

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ (x + 2y)(1 + 3y^2 + 5xy) = 27. \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{7x^2 + 2x + 2} + |x + 1| = \sqrt{6x^2 + 2} + 1.$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x, y nguyên thoả mãn

$$x^3 + 2y^3 + 2x^2y + y^2x + x + 2y = 3.$$

2) Với x, y, z là những số thực thoả mãn

$$0 < x \leq y \leq z \leq 3, \quad y + z \leq 5, \quad x + y + z \leq 6.$$

Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 14.$$

Câu III (3 điểm). Với tứ giác $ABCD$ lồi có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại P . Giả sử Q là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAD và PBC .

1) Chứng minh rằng hai tam giác QDB và QAC đồng dạng.

2) Chứng minh rằng $2\frac{AD}{BC} \leq \frac{QD}{QC} + \frac{QA}{QB}$.

3) Gọi M là trung điểm CD . Giả sử Q nằm trong tam giác PCD và $\angle QPD = \angle MPC$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

Câu IV (1 điểm). Giả sử dãy các số x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 7$) thoả mãn hai tính chất sau

1. Tổng của 7 số bất kỳ nhỏ hơn 15.

2. Tổng của tất cả n số bằng 100.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của n .

..... Hết