SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HẢI DƯƠNG** **ĐỀ CHÍNH THỨC**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2024 - 2025** **Môn thi: Toán** Ngày thi: 21 tháng 8 năm 2024 *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề* (*Đề thi có 01 trang*)

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho số thực a thoả mãn $0<a<1$. Xét dãy số (u_n) có $u_1=a, u_{n+1}=2u_n(1-u_n), \forall n\in N^*$.

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Cho số nguyên dương n và đa thức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

(i) $\{a_0,a_1,...,a_n\}$ là một hoán vị của $\{0,1,2,...,n\}$.

(ii) $P(x)$ có n nghiệm đều là số thực.

Chứng minh rằng $P(0)=0$.

Câu 2. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E và F. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, M và N là trung điểm JF, JE.

a) Chứng minh rằng $BM=CN$.

b) Giả sử BM cắt CN tại P. Chứng minh rằng P nằm trên đường tròn (O).

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho số nguyên dương k và số nguyên tố $p=6k+1$. Với mỗi số nguyên dương m không chia hết cho p, ta kí hiệu a_m là số nguyên dương không vượt quá p thỏa mãn $m.a_m\equiv 1 \pmod p$.

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{p-1} a_{i^2}\equiv 0 \quad \pmod p$.

b) Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu $P_n=1!.2!.....n!$. Tìm tất cả các số nguyên dương $m<2025$ sao cho $\frac{P_{2024}}{m!}$ là số chính phương.

Câu 4. (5,0 điểm) Trong mỗi ô vuông đơn vị của bảng $n\times n$, ta điền số 1 hoặc -1. Sau đó, ở mỗi bước, ta chọn 1 ô và đổi dấu tất cả các số của $2n-1$ ô cùng hàng hoặc cùng cột với ô đó. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho với mọi trạng thái điền số ban đầu, sau hữu hạn bước ta có thể nhận được bảng có ít nhất k số 1 trong mỗi trường hợp sau:

a) $n=4$.

b) $n=2025$.

-HẾT-

Họ và tên thí sinh:... Số báo danh: ....
Cán bộ coi thi số 1:.. Cán bộ coi thi số 2: ....

Hướng dẫn chấm

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho số thực a thoả mãn $0 < a < 1$. Xét dãy số (u_n) có $u_1 = a, u_{n+1} = 2u_n(1-u_n), \forall n \in N^*$.

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài giải: Có $u_2 = 2u_1(1-u_1) > 0$ và $u_2 \le \frac{1}{2}$. Ta chứng minh được $0 < u_n \le \frac{1}{2}$ bằng quy nạp. **(1đ)**

Xét $u_{n+1} - u_n = u_n - 2u_n^2 = u_n(1-2u_n) \ge 0$ nên (u_n) là dãy số tăng và bị chặn trên nên có giới hạn L**(1đ)**

Thay vào ta được $L = \frac{1}{2}$ **(1đ)**

b) Cho số nguyên dương n và đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

(i) $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ là một hoán vị của $\{0,1,2,...,n\}$.

(ii) $P(x)$ có n nghiệm đều là số thực.

Chứng minh rằng $P(0) = 0$.

Bài giải: Giả sử rằng 0 không phải là một nghiệm, rõ ràng $P(x)$ không có nghiệm nào lớn hơn 0.

Suy ra mọi nghiệm của $P(x)$ đều là số âm. **(1đ)**

Theo công thức của Vieta, không có a_i nào có thể là 0, mâu thuẫn do $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ là một hoán vị của $\{0,1,2,...,n\}$.(**1đ)**

Câu 2. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E và F. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, M và N là trung điểm JF, JE.

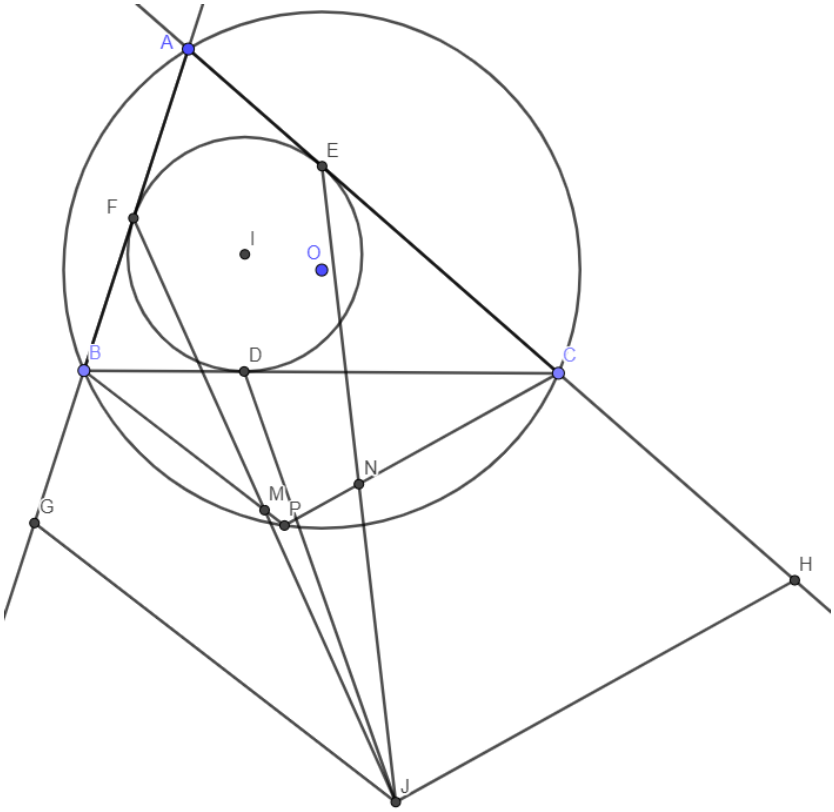
a) Chứng minh rằng $BM = CN$.

b) Giả sử BM cắt CN tại P. Chứng minh rằng P nằm trên đường tròn (O).

Bài giải:
a) Gọi (I) tiếp xúc BC tại D. Trên tia đối tia BA, CA lấy G, H sao cho BG = BD = BF, CH = CD = CE.
Khi đó BM là trung điểm GJ nên BM // GJ và BM $= \frac{1}{2} GJ$

Tương tự CN // HJ và $CN = \frac{1}{2} HJ$ **(1đ)**

Ta chứng minh đươc JG = JD = JH nên BM = CN **(1đ)**
b) Do các cặp đường thẳng song song nên $\angle BPC = \angle GJH$
Mà $\angle JGB = \angle JDB$ và $\angle JHC = \angle JDC$ nên $\angle AGJ + \angle AHJ = 180^0$. Do đó AGJH là tứ giác nội tiếp **(1,5đ)**
=> $\angle BAC + \angle GJH = 180^0$ nên ABPC là tứ giác nội tiếp hay P thuộc (O). **(1,5đ)**



Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho số nguyên dương k và số nguyên tố $p = 6k + 1$. Với mỗi số nguyên dương m không chia hết cho p, ta kí hiệu a_m là số nguyên dương không vượt quá p thỏa mãn $m.a_m \equiv 1 (\text{mod } p)$.

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{p-1} a_{i^2} \equiv 0 \quad (\text{mod } p)$.

Bài giải: Do p là số nguyên tố nên với mỗi $i \in \{1; 2; ...; p-1\}$; tồn tại duy nhất $a_i \in \{1; 2; ...; p-1\}$ để $i.a_i \equiv 1 (\text{mod } p)$.

Ta chứng minh rằng $\{a_i\}$ tạo thành hệ thặng dư thu gọn mod p.

Thật vậy, giả sử tồn tại $i \neq j \in \{1; 2; ...; p-1\}$ sao cho $a_i \equiv a_j (\text{mod } p)$.

Lại có $i.a_i \equiv j.a_j \equiv 1 (\text{mod } p)$; suy ra $a_i(i - j) \equiv 0 (\text{mod } p)$ (vô lý)

Vậy điều giả sử sai, hay $\{a_i\}$ tạo thành hệ thặng dư thu gọn mod p. **(1đ)**

Do đó {$a_1; a_2; ...; a_{p-1}$} là hoán vị của {1;2;…;p-1}.

Nhận xét: $m \equiv n (mod p)$ thì $a_m = a_n$. Và $a_{i^2}.i^2 \equiv 1 \equiv (a_i)^2.i^2 (mod p)$ => $a_{i^2} \equiv (a_i)^2$ (mod p) **(1đ)**

Suy ra $\sum_{i=1}^{p-1} a_{i^2} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} (a_i)^2 \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^2 = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6} = k(2p-1)p \equiv 0 \pmod p$.

b) Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu $P_n = 1!.2!.....n!$. Tìm tất cả các số nguyên dương $m < 2025$ sao cho $\frac{P_{2024}}{m!}$ là số chính phương.

Ta có $P_{2024} = 1!.2!.....2024! = 1.(1.2).(1.2.3).....(1.2.3.....2024) = 1^{2024}.2^{2023}.....2023^2.2024$

$= (1^{1012}.2^{1011}.3^{1011}.....2022.2023)^2.(2.4.....2024) = (1^{1012}.2^{1011}.3^{1011}.....2022.2023)^2.2^{1012}.1012!$.

Như vậy chỉ cần chọn $m = 1012$ thì $\frac{P_{2024}}{m!}$ là số chính phương. **(1,5 đ)**

Ta chứng minh chỉ có $m = 1012$ thỏa mãn. Giả sử tồn tại số $m \neq 2012$ mà $\frac{P_{2024}}{m!}$ là số chính phương

=> $\frac{P_{2024}}{m!} : \frac{P_{2024}}{1012!} = \frac{1012!}{m!}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

- Nếu $m < 1009$ thì $\frac{1012!}{m!}$ chia hết cho 1009 là số nguyên tố nhưng không chia hết cho 1009^2 => vô lí**(0,5đ)**

- Nếu $m = 1009; 1010; 1011; 1013$ thay trực tiếp vào thấy không thoả mãn. **(0,5đ)**

- Nếu $m > 1013$ thì $\frac{m!}{1012!}$ chia hết cho 1013 là số nguyên tố nhưng không chia chết cho 1013^2 do $m < 2025$ => vô lí.**(0,5đ)**

Vậy chỉ có m = 1012.

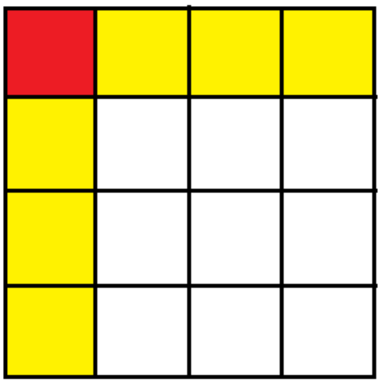
Câu 4. (5,0 điểm) Trong mỗi ô vuông đơn vị của bảng $n \times n$, ta điền số 1 hoặc -1. Sau đó, ở mỗi bước, ta chọn 1 ô và đổi dấu tất cả các số của $2n-1$ ô cùng hàng hoặc cùng cột với ô đó. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho với mọi trạng thái điền số ban đầu, sau hữu hạn bước ta có thể nhận được bảng có ít nhất k số 1 trong mỗi trường hợp sau:

a) $n = 4$.

b) $n = 2025$.

Bài giải:

a) Với n = 4, ta chứng minh k = 16. Tức là với mọi trạng thái ban đầu, ta đều có thể đưa bảng có tất cả các ô đều là số 1.

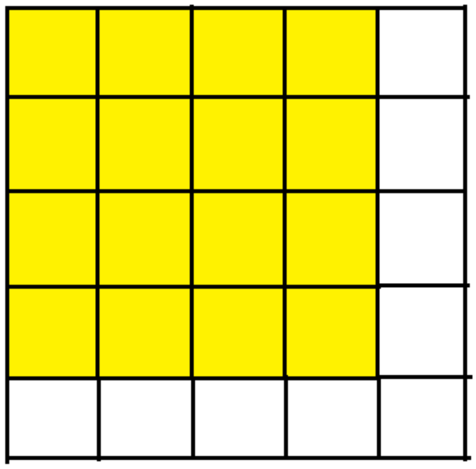


Cách làm là ta có thể tạo ra thuật toán có thể đổi dấu 1 ô còn các ô còn lại giữ nguyên.

Giả sử ta cần đổi dấu ô trên cùng bên trái, ta sẽ thực hiện các bước chuyển bằng cách chọn lần lượt tất cả các ô cùng hàng và cùng cột với ô đó, kể cả ô đó. Khi đó, ô cần đổi dấu được tác động 2n - 1 lần, các ô cùng hàng và cùng cột với ô đó được tác động n lần, các ô còn lại được tác động 2 lần. Do vậy các ô còn lại giữ nguyên còn ô đó được đổi dấu. Làm tương tự với các ô còn lại ta có thể đổi dấu tất cả các ô thành số 1. **(1đ)**

b) Với n chẵn, làm tương tự phần a ta có $k = n^2$.

Với n lẻ, ta chứng minh $k = n^2 - n + 1$



Việc tìm ra số k này rất tự nhiên, ta xét bảng $(n-1)\times(n-1)$ gồm $n-1$ cột và $n-1$ hàng đầu tiên của bảng.

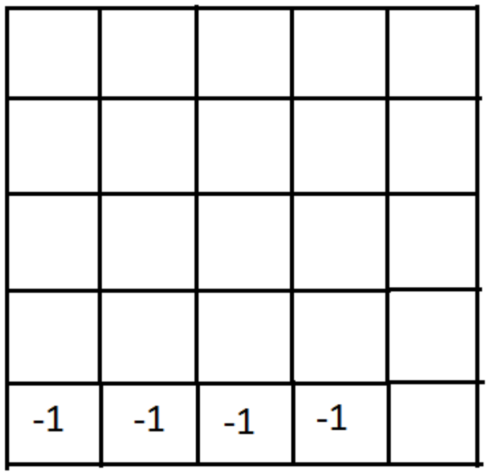
Vì $n-1$ là số chẵn nên với thuật toán như phần a, ta có thể khiến cho tất cả các ô trên bảng này đều mang số 1.

Còn đường viền chữ L còn lại, có 2n-1 ô. Nếu ta chọn ô ở góc thì sẽ đổi dấu cả 2n - 1 số trên các ô này. Do vậy trường hợp xấu nhất là trên đường viền này có n-1 số -1 và n số 1. Khi đó số ô mang số 1 là $(n-1)^2 + n = n^2 - n + 1$.

Với lập luận trên ta cũng tìm ra cách có thể tạo ra ít nhất $n^2 - n + 1$ số 1 trong mọi trường hợp. **(2đ)**

Ta chứng minh rằng có trạng thái mà ta không thể tạo ra bảng nhiều hơn $n^2 - n + 1$ số 1.

Trạng thái đó là bảng có $n-1$ ô đầu tiên của hàng dưới cùng mang số -1.



Gọi $S(x;y)$ là tích tất cả các số ở hàng thứ x và cột thứ y, không tính giao điểm của hàng x và cột y. Vì n là số lẻ nên mỗi bước chuyển đổi thì $S(x;y)$ đều không đổi.

Trạng thái ban đầu như hình vẽ, tất cả các ô ở n-1 cột đầu tiên đầu có S(x;y) = -1. Và qua các bước đổi thì các tích đó là giữ nguyên. Đến một bước bất kì, xét bảng vuông $(n-1)\times(n-1)$ gồm n-1 cột và n-1 hàng đầu tiên, nếu trong bảng này hàng nào cũng chứa số -1 thì bảng có ít nhất $n-1$ số -1, nếu có 1 hàng không có số -1 nào. Ta xét các tích S(x;y) ở các ô trên hàng đó, vì trên hàng đó đã không có số -1 nên cột chứa ô đó chắc chắn phải có số -1, như vậy có ít nhất n-1 số -1. Do vậy bảng luôn có ít nhất n-1 số -1.

Vậy với n lẻ thì $k = n^2 - n + 1$. Đáp số bài toàn là $k = 2025^2 - 2025 + 1$. **(2đ)**