdots 12, x \vdots 20, x \vdots 25$ và $0 < x < 450$

Lời giải

Vì $x \vdots 12, x \vdots 20, x \vdots 25$ nên $x \in \mathrm{BC}(12,20,25)$

Ta có: $12 = 2^2.3$

$20 = 2^2.5$

$25 = 5^2$

$\mathrm{BCNN}(12,20,25) = 2^2.3.5^2 = 300$

$\mathrm{BC}(12,20,25) = \mathrm{B}(300) = \{0;\ 300;\ 600;\ 900;...\}$

Vì $0 < x < 450$ nên $x = 300$

Vậy $x = 300$

Bài 3. Một số sách khi xếp thành từng bó 10 cuốn, 12 cuốn, 18 cuốn đều vừa đủ. Tính số sách đó biết số sách trong khoảng 200 đến 500.

Lời giải

Gọi số sách cần tìm là x (cuốn) , $200 \le x \le 500$, $x \in N^*$

Vì số sách khi xếp thành từng bó 10 cuốn, 12 cuốn, 18 cuốn đều vừa đủ nên $x \vdots 10, x \vdots 12, x \vdots 18$

$\Rightarrow x \in \text{BC}(10,12,18)$

Ta có: $10 = 2.5$

$12 = 2^2.3$

$18 = 2.3^2$

$\text{BCNN}(10,12,18) = 2^2.3^2.5 = 180$

$\text{BC}(10,12,18) = \text{B}(180) = \{0;\ 180;\ 360;\ 540;\ ...\}$

Vì $200 \le x \le 500$ nên $x = 360$

Vậy số sách cần tìm là 360 cuốn.

Bài 4. Một trường tổ chức cho khoảng 800 đến 900 học sinh đi tham quan. Tính số học sinh biết nếu xếp 35 hoặc 40 học sinh lên xe thì vừa đủ.

Lời giải

Gọi số học sinh cần tìm là x (học sinh) , $800 \le x \le 900$, $x \in N^*$

Vì xếp 35 hoặc 40 học sinh lên xe thì vừa đủ nên $x \vdots 35, x \vdots 40$

$\Rightarrow x \in \text{BC}(35,40)$

Ta có: $35 = 5.7$

$40 = 2^3.5$

$\text{BCNN}(35,40) = 2^3.5.7 = 280$

$\text{BC}(35,40) = \text{B}(280) = \{0;\ 280;\ 560;\ 840;1120;...\}$

Vì $800 \le x \le 900$ nên $x = 840$

Vậy trường đó có 840 học sinh.

Bài 5. Một trường tổ chức cho khoảng 700 đến 800 học sinh đi tham quan. Tính số học sinh biết nếu xếp 40 người hoặc 45 người lên xe ô tô thì vừa đủ.

Lời giải

Gọi số học sinh của trường là: $n\left(n \in N^*\right)$

Theo bài ta có: $700 \le n \le 800$

Vì $n \vdots 45; n \vdots 40 \Rightarrow n \in BC(40,45) \Rightarrow n \in B(BCNN(40,45))$

Ta có: $40 = 2^3.5$

$45 = 3^2.5$

$BCNN(40,45) = 2^3.3^2.5 = 360 \Rightarrow \begin{cases} n \in B(360) \\ 700 \le n \le 800 \end{cases} \Rightarrow n = 700$

Vậy số học sinh của trường đó là 700

Bài 6. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số chia cho $18;30;45$ có số dư lần lượt $8;20;35$.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$, $100 \le x \le 999$

Vì x chia cho $18;30;45$ có số dư lần lượt $8;20;35$ nên $x+10 \vdots 18,30,45$

$\Rightarrow x+10 \in BC(18,30,45)$

Ta có: $18 = 2.3^2$

$30 = 2.3.5$

$45 = 3^2.5$

$\text{BCNN}(18,30,45) = 2.3^2.5 = 90$

$\text{BC}(18,30,45) = \text{B}(90) = \{0;\ 90;\ 180;\ 270;360;450;540;630;720;810;900;990;1080;...\}$

Vì $100 \le x \le 999$ nên $110 \le x+10 \le 1009$ và x nhỏ nhất

$\Rightarrow x+10 = 180$

$x = 170$

Vậy số cần tìm là 170

Bài 7. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, sao cho chia nó cho $17;25$ có số dư lần lượt 8 và 16.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$, $100 \le x \le 999$

Vì x chia cho $17;25$ có số dư lần lượt 8 và 16 nên $x+9 \vdots 17,\ 25$

$\Rightarrow x+9 \in BC(17,25)$

$\text{BCNN}(17,25) = 17.25 = 425$

$\text{BC}(17,25)=\text{B}\left(425\right)=\left\{0;\ 425;\ 850;\ 1275;...\right\}$

Vì $100\le x\le 999$ nên $109\le x+9\le 1008$

$\Rightarrow x+9\in\left\{425;850\right\}$

$\Rightarrow x\in\left\{416;841\right\}$

Vậy số cần tìm là 416 hoặc 841.

Bài 8. Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia cho 8 thì dư 7, chia cho 31 thì dư 28 .

Lời giải

Vì n chia cho 8 thì dư 7, chia cho 31 thì dư 28 nên

$\begin{cases} n=8k+7 \\ n=31m+28 \end{cases}$ với $k,m\in N$

$\Rightarrow\begin{cases} n+65=8k+72\,\vdots\,8 \\ n+65=31m+93\,\vdots\,31 \end{cases}$

$\text{BCNN}(8,31)=8.31=248$

$\text{BC}(8,31)=\text{B}\left(248\right)=\left\{0;\ 248;\ 496;\ 744;992;1240;...\right\}$

Vì n là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên $n+65=992$

$\Rightarrow n=927$

Vậy $n=927$

Bài 9. Tìm số tự nhiên nhỏ hơn 500, sao cho chia nó cho 15; cho 35 có số dư lần lượt 8 và 13.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x\in N$, $x<500$

Vì x chia cho 15; 35 có số dư lần lượt 8 và 13 nên

$\begin{cases} x=15k+8 \\ x=35m+13 \end{cases}$ với $k,m\in N$

$\Rightarrow\begin{cases} x+232=15k+240\,\vdots\,15 \\ x+232=35m+245\,\vdots\,35 \end{cases}$

$\Rightarrow x+232\in BC\left(15;35\right)$

Ta có: $15=3.5$

$35=5.7$

$\text{BCNN}(15,35)=3.5.7=105$

$\text{BC}(15,35)=\text{B}(105)=\{0;\ 105;210;315;420;525;630;735;...\}$

Vì $0<x<500$ nên $232<x+232<732$

$\Rightarrow x+232\in\{315;420;525;630\}$

$\Rightarrow x\in\{83;188;293;398\}$

Vậy $x\in\{83;188;293;398\}$

Bài 10. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 12, cho 18, cho 23 có số dư theo thứ tự là $11,17,9$.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là: a ($a\in N$)

Theo bài ta có: $a=12k+11=18q+17=2.3.p+9\ (k,p,q\in N)$

$\Rightarrow a+37=12k+48\vdots 12;a+37=18q+54\vdots 18;a+37=23p+46\vdots 23\Rightarrow a+37\in BC(12,18,23)$

Vì a nhỏ nhất

$\Rightarrow a+37=BCNN(12,18,23);12=2^2.3;18=2.3^2;23=23\Rightarrow BCNN(12,18,23)=2^2.3^2.23=828$

$\Rightarrow a=828-37=791$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 791

Bài 11. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 5, cho 7, cho 9 có số dư theo thứ tự là $3,4,5$.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x\in N$

Vì x chia cho 5, cho 7, cho 9 có số dư theo thứ tự là $3,4,5$ nên

$$\begin{cases}x=5k+3\\x=7m+4\ \text{ với } k,m,n\in N\\x=9n+5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=10k+6\\2x=14m+8\\2x=18n+10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-1=10k+5\vdots 5\\2x-1=14m+7\vdots 7\\2x-1=18n+9\vdots 9\end{cases}$$

$\Rightarrow 2x-1\in\text{BC}(5,7,9)$ mà x nhỏ nhất $\Rightarrow 2x-1\in\text{BCNN}(5,7,9)$

$\text{BCNN}(5,7,9)=5.7.9=315$

$\Rightarrow 2x-1=315$

$2x = 316$

$x = 158$

Vậy $x = 158$

Bài 12. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 8 dư 6, chia cho 12 dư 10, chia cho 15 dư 13 và chia hết cho 23.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$

Vì x chia cho 8 dư 6, chia cho 12 dư 10, chia cho 15 dư 13

nên $x+2 \vdots 8, x+2 \vdots 12, x+2 \vdots 15$

$\Rightarrow x+2 \in \text{BC}(8,12,15)$

Ta có: $8 = 2^3$

$12 = 2^2.3$

$15 = 3.5$

$\text{BCNN}(8,12,15) = 2^3.3.5 = 120$

$\text{BC}(8,12,15) = \text{BC}(120) = \{0;120;240;360;480;600;\ ...\}$

$\Rightarrow x+2 \in \{120;240;360;480;600;...\}$

$\Rightarrow x \in \{118;238;358;478;598;...\}$

Vì x nhỏ nhất, x chia hết cho 23 nên $x = 598$.

Vậy $x = 598$

Bài 13. Một đội thiếu niên khi xếp hàng $2,3,4,5$ đều thừa 1 người, Tính số đội viên biết số đó nằm trong khoảng 100 đến 150?

Lời giải

Gọi số đội viên cần tìm là x (đội viên) , $100 \le x \le 150$, $x \in N^*$

Đội thiếu niên khi xếp hàng $2,3,4,5$ đều thừa 1 người nên x chia cho $2,3,4,5$ đều dư 1

$\Rightarrow x-1 \vdots 2, x-1 \vdots 3, x-1 \vdots 4, x-1 \vdots 5$

$\Rightarrow x-1 \in BC(2,3,4,5)$

$\text{BCNN}(2,3,4,5) = 2^2.3.5 = 60$

$BC(2,3,4,5) = B(60) = \{0;\ 60;\ 120;\ 180;\ ...\}$

Vì $100 \le x \le 150$ nên $x = 120$

Vậy số đội viên là 120 đội viên

Bài 14. Số học sinh khối 6 của một trường THCS trong khoảng từ 200 đến 400, khi xếp hàng $12, 15$ và 18 đều thừa 5 học sinh. Tính số học sinh của trường đó.

Lời giải

Gọi số học sinh của trường đó là x (học sinh), $200 \le x \le 400$, $x \in N^*$

Khi xếp hàng $12, 15, 18$ đều thừa 5 học sinh nên x chia cho $12, 15, 18$ đều dư 5

$\Rightarrow x - 5 \vdots 12, x - 5 \vdots 15, x - 5 \vdots 18$

$\Rightarrow x - 5 \in BC(12,15,18)$

Ta có:

$12 = 2^2.3$

$15 = 3.5$

$18 = 2.3^2$

$BCNN(12,15,18) = 2^2.3^2.5 = 180$

$BC(12,15,18) = B(180) = \{0;\ 180;\ 360;\ 540;\ ...\}$

Vì $200 \le x \le 400$ nên $x = 360$

Vậy số học sinh của trường đó là 360 học sinh.

Bài 15. Một trường học có số lượng học sinh không quá 1000. Khi xếp hàng $20, 25, 30$ thì đều dư 15. Nhưng khi xếp hàng 41 thì vừa đủ. Tính số học sinh của trường đó.

Lời giải

Gọi số học sinh của trường đó là: n ($n \in N^*$)

Theo bài ra ta có: $n \le 1000$

Lại có: $n - 15 \vdots 20, 25, 30;\ n \vdots 41$

$n - 15 \in BC(20,25,30) \in B(BCNN(20,25,30) = 300 \Rightarrow n - 15 \in B(300)$

Mà $n - 15 \le 1000 - 15 = 985 \Rightarrow n - 15 \in \{300, 600, 900\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \in \{315, 615, 915\} \\ n \vdots 41 \end{cases} \Rightarrow n = 615$$

Vậy số học sinh của trường là 615 học sinh.

Bài 16. Một buổi tập đồng diễn thể dục có khoảng từ 350 đến 500 người tham gia. Khi tổng chỉ huy cho xếp $5,6,8$ hàng thì thấy lẻ 1 người, Khi cho đoàn xếp hàng 13 thì vừa vặn không thừa người nào. Hỏi số người tham gia tập đồng diễn là bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi số người tham gia tập đồng diễn là x (người), $350 \le x \le 500$, $x \in N^*$

Khi tổng chỉ huy cho xếp $5,6,8$ hàng thì thấy lẻ 1 người

$\Rightarrow x-1 \vdots 5, x-1 \vdots 6, x-1 \vdots 8$

$\Rightarrow x-1 \in \text{BC}(5,6,8)$

Ta có: $5=5$

$6=2.3$

$8=2^3$

$\text{BCNN}(5,6,8)=2^3.3.5=120$

$\text{BC}(5,6,8)=\text{BC}(120)=\{0;120;240;360;480;600;\ ...\}$

$\Rightarrow x-1 \in \{0;120;240;360;480;600;...\}$

$\Rightarrow x \in \{1;121;241;361;481;...\}$

Vì $350 \le x \le 500$ và x chia hết cho 13 nên $x=481$

Vậy số người tham gia đồng diễn là 481 người

Bài 17. Một khối học sinh khi xếp hàng $2,3,4,5,6$ đều thiếu 1 người nhưng xếp hàng 7 thì vừa đủ, biết số học sinh chưa đến 300. Tính số học sinh của khối đó ?

Lời giải

Gọi số học sinh cần tìm là x (học sinh), $x<300$, $x \in N^*$

Một khối học sinh khi xếp hàng $2,3,4,5,6$ đều thiếu 1 người nên

$\Rightarrow x+1 \vdots 2, x+1 \vdots 3, x+1 \vdots 4, x+1 \vdots 5, x+1 \vdots 6$

$\Rightarrow x+1 \in \text{BC}(2;3;4;5,6)$

$\text{BCNN}(2,3,4,5,6)=2^2.3.5=60$

$\text{BC}(2,3,4,5,6)=\text{B}(60)=\{0;\ 60;\ 120;\ 180;240;300;...\}$

$\Rightarrow x+1 \in \{60;\ 120;\ 180;240;300;...\}$

$\Rightarrow x \in \{59;\ 119;\ 179;239;299;...\}$

Khối học sinh xếp hàng 7 thì vừa đủ nên x chia hết cho 7 và $x<300$ nên $x=119$

Vậy số học sinh của khối đó là 119

Bài 18. Số học sinh tham gia nghi thức đội là một số có ba chữ số lớn hơn 800. Nếu xếp hàng 20 thì dư 9 em, nếu xếp hàng 30 thì thiếu 21 em và xếp hàng 35 thì thiếu 26 em. Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh tham gia?

Lời giải

Gọi số học sinh tham gia nghi thức đội là x (học sinh), $x \in N^*$, $800<x<999$

Nếu xếp hàng 20 thì dư 9 em, nếu xếp hàng 30 thì thiếu 21 em và xếp hàng 35 thì thiếu 26 em nên

$$\begin{cases} x-9 \vdots 20 \\ x+21 \vdots 30 \\ x+26 \vdots 35 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=20k+9 \\ x=30m-21 \text{ với } k,m,n \in N \\ x=35n-26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-9=20k \vdots 20 \\ x-9=30m-30 \vdots 30 \\ x-9=35n-35 \vdots 35 \end{cases}$$

$\Rightarrow x-9 \in \text{BC}(20,30,35)$

Ta có: $20=2^2.5$

$30=2.3.5$

$35=5.7$

$\text{BCNN}(20,30,35)=2^2.3.5.7=420$

$\text{BC}(20,30,35)=\text{BC}(420)=\{0;420;840;1260;\ ...\}$

$\Rightarrow x-9 \in \{0;420;840;1260;\ ...\}$

$\Rightarrow x \in \{9;429;849;1269;\ ...\}$

Vì $800<x<999$ nên $\text{x}=849$

Vậy số học sinh tham gia nghi thức đội là 849 em

Bài 19. Người ta đếm số trứng trong một rổ. Nếu đếm theo từng chục cũng như theo tá hoặc theo từng 15 quả thì lần nào cũng dư 1 quả. Tính số trứng trong rổ, biết rằng số trứng đó lớn hơn 150 và nhỏ hơn 200 quả.

Lời giải

Gọi số trứng trong rổ là n ($n \in N^*$)

Ta có: $150 < n < 200\,(1); (n-1) \vdots 10,12,15$

$\Rightarrow n-1 \in BC(10,12,15) \Rightarrow n-1 \in B(60)$

Theo (1) $\Rightarrow 149 < n-1 < 199 \Rightarrow n-1 = 180 \Rightarrow n = 181$

Vậy số trứng trong rổ là 181 quả

Bài 20. Một người bán năm giỏ xoài và cam. Mỗi giỏ chỉ đựng một loại quả với số lượng là: 65 kg; 71 kg; 58 kg; 72 kg; 93 kg. Sau khi bán một giỏ cam thì số lượng xoài còn lại gấp ba lần số lượng cam còn lại. Hãy cho biết giỏ nào đựng cam, giỏ nào đựng xoài ?

Lời giải

Tổng số xoài và cam lúc đầu: $65+71+58+72+93 = 359\,(kg)$

Vì số xoài còn lại gấp ba lần số cam còn lại nên tổng số xoài và cam còn lại là số chia hết cho 4, mà 359 chia cho 4 dư 3 nên giỏ cam bán đi có khối lượng chia cho 4 dư 3.

Trong các số $65; 71; 58; 72; 93$ chỉ có 71 chia cho 4 dư 3.

Vậy giỏ cam bán đi là giỏ 71 kg.

Số xoài và cam còn lại: $359 - 71 = 288\,(kg)$

Số cam còn lại: $288 : 4 = 72\,(kg)$

Vậy: các giỏ cam là giỏ đựng 71 kg ; 72 kg .

Các giỏ xoài là giỏ đựng 65 kg; 58 kg; 93 kg.

Bài 21. Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số đó là a

Vì a chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4 $\Rightarrow a+9 \vdots 7; a+9 \vdots 13$

mà ƯCLN(7, 13) = 1 nên $\Rightarrow a+9 \vdots 7.13 = 91$

$\Rightarrow a+9=91k \Rightarrow a=91k-9=91k-91+82=91(k-1)+82 (k \in N)$

Vậy a chia cho 91 dư 82 .

Bài 22. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a $(a \in N, a > 3)$

Khi chia a cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2

$\Rightarrow a-2 \in BC(3;4;5;6)=\{60;120;180;240;....\}$

Nên a nhận các giá trị 62;122;182;242;...

Mặt khác a là số nhỏ nhất chia cho 7 thì dư 3 tức là $(a-3)$ là số nhỏ nhất chia hết cho 7

$\Rightarrow a=122$ (vì $a=62$ thì $62-3=59$ không chia hết cho 7).

Vậy số cần tìm là 122.

Bài 23. Hai lớp 6A; 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Lớp 6A có 1 bạn thu được 26 kg còn lại mỗi bạn thu được 11 kg. Lớp 6B có 1 bạn thu được 25 kg còn lại mỗi bạn thu được 10 kg. Tính số học sinh mỗi lớp biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng 200 kg đến 300 kg.

Lời giải

Gọi số giấy mỗi lớp thu được là $x(kg) \Rightarrow (x-26) \vdots 11$ và $(x-25) \vdots 10$

Do đó $(x-15) \in BC(10;11)$ và $200 < x < 300 \Rightarrow x-15=220 \Rightarrow x=235$

Số học sinh lớp 6A là: $(235-26):11+1=20$ (học sinh)

Số học sinh lớp 6B là: $(235-25):10+1=22$ (học sinh)

Vậy lớp 6A có 20 học sinh

Lớp 6B có 22 học sinh.

Bài 24. Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10;12;15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Lời giải

Gọi số học sinh là $a (a \in N^*)$

Vì số học sinh khi xếp hàng 10;12;15 đều dư 3 $\Rightarrow a-3 \in BC(10;12;15)$

Mà $BCNN(10;12;15)=60 \Rightarrow a-3=60k\left(k\in N^*\right) \Rightarrow a=60k+3$

Ta có bảng sau:

k	1	2	3	4	5	6	7
a	63	123	183	243	303	363	423

Vì số học sinh chưa đến 400 bạn và khi xếp hàng 11 thì không dư nên $a<400$ và $a \vdots 11$

Trong các giá trị trên, chỉ có $a=363$ thỏa mãn bài toán

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Dạng 3. Bài toán đưa về tìm ƯCLN của hai hay nhiều số thỏa mãn điều kiện cho trước.

I. Phương pháp giải.

– Phân tích đề bài, suy luận để đưa về việc tìm ước chung của hai hay nhiều số cho trước.

Nếu $a \vdots x, b \vdots x \Rightarrow x \in$ ƯC(a,b)

Nếu a chia x cho dư n, b chia cho x dư $m \Rightarrow \begin{cases} a-n \vdots x \\ b-m \vdots x \end{cases} \Rightarrow x \in$ ƯC$(a-n, b-m)$

– Tìm ƯCLN của các số đó.

– Tìm ƯC của các số là các ước của ƯCLN này .

– Chọn trong số đó các ước thỏa mãn điều kiện đã cho.

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 24 cho a thì dư 3 và khi chia 38 cho a cũng dư 3

Lời giải

Vì chia 24 cho a thì dư 3 và khi chia 38 cho a cũng dư 3 nên

$24-3 \vdots a$ và $a>3$

$38-3 \vdots a$ và $a>3$

$\Rightarrow \begin{cases} 21 \vdots a \\ 35 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in$ ƯC$(21,35)$

Ta có : $21=3.7$

$35=5.7$

ƯCLN$(21,35)=7$

ƯC$(21,35)=$ Ư$(7)=\{1;7\}$

$\Rightarrow a \in \{1;7\}$

Vì $a > 3$ nên $a = 7$

Vậy $a = 7$

Bài 2. Tìm số tự nhiên a biết rằng 156 chia a dư 12 và 280 chia a dư 10.

Lời giải

Vì 156 chia a dư 12 và 280 chia a dư 10 nên

$156 - 12 \vdots a$ và $a > 12$

$280 - 10 \vdots a$ và $a > 10$

$$\Rightarrow \begin{cases} 144 \vdots a \\ 270 \vdots a \end{cases}$$

$\Rightarrow a \in$ ƯC$(144, 270)$

Ta có : $144 = 2^4.3^2$

$270 = 2.3^3.5$

ƯCLN$(144, 270) = 2.3^2 = 18$

ƯC$(144, 270) =$ Ư$(18) = \{1;2;3;6;9;18\}$

$\Rightarrow a \in \{1;2;3;6;9;18\}$

Vì $a > 12$ nên $a = 18$

Vậy $a = 18$

Bài 3. Tìm số tự nhiên n biết 288 chia n dư 38 và 414 chia n dư 14.

Lời giải

Vì 288 chia n dư 38 và 414 chia n dư 14 nên

$288 - 38 \vdots n$ và $n > 38$

$414 - 14 \vdots n$ và $n > 14$

$$\Rightarrow \begin{cases} 250 \vdots n \\ 400 \vdots n \end{cases}$$

$\Rightarrow n \in$ ƯC$(250, 400)$

Ta có : $250 = 2.5^3$

$400 = 2^4.5^2$

$\text{ƯCLN}(250,400) = 2.5^2 = 50$

$\text{ƯC}(250,400) = \text{Ư}(50) = \{1;2;5;10;25;50\}$

$\Rightarrow n \in \{1;2;5;10;25;50\}$

Vì $n > 38$ nên $n = 50$

Vậy $n = 50$

Bài 4. Tìm số tự nhiên b lớn nhất biết rằng chia 326 cho b thì dư 11, còn chia 553 cho b thì dư 13.

Lời giải

Vì chia 326 cho b thì dư 11, còn chia 553 cho b thì dư 13 nên

$326 - 11 \vdots b$ và $b > 11$

$553 - 13 \vdots b$ và $b > 13$

$\Rightarrow \begin{cases} 315 \vdots b \\ 540 \vdots b \end{cases}$

$\Rightarrow b \in \text{ƯC}(315,540)$

Ta có : $315 = 3^2.5.7$

$540 = 2^2.3^3.5$

$\text{ƯCLN}(315,540) = 3^2.5 = 45$

$\text{ƯC}(315,540) = \text{Ư}(45) = \{1;\ 3;\ 5;\ 9;\ 15;45\}$

Vì $b > 13$, b lớn nhất nên $b = 45$

Vậy $b = 45$

Bài 5. Tìm số tự nhiên a biết rằng 398 chia a dư 38, 450 chia a dư 18.

Lời giải

Vì 398 chia a dư 38, 450 chia a dư 18 nên

$398 - 38 \vdots a$ và $a > 38$

$450 - 18 \vdots a$ và $a > 18$

$\Rightarrow \begin{cases} 360 \vdots a \\ 432 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \text{ƯC}(360,432)$

Ta có : $360 = 2^3.3^2.5$

$432 = 2^4.3^3$

$ƯCLN(360,432) = 2^3.3^2 = 72$

$ƯC(360,432) = Ư(72) = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 18;\ 24; 36; 72\}$

Vì $a > 38$ nên $a = 72$

Vậy $a = 72$

Bài 6. Tìm số tự nhiên a biết rằng 350 chia a dư 14 và 320 chia a dư 26.

Lời giải

Vì 350 chia a dư 14 và 320 chia a dư 26 nên

$350 - 14 \vdots a$ và $a > 14$

$320 - 26 \vdots a$ và $a > 26$

$\Rightarrow \begin{cases} 336 \vdots a \\ 294 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in ƯC(336,294)$

Ta có : $336 = 2^4.3.7$

$294 = 2.3.7^2$

$ƯCLN(336,294) = 2.3.7 = 42$

$ƯC(336,294) = Ư(42) = \{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 14;\ 21;\ 42\}$

Vì $a > 26$ nên $a = 42$

Vậy $a = 42$

Bài 7. Tìm số tự nhiên a biết rằng 264 chia a dư 24 và 363 chia a dư 43.

Lời giải

Vì 264 chia a dư 24 và 363 chia a dư 43 nên

$264 - 24 \vdots a$ và $a > 24$

$363 - 43 \vdots a$ và $a > 43$

$\Rightarrow \begin{cases} 240 \vdots a \\ 320 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in ƯC(240,320)$

Ta có : $240 = 2^4.3.5$

$320 = 2^6.5$

$\text{ƯCLN}(240,320) = 2^4.5 = 80$

$\text{ƯC}(240,320) = \text{Ư}(80) = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8;\ 10;\ 16;\ 20; 40; 80\}$

Vì $a > 43$ nên $a = 80$

Vậy $a = 80$

Bài 8. Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 111 cho a thì dư 15 còn khi chia 180 cho a thì dư 20.

Lời giải

Vì chia 111 cho a thì dư 15 còn khi chia 180 cho a thì dư 20 nên

$111 - 15 \vdots a$ và $a > 15$

$180 - 20 \vdots a$ và $a > 20$

$\Rightarrow \begin{cases} 96 \vdots a \\ 160 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \text{ƯC}(96,160)$

Ta có : $96 = 2^5.3$

$160 = 2^5.5$

$\text{ƯCLN}(96,160) = 2^5 = 32$

$\text{ƯC}(96,160) = \text{Ư}(32) = \{1;\ 2;\ 4;\ 8; 16;\ 32\}$

Vì $a > 20$ nên $a = 32$

Vậy $a = 32$

Bài 9. Nếu ta chia 2 số 3972 và 170 cho cùng một số thì sẽ được số dư tương ứng là 4 và 42. Hỏi số chia là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số chia cần tìm là a

Vì 3972 chia a dư 4 và 170 chia a dư 42 nên

$3972 - 4 \vdots a$ và $a > 4$

$170 - 42 \vdots a$ và $a > 42$

$\Rightarrow \begin{cases} 3968 \vdots a \\ 128 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in ƯC(3968,128)$

$ƯCLN(3968,128) = 128$

$ƯC(3968,128) = Ư(128) = \{1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ 64; 128\}$

Vì $a > 42$ nên $a \in \{64;\ 128\}$

Vậy $a \in \{64;\ 128\}$

Bài 10. Tìm số tự nhiên a biết rằng 398 chia a thì dư 38 còn 522 chia cho a thì dư 18.

Lời giải

Vì 398 chia a dư 38 và 522 chia a dư 18 nên

$398 - 38 \vdots a$ và $a > 38$

$522 - 18 \vdots a$ và $a > 18$

$\Rightarrow \begin{cases} 360 \vdots a \\ 504 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in ƯC(360, 504)$

Ta có : $360 = 2^3.3^2.5$

$504 = 2^3.3^2.7$

$ƯCLN(360, 504) = 2^3.3^2 = 72$

$ƯC(360, 504) = Ư(72) = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 18;\ 24; 36; 72\}$

Vì $a > 38$ nên $a = 72$

Vậy $a = 72$

Bài 11. Tìm số tự nhiên n biết rằng khi chia 147 và 193 cho n thì có số dư lần lượt là 17 và 11.

Lời giải

Vì 147 chia n dư 17 và 193 chia n dư 11 nên

$147 - 17 \vdots n$ và $n > 17$

$193 - 11 \vdots n$ và $n > 11$

$\Rightarrow \begin{cases} 130 \vdots n \\ 182 \vdots n \end{cases}$

$\Rightarrow n \in ƯC(130,182)$

Ta có : $130 = 2.5.13$

$182 = 2.7.13$

$ƯCLN(130,182) = 2.13 = 26$

$ƯC(130,182) = Ư(26) = \{1;2;13;26\}$

Vì $n > 17$ nên $n = 26$

Vậy $n = 26$

Bài 12. Tìm số tự nhiên a biết rằng 351 chia cho a dư 15 còn 321 chia cho a dư 27.

Lời giải

Vì 351 chia a dư 15 và 321 chia a dư 27 nên

$351 - 15 \vdots a$ và $a > 15$

$321 - 27 \vdots a$ và $a > 27$

$\Rightarrow \begin{cases} 336 \vdots a \\ 294 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in ƯC(336,294)$

Ta có : $336 = 2^4.3.7$

$294 = 2.3.7^2$

$ƯCLN(336,294) = 2.3.7 = 42$

$ƯC(336,294) = Ư(42) = \{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 14;\ 21;\ 42\}$

Vì $a > 27$ nên $a = 42$

Vậy $a = 42$

Bài 13. Tìm số tự nhiên b biết rằng chia 327 cho b thì dư 12 còn chia 557 cho b thì dư 17.

Lời giải

Vì chia 327 cho b thì dư 12 còn chia 557 cho b thì dư 17 nên

$327 - 12 \vdots b$ và $b > 12$

$557 - 17 \vdots b$ và $b > 17$

$\Rightarrow \begin{cases} 315 \vdots b \\ 540 \vdots b \end{cases}$

$\Rightarrow b \in \text{ƯC}(315, 540)$

Ta có : $315 = 3^2.5.7$

$540 = 2^2.3^3.5$

$\text{ƯCLN}(315, 540) = 3^2.5 = 45$

$\text{ƯC}(315, 540) = \text{Ư}(45) = \{1;\ 3;\ 5;\ 9;\ 15; 45\}$

Vì $b > 17$ nên $b = 45$

Vậy $b = 45$

Bài 14. Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho khi chia $364, 414, 539$ cho n ta được 3 số dư bằng nhau

Lời giải

Vì ba số $364, 414, 539$ chia n có cùng số dư nên hiệu 2 số chia hết cho n

$\Rightarrow \begin{cases} 414 - 364 \vdots n \\ 539 - 364 \vdots n \\ 539 - 414 \vdots n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 \vdots n \\ 175 \vdots n \\ 125 \vdots n \end{cases}$ mà n lớn nhất $\Rightarrow n \in ƯCLN(50, 175, 125)$

Ta có : $50 = 2.5^2$

$175 = 5^2.7$

$125 = 5^3$

$ƯCLN(50, 175, 125) = 5^2 = 25$

$\Rightarrow n = 25$

Vậy $n = 25$

Bài 15. Tìm số tự nhiên a biết $1960, 2002$ chia a có cùng số dư là 28.

Lời giải

Vì 1960 chia a dư 28 và 2002 chia a dư 28 nên

$1960 - 28 \vdots a$ và $a > 28$

$2002 - 28 \vdots a$ và $a > 28$

$\Rightarrow \begin{cases} 1932 \vdots a \\ 1974 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in ƯC(1932, 1974)$

Ta có : $1932 = 2^2.3.7.23$

$1974 = 2.3.7.47$

ƯCLN$(1932,1974) = 2.3.7 = 42$

ƯC$(1932,1974) =$ Ư$(42) = \{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 14;\ 21;\ 42\}$

Vì $a > 28$ nên $a = 42$

Vậy $a = 42$

Bài 16. Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số đã cho là A. Theo bài ra ta có: $A = 7a + 3 = 17b + 12 = 23c + 7$

Mặt khác: $A + 39 = 7a + 3 + 39 = 17b + 12 + 39 = 23c + 7 + 39 = 7(a+6) = 17(b+3) = 23(c+2)$

Như vậy $A + 39$ đồng thời chia hết cho 7, 17 và 23.

Nhưng ƯCLN(7, 17, 23) = 1 $\Rightarrow (A+39) \vdots 7.17.23 \Rightarrow (A+39) \vdots 2737 \Rightarrow A + 39 = 2737.k$

$\Rightarrow A = 2737k - 39 = 2737(k-1) + 2698$

Do $2698 < 2737$ nên 2698 là số dư của phép chia số A cho 2737

Bài 17. Cho a, b là các số tự nhiên khác 0 sao cho $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ là số tự nhiên. Gọi d là ƯCLN của a, b

Chứng minh rằng: $a + b \geq d^2$

Lời giải

Ta có :

$d = (a,b) \Rightarrow \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases}$ với $(m,n) = 1$

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab} \in N \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + a + b \vdots ab \\ ab = d^2.m.n \vdots d^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + a + b \vdots d^2$$

$$\left.\begin{matrix} a^2 = d^2m^2 \vdots d^2 \\ b^2 = d^2n^2 \vdots d^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + b \vdots d^2 \Rightarrow a + b \geq d^2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11 *(HSG huyện Quế Võ – Năm 2020 – 2021)*

Lời giải

Theo đề bài số cần tìm là n $(n \in \mathbb{N})$, theo đề ra ta có:

$n:11$ dư 6 $\Rightarrow n-6 \vdots 11 \Rightarrow n-6+33=n+27$ chia hết cho 11 (Do $33 \vdots 11$)

$n:4$ dư 1 $\Rightarrow n-1 \vdots 4 \Rightarrow n-1+28=n+27$ chia hết cho 4 (Do $28 \vdots 4$)

$n:19$ dư 11 $\Rightarrow n-11 \vdots 19 \Rightarrow n-11+38=n+27$ chia hết cho 19 (Do $38 \vdots 19$)

Suy ra $n+27$ chia hết cho các số $4;\ 11;\ 19$ mà n là số tự nhiên nhỏ nhất nên

$n+27=BCNN(4;\ 11;\ 19)=836$

Vậy $n=836-27=809$

Bài 2: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho khi a chia cho 2 dư 1, a chia cho 3 dư 1, a chia cho 5 dư 4, a chia cho 7 dư 3

(HSG CƯM'GAR – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Theo đề bài số cần tìm là a $(a \in \mathbb{N})$, theo đề ra ta có:

$a:2$ dư 1 $\Rightarrow a+1 \vdots 2 \Rightarrow a+1+10=a+11$ chia hết cho 2 (Do $10 \vdots 2$)

$a:3$ dư 1 $\Rightarrow a+2 \vdots 3 \Rightarrow a+2+9=a+11$ chia hết cho 3 (Do $9 \vdots 3$)

$a:5$ dư 4 $\Rightarrow a+1 \vdots 5 \Rightarrow a+1+10=a+11$ chia hết cho 5 (Do $10 \vdots 5$)

$a:7$ dư 3 $\Rightarrow a+4 \vdots 7 \Rightarrow a+4+7=a+11$ chia hết cho 7 (Do $7 \vdots 7$)

Suy ra $a+11$ cùng chia hết cho $2;3;5;7$ mà a là số nhỏ nhất nên

$a+11=BCNN\ (2;3;5;7)$

Mà $2;3;5;7$ đôi một nguyên tố cùng nhau

Do vậy: $a+11=2.3.5.7=210$

Vậy $a=199$

Bài 3: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi số đó chia cho 3 dư 1; chia cho 4 dư 2; chia cho 5 dư 3; chia cho 6 dư 4. *(HSG Quảng Trạch – Năm 2020 – 2021)*

Lời giải

Gọi số cần tìm là a $(a \in \mathbb{N})$, theo đề ra ta có:

$a:3$ dư $1 \Rightarrow a+2 \vdots 3$

$a:4$ dư $2 \Rightarrow a+2 \vdots 4$

$a:5$ dư $3 \Rightarrow a+2 \vdots 5$

$a:6$ dư $4 \Rightarrow a+2 \vdots 6$

Suy ra $a+2$ cùng chia hết cho $3;4;5;6$ mà a là số nhỏ nhất nên

$a+2 = BCNN\ (3;4;5;6) = 60$

Vậy $a = 58$

Bài 4: Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số, sao cho khi chia số đó cho 2, cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 ta được các số dư lần lượt là $1,2,3,4,5$. (HSG Nho Quan – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathrm{N}$, $100 \le a \le 999$)

$a:2$ dư $1 \Rightarrow a-1 \vdots 2 \Rightarrow a-1+2 = a+1$ chia hết cho 2 (Do $2 \vdots 2$)

$a:3$ dư $2 \Rightarrow a-2 \vdots 3 \Rightarrow a-2+3 = a+1$ chia hết cho 3 (Do $3 \vdots 3$)

$a:4$ dư $3 \Rightarrow a-3 \vdots 4 \Rightarrow a-3+4 = a+1$ chia hết cho 4 (Do $4 \vdots 4$)

$a:5$ dư $4 \Rightarrow a-1 \vdots 5 \Rightarrow a-4+5 = a+1$ chia hết cho 5 (Do $5 \vdots 5$)

$a:6$ dư $5 \Rightarrow a-5 \vdots 6 \Rightarrow a-5+6 = a+1$ chia hết cho 6 (Do $6 \vdots 6$)

Suy ra $a+1$ cùng chia hết cho $2;3;4;5;6$

Ta có:

$BCNN\ (2;3;4;5;6) = 60$

$=> a+1 \in BC(2,3,4,5,6) = B(60) = \{0,60,120,360,...,960,1020,...\}$

Vì a là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên $a+1 = 960$

Vậy $a = 960 - 1 = 959$

Bài 5: Số học sinh của trường THCS A nếu xếp mỗi hàng 10 học sinh thì thừa ra 3 học sinh, nếu xếp mỗi hàng 12 thì thừa ra 5 học sinh, nếu xếp mỗi hàng 15 thì thừa ra 8 học sinh, nếu xếp mỗi hàng 19 thì vừa đủ . Hỏi trường THCS A có bao nhiêu học sinh tất cả , biết số học sinh của trường đó lớn hơn 800 và nhỏ hơn 1000. *(OLYMPIC Toán 6 – Năm 2020 – 2021)*

Lời giải

Gọi số học sinh của trường THCS A là x ($x \in N^*$, 800<x<1000, học sinh)

Theo đề ra ta có:

Xếp mỗi hàng 19 học sinh thì vừa đủ nên $x \vdots 19$, suy ra đặt $x = 19k$ (k $\in N^*$) khi đó vì:

Xếp mỗi hàng 10 học sinh thừa 3 học sinh nên $x:10$ dư 3, suy ra $19k:10$ dư 3 hay

$19k-3+10=19k+7\vdots 10$ (vì $10\vdots 10$)

Xếp mỗi hàng 12 học sinh thì thừa 5 học sinh nên $x:12$ dư 5, suy ra $19k:12$ dư 5 hay

$19k-5+12=19k+7\vdots 12$ (vì $12\vdots 12$)

xếp mỗi hàng 15 học sinh thì thừa 8 học sinh nên $x:15$ dư 8, suy ra $19k:15$ dư 8 hay

$19k-8+15=19k+7\vdots 15$ (vì $15\vdots 15$)

Do đó $19k+7\in BC(BCNN(10,12,15))$

$=> 19k+7\in BC(60)=\{0;60;120;180;240;300;360;420;480;540;600;660;720;780;840;900;960;1020;...\}$

Vì $x\in N^*$, 800<x<1000, học sinh) nên $19k+7\in\{840;900;960\}$

Lập bảng:

$19k+7$	840	900	960
k	$\frac{833}{19}$ (loại)	47 (Thỏa mãn)	$\frac{953}{19}$ (loại)

$=> a=19.47=893$ (học sinh)

Vậy số học sinh của trường THCS A là 893 học sinh.

Bài 6: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất biết a chia cho 104 dư 51, a chia cho 96 dư 27.

(HSG Kim Sơn – Năm 2020 – 2021).

Lời giải

Gọi số cần tìm là a $(a\in \mathrm{N})$, theo đề ra ta có:

$=> a-51\vdots 104 => a-51+3.104\vdots 104 => a+261\vdots 104$ (Vì $3.104\vdots 104$)

$=> a-27\vdots 96 => a-27+3.96\vdots 96 => a+261\vdots 96$ (Vì $3.96\vdots 96$)

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất nên:

$=> a+261=BCNN(96;104)=1248$

Vậy $a=1248-261=987$

Bài 7: Tìm số tự nhiên a, biết rằng 296 chia cho a thì dư 16, còn 230 chia cho a thì dư 10.

(Năng khiếu toán 6 lần 1 – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là a $(a\in \mathrm{N}^*, a>16)$, theo đề ra ta có:

$296-16\vdots a => 280\vdots a$

$230-10 \vdots a => 220 \vdots a$

$a \in Ư\left(ƯCLN\{220;280\}\right) = Ư\left(20\right)$

Vì $a > 16$ nên $a = 20$

Vậy $a = 20$

Bài 8: Tìm số tự nhiên a biết rằng a chia cho 7 dư 3; a chia cho 9 dư 1, a chia hết cho 11 và a nằm trong khoảng từ 350 đến 500.

(HSG Nam Đàn – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là a $(a \in \mathbb{N}, 350 < a < 500)$, theo đề ra ta có:

$a : 7$ dư 3 $\Rightarrow a - 3 \vdots 7 \Rightarrow a - 3 + 245 = a + 242 \vdots 7$ nên $a + 242$ chia hết cho 7 (Do $245 \vdots 7$)

$a : 9$ dư 1 $\Rightarrow a - 1 \vdots 9 \Rightarrow a - 1 + 243 = a + 242 \vdots 9$ nên $a + 242$ chia hết cho 9 (Do $243 \vdots 9$)

$a \vdots 11$ $=> a + 242 \vdots 11$ (Do $242 \vdots 11$)

Suy ra $a + 242$ cùng chia hết cho $7;9;11$

Nên $a + 242 \in B\left(BCNN\ (7,9,11)\right) = B\left(693\right) = \{0;693;1386...\}$

Vì $a \in \mathbb{N}$, $350 < a < 500$ do đó $a + 242 = 693 => a = 451$

Vậy $a = 451$

Bài 9: Tìm số tự nhiên a, biết 398 chia cho a dư 38, còn 450 chia cho a dư 18.

(OLYMPIC toán 6 Quốc Oai – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là a $(a \in \mathbb{N}^*, a > 38)$, theo đề ra ta có:

$398 - 38 \vdots a => 360 \vdots a$

$450 - 18 \vdots a => 432 \vdots a$

$=> a \in Ư\ (Ư\ CLN\{360;432\}) = Ư\ (72) = \{1;2;3;4;6;8;9;12;18;24;36;72\}$

Vì $a > 38$ nên $a = 72$

Bài 10: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết khi chia số đó cho $36, 40, 42$ lần lượt được các số dư là 34, 38, 40.

(OLYMPIC toán 6 Quốc Oai – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là a, $a \in \mathbb{N}$, theo đề ra ta có:

$a:36$ dư $34 \Rightarrow a-34 \vdots 36 \Rightarrow a-34+36=a+2$ chia hết cho 36 (Do $36 \vdots 36$)

$a:40$ dư $38 \Rightarrow a-38 \vdots 40 \Rightarrow a-38+40=a+2$ chia hết cho 40 (Do $40 \vdots 40$)

$a:42$ dư $40 \Rightarrow a-40 \vdots 42 \Rightarrow a-40+42=a+2$ chia hết cho 42 (Do $42 \vdots 42$)

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất nên:

$=> a+2=BCNN(36;40;42)=2520$

Vậy $a=2520-2=2518$

Bài 11: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho khi chia số đó cho 8 dư 7 và chia số đó cho 31 dư 28.

(HSG Lục Nam – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$

Vì x chia cho 8 dư 7, chia cho 31 dư 28 nên

$$\begin{cases} x=8k+7 \\ x=31m+28 \end{cases} \text{với } k,m \in N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+65=8k+72 \vdots 8 \\ x+65=31m+93 \vdots 31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+65 \in BC(8;31)$$

$\mathrm{BCNN}(8,31)=8.31=248$

$\mathrm{BC}(8,31)=\mathrm{B}(248)=\{0;\ 248;496;744;992;1240;...\}$

Vì x là số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số nên $x+65=992 \Rightarrow x=927$

Vậy số cần tìm là 927

Bài 12: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho các số $25, 28$ và 35 thì được các số dư lần lượt là $5, 8, 15$.

(HSG Bá Thước – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$

Vì x chia cho các số $25, 28$ và 35 thì được các số dư lần lượt là $5, 8, 15$ nên

$x+20 \vdots 25$

$x+20 \vdots 28$

$x+20 \vdots 35$

$\Rightarrow x+20 \in BC(25, 28, 35)$

Ta có: $25=5^2$; $28=2^2.7$; $35=5.7$

$\text{BCNN}(25,28,35)=2^2.5^2.7=700$

$\text{BC}(25,28,35)=\text{B}(700)=\{0;\ 700;1400;\ ...\}$

Vì x là số tự nhiên có 3 chữ số nên $x+20=700 \Rightarrow x=700-20=680$

Vậy số cần tìm là 680

Bài 13: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số đó cho các số $7;9;17$ được số dư lần lượt là $1;3;13$

(HSG Gia Bình – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$

Vì x chia cho cho các số $7;9;17$ được số dư lần lượt là $1;3;13$ nên

$$\begin{cases} x=7k+1 \\ x=9m+3 \quad (\text{ Với } k,m,n \in N^*\ ) \\ x=17n+13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+888=7k+889 \vdots 7 \\ x+888=9m+891 \vdots 9 \\ x+888=17n+901 \vdots 17 \end{cases}$$

$\Rightarrow x+888 \in BC(7, 9, 17)$ mà x nhỏ nhất

$\Rightarrow x+888 = BCNN(7, 9, 17)=1071$

$\Rightarrow x=183$

Vậy số cần tìm là 183

Bài 14: Số học sinh khối 6 của một trường khi xếp hàng 12, hàng 15, hàng 18 đều thừa 2 học sinh. Biết số học sinh khối 6 chưa đến 200 em. Hỏi khối 6 của trường đó có bao nhiêu học sinh ?

(HSG Lục Ngạn – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số học sinh khối 6 của trường đó là x (học sinh), $x \in N^*$, $x<200$

Nếu xếp hàng 12, hàng 15, hàng 18 đều thừa 2 học sinh nên

$$\begin{cases} x-2 \vdots 12 \\ x-2 \vdots 15 \\ x-2 \vdots 18 \end{cases}$$

$\Rightarrow x-2 \in \text{BC}(12,15,18)$

Ta có: $12 = 2^2.3$

$15 = 3.5$

$18 = 2.3^2$

$\text{BCNN}(12,15,18) = 2^2.3^2.5 = 180$

$\text{BC}(12,15,18) = \text{BC}(180) = \{0;180;360;\ ...\}$

Vì $x < 200$ nên $\text{x}-2 = 180 \Rightarrow \text{x} = 182$

Vậy số học sinh khối 6 của trường đó là 182 em

Bài 15: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự là $2,3,4$.

(HSG Thái Thụy – Năm 2019 – 2020)

Lời giải

Vì a chia cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự là $2,3,4$ nên

$$\begin{cases} a = 3k+2 \\ a = 5m+3 \ \text{(Với } k,m,n \in N^* \text{)} \\ a = 7n+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-1 = 6k+3 \vdots 3 \\ 2a-1 = 10m+5 \vdots 5 \\ 2a-1 = 14n+7 \vdots 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2a-1 \in BC(3,\ 5,7)$ mà a nhỏ nhất

$\Rightarrow 2a-1 = BCNN(3,5,7) = 105$

$\Rightarrow a = 53$

Vậy $a = 53$

Bài 16: Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết nó chia cho 23 thì dư 14 và chia cho 25 thì dư 16.

(HSG Tiền Hải – Năm 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$, $x < 1000$

Vì x chia cho 23 thì dư 14 và chia cho 25 thì dư 16 nên

$$x + 9 \vdots 23$$

$$x + 9 \vdots 25$$

$$\Rightarrow x + 9 \in BC(23, 25)$$

$$\text{BCNN}(23,25) = 575$$

$$\text{BC}(23,25) = \text{BC}(575) = \{0; 575; 1150; \ldots\}$$

Vì $x < 1000$ nên $x + 9 = 575 \Rightarrow x = 566$

Vậy số cần tìm là 566

Bài 17: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng khi chia số đó cho 3 dư 1, chia cho 5 dư 3 và chia cho 7 dư 5.

(HSG Nhơn Trạch – Năm 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$, x nhỏ nhất.

Vì x chia cho 3 dư 1, chia cho 5 dư 3 và chia cho 7 dư 5 nên

$$\begin{cases} x = 3k + 1 \\ x = 5m + 3 \text{ (Với } k, m, n \in N^* \text{)} \\ x = 7n + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 3k + 3 \vdots 3 \\ x + 2 = 5m + 5 \vdots 5 \\ x + 2 = 7n + 7 \vdots 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2 \in BC(3,5,7) \text{ mà } x \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Rightarrow x + 2 = BCNN(3,5,7) = 3.5.7 = 105$$

$$\Rightarrow x = 103$$

Vậy số cần tìm là 103

Bài 18: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có tính chất sau:

Số đó chia cho 3 dư 1, chia cho 4 thì dư 2, chia cho 5 thì dư 3, chia cho 6 thì dư 4 và chia hết cho 13.

(HSG Sơn Tịnh – Năm 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, x nhỏ nhất.

Vì x chia cho 3 dư 1, chia cho 4 thì dư 2, chia cho 5 thì dư 3, chia cho 6 thì dư 4 nên

$x+2 \vdots 3;\ x+2 \vdots 4; x+2 \vdots 5; x+2 \vdots 6$

$\Rightarrow x+2 \in BC(3,4,5,6)$

$BCNN(3,4,5,6)=60$

$BC(3,4,5,6)=B(60)=\{0;60;120;180;240;300;360;420;480;540;600;...\}$

$\Rightarrow x+2 \in \{60;120;180;240;300;360;420;480;540;600;...\}$

$\Rightarrow x \in \{58;118;178;238;298;358;418;478;538;598;...\}$

Mà $x \vdots 13$, x nhỏ nhất nên $x=598$

Vậy số cần tìm là 598

Bài 19: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 5 dư 1, chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 10.

(HSG Kiến Xương – Năm 2012 – 2013)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$, x nhỏ nhất.

Vì x chia cho 5 dư 1, chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 10 nên

$$\begin{cases} x=5k+1 \\ x=11m+4 \quad (\text{ Với } k,m,n \in N^*\ ) \\ x=13n+10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+29=5k+30 \vdots 5 \\ x+29=11m+33 \vdots 11 \\ x+29=13n+39 \vdots 13 \end{cases}$$

$\Rightarrow x+29 \in BC(5,11,13)$ mà x nhỏ nhất

$\Rightarrow x+29 = BCNN(5,11,13)=5.11.13=715$

$\Rightarrow x=686$

Vậy số cần tìm là 686

Bài 20: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho các số $25;28;35$ thì được số dư lần lượt là $5;8;15$.

(HSG Kiến Xương – Năm 2011 – 2012)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x < 1000$

Vì x chia cho các số $25; 28; 35$ thì được số dư lần lượt là $5; 8; 15$ nên

$$x + 20 \vdots 25;\ x + 20 \vdots 28;\ x + 20 \vdots 35$$

$$\Rightarrow x + 20 \in BC(25, 28, 35)$$

$$BCNN(25, 28, 35) = 700$$

$$BC(25, 28, 35) = B(700) = \{0; 700; 1400; 2100; 2800; ...\}$$

$$\Rightarrow x + 20 \in \{700; 1400; 2100; 2800; ...\}$$

$$\Rightarrow x \in \{680; 1380; 2080; 2780; ...\}$$

Mà $x < 1000$ nên $x = 680$

Vậy số cần tìm là 680

Bài 21: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11.

(HSG Phú Lương – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$, x nhỏ nhất.

Vì x chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11 nên

$$\begin{cases} x = 11k + 6 \\ x = 4m + 1 \\ x = 19n + 11 \end{cases} \quad (\text{ Với } k, m, n \in N^*\ )$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 27 = 11k + 33 \vdots 11 \\ x + 27 = 4m + 28 \vdots 4 \\ x + 27 = 19n + 38 \vdots 19 \end{cases}$$

$\Rightarrow x + 27 \in BC(11, 4, 19)$ mà x nhỏ nhất

$$\Rightarrow x + 27 = BCNN(11, 4, 19) = 11.4.19 = 836$$

$$\Rightarrow x = 809$$

Vậy số cần tìm là 809

Bài 22: Có 120 quyển vở và 72 cái bút được chia thành các phần thưởng đều nhau. Hỏi có thể chia được thành bao nhiêu phần thưởng để số quyển vở và số bút trong mỗi phần thưởng là bé nhất.

(HSG Anh Sơn – Năm 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số phần thưởng được chia là a (phần thưởng), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $120 \vdots a$, $72 \vdots a$ nên $a = ƯC(120, 72)$

Ta có: $120 = 2^3.3.5$

$72 = 3^2.2^3$

$ƯCLN(120, 72) = 2^3.3 = 24$

$\Rightarrow a \in ƯC(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

Vì số quyển vở và số bút trong mỗi phần thưởng là bé nhất nên $a = 24$

Vậy có thể chia được 24 phần thưởng

Mỗi phần thưởng có số vở là $120 : 24 = 5$ (vở)

Mỗi phần thưởng có số bút là $72 : 24 = 3$ (bút)

Bài 23: Trong kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh gồm ba môn Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, số học sinh tham gia như sau: Ngữ văn có 96 học sinh; Toán có 120 học sinh và Tiếng Anh có 72 học sinh. Trong buổi lễ tổng kết, các bạn tham gia thi được phân công đứng thành hàng dọc sao cho mỗi hàng có số bạn thi mỗi môn bằng nhau. Hỏi có thể phân công học sinh đứng thành bao nhiêu hàng để số học sinh mỗi môn trong một hàng ít nhất.

(HSG Bắc Ninh – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số hàng được phân công là a (hàng), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $96 \vdots a$; $120 \vdots a$, $72 \vdots a$ nên $a = ƯC(96, 120, 72)$

Ta có: $96 = 2^5.3$

$120 = 2^3.3.5$

$72 = 3^2.2^3$

$ƯCLN(96, 120, 72) = 2^3.3 = 24$

$\Rightarrow a \in ƯC(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

Vì số học sinh mỗi môn trong một hàng ít nhất nên $a = 24$

Vậy có thể phân công được 24 hàng

******************** **********************