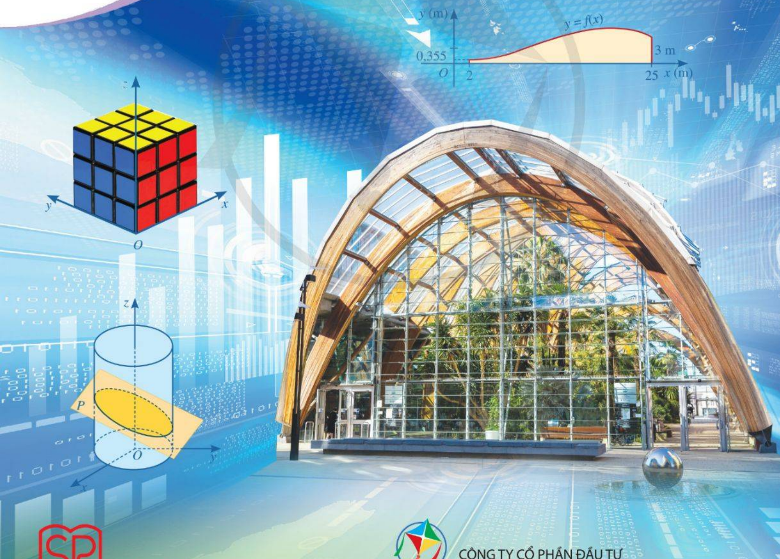
Cánh Diều

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP Toán 12

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP Toán 12

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

Chương IV

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

§1 NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$.

1. Khái niệm nguyên hàm

• Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là *nguyên hàm* của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

• Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

– Với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

– Ngược lại, với mỗi nguyên hàm $H(x)$ của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $H(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

• Họ (hay tập hợp) tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K được kí hiệu là $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Nhận xét

• Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số.

Vì vậy, $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

• Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

• $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

• $\int 0\mathrm{d}x = C$ và khi quy ước $\int 1\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x$, ta có $\int \mathrm{d}x = x + C$.

Chú ý: Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là *vi phân* của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên K.

- $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0.
- $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Kiểm tra một hàm số là nguyên hàm của hàm số cho trước

Phương pháp: Sử dụng khái niệm nguyên hàm.

Ví dụ 1 Hàm số $F(x) = x^2 + x + 1$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ trên $\mathbb{R}$ hay không? Vì sao?

Giải

Ta có: $F'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$. Suy ra $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Vậy $F(x) = x^2 + x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2 Hàm số $F(x) = \cos x$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ hay không? Vì sao?

Giải

Ta có: $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x$ khác $f(x) = \sin x$. Vậy hàm số $F(x) = \cos x$ không là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ trên $\mathbb{R}$.

Vấn đề 2. Tìm nguyên hàm của một hàm số

Phương pháp: Sử dụng công thức $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ với $F(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục và các tính chất của nguyên hàm.

Ví dụ 3 $\int \cos x\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-\cos x + C$. **B.** $-\sin x + C$. **C.** $\cos x + C$. **D.** $\sin x + C$.

Giải

Ta có: $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \int (\sin x)'\,\mathrm{d}x = \sin x + C$. Chọn **D**.

Ví dụ 4 Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) x^4; b) $6x^5 + 5x^4$; c) $\cos x - \sin x$.

Giải

Ta có:

a) $\int x^4 \mathrm{d}x = \int \frac{1}{5}(5x^4)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int (x^5)' \mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + C$.

b) $\int (6x^5 + 5x^4)\mathrm{d}x = \int 6x^5 \mathrm{d}x + \int 5x^4 \mathrm{d}x = \int (x^6)' \mathrm{d}x + \int (x^5)' \mathrm{d}x = x^6 + x^5 + C$.

c) $\int (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x = \int \cos x\mathrm{d}x - \int \sin x\mathrm{d}x = \int \cos x\mathrm{d}x + \int (-\sin x)\mathrm{d}x$

$= \int (\sin x)' \mathrm{d}x + \int (\cos x)' \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C$.

Ví dụ 5 Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + 3x^2$, biết $F(0) = 1$.

Giải

Ta có: $\int (2x + 3x^2)\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x + \int 3x^2 \mathrm{d}x = \int (x^2)' \mathrm{d}x + \int (x^3)' \mathrm{d}x = x^2 + x^3 + C$.

Vì $F(0) = 1$ nên $0^2 + 0^3 + C = 1$, suy ra $C = 1$.

Vậy $F(x) = x^2 + x^3 + 1$.

Vấn đề 3. Ứng dụng

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở **Ví dụ 6, 7**, chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Ví dụ 6 Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng của cây đó trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 1{,}5t + 5$, trong đó $h(t)$ (cm) là chiều cao của cây sau t (năm).

(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

Cây con khi được trồng cao 12 cm.

a) $h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t) = 1{,}5t + 5$.

b) $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + C$ với C là một hằng số.

c) Chiều cao của cây đó không đổi trong 6 năm được trồng.

d) Chiều cao của cây đó khi được bán là 70 cm.

a)	**Đ**	**S**
b)	**Đ**	**S**
c)	**Đ**	**S**
d)	**Đ**	**S**

Giải

Ta có $h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t) = 1{,}5t + 5$.

Do $\int (1,5t + 5)\mathrm{d}t = \int 1,5t\mathrm{d}t + \int 5\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int 2t\mathrm{d}t + 5\int \mathrm{d}t = \frac{3}{4}t^2 + 5t + C$

nên $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + C$.

Vì cây con khi được trồng cao 12 cm nên $h(0) = 12$, suy ra $C = 12$.

Vậy $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + 12$.

Sau 6 năm, chiều cao của cây đó là: $h(6) = \frac{3}{4} . 6^2 + 5 . 6 + 12 = 69$ (cm).

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **S**.

Ví dụ 7 Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$.

Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$, trong đó t tính theo ngày ($0 \le t \le 400$), $m(t)$ tính theo người.

(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

Đơn giá cho một ngày công lao động là 400 000 đồng.

a) $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t) = 800 - 2t$.

b) $M(t) = 800t - t^2 + C$ với $0 \le t \le 400$ và C là một hằng số.

c) Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 400 là 160 000.

d) Chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành) là 640 000 000 đồng.

Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**

Giải

Vì $M'(t) = m(t)$ nên ta có $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t) = 800 - 2t$.

Do $\int (800 - 2t)dt = 800\int dt - \int 2t dt = 800t - t^2 + C$

nên $M(t) = 800t - t^2 + C$ với $0 \le t \le 400$. Vì $M(0) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy $M(t) = 800t - t^2$.

Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 400 là:

$$M(400) = 800 . 400 - 400^2 = 160\,000.$$

Chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành) là:

$$400\,000 . 160\,000 = 64\,000\,000\,000 \text{ (đồng)}.$$

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **S**.

Ví dụ 8 Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1\,000t$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \le t \le 15$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ.

(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Viết công thức của hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0 \le t \le 15$.

b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Giải

a) Ta có $B(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1\,000t$.

Do $\int (20t^3 - 300t^2 + 1\,000t)\mathrm{d}t = 5\int 4t^3\mathrm{d}t - 100\int 3t^2\mathrm{d}t + 500\int 2t\mathrm{d}t$

$= 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$

nên $B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$.

Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên $B(1) = 405 + C = 500$.

Suy ra $C = 95$. Vậy $B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95$ với $0 \le t \le 15$.

b) Số khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là:

$$B(3) = 5 \,.\, 3^4 - 100 \,.\, 3^3 + 500 \,.\, 3^2 + 95 = 2\,300 \text{ (khách)}.$$

c) Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $B(t)$ trên đoạn $[0 ; 15]$. Ta có:

$$B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1\,000t = 20t(t^2 - 15t + 50) = 20t(t - 5)(t - 10).$$

Suy ra $B'(t) = 0$ khi t bằng 0, 5 hoặc 10.

Ta có: $B(0) = 95$, $B(5) = 3\,220$, $B(10) = 95$, $B(15) = 28\,220$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $B(t)$ trên đoạn $[0 ; 15]$ bằng 28 220 tại $t = 15$.

Vậy số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28 220 khách sau 15 giờ.

d) Ta tìm t để hàm số $B'(t)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0 ; 15]$. Ta có:

$B''(t) = 60t^2 - 600t + 1\,000$. Suy ra $B''(t) = 0$ khi t bằng $\dfrac{15 - 5\sqrt{3}}{3}$ hoặc $\dfrac{15 + 5\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $B'(0) = 0$; $B'\left(\dfrac{15 - 5\sqrt{3}}{3}\right) \approx 962{,}25$; $B'\left(\dfrac{15 + 5\sqrt{3}}{3}\right) \approx -962{,}25$;

$B'(15) = 15\,000$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $B'(t)$ trên đoạn $[0 ; 15]$ bằng 15 000 tại $t = 15$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

C. BÀI TẬP

1. Hàm số $y = x^{20}$ là nguyên hàm của hàm số:

A. $y = x^{19}$. **B.** $y = 20x^{21}$. **C.** $y = 20x^{19}$. **D.** $y = \dfrac{x^{21}}{21}$.

2. Hàm số $y = \sin 2x$ là nguyên hàm của hàm số:

A. $y = \cos 2x$. **B.** $y = 2\cos 2x$. **C.** $y = -\cos 2x$. **D.** $y = \dfrac{-\cos 2x}{2}$.

3. Hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$ là nguyên hàm của hàm số:

A. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$. **B.** $y = \dfrac{1}{2x(x^2+1)}$. **C.** $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$. **D.** $y = \dfrac{2}{x^2+1}$.

4. Hàm số $y = e^{-5x+4}$ là nguyên hàm của hàm số:

A. $y = \dfrac{1}{e^{-5x+4}}$. **B.** $y = e^{-5x+4}$. **C.** $y = \dfrac{e^{-5x+4}}{-5}$. **D.** $y = -5e^{-5x+4}$.

5. Hàm số $y = \log x$ là nguyên hàm của hàm số:

A. $y = \dfrac{1}{x}$. **B.** $y = \dfrac{1}{x\ln 10}$. **C.** $y = \dfrac{\ln 10}{x}$. **D.** $y = \dfrac{1}{x\log 10}$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **6**, **7**, **8**, chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

6. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2$.

Ý		
a) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int 4x^3\mathrm{d}x - \int 3x^2\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
b) $f'(x) = 12x^2 - 6x$.	**Đ**	**S**
c) $f'(x) = x^4 - x^3$.	**Đ**	**S**
d) $\int f(x)\mathrm{d}x = x^4 + x^3 + C$.	**Đ**	**S**

7. Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$.

Ý		
a) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}x + \int \cos x\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
b) $f'(x) = \cos x - \sin x$.	**Đ**	**S**
c) $f'(x) + f(x) = \cos x$.	**Đ**	**S**
d) $\int f(x)\mathrm{d}x = -\cos x + \sin x + C$.	**Đ**	**S**

8. Cho hàm số $f(x) = (x + 2)(x + 1)$.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$.	Đ	S
b) $f'(x) = 2x + 3$.	Đ	S
c) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (x+2)\mathrm{d}x \,.\, \int (x+1)\mathrm{d}x$.	Đ	S
d) $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.	Đ	S

9. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x^5 + 6$;

b) $f(x) = (x + 3)(-2 - x)$;

c) $f(x) = \dfrac{x^6 - 7x^3}{x}$ $(x > 0)$.

10. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 2\sin x$; b) $f(x) = \cos x + x^3$; c) $f(x) = \dfrac{-x^4}{2} - 3\cos x$.

11*. Tìm:

a) $\int 2^x \ln 2\mathrm{d}x$; b) $\int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x$; c) $\int \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Gợi ý:

a) $(2^x)' = 2^x \ln 2$; b) $[\sin(x^2)]' = 2x\cos(x^2)$; c) $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos x}{2}$.

12. Tìm $\int \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x+3}\mathrm{d}x$ trên $(0\,;+\infty)$.

13. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x$, biết $F(1) = 5$.

14. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 + 3x^2$, biết $F(1) - f'(1) = -16$.

15. Xét dao động điều hoà của một chất điểm có vận tốc tức thời tại thời điểm t là: $v(t) = -0,2\pi\sin(\pi t)$, trong đó, t tính bằng giây, $v(t)$ tính bằng m/s. Tìm phương trình li độ $x(t)$, biết $v(t)$ là đạo hàm của $x(t)$ và $x(0) = 0,2$ (m).

§2 NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp:

$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1).$	$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C.$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$
$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1).$	$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C.$

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tìm nguyên hàm của hàm số

Ví dụ 1 Tìm:

a) $\int x^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x$; b) $\int \dfrac{4}{x^3}\mathrm{d}x$; c) $\int \dfrac{-2}{3}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}x$; d) $\int \left(x^{\frac{1}{4}} + \dfrac{1}{2}x^{-2}\right)\mathrm{d}x.$

Giải

a) $\int x^{\sqrt{2}}dx = \dfrac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C.$

b) $\int \dfrac{4}{x^3}\mathrm{d}x = 4\int x^{-3}\mathrm{d}x = 4\,.\,\dfrac{x^{-2}}{-2} + C = -2x^{-2} + C.$

c) $\int \dfrac{-2}{3}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{-2}{3}\int x^{\frac{3}{8}}\mathrm{d}x = \dfrac{-2}{3}\,.\,\dfrac{x^{\frac{11}{8}}}{\frac{11}{8}} + C = \dfrac{-16x^{\frac{11}{8}}}{33} + C.$

d) $\int \left(x^{\frac{1}{4}} + \dfrac{1}{2}x^{-2}\right)\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\int x^{-2}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + \dfrac{1}{2}\,.\,\dfrac{x^{-1}}{-1} + C = \dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \dfrac{1}{2x} + C.$

Ví dụ 2 Tìm:

a) $\int \frac{1}{-x}\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{4}{11x}\mathrm{d}x$; c) $\int \frac{x^3-1}{x}\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int \frac{1}{-x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\ln|x| + C$.

b) $\int \frac{4}{11x}\mathrm{d}x = \frac{4}{11}\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{4}{11}\ln|x| + C$.

c) $\int \frac{x^3-1}{x}\mathrm{d}x = \int\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + C$.

Ví dụ 3 Tìm:

a) $\int(-\cos x)\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

c) $\int(3\sin x - 4\cos x)\mathrm{d}x$; d) $\int(7 + 5\cot^2 x)\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int(-\cos x)\mathrm{d}x = -\int \cos x\mathrm{d}x = -\sin x + C$.

b) $\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int 1\mathrm{d}x = \tan x - x + C$.

c) $\int(3\sin x - 4\cos x)\mathrm{d}x = \int 3\sin x\mathrm{d}x - \int 4\cos x\mathrm{d}x = 3\int \sin x\mathrm{d}x - 4\int \cos x\mathrm{d}x$

$= 3(-\cos x) - 4\sin x + C = -3\cos x - 4\sin x + C$.

d) $\int(7 + 5\cot^2 x)\mathrm{d}x = \int\left[2 + 5(1 + \cot^2 x)\right]\mathrm{d}x = \int\left(2 + 5 \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$= 2\int \mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2x - 5\cot x + C$.

Ví dụ 4 Tìm:

a) $\int e^{4x+1}\mathrm{d}x$; b) $\int 2^{4x+3}\mathrm{d}x$; c) $\int \frac{1}{7^{x+1}}\mathrm{d}x$; d) $\int(e^x + x^e)\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int e^{4x+1}\mathrm{d}x = e\int (e^4)^x\mathrm{d}x = e \cdot \frac{(e^4)^x}{\ln e^4} + C = \frac{e^{4x+1}}{4} + C$.

b) $\int 2^{4x+3}\mathrm{d}x = 8\int 2^{4x}\mathrm{d}x = 8\int (2^4)^x\mathrm{d}x = 8\int 16^x\mathrm{d}x = 8 \cdot \frac{16^x}{\ln 16} + C = \frac{2^{4x+1}}{\ln 2} + C$.

c) $\int \frac{1}{7^{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int \frac{1}{7^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{7}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{1}{7}\cdot\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\ln\frac{1}{7}} + C = \frac{-1}{7^{x+1}\ln 7} + C.$

d) $\int (e^x + x^e)\mathrm{d}x = \int e^x\mathrm{d}x + \int x^e\mathrm{d}x = e^x + \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 5 Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng centimét) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t (*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).

a) Viết công thức xác định hàm số $h(t)$ $(t \geq 0)$.

b) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài bao lâu?

c) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là bao nhiêu centimét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

a) Ta có: $\int (-0,1t^3 + t^2)\mathrm{d}t = \int -0,1t^3\mathrm{d}t + \int t^2\mathrm{d}t = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C.$

Do $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$ nên $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0) = 5$, suy ra $C = 5$.

Vậy $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5,\ t \geq 0.$

b) Cây tăng trưởng khi $v(t) > 0$. Xét bất phương trình $-0,1t^3 + t^2 > 0$.

Ta có: $t^2(-0,1t + 1) > 0$, suy ra $-0,1t + 1 > 0$ nên $t < 10$.

Vậy giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 10 tuần.

c) Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5$ với $t \in [0\ ;\ 10]$.

Ta có: $h'(t) = \frac{-t^3}{10} + t^2 = \frac{t^2}{10}(-t + 10)$, suy ra $h'(t) = 0$ khi t bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0) = 5$, $h(10) = \frac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ trên đoạn $[0\ ;\ 10]$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3} \approx 88,3$ (cm).

d) Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$ với $t \in [0 ; 10]$.

Ta có: $v'(t) = -0,3t^2 + 2t = -0,3t\left(t - \frac{20}{3}\right)$, suy ra $v'(t) = 0$ khi t bằng 0 hoặc $\frac{20}{3}$.

Ta thấy $v(0) = 0$, $v\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{400}{27}$, $v(10) = 0$. Khi đó, $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{400}{27}$ trên đoạn $[0 ; 10]$ tại $t = \frac{20}{3}$. Ta có: $h\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{4\,405}{81} \approx 54,4$.

Vậy vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao 54,4 cm.

Ví dụ 6 *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày $(0 \le t \le 10)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn.

(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

a) $P(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = k\sqrt{t}$.	**Đ**	**S**
b) $P(t) = \frac{2k}{3}\sqrt{t^3} + C$ với $0 \le t \le 10$ và k, C là hằng số.	**Đ**	**S**
c) $P(t) = 100\sqrt{t^3} + 500$ với $0 \le t \le 10$.	**Đ**	**S**
d) Số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là 3 352 con.	**Đ**	**S**

Giải

Ta có: $\int k\sqrt{t}\,dt = k\int \sqrt{t}\,dt = k\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2k}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$.

Vì $P'(t) = k\sqrt{t}$ nên $P(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = k\sqrt{t}$, suy ra

$$P(t) = \frac{2k}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2k}{3}\sqrt{t^3} + C \ (0 \le t \le 10).$$

Do quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn nên $P(0) = 500$, suy ra

$$P(t) = \frac{2k}{3}\sqrt{t^3} + 500.$$

Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn, suy ra

$$\frac{2k}{3}.\sqrt{1^3} + 500 = 600 \Leftrightarrow k = 150.$$

Từ đó, ta có: $P(t) = 100\sqrt{t^3} + 500$ $(0 \le t \le 10)$. Vậy số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là $P(7) = 100 \, . \, \sqrt{7^3} + 500 \approx 2\,352$ (vi khuẩn).

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **S**.

C. BÀI TẬP

16. $\int \sin(-x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\sin x + C$. **B.** $\cos x + C$. **C.** $-\sin x + C$. **D.** $-\cos x + C$.

17. $\int \cos(-x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\sin x + C$. **B.** $\cos x + C$. **C.** $-\sin x + C$. **D.** $-\cos x + C$.

18. $\int \frac{1}{\sin^2(-x)}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\tan x + C$. **B.** $\cot x + C$. **C.** $-\tan x + C$. **D.** $-\cot x + C$.

19. $\int \frac{1}{\cos^2(-x)}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\tan x + C$. **B.** $\cot x + C$. **C.** $-\tan x + C$. **D.** $-\cot x + C$.

20. $\int 17^x \mathrm{d}x$ bằng:

A. $17^x \ln 17$. **B.** $\frac{17^x}{\ln 17}$. **C.** $17^x \ln 17 + C$. **D.** $\frac{17^x}{\ln 17} + C$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **21**, **22**, chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

21. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^7 + 8}{x}$.

a) $f(x) = x^6 + \frac{8}{x}$.	**Đ**	**S**
b) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int x^6 \mathrm{d}x - \int \frac{8}{x}\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
c) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int x^6 \mathrm{d}x + \int \frac{8}{x}\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
d) $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^7}{7} + 8\ln\lvert x\rvert$.	**Đ**	**S**

22. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 3x + \sin x}{\sin 2x}$.

a) $f(x) = \dfrac{2\sin\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2}}{\sin 2x}$.

b) $f(x) = 2\cos x$.

c) $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\int \cos x\mathrm{d}x$.

d) $\int f(x)\mathrm{d}x = -2\sin x + C$.

Đ	S
Đ	S
Đ	S
Đ	S

23. Tìm:

a) $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$;
b) $\int \sqrt{\dfrac{1}{x^7}}\mathrm{d}x$;
c) $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{\frac{4}{5}}}}\mathrm{d}x$;

d) $\int \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$;
e) $\int \dfrac{(x-3)(x+1)}{x}\mathrm{d}x$;
g) $\int \left(3x^2 - \dfrac{4}{x}\right)(2x+5)\mathrm{d}x$.

24. Tìm:

a) $\int e^{5x}\mathrm{d}x$;
b) $\int \dfrac{1}{2\,024^x}\mathrm{d}x$;
c) $\int (2^x + x^2)\mathrm{d}x$;

d) $\int (2^x\,.\,3^{2x+1})\mathrm{d}x$;
e) $\int \dfrac{3^x + 4^x + 1}{5^x}\mathrm{d}x$.

25. Tìm:

a) $\int (5\sin x - 6\cos x)\mathrm{d}x$;
b) $\int \sin^2 2x\mathrm{d}x + \int \cos^2 2x\mathrm{d}x$;

c) $\int \sin^2 \dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$;
d) $\int \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$;

e*) $\int \cos^4 \dfrac{x}{2}\mathrm{d}x - \int \sin^4 \dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$;
g*) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

§3 TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Chú ý

• Kí hiệu $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ và đọc là $F(x)$ thế cận từ a đến b.

Vậy $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

• Ta quy ước: $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$; $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2. Tính chất của tích phân

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$. Ta có:

• $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k là hằng số).

• $\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

• $\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

• Với c là số thực tuỳ ý thuộc đoạn $[a\,;\,b]$, ta có: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

3. Tích phân của một số hàm số sơ cấp

• Với $\alpha \neq -1$, ta có: $\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \dfrac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

• Với hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$, ta có:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a|.$$

• $\int_a^b \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b$.

• $\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$.

• Với hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, ta có:

$$\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x\Big|_a^b = \cot a - \cot b.$$

• Với hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, ta có:

$$\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x\Big|_a^b = \tan b - \tan a.$$

• Với $a > 0$, $a \neq 1$, ta có: $\displaystyle\int_\alpha^\beta a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}\Bigg|_\alpha^\beta = \frac{a^\beta - a^\alpha}{\ln a}$.

Đặc biệt $\displaystyle\int_a^b e^x \mathrm{d}x = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính tích phân

Ví dụ 1 Tính:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^6 \mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\displaystyle\int_0^1 x^6 \mathrm{d}x = \frac{x^7}{7}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{7}$.

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^4 x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{256}{7} - \frac{2}{7} = \frac{254}{7}$.

Ví dụ 2 Tính:

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2}{x}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2}{x}\mathrm{d}x = 2\int_2^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\ln|x|\Big|_2^4 = 2(\ln 4 - \ln 2) = 2\ln 2$.

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = (-\cos x + \sin x)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 1$.

c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -1-1=-2.$

Ví dụ 3 Tính:

a) $\int\limits_0^1 e^{-2x}\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{2^{3x}}\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^1 (2^{2x}\,.\,3^{x-1})\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_0^1 \frac{2^{x+1}}{3^x}\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int\limits_0^1 e^{-2x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (e^{-2})^x\mathrm{d}x = \frac{(e^{-2})^x}{\ln(e^{-2})}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}.$

b) $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{2^{3x}}\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 (2^{-3})^x\mathrm{d}x = \frac{(2^{-3})^x}{\ln(2^{-3})}\Big|_{-1}^0 = \frac{-2^{-3x}}{3\ln 2}\Big|_{-1}^0 = \frac{-1}{3\ln 2}+\frac{8}{3\ln 2} = \frac{7}{3\ln 2}.$

c) $\int\limits_0^1 (2^{2x}\,.\,3^{x-1})\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 12^x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,.\,\frac{12^x}{\ln 12}\Big|_0^1 = \frac{4}{\ln 12}-\frac{1}{3\ln 12} = \frac{11}{3\ln 12}.$

d) $\int\limits_0^1 \frac{2^{x+1}}{3^x}\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 \left(\frac{2}{3}\right)^x\mathrm{d}x = 2\,.\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{\frac{4}{3}}{\ln\frac{2}{3}} - \frac{2}{\ln\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3(\ln 2-\ln 3)}.$

Ví dụ 4 Cho $\int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x = -4$, $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có: $\int\limits_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x = -4+6=2.$

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 5 Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 5 - 2\cos t$ (m/s). Tính quãng đường vật chuyển động trong khoảng thời gian từ lúc $t = 0$ (s) đến $t = \frac{\pi}{2}$ (s).

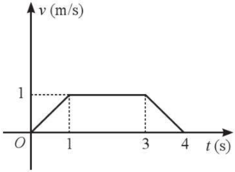
Giải

Ta có công thức tính quãng đường vật đi được là $s = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\mathrm{d}t$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là:

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 - 2\cos t)\mathrm{d}t = (5t - 2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{2} - 2 \text{ (m)}.$$

Ví dụ 6 Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ được cho bởi đồ thị như *Hình 1*.

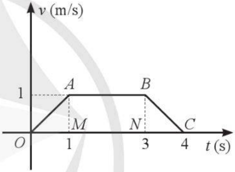


Hình 1

a) Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 1$ (s) đến lúc $t = 3$ (s).

b) Tính quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên.

Giải. (*Hình 2*)



Hình 2

a) Dựa vào đồ thị, hàm số biểu diễn vận tốc của vật từ lúc $t = 1$ đến lúc $t = 3$ là $v(t) = 1$. Suy ra quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó là:

$$s = \int_1^3 v(t)\mathrm{d}t = \int_1^3 1\mathrm{d}t = t\Big|_1^3 = 2 \text{ (m)}.$$

b) Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên là:

$$s = \int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 v(t)\mathrm{d}t + \int_1^3 v(t)\mathrm{d}t + \int_3^4 v(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_1^3 1\mathrm{d}t + \int_3^4 (-t + 4)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + t\Big|_1^3 + \left(\frac{-t^2}{2} + 4t\right)\Big|_3^4 = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3 \text{ (m)}.$$

C. BÀI TẬP

26. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$. Giả sử $F(x)$, $G(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $F(a) - F(b) = G(a) - G(b)$.

B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$.

27. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b x^\alpha dx = b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}$.

B. $\int_a^b x^\alpha dx = \alpha(b^{\alpha-1} - a^{\alpha-1})$.

C. $\int_a^b x^\alpha dx = \dfrac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$.

D. $\int_a^b x^\alpha dx = \dfrac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$.

28. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b \sin x dx = \sin a - \sin b$.

B. $\int_a^b \sin x dx = \sin b - \sin a$.

C. $\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$.

D. $\int_a^b \sin x dx = \cos b - \cos a$.

29. Phát biểu nào sau đây là đúng? Biết $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ liên tục trên $[a ; b]$.

A. $\int_a^b \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \cot a - \cot b$.

B. $\int_a^b \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \cot b - \cot a$.

C. $\int_a^b \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \tan a - \tan b$.

D. $\int_a^b \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \tan b - \tan a$.

30. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b e^x dx = e^{b+1} - e^{a+1}$.

B. $\int_a^b e^x dx = e^{a+1} - e^{b+1}$.

C. $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

D. $\int_a^b e^x dx = e^a - e^b$.

31. Tích phân $\int_a^b \dfrac{1}{x} dx$ bằng:

A. $\ln b - \ln a$. **B.** $|\ln b| - |\ln a|$. **C.** $\ln|b| - \ln|a|$. **D.** $\ln|a| - \ln|b|$.

32. Tích phân $\int_1^2 \dfrac{-3}{x^3} dx$ có giá trị bằng:

A. $\dfrac{9}{8}$. **B.** $-\dfrac{45}{64}$. **C.** $\dfrac{15}{8}$. **D.** $-\dfrac{9}{8}$.

33. Tích phân $\int_1^2 \dfrac{1}{x\sqrt{x}} dx$ có giá trị bằng:

A. $2 - \sqrt{2}$. **B.** $2 + \sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{-\sqrt{2} + 8}{20}$. **D.** $\dfrac{-\sqrt{2} - 8}{20}$.

34. Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

35. Nếu $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$ thì $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. – 3. **B.** – 1. **C.** 1. **D.** 3.

36. Cho $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int_2^3 g(x)\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4. **B.** 2. **C.** – 2. **D.** 3.

37. *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[a\,;b]$.

a) $\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = f'(b) - f'(a)$.	**Đ**	**S**
b) $\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.	**Đ**	**S**
c) $\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = f'(a) - f'(b)$.	**Đ**	**S**
d) $\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = f(a) - f(b)$.	**Đ**	**S**

38. Nêu một ví dụ chỉ ra rằng $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x \neq \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$ với $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;b]$, $g(x) \neq 0\ \forall x \in [a\,;b]$.

39. Cho $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = 6$, $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1\,;2]$ và $G(-1) = 8$. Tính $G(2)$.

40. Cho $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_{-2}^{1} g(x)\mathrm{d}x = -4$. Tính:

a) $\int_{1}^{-2} f(x)\mathrm{d}x$; b) $\int_{-2}^{1} -4f(x)\mathrm{d}x$; c) $\int_{-2}^{1} \frac{-2g(x)}{3}\mathrm{d}x$;

d) $\int_{-2}^{1} [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$; e) $\int_{-2}^{1} [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$; g) $\int_{-2}^{1} [3f(x)-5g(x)]\mathrm{d}x$.

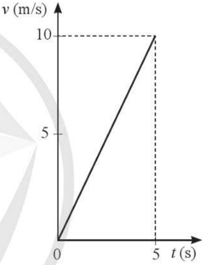
41. Cho $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x = -5$. Tính tích phân $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

42. Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái ô tô đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 18$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

43. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở *Hình 3*.

a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 5 giây đầu tiên.

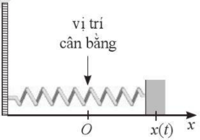
b) Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm 1 giây đến 5 giây.



Hình 3

44. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như *Hình 4*, có vận tốc tức thời cho bởi $v(t) = 2\cos t$, trong đó t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng cm/s. Tại thời điểm $t = 0$, con lắc đó ở vị trí cân bằng.

Tính quãng đường mà con lắc lò xo di chuyển được sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng theo đơn vị centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 4

§4 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tính diện tích hình phẳng

• Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

• Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. Tính thể tích hình khối

• Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x)$. Giả sử hàm số $S(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$. Khi đó, thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chú ý: Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a\,;\,b]$ thì $V = (b - a)S$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a\,;\,b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

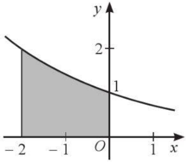
B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định các đường giới hạn của hình phẳng

Ví dụ 1 Cho đồ thị hàm số $y = 2^{-\frac{x}{2}}$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 5*. Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

Giải

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^{-\frac{x}{2}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 0$.



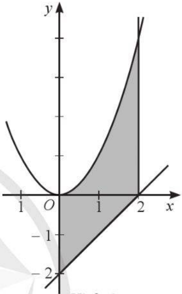
Hình 5

Ví dụ 2 Cho đồ thị hàm số $y = x^2$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 6*. Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

Giải

Đường thẳng đi qua các điểm có toạ độ (0 ; – 2) và (2 ; 0) có phương trình $y = x - 2$.

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = x - 2$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.



Hình 6

Vấn đề 2. Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ 3 Cho đồ thị hàm số $y = e^{-\frac{x}{2}}$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 7*.

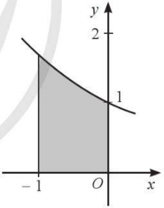
a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Viết công thức tính diện tích hình phẳng đó.

c) Tính diện tích hình phẳng đó.

Giải

a) Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{-\frac{x}{2}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$.



Hình 7

b) Diện tích hình phẳng đó được tính theo công thức $S = \int_{-1}^{0} \left| e^{-\frac{x}{2}} \right| dx = \int_{-1}^{0} e^{-\frac{x}{2}} dx$.

c) Diện tích hình phẳng đó là:

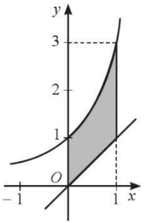
$$S = \int_{-1}^{0} e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_{-1}^{0} \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^x dx = \left.\frac{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^x}{\ln e^{-\frac{1}{2}}}\right|_{-1}^{0} = -2\left(1 - e^{\frac{1}{2}}\right).$$

Ví dụ 4 Cho các đồ thị hàm số $y = 3^x$, $y = x$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 8*.

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Viết công thức tính diện tích hình phẳng đó.

c) Tính diện tích hình phẳng đó.



Hình 8

Giải

a) Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 3^x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

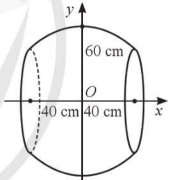
b) Diện tích hình phẳng đó được tính theo công thức

$$S = \int_0^1 \left|3^x - x\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 (3^x - x)\mathrm{d}x \text{ (vì } 3^x > x, \forall x \in [0 ; 1]).$$

c) Diện tích hình phẳng đó là: $S = \int_0^1 (3^x - x)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{2}{\ln 3} - \dfrac{1}{2}.$

Vấn đề 3. Xác định hình phẳng quay quanh trục *Ox* để tạo thành khối tròn xoay

Ví dụ 5 Cho khối tròn xoay như *Hình 9*. Hai đường cong cắt trục *Oy* biểu diễn bề mặt của khối là một phần của đường tròn tâm *O* bán kính 60 cm. Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục *Ox* ta được khối tròn xoay như *Hình 9*?



Hình 9

Giải

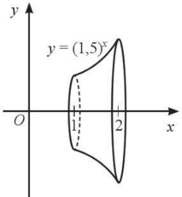
Vì hai đường cong cắt trục *Oy* biểu diễn bề mặt của khối là một phần của đường tròn tâm *O* bán kính 60 cm và hai mặt phẳng cắt khối vuông góc với trục *Ox* đi qua hai điểm có toạ độ (– 40 ; 0), (40 ; 0) nên hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{3\,600 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -40$, $x = 40$.

Vấn đề 4. Tính thể tích khối tròn xoay

Ví dụ 6 Cho đồ thị hàm số $y = (1,5)^x$ và khối tròn xoay như *Hình 10*.

a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục *Ox* ta được khối tròn xoay như *Hình 10*?

b) Tính thể tích khối tròn xoay đó.



Hình 10

Giải

a) Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (1,5)^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

b) Thể tích khối tròn xoay đó là:

$$V = \pi\int_1^2 [(1,5)^x]^2 \mathrm{d}x = \pi\int_1^2 [(1,5)^2]^x \mathrm{d}x = \left.\frac{1,5^{2x}\pi}{2\ln(1,5)}\right|_1^2 = \frac{45\pi}{32\ln(1,5)}.$$

C. BÀI TẬP

45. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3$, $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ là:

A. $\int_1^3 (x^3 - x^2)\mathrm{d}x.$ **B.** $\int_1^3 (x^2 - x^3)\mathrm{d}x.$

C. $\int_1^3 x^2\mathrm{d}x - \int_1^3 x^3\mathrm{d}x.$ **D.** $\int_1^3 x^2\mathrm{d}x + \int_1^3 x^3\mathrm{d}x.$

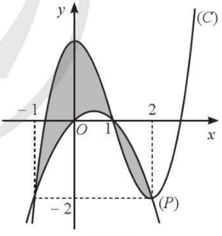
46. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (P), (C) và hình phẳng được tô màu như *Hình 11*. Công thức tính diện tích hình phẳng được tô màu là:

A. $S = \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x + \int_1^2 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x.$

B. $S = \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x - \int_1^2 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x.$

C. $S = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x.$

D. $S = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x.$



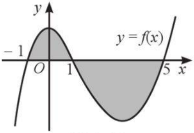
Hình 11

47. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ quay quanh trục Ox được khối tròn xoay có thể tích tính theo công thức là:

A. $\int_0^2 x\mathrm{d}x.$ **B.** $\pi\int_0^2 x^2\mathrm{d}x.$ **C.** $\int_0^2 x^2\mathrm{d}x.$ **D.** $\pi\int_0^2 x\mathrm{d}x.$

48. *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Cho hình phẳng được tô màu như *Hình 12*. Diện tích hình phẳng được kí hiệu là S.



Hình 12

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 5$.

b) $S = \int_{-1}^{5} |f(x)| \mathrm{d}x$.

c) $S = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

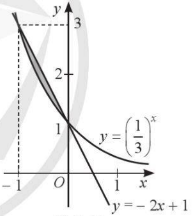
d) $S = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**

49. Cho hình phẳng được tô màu như *Hình 13*.

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

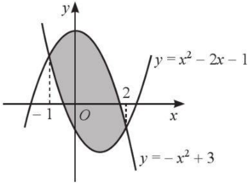


Hình 13

50. Cho hình phẳng được tô màu như *Hình 14*.

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.



Hình 14

51. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

52. Biết $F(x) = e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^1 [3 + f(x)]\mathrm{d}x$ bằng:

A. $2 + e$. **B.** $3 + e$. **C.** 3. **D.** $3x + e^x$.

53. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \sin a - \sin b$.

B. $\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \sin b - \sin a$.

C. $\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \cos a - \cos b$.

D. $\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \cos b - \cos a$.

54. Phát biểu nào sau đây là đúng? Biết $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ liên tục trên $[a\,;\,b]$.

A. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \cot a - \cot b$.

B. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \cot b - \cot a$.

C. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan a - \tan b$.

D. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan b - \tan a$.

55. Cho m thoả mãn $m > 0$, $m \neq 1$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b m^x\mathrm{d}x = m^b - m^a$.

B. $\int_a^b m^x\mathrm{d}x = m^a - m^b$.

C. $\int_a^b m^x\mathrm{d}x = \frac{m^b}{\ln m} - \frac{m^a}{\ln m}$.

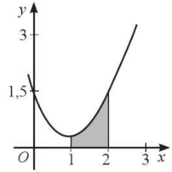
D. $\int m\ \mathrm{d}x = \frac{m^a}{\ln m} - \frac{m^b}{\ln m}$.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu ***56, 57, 58****, chọn phương án: đúng* ***(Đ)*** *hoặc sai* ***(S)****.*

56. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên K.

a) $\int [f(x)\,.\,g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x\,.\int g(x)\mathrm{d}x$.	Đ	S
b) $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.	Đ	S
c) $\int [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.	Đ	S
d) $\int \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x = \frac{\int f(x)\mathrm{d}x}{\int g(x)\mathrm{d}x}$.	Đ	S

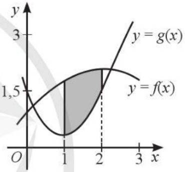
57. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ và gọi S là diện tích hình phẳng được tô màu như *Hình 15*.



Hình 15

a) $S = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
b) $S = \int_0^{1,5} \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
c) $S = \int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
d) $S = \int_1^2 \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**

58. Cho đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và gọi S là diện tích hình phẳng được tô màu như *Hình 16*.



Hình 16

a) $S = \int_1^2 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
b) $S = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
c) $S = \int_1^2 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**
d) $S = \int_1^2 \lvert g(x) - f(x)\rvert \mathrm{d}x$.	**Đ**	**S**

59. Tìm:

a) $\int (x+1)(x^2 - x + 1)\mathrm{d}x$; b) $\int x\left(2 - \dfrac{3}{x^3}\right)\mathrm{d}x$; c) $\int e^{-3x}\mathrm{d}x$;

d) $\int (2 - 3\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$; e) $\int \dfrac{1}{2^{-x+1}}\mathrm{d}x$; g) $\int \dfrac{3^{2x+1}}{2^x}\,\mathrm{d}x$.

60. Cho $\int_0^1 [2f(x) - 1]\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

61. Nêu một ví dụ chỉ ra rằng $\int [f(x)\,.\,g(x)]\mathrm{d}x \neq \int f(x)\mathrm{d}x\,.\int g(x)\mathrm{d}x$ với $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

62. Cho hàm số $f(x) = 2^x$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0) = \log_2(2e)$.

63. Tính:

a) $\int_0^1 -2\,dx$; b) $\int_0^1 \frac{2x}{3}\,dx$; c) $\int_0^1 x^4\,dx$;

d) $\int_1^3 2\sqrt[3]{x}\,dx$; e) $\int_1^2 \frac{2}{3x}\,dx$; g) $\int_1^9 (x\sqrt{x} - 2)\,dx$.

64. Tính:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$; c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2)\,dx$; g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\cos x + 2)\,dx$.

65. Tính:

a) $\int_0^2 e^{-5x}\,dx$; b) $\int_0^1 3^{x+2}\,dx$; c) $\int_{-1}^1 3^{2x}\,dx$.

66. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

a) Tính diện tích S của hình phẳng H.

b) Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox.

67. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

a) Tính diện tích S của hình phẳng H.

b) Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox.

68. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3 - 2\sin t$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s).

69. Một xe ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 110 m. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -20t + 40$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ lúc đạp phanh.

a) Lập công thức biểu diễn hàm số $s(t)$.

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là bao nhiêu giây?

c) Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là bao nhiêu mét? Xe ô tô có va chạm với chướng ngại vật trên đường hay không?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 NGUYÊN HÀM

1. C. **2.** B. **3.** C. **4.** D. **5.** B.

6. a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **S**.

7. a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

8. a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

9. a) $\int (2x^2 - 4x^5 + 6)\mathrm{d}x = \int 2x^2\mathrm{d}x - \int 4x^5\mathrm{d}x + \int 6\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^6 + 6x + C.$

b) $\int (x+3)(-2-x)\mathrm{d}x = \int (-x^2 - 5x - 6)\mathrm{d}x = -\int x^2\mathrm{d}x - \int 5x\mathrm{d}x - \int 6\mathrm{d}x$

$= \frac{-x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x + C.$

c) $\int \frac{x^6 - 7x^3}{x}\mathrm{d}x = \int (x^5 - 7x^2)\mathrm{d}x = \int x^5\mathrm{d}x - 7\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} - \frac{7x^3}{3} + C.$

10. a) $\int 2\sin x\mathrm{d}x = 2\int \sin x\mathrm{d}x = -2\cos x + C.$

b) $\int (\cos x + x^3)\mathrm{d}x = \int \cos x\mathrm{d}x + \int x^3\mathrm{d}x = \sin x + \frac{x^4}{4} + C.$

c) $\int\left(\frac{-x^4}{2}-3\cos x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int x^4\mathrm{d}x-3\int\cos x\mathrm{d}x=-\frac{x^5}{10}-3\sin x+C.$

11*. a) $\int 2^x\ln 2\mathrm{d}x=\int(2^x)'\mathrm{d}x=2^x+C.$

b) $\int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x=\int[\sin(x^2)]'\mathrm{d}x=\sin(x^2)+C.$

c) $\int\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}x=\frac{x+\sin x}{2}+C.$

12. $\int\frac{x^2+7x+12}{x+3}\mathrm{d}x=\int\frac{(x+3)(x+4)}{x+3}\mathrm{d}x=\int(x+4)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+4x+C.$

13. Ta có: $\int(3x^2-2x)\mathrm{d}x=\int 3x^2\mathrm{d}x-\int 2x\mathrm{d}x=x^3-x^2+C.$

Vì $F(1)=5$ nên $1^3-1^2+C=5$, suy ra $C=5$. Vậy $F(x)=x^3-x^2+5$.

14. Ta có:

$\int(4x^3+3x^2)\mathrm{d}x=\int 4x^3\mathrm{d}x+\int 3x^2\mathrm{d}x=x^4+x^3+C$ và $f'(x)=12x^2+6x$.

Vì $F(1)-f'(1)=-16$ nên $1^4+1^3+C-12\,.\,1^2-6\,.\,1=-16$, suy ra $C=0$.

Vậy $F(x)=x^4+x^3$.

15. Ta có: $\int v(t)\mathrm{d}t=\int-0,2\pi\sin(\pi t)\mathrm{d}t=-0,2\pi\int\sin(\pi t)\mathrm{d}t=0,2\cos(\pi t)+C.$

Do $x'(t)=v(t)$ nên $x(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$. Vì $x(0)=0,2$ nên $C=0$.

Vậy $x(t)=0,2\cos(\pi t)$.

§2 NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP

16. B. **17. A.** **18. D.** **19. A.** **20. D.**

21. a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **S**.

22. a) **Đ**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **S**.

23. a) $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C.$

b) $\int\sqrt{\frac{1}{x^7}}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{-7}{2}}\mathrm{d}x=\frac{-2}{5}x^{\frac{-5}{2}}+C.$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^{\frac{4}{5}}}}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{-4}{15}}\mathrm{d}x = \frac{15}{11}x^{\frac{11}{15}} + C.$

d) $\int\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + C.$

e) $\int \frac{(x-3)(x+1)}{x}\mathrm{d}x = \int\left(x - 2 - \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x - 3\ln|x| + C.$

g) $\int\left(3x^2 - \frac{4}{x}\right)(2x+5)\mathrm{d}x = \int\left(6x^3 + 15x^2 - 8 - \frac{20}{x}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 8x - 20\ln|x| + C.$

24. a) $\int e^{5x}\mathrm{d}x = \int (e^5)^x \mathrm{d}x = \frac{(e^5)^x}{\ln e^5} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C.$

b) $\int \frac{1}{2\,024^x}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{2\,024}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{2\,024}\right)^x}{\ln\frac{1}{2\,024}} + C = \frac{-1}{2\,024^x \ln 2\,024} + C.$

c) $\int (2^x + x^2)\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + C.$

d) $\int (2^x \,.\, 3^{2x+1})\mathrm{d}x = 3\int 18^x \mathrm{d}x = \frac{3\,.\,18^x}{\ln 18} + C.$

e) $\int \frac{3^x + 4^x + 1}{5^x}\mathrm{d}x = \int\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x\right]\mathrm{d}x$

$= \frac{3^x}{5^x(\ln 3 - \ln 5)} + \frac{4^x}{5^x(\ln 4 - \ln 5)} - \frac{1}{5^x \ln 5} + C.$

25. a) $\int (5\sin x - 6\cos x)\mathrm{d}x = -5\cos x - 6\sin x + C.$

b) $\int \sin^2 2x\mathrm{d}x + \int \cos^2 2x\mathrm{d}x = \int (\sin^2 2x + \cos^2 2x)\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x = x + C.$

c) $\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos x\mathrm{d}x = \frac{x - \sin x}{2} + C.$

d) $\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int\left(\sin^2\frac{x}{2} + \sin x + \cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int (1 + \sin x)\,\mathrm{d}x$

$= x - \cos x + C.$

e*) $\int \cos^4 \frac{x}{2}\mathrm{d}x - \int \sin^4 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$= \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$

g*) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int\left[(\tan^2 x + 1) - 1\right]\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \tan x - x + C.$

§3 TÍCH PHÂN

26. C. **27.** C. **28.** C. **29.** A. **30.** C. **31.** C. **32.** D. **33.** A. **34.** D.

35. B. **36.** A.

37. a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **S**.

38. Lấy $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $a = 1$, $b = 2$. Ta có:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,\quad \frac{\int_1^2 1\mathrm{d}x}{\int_1^2 x\mathrm{d}x} = \frac{x\Big|_1^2}{\frac{x^2}{2}\Big|_1^2} = \frac{2-1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \neq \frac{\int_1^2 1\mathrm{d}x}{\int_1^2 x\mathrm{d}x}$.

39. Vì $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ nên ta có $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = G(2) - G(-1)$ hay $6 = G(2) - 8$. Suy ra $G(2) = 14$.

40. a) $\int_1^{-2} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -5.$

b) $\int_{-2}^{1} -4f(x)\mathrm{d}x = -4\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -4 \,.\, 5 = -20.$

c) $\int_{-2}^{1} \frac{-2g(x)}{3}\mathrm{d}x = \frac{-2}{3}\int_{-2}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \frac{-2}{3}\,.\,(-4) = \frac{8}{3}.$

d) $\int\limits_{-2}^{1}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{1}g(x)\mathrm{d}x=5+(-4)=1.$

e) $\int\limits_{-2}^{1}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{1}g(x)\mathrm{d}x=5-(-4)=9.$

g) $\int\limits_{-2}^{1}[3f(x)-5g(x)]\mathrm{d}x=3\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-5\int\limits_{-2}^{1}g(x)\mathrm{d}x=3\,.\,5-5\,.\,(-4)=35.$

41. Ta có: $\int\limits_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}f(x)\mathrm{d}x$ hay $2=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+(-5).$

Suy ra $\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=7.$

42. Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t)=0$, tức là $-6t+18=0$ hay $t=3$ (s).

Quãng đường mà ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$\int\limits_{0}^{3}(-6t+18)\mathrm{d}t=\left.(-3t^2+18t)\right|_0^3=27\ \text{(m)}.$$

43. Đồ thị hàm số biểu diễn vận tốc theo thời gian là một đường thẳng qua gốc toạ độ, nên ta có: $v(t)=at$ ($a\in\mathbb{R}$).

Vì khi $t=5$ thì $v=10$ nên ta có: $10=a\,.\,5$ hay $a=2$. Vậy $v(t)=2t$.

a) Quãng đường mà vật di chuyển được trong 5 giây đầu tiên là:

$$\int\limits_{0}^{5}v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{5}2t\mathrm{d}t=\left.t^2\right|_0^5=25\ \text{(m)}.$$

b) Quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm 1 giây đến 5 giây là:

$$\int\limits_{1}^{5}v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{1}^{5}2t\mathrm{d}t=\left.t^2\right|_1^5=25-1=24\ \text{(m)}.$$

44. Quãng đường mà con lắc di chuyển sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng là:

$$S=\int\limits_{0}^{1}v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}2\cos t\mathrm{d}t=\left.2\sin t\right|_0^1=2\sin 1\approx 1,68\ \text{(cm)}.$$

§4 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

45. A. **46. B**. **47. B**.

48. a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

49. a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = -2x + 1$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$.

b) Diện tích hình phẳng đó là:

$$S = \int_{-1}^{0} \left| \left(\frac{1}{3}\right)^x - (-2x+1) \right| dx = \int_{-1}^{0} \left[-2x + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x \right] dx = \left[-x^2 + x + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln 3} \right] \Bigg|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{\ln 3} - \left(-2 + \frac{3}{\ln 3} \right) = 2 - \frac{2}{\ln 3}.$$

50. a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, $y = -x^2 + 3$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

b) Diện tích hình phẳng đó là:

$$S = \int_{-1}^{2} \left| (-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right| dx = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = 9.$$

51. Thể tích khối tròn xoay đó là:

$$V = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{\pi(x + \sin x)}{2} \Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 + 2\pi}{4}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

52. A. **53.** B. **54.** D. **55.** C.

56. a) **S**, b) **Đ**, c) **Đ**, d) **S**.

57. a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **Đ**.

58. a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **Đ**.

59. a) $\int (x+1)(x^2 - x + 1) dx = \int (x^3 + 1) dx = \frac{x^4}{4} + x + C.$

b) $\int x\left(2 - \frac{3}{x^3}\right) dx = \int \left(2x - \frac{3}{x^2}\right) dx = x^2 + \frac{3}{x} + C.$

c) $\int e^{-3x}\mathrm{d}x = \int (e^{-3})^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{(e^{-3})^x}{\ln e^{-3}} + C = -\dfrac{e^{-3x}}{3} + C.$

d) $\int (2 - 3\tan^2 x)\mathrm{d}x = \int \left(5 - \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = 5x - 3\tan x + C.$

e) $\int \dfrac{1}{2^{-x+1}}\mathrm{d}x = \int \dfrac{2^x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{2\ln 2} + C.$

g) $\int \dfrac{3^{2x+1}}{2^x}\,\mathrm{d}x = 3\int \left(\dfrac{9}{2}\right)^x \mathrm{d}x = 3\cdot \dfrac{\left(\dfrac{9}{2}\right)^x}{\ln\dfrac{9}{2}} + C = \dfrac{3^{2x+1}}{2^x(2\ln 3 - \ln 2)} + C.$

60. Ta có: $\int_0^1 [2f(x) - 1]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}x = 3$ mà $\int_0^1 \mathrm{d}x = 1$ nên $2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 1 = 3$

hay $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2.$

61. Lấy $f(x) = 2x$, $g(x) = 3$. Khi đó, $\int [f(x)\,.\,g(x)]\mathrm{d}x = \int 6x\mathrm{d}x = 3x^2 + C;$

$\int f(x)\mathrm{d}x\,.\int g(x)\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x\,.\int 3\mathrm{d}x = (x^2 + D)(3x + E)$

$= 3x^3 + Ex^2 + 3Dx + DE$ (C, D, E là các hằng số).

Suy ra $\int [f(x)\,.\,g(x)]\mathrm{d}x \neq \int f(x)\mathrm{d}x\,.\int g(x)\mathrm{d}x.$

62. Ta có: $\int 2^x\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$. Vì $F(0) = \log_2(2e)$ nên $\dfrac{1}{\ln 2} + C = 1 + \dfrac{1}{\ln 2}$, suy ra $C = 1$. Vậy $F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} + 1.$

63. a) $\int_0^1 -2\mathrm{d}x = -2x\Big|_0^1 = -2.$

b) $\int_0^1 \dfrac{2x}{3}\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}.$

c) $\int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \dfrac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{5}.$

d) $\int_1^3 2\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x = 2\int_1^3 x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^3 = \dfrac{9\sqrt[3]{3} - 3}{2}.$

e) $\int_1^2 \frac{2}{3x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|x|\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 2.$

g) $\int_1^9 (x\sqrt{x}-2)\mathrm{d}x = \int_1^9 \left(x^{\frac{3}{2}}-2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x\right)\Bigg|_1^9 = \frac{404}{5}.$

64. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-2)\mathrm{d}x = (-\cos x-2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-\pi.$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\cos x+2)\mathrm{d}x = (3\sin x+2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}.$

65. a) $\int_0^2 e^{-5x}\mathrm{d}x = \int_0^2 (e^{-5})^x\mathrm{d}x = \frac{(e^{-5})^x}{\ln e^{-5}}\Bigg|_0^2 = -\frac{e^{-5x}}{5}\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{5e^{10}}+\frac{1}{5}.$

b) $\int_0^1 3^{x+2}\mathrm{d}x = 9\int_0^1 3^x\mathrm{d}x = \frac{3^{x+2}}{\ln 3}\Bigg|_0^1 = \frac{18}{\ln 3}.$

c) $\int_{-1}^1 3^{2x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 9^x\mathrm{d}x = \frac{9^x}{\ln 9}\Bigg|_{-1}^1 = \frac{80}{9\ln 9}.$

66. a) $S = \int_1^2 2^x \mathrm{d}x = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_1^2 = \frac{2}{\ln 2}$.

b) $V = \pi\int_1^2 (2^x)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_1^2 4^x \mathrm{d}x = \left.\frac{4^x \pi}{2\ln 2}\right|_1^2 = \frac{12\pi}{2\ln 2} = \frac{6\pi}{\ln 2}$.

67. a) $S = \int_0^2 \left|x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x = \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{4}{3}$.

b) $V = \pi\int_0^2 (x^2 - 2x)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\mathrm{d}x = \pi\left.\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{16\pi}{15}$.

68. Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) là:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 - 2\sin t)\mathrm{d}t = \left.(3t + 2\cos t)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} + \sqrt{2} - 2 \text{ (m)}.$$

69. a) Ta có: $\int(-20t + 40)\mathrm{d}t = -10t^2 + 40t + C$.

Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$. Suy ra $s(t) = -10t^2 + 40t$.

b) Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0$, tức là $-20t + 40 = 0$ hay $t = 2$.

Vậy thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 2 giây.

c) Ta có: 72 km/h = 20 m/s.

Quãng đường xe ô tô còn di chuyển được kể từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn là:

$$s(2) = -10 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 = 40 \text{ (m)}.$$

Vậy quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là: $20 + 40 = 60$ (m).

Do $60 < 110$ nên xe ô tô đã dừng hẳn trước khi va chạm với chướng ngại vật trên đường. Vì thế, ô tô đó không va chạm với chướng ngại vật.

Chương V
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

§1 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mặt phẳng

a) Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

• Cho mặt phẳng (P). Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) thì $\vec{n}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (P).

Nhận xét: Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

• Cho mặt phẳng (P). Hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) được gọi là *cặp vectơ chỉ phương* của mặt phẳng (P).

Chú ý

Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết cặp vectơ chỉ phương:

Nếu hai vectơ $\vec{a} = (a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1\ ;\ b_2\ ;\ b_3)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

b) Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C không đồng thời bằng 0) là *phương trình tổng quát* của mặt phẳng. Hệ số D gọi là *hệ số tự do* của phương trình tổng quát.

Nhận xét: Nếu mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, thì vectơ $\vec{n} = (A\ ;\ B\ ;\ C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

c) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng

• *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến*

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A ; B ; C)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là: $Ax + By + Cz + D = 0$ với $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

• *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương*

Để lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}, \vec{v}$, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.

Bước 2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$ nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến.

• *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng*

Để lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $H(a_1 ; b_1 ; c_1)$, $I(a_2 ; b_2 ; c_2)$, $K(a_3 ; b_3 ; c_3)$ không thẳng hàng, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) là:

$$\overrightarrow{HI} = (a_2 - a_1 ; b_2 - b_1 ; c_2 - c_1),\ \overrightarrow{HK} = (a_3 - a_1 ; b_3 - b_1 ; c_3 - c_1).$$

Bước 2. Tìm $\vec{n} = \left[\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HK}\right]$.

Bước 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(a_1 ; b_1 ; c_1)$ nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến.

Chú ý: Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$ với $abc \neq 0$ có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Phương trình đó còn được gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.*

2. Điều kiện song song, vuông góc của hai mặt phẳng

a) Điều kiện song song của hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Gọi $\vec{n_1} = (A_1 ; B_1 ; C_1)$, $\vec{n_2} = (A_2 ; B_2 ; C_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1), (P_2).

Khi đó: $(P_1) \mathbin{/\!/} (P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\begin{cases} \vec{n_1} = k\vec{n_2} \\ D_1 \neq kD_2. \end{cases}$

b) Điều kiện vuông góc của hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Khi đó: $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

3. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ đến mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$ được tính theo công thức: $d(M_0, (P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định phương trình tổng quát và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Ví dụ 1 Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $2x - y + z^2 - 1 = 0$.

B. $x - y^2 + z - 1 = 0$.

C. $x^2 - y + z - 1 = 0$.

D. $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Giải

Phương trình tổng quát của mặt phẳng có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ với A, B, C không đồng thời bằng 0 và x, y, z có số mũ bằng 1.

Nhận thấy chỉ có phương trình $2x + 3y + z - 1 = 0$ đúng dạng phương trình tổng quát của mặt phẳng. Chọn **D**.

Ví dụ 2 Cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x + 4y + 9z + 1 = 0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}_1 = (2 ; 4 ; 9)$.

B. $\vec{n}_2 = (-2 ; 4 ; 9)$.

C. $\vec{n}_3 = (4 ; 9 ; 1)$.

D. $\vec{n}_4 = (-2 ; 4 ; 1)$.

Giải

Phương trình $-2x + 4y + 9z + 1 = 0$ có $A = -2, B = 4, C = 9$. Vậy $\vec{n}_2 = (-2 ; 4 ; 9)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Chọn **B**.

Ví dụ 3 *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Cho điểm $I(1 ; 2 ; 3)$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 15 = 0$. Gọi $H(x_H ; y_H ; z_H)$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

a) Vectơ $\vec{n} = (2\ ;\ 2\ ;\ -1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).	Đ	S
b) Vectơ $\overrightarrow{IH}$ không cùng phương với vectơ $\vec{n} = (2\ ;\ 2\ ;\ -1)$.	Đ	S
c) $\overrightarrow{IH} = t\vec{n}$ với t là một số thực nào đó.	Đ	S
d) Toạ độ của điểm H là $(5\ ;\ 6\ ;\ -2)$.	Đ	S

Giải

Phương trình $2x + 2y - z + 15 = 0$ có $A = 2$, $B = 2$, $C = -1$ nên vectơ $\vec{n} = (2\ ;\ 2\ ;\ -1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vì $IH \perp (P)$ nên hai vectơ $\overrightarrow{IH}$ và $\vec{n}$ có giá song song hoặc trùng nhau. Suy ra $\overrightarrow{IH}$ và $\vec{n}$ cùng phương.

Khi đó, $\overrightarrow{IH} = t\vec{n}$ với t là một số thực nào đó. Với $\overrightarrow{IH} = (x_H - 1\ ;\ y_H - 2\ ;\ z_H - 3)$, $t\vec{n} = (2t\ ;\ 2t\ ;\ -t)$, ta có:

$$\overrightarrow{IH} = t\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - 1 = 2t \\ y_H - 2 = 2t \\ z_H - 3 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = 2 + 2t \\ z_H = 3 - t. \end{cases}$$

Suy ra $H(1 + 2t\ ;\ 2 + 2t\ ;\ 3 - t)$. Mà H thuộc (P): $2x + 2y - z + 15 = 0$ nên

$$2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - (3 - t) + 15 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Vậy $H(-3\ ;\ -2\ ;\ 5)$.

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **S**.

Vấn đề 2. Lập phương trình mặt phẳng

Phương pháp: Để lập phương trình mặt phẳng, ta thường chỉ ra toạ độ một điểm thuộc mặt phẳng và một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó (riêng trường hợp mặt phẳng cắt ba trục toạ độ tại ba điểm cho trước, ta có thể lập phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn).

Ví dụ 4 Lập phương trình mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $I(-2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ và nhận $\vec{n} = (4\ ;\ -1\ ;\ 5)$ làm vectơ pháp tuyến;

b) (P) đi qua ba điểm $A(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

Giải

a) Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$4\ .\ (x + 2) + (-1)\ .\ (y - 3) + 5\ .\ (z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x - y + 5z + 11 = 0.$$

b) Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow 3x+2y+6z-6=0.$$

Vấn đề 3. Chứng minh hai mặt phẳng song song hoặc vuông góc

Ví dụ 5 Cho hai mặt phẳng (P_1): $3x+2y-z+1=0$, (P_2): $6x+4y-2z+3=0$. Chứng minh rằng $(P_1) \parallel (P_2)$.

Giải

Hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1}=(3\,;2\,;-1)$, $\vec{n_2}=(6\,;4\,;-2)$. Vì $\vec{n_2}=2\vec{n_1}$ và $3 \neq 2\,.\,1$ nên $(P_1) \parallel (P_2)$.

Ví dụ 6 Cho hai mặt phẳng (P_1): $4x-3y-2z+4=0$, (P_2): $5x-2y+13z+9=0$. Chứng minh rằng $(P_1) \perp (P_2)$.

Giải

Các vectơ $\vec{n_1}=(4\,;-3\,;-2)$, $\vec{n_2}=(5\,;-2\,;13)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

Vì $\vec{n_1}\,.\,\vec{n_2}=4\,.\,5+(-3)\,.\,(-2)+(-2)\,.\,13=0$ nên $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$. Vậy $(P_1)\perp(P_2)$.

Vấn đề 4. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Ví dụ 7 Cho mặt phẳng (P): $2x-3y+6z-7=0$ và điểm $M(5\,;2\,;-3)$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

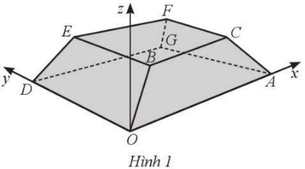
Giải

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là:

$$d(M,(P))=\frac{|2\,.\,5-3\,.\,2+6\,.\,(-3)-7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=3.$$

Vấn đề 5. Ứng dụng

Ví dụ 8 *Hình 1* minh hoạ hình ảnh một toà nhà trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Biết $A(50\,;0\,;0)$, $D(0\,;20\,;0)$, $B(4k\,;3k\,;2k)$ với $k>0$ và mặt phẳng $(CBEF)$ có phương trình là $z=3$.



Hình 1

a) Tìm toạ độ của điểm B.

b) Lập phương trình mặt phẳng $(AOBC)$.

c) Lập phương trình mặt phẳng $(DOBE)$.

d) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng $(AOBC)$ và $(DOBE)$.

Giải

a) Vì $B(4k ; 3k ; 2k)$ thuộc mặt phẳng $(CBEF)$: $z = 3$ nên $2k = 3$, suy ra $k = \frac{3}{2}$. Vậy $B\left(6 ; \frac{9}{2} ; 3\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OA} = (50 ; 0 ; 0)$, $\overrightarrow{OB} = \left(6 ; \frac{9}{2} ; 3\right)$ nên

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 50 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 6 & \frac{9}{2} \end{vmatrix}\right) = (0 ; -150 ; 225).$$

Suy ra $\vec{n} = (0 ; -2 ; 3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AOBC)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(AOBC)$ là:

$$0 . (x - 0) + (-2) . (y - 0) + 3 . (z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2y - 3z = 0.$$

c) Ta có: $\overrightarrow{OD} = (0 ; 20 ; 0)$, $\overrightarrow{OB} = \left(6 ; \frac{9}{2} ; 3\right)$ nên

$$\left[\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right] = \left(\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ \frac{9}{2} & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 20 \\ 6 & \frac{9}{2} \end{vmatrix}\right) = (60 ; 0 ; -120).$$

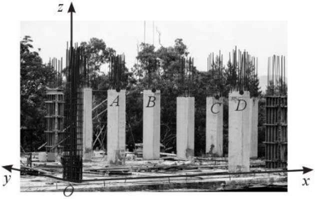
Suy ra $\vec{u} = (1 ; 0 ; -2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(DOBE)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(DOBE)$ là:

$$1 . (x - 0) + 0 . (y - 0) + (-2) . (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 2z = 0.$$

d) Một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng $(AOBC)$ và $(DOBE)$ lần lượt là: $\vec{p} = (0 ; 2 ; -3)$ và $\vec{q} = (-1 ; 0 ; 2)$.

Ví dụ 9 *Hình 2* minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2 ; 1 ; 3)$, $B(4 ; 3 ; 3)$, $C(6 ; 3 ; 2,5)$, $D(4 ; 0 ; 2,8)$.



Hình 2

a) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng hay không?

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2 ; 2 ; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (4 ; 2 ; -0,5)$ nên

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -0,5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -0,5 & 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-1 ; 1 ; -4)$$

là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$(-1) . (x-2) + 1 . (y-1) + (-4) . (z-3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 4z - 13 = 0.$$

b) Vì $4 - 0 + 4 . 2,8 - 13 = 2,2 \neq 0$ nên điểm $D(4 ; 0 ; 2,8)$ không thuộc mặt phẳng (ABC). Vậy bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

C. BÀI TẬP

1. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $x - y^2 - 2 = 0$. **B.** $x + z^2 - 3 = 0$.

C. $x - z - 4 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

2. Cho mặt phẳng (P): $-x + 2y + 3 = 0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}_1 = (-1 ; 2 ; 3)$. **B.** $\vec{n}_2 = (1 ; 2 ; 3)$.

C. $\vec{n}_3 = (-1 ; 2 ; 0)$. **D.** $\vec{n}_4 = (-x ; 2y ; 3)$.

3. Cho mặt phẳng (P): $3x - 6y + 12z - 13 = 0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}_1 = (3 ; 6 ; 12)$. **B.** $\vec{n}_2 = (3x ; 6y ; 12z)$.

C. $\vec{n}_3 = (3x ; -6y ; 12z)$. **D.** $\vec{n}_4 = (-1 ; 2 ; -4)$.

4. Cho mặt phẳng (P): $3x + 4y - z + 5 = 0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}_1 = (3 ; 4 ; 1)$. **B.** $\vec{n}_2 = (3 ; 4 ; -1)$.

C. $\vec{n}_3 = (3 ; 4 ; 5)$. **D.** $\vec{n}_4 = (3 ; 4 ; -5)$.

5. Mặt phẳng đi qua điểm $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và vuông góc với Ox có phương trình là:

A. $x - x_0 = 0$. **B.** $y - y_0 = 0$.

C. $z - z_0 = 0$. **D.** $x + y + z - x_0 - y_0 - z_0 = 0$.

6. Khoảng cách từ điểm $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ đến mặt phẳng (Oxy) bằng:

A. $|x_0|$. **B.** $|y_0|$. **C.** $|z_0|$. **D.** $|x_0 + y_0 + z_0|$.

7. Khoảng cách từ điểm $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ đến mặt phẳng (P): $ay + bz + c = 0$ bằng:

A. $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **B.** $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

C. $\dfrac{|ay_0 + bz_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. **D.** $\dfrac{|ay_0 + bz_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **8**, **9**, chọn phương án: đúng **(Đ)** hoặc sai **(S)**.*

8. Cho mặt phẳng (P): $-3x + y - 2z + 5 = 0$.

a) Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (P) thì $k\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (P) với $k \neq 0$.	**Đ**	**S**
b) Nếu $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ đều là vectơ pháp tuyến của (P) thì $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ không cùng phương.	**Đ**	**S**
c) Vectơ $\vec{n} = (-3 ; 1 ; -2)$ không là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).	**Đ**	**S**
d) Mọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có toạ độ $(-3k ; k ; -2k)$ với $k \neq 0$.	**Đ**	**S**

9. Cho điểm $I(-3 ; 0 ; 1)$ và mặt phẳng (P): $x - 3y - 4z + 1 = 0$.

a) Điểm $I(-3 ; 0 ; 1)$ không thuộc mặt phẳng (P).	**Đ**	**S**
b) Vectơ $\vec{n} = (1 ; -3 ; 4)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).	**Đ**	**S**
c) Nếu mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) thì vectơ $\vec{n} = (1 ; -3 ; 4)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).	**Đ**	**S**
d) Mặt phẳng (R) đi qua điểm I và song song với (P) có phương trình là: $x - 3y - 4z - 7 = 0$.	**Đ**	**S**

10. Lập phương trình mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $I(2 ; 1 ; -4)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3 ; -4 ; 5)$;

b) (P) đi qua điểm $I(5 ; -2 ; 1)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (3 ; -1 ; 4)$, $\vec{b} = (0 ; 2 ; -1)$;

c) (P) đi qua ba điểm $A(0 ; 3 ; 7)$, $B(2 ; -5 ; 4)$ và $C(1 ; -4 ; -1)$.

11. Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(5 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 7 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 9)$.

12. Cho ba điểm $A(3 ; -4 ; 2)$, $B(1 ; 2 ; 3)$, $C(0 ; 1 ; 5)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng BC.

13. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $K(4 ; -3 ; 7)$ và song song với mặt phẳng (Q): $3x - 2y + 4z + 7 = 0$.

14. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1 ; -2 ; 4)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q): $x - y - 2 = 0$, (R): $y + z + 3 = 0$.

15. Cho điểm $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$. Tính khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $x - a = 0$, $y - b = 0$, $z - c = 0$.

16. Cho hai mặt phẳng (P_1): $x + 2y - 3z + 5 = 0$ và (P_2): $-4x - 8y + 12z + 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng $(P_1) \,//\, (P_2)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P_1), (P_2).

17. Cho hình chóp $S.ABC$ thoả mãn $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 90°$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}.$$

18. Cho bốn điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 3)$ và $D(1 ; 2 ; 3)$. Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng.

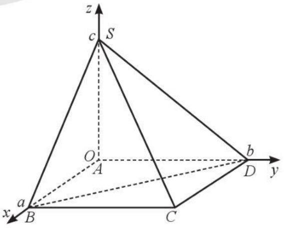
19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $AA' = 4a$ $(a > 0)$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các tia AB, AD, AA' sao cho $AM = a$, $AN = 2a$, $AP = 3a$. Tính khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (MNP).

20. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và các điểm $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(a ; 0 ; 0)$, $D(0 ; b ; 0)$, $S(0 ; 0 ; c)$ với a, b, c là các số dương (*Hình 3*).

a) Tìm toạ độ của điểm C, trung điểm M của BC, trọng tâm G của tam giác SCD.

b) Lập phương trình mặt phẳng (SBD).

c) Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD).



Hình 3

21. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét) vào một ngôi nhà 1 tầng, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz. Biết rằng các vị trí $A(3 ; 4 ; 33)$, $D(9 ; 8 ; 35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Hãy cho biết độ dày của mái nhà đó là bao nhiêu decimét?

§2 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình đường thẳng

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ và vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$. Vectơ $\vec{u}$ được gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

***Nhận xét*:** Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của một đường thẳng thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

b) Phương trình tham số của đường thẳng

Hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0, t là tham số, được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b ; c)$.

Nhận xét: Nếu đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0, t là tham số, thì vectơ $\vec{u} = (a ; b ; c)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

c) Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b ; c)$.

Nếu $abc \neq 0$ thì hệ phương trình $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng Δ.

d) Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$, $B(x_1 ; y_1 ; z_1)$ có:

• Phương trình tham số là: $\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$ (t là tham số).

• Phương trình chính tắc là: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$ $(x_0 \neq x_1, y_0 \neq y_1, z_0 \neq z_1)$.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

• Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1 ; c_1)$; $\vec{u}_2 = (a_2 ; b_2 ; c_2)$; $\vec{u}_3 = (a_3 ; b_3 ; c_3)$.

– Hai vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ là cùng phương khi và chỉ khi $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$.

– Ba vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ là đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] . \vec{u}_3 = 0$.

• Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

$$\Delta_1 \mathbin{//} \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] \neq \vec{0}. \end{cases}$$

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] . \overrightarrow{M_1M_2} = 0. \end{cases}$$

$$\Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] . \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$$

***Chú ý*:** Trong một số trường hợp, để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, ta có thể giải hệ phương trình được lập từ những phương trình xác định hai đường thẳng đó, sau đó xét cặp vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó có cùng phương hay không (nếu cần thiết).

3. Góc

a) Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1 ; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2 ; b_2 ; c_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos(\Delta_1,\ \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ .\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Nhận xét: $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$

b) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1\ ;\ b_1\ ;\ c_1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a_2\ ;\ b_2\ ;\ c_2)$. Gọi $(\Delta, (P))$ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Khi đó, ta có:

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u}\ .\ \vec{n}|}{|\vec{u}|\ .\ |\vec{n}|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ .\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

c) Góc giữa hai mặt phẳng

• Góc giữa hai mặt phẳng (P_1), (P_2) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó, kí hiệu là $((P_1), (P_2))$.

• Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1\ ;\ B_1\ ;\ C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2\ ;\ B_2\ ;\ C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ .\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng

Ví dụ 1 Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 6t \\ z = 5 - 9t \end{cases}$?

A. $\vec{u}_1 = (2\ ;\ -1\ ;\ 5)$. **B.** $\vec{u}_2 = (3\ ;\ 6\ ;\ 9)$.

C. $\vec{u}_3 = (1\ ;\ 2\ ;\ -3)$. **D.** $\vec{u}_4 = (2\ ;\ 1\ ;\ 5)$.

Giải

Ta có vectơ $\vec{u} = (3\ ;\ 6\ ;\ -9)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ, mà $\vec{u}_3 = \frac{1}{3}\vec{u}$ nên vectơ $\vec{u}_3 = (1\ ;\ 2\ ;\ -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Chọn **C**.

Vấn đề 2. Lập phương trình đường thẳng

Phương pháp: Để lập phương trình đường thẳng, ta thường chỉ ra toạ độ một điểm thuộc đường thẳng và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

Ví dụ 2 Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ, biết Δ đi qua hai điểm $A(2 ; -1 ; 4)$ và $B(5 ; -10 ; -7)$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3 ; -9 ; -11)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Vậy,

phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 9t \\ z = 4 - 11t \end{cases}$ (t là tham số);

phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-9} = \dfrac{z-4}{-11}$.

Vấn đề 3. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Ví dụ 3 Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ_1: $\begin{cases} x = -2 + 3t_1 \\ y = 4 + 6t_1 \\ z = -1 - 12t_1 \end{cases}$, Δ_2: $\begin{cases} x = 5 - t_2 \\ y = -1 - 2t_2 \\ z = 3 + 4t_2 \end{cases}$ (t_1, t_2 là tham số);

b) Δ_1: $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+4}{3}$, Δ_2: $\dfrac{x-6}{-5} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z+5}{7}$;

c) Δ_1: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z}{3}$, Δ_2: $\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ (t là tham số).

Giải

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-2 ; 4 ; -1)$ và có $\vec{u}_1 = (3 ; 6 ; -12)$ là vectơ chỉ phương. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(5 ; -1 ; 3)$ và có $\vec{u}_2 = (-1 ; -2 ; 4)$ là vectơ chỉ phương.

Ta có: $\vec{u}_1 = -3\vec{u}_2$, suy ra $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (7 ; -5 ; 4)$ và $\dfrac{3}{7} \neq \dfrac{6}{-5}$ nên $\vec{u}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ không cùng phương.

Vậy $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.

b) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-3 ; 1 ; -4)$ và có $\vec{u}_1 = (2 ; -1 ; 3)$ là vectơ chỉ phương. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(6 ; -5 ; -5)$ và có $\vec{u}_2 = (-5 ; 4 ; 7)$ là vectơ chỉ phương.

Ta có: $\dfrac{2}{-5} \neq \dfrac{-1}{4}$, suy ra $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (9 ; -6 ; -1)$,

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-19 ; -29 ; 3).$$

Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] . \overrightarrow{M_1M_2} = (-19) . 9 + (-29) . (-6) + 3 . (-1) = 0$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng. Vậy Δ_1 cắt Δ_2.

c) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-1 ; 4 ; 0)$ và có $\vec{u}_1 = (1 ; -2 ; 3)$ là vectơ chỉ phương. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-11 ; -2 ; 3)$ và có $\vec{u}_2 = (5 ; 3 ; -2)$ là vectơ chỉ phương.

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-10 ; -6 ; 3)$,

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-5 ; 17 ; 13).$$

Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] . \overrightarrow{M_1M_2} = (-5) . (-10) + 17 . (-6) + 13 . 3 = -13 \neq 0$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng. Vậy Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Vấn đề 4. Tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng và góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ 4 Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2, biết

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 + t_1 \\ z = -9 + \sqrt{3}t_1 \end{cases} \text{ và } \Delta_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 + t_2 \\ z = -\sqrt{3}t_2 \end{cases} (t_1, t_2 \text{ là tham số}).$$

Giải

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (0 ; 1 ; \sqrt{3})$, $\vec{u}_2 = (0 ; 1 ; -\sqrt{3})$.

Ta có: $$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|0 . 0 + 1 . 1 + \sqrt{3} . (-\sqrt{3})|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} . \sqrt{0^2 + 1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}.$$

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) = 60^\circ$.

Ví dụ 5 Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \dfrac{x-12}{9} = \dfrac{y+7}{-1} = \dfrac{z-5}{11}, \quad \Delta_2 : \dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-13}{1}.$$

Chứng minh $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Giải

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (9 ; -1 ; 11)$, $\vec{u}_2 = (-1 ; 2 ; 1)$.

Ta có: $\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 9 . (-1) + (-1) . 2 + 11 . 1 = 0$. Suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Ví dụ 6 Cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2 ; 3 ; 5)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; -1 ; 4)$. Tính sin của góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Ta có: $\sin(\Delta, (P)) = \dfrac{|(-2) . 3 + 3 . (-1) + 5 . 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} . \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \dfrac{11}{2\sqrt{247}}$.

Suy ra $(\Delta, (P)) \approx 20°$.

Ví dụ 7 Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết (P_1) và (P_2) có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (\sqrt{3} ; 0 ; -1)$, $\vec{n}_2 = (1 ; 0 ; -\sqrt{3})$.

Giải

Ta có: $\cos((P_1), (P_2)) = \dfrac{|\sqrt{3} . 1 + 0 . 0 + (-1) . (-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0^2 + (-1)^2} . \sqrt{1^2 + 0^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $((P_1), (P_2)) = 30°$.

Ví dụ 8 *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$, $\Delta_2 : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-5}{-2}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

a) Vectơ $\vec{u}_1 = (2 ; 1 ; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1.	**Đ**	**S**
b) Vectơ có toạ độ $(3 ; 4 ; 5)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_2.	**Đ**	**S**
c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}_1 . \vec{u}_2}{\lvert\vec{u}_1\rvert . \lvert\vec{u}_2\rvert}$ với $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của Δ_1, Δ_2.	**Đ**	**S**
d) $\alpha \approx 64°$ (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).	**Đ**	**S**

Giải

Ta có: $\vec{u}_1 = (2 ; 1 ; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1;

$\vec{u}_2 = (-1 ; 2 ; -2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_2.

Vì vectơ có toạ độ (3 ; 4 ; 5) không cùng phương với vectơ $\vec{u}_2 = (-1 ; 2 ; -2)$ nên vectơ đó không là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_2.

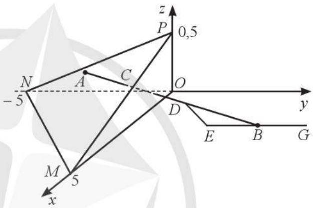
Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}_1 . \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| . |\vec{u}_2|} \neq \dfrac{\vec{u}_1 . \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| . |\vec{u}_2|}$. Ngoài ra,

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_1 . \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| . |\vec{u}_2|} = \frac{|2 . (-1) + 1 . 2 + 2 . (-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} . \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha \approx 64^\circ.$$

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **Đ**.

Vấn đề 5. Ứng dụng

Ví dụ 9 Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz* (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí *A*(3,5 ; – 2 ; 0,4) và sẽ hạ cánh ở vị trí *B*(3,5 ; 5,5 ; 0) trên đường băng *EG* (*Hình 4*).



Hình 4

a) Lập phương trình đường thẳng *AB*.

b) Hãy cho biết góc trượt (góc giữa đường bay *AB* và mặt phẳng nằm ngang (*Oxy*)) có nằm trong phạm vi cho phép từ 2,5° đến 3,5° hay không.

c) Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm *M*(5 ; 0 ; 0), *N*(0 ; – 5 ; 0), *P*(0 ; 0 ; 0,5). Tìm toạ độ của điểm *C* là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.

d) Tìm toạ độ của điểm *D* trên đoạn thẳng *AB* là vị trí mà máy bay ở độ cao 120 m.

e) Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu *E*(3,5 ; 4,5 ; 0) của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Hỏi sau khi ra khỏi đám mây, người phi công có đạt được quy định an toàn đó hay không? Biết rằng tầm nhìn của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0 ; 7,5 ; -0,4)$.

Phương trình đường thẳng *AB* là: $\begin{cases} x = 3,5 \\ y = -2 + 7,5t \\ z = 0,4 - 0,4t \end{cases}$ (*t* là tham số).

b) Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$. Ta có:

$$\sin(AB,(Oxy)) = \frac{|0\,.\,0 + 7,5\,.\,0 + (-0,4)\,.\,1|}{\sqrt{0^2 + 7,5^2 + (-0,4)^2}\,.\,\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{0,4}{\sqrt{56,41}} \Rightarrow (\Delta,(P)) \approx 3^{\mathrm{o}}.$$

Vì $2,5^{\mathrm{o}} < 3^{\mathrm{o}} < 3,5^{\mathrm{o}}$ nên góc trượt của máy bay nằm trong phạm vi cho phép.

c) Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{-5} + \dfrac{z}{0,5} = 1 \Leftrightarrow x - y + 10z - 5 = 0.$

Vì C thuộc đường thẳng AB nên $C(3,5\,;\,-2 + 7,5c\,;\,0,4 - 0,4c)$ $(c \in \mathbb{R})$.

Mà C thuộc mặt phẳng (MNP) nên

$$3,5 - (-2 + 7,5c) + 10\,.\,(0,4 - 0,4c) - 5 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{9}{23}.$$

Suy ra $C\left(\dfrac{7}{2}\,;\,\dfrac{43}{46}\,;\,\dfrac{28}{115}\right)$.

d) Vì D thuộc AB nên $D(3,5\,;\,-2 + 7,5d\,;\,0,4 - 0,4d)$ $(d \in \mathbb{R})$. Mà D có cao độ là $0,12$ nên $0,4 - 0,4d = 0,12 \Leftrightarrow d = 0,7$. Vậy $D(3,5\,;\,3,25\,;\,0,12)$.

e) Ta có: $DE = \sqrt{(3,5-3,5)^2 + (4,5-3,25)^2 + (0-0,12)^2} \approx 1,26$ (km).

Vì 900 m $= 0,9$ km $< 1,26$ km nên phi công không nhìn thấy điểm E và không đạt được quy định an toàn bay.

C. BÀI TẬP

22. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\begin{cases} x = 7 \\ y = -9 + t \\ z = 16 \end{cases}$?

A. $\vec{u}_1 = (7\,;\,9\,;\,-16)$. **B.** $\vec{u}_2 = (7\,;\,-9\,;\,16)$.

C. $\vec{u}_3 = (0\,;\,1\,;\,0)$. **D.** $\vec{u}_4 = (-7\,;\,9\,;\,-16)$.

23. Đường thẳng đi qua điểm $A(-8\,;\,-3\,;\,7)$ và nhận $\vec{u} = (3\,;\,-4\,;\,2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 3 - 8t \\ y = -4 - 3t \\ z = 2 + 7t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 + 2t. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + 8t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + 7t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = -3 - 4t \\ z = 7 + 2t. \end{cases}$

24. Đường thẳng đi qua điểm $B(5\ ;-2\ ;9)$ nhận $\vec{u}=(-17\ ;2\ ;-11)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là:

A. $\dfrac{x+5}{-17}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+9}{-11}$.

B. $\dfrac{x-17}{5}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-11}{9}$.

C. $\dfrac{x-5}{-17}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-9}{-11}$.

D. $\dfrac{x+17}{5}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+11}{9}$.

25. Đường thẳng Δ có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x+1}{-7}=\dfrac{y+3}{-8}=\dfrac{z-2}{1}$. Phương trình tham số của Δ là:

A. $\begin{cases}x=1-7t\\y=3-8t\\z=-2+t.\end{cases}$

B. $\begin{cases}x=-1+7t\\y=-3+8t\\z=2+t.\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=-1-7t\\y=3-8t\\z=2+t.\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=-1-7t\\y=-3-8t\\z=2+t.\end{cases}$

26. Đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=-2-21t\\y=3+5t\\z=-6-19t.\end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là:

A. $\dfrac{x+21}{-2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+19}{-6}$.

B. $\dfrac{x+2}{-21}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+6}{-19}$.

C. $\dfrac{x+2}{21}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+6}{19}$.

D. $\dfrac{x-2}{-21}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-6}{-19}$.

27. Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0\ ;y_0\ ;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases}x=x_0\\y=y_0\\z=t.\end{cases}$

B. $\begin{cases}x=t\\y=y_0\\z=z_0.\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=x_0\\y=t\\z=z_0.\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=x_0+t\\y=y_0+t\\z=z_0+t.\end{cases}$

28. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases}x=at\\y=bt\\z=ct\end{cases}$ với $a^2+b^2+c^2>0$.

Côsin của góc giữa đường thẳng Δ và trục Oz bằng:

A. $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

B. $\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

C. $\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

D. $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

29. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}$ với $a^2+b^2+c^2>0$.

Sin của góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oyz) bằng:

A. $\dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

B. $\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

C. $\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

D. $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

30. Cho a, b và c khác 0, côsin của góc giữa hai mặt phẳng (P): $ax + by + c = 0$ và (Q): $by + cz + d = 0$ bằng:

A. $\dfrac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)}}$.

B. $\dfrac{|b|}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}$.

C. $\dfrac{|b|}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)}}$.

D. $\dfrac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **31**, **32**, chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

31. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2\,024}{2} = \dfrac{y+2\,025}{3} = \dfrac{z+2\,026}{6}$ và mặt phẳng (P): $x - 2y - 2z + 1 = 0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

a) Vectơ $\vec{u} = (2\,024\ ;\ 2\,025\ ;\ 2\,026)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.	**Đ**	**S**
b) Vectơ có toạ độ $(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).	**Đ**	**S**
c) $\sin\alpha = \dfrac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$ với $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d, $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).	**Đ**	**S**
d) $\alpha \approx 50^\circ$ (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).	**Đ**	**S**

32. Cho hai mặt phẳng (P_1): $2x - 3y - 6z + 7 = 0$, (P_2): $2x + 2y + z + 8 = 0$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

a) Vectơ $\vec{n}_1 = (2\ ;\ -3\ ;\ -6)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1).	Đ	S
b) Vectơ có toạ độ $(2\ ;\ -2\ ;\ 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_2).	Đ	S
c) $\cos\alpha = \dfrac{\lvert \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \rvert}{\lvert \vec{n}_1 \rvert \cdot \lvert \vec{n}_2 \rvert}$ với $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1), (P_2).	Đ	S
d) $\alpha \approx 69°$ (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).	Đ	S

33. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$ (t là tham số).

a) Tìm toạ độ của điểm M thuộc đường thẳng Δ, biết M có hoành độ bằng 5.

b) Chứng minh rằng điểm $N(8\ ;\ 2\ ;\ 9)$ thuộc đường thẳng Δ.

c) Chứng minh rằng điểm $P(-1\ ;\ 5\ ;\ 4)$ không thuộc đường thẳng Δ. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ', biết Δ' đi qua P và song song với Δ.

d) Tìm toạ độ của điểm I, biết I là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P): $x - y + z + 9 = 0$.

34. Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua điểm $A(2\ ;\ -5\ ;\ 7)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2\ ;\ 3\ ;\ 4)$;

b) Δ đi qua hai điểm $M(-1\ ;\ 0\ ;\ 4)$ và $N(2\ ;\ 5\ ;\ 3)$.

c) Δ đi qua điểm $B(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $2x - 5y + 6z - 7 = 0$.

35. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ_1: $\dfrac{x+7}{5} = \dfrac{y-1}{-7} = \dfrac{z+2}{-2}$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = -10 - 4t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$ (t là tham số);

b) Δ_1: $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$ (t là tham số) và Δ_2: $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-1}{-6}$;

c) $\Delta_1: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-1}{6}$.

36. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ nếu cần):

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + 2t_1 \\ y = -2 + t_1 \\ z = 0 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 7 + t_2 \\ y = -3 - t_2 \\ z = 2t_2 \end{cases}$ (t_1, t_2 là tham số);

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$ (t là tham số) và $\Delta_2: \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-10}{-1}$;

c) $\Delta_1: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-5}{-3}$ và $\Delta_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

37. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):

a) $\Delta: \begin{cases} x = 18 - \sqrt{3}t \\ y = 11 \\ z = 5 + t \end{cases}$ (t là tham số) và $(P): x - \sqrt{3}y - z - 3 = 0$;

b) $\Delta: \dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y-7}{-3} = \dfrac{z-6}{3}$ và $(P): 3x - 4y + 5z - 6 = 0$.

38. Tính góc giữa hai mặt phẳng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):

$$(P_1): 5x + 12y - 13z + 14 = 0 \text{ và } (P_2): 3x + 4y + 5z - 6 = 0.$$

39. Tính góc giữa mặt phẳng $(P): x - y = 0$ và mặt phẳng (Oyz).

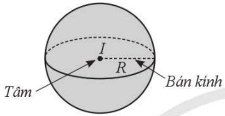
40*. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 11 - 3t_1 \\ y = -5 + 4t_1 \\ z = mt_1 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -4 + 5t_2 \\ y = 2 + 3t_2 \\ z = 2t_2; \end{cases}$ với m là tham số thực; t_1, t_2 là tham số của phương trình đường thẳng. Tìm m để hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

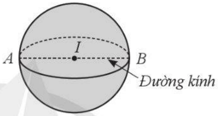
§3 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa mặt cầu

Cho trước điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng bằng R.





Nhận xét

- Điểm M thuộc mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM = R$.
- Điểm M nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM < R$.
- Điểm M nằm ngoài mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM > R$.

2. Phương trình mặt cầu

Phương trình của mặt cầu tâm $I(a\,;\,b\,;\,c)$ bán kính R là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Nhận xét

- Mỗi mặt cầu đều có phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.
- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ xác định một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Ngoài ra, nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu tâm $I(a\,;\,b\,;\,c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định phương trình mặt cầu

Ví dụ 1 Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $(x-1)^2 + (2y-3)^2 + (z-4)^2 = 19^2$. **B.** $(2x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 19^2$.

C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (3z-4)^2 = 19^2$. **D.** $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 19^2$.

Giải

Phương trình $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 19^2$ có dạng phương trình mặt cầu.

Chọn **D**.

Ví dụ 2 Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 4z + 35 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 6z + 29 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 10 = 0$.

Giải

Trong các phương trình, chỉ có $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 1 = 0$ thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ với $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 1$. Suy ra phương trình đó là phương trình mặt cầu. Chọn **C**.

Vấn đề 2. Xác định tâm, bán kính của mặt cầu

Ví dụ 3 Cho mặt cầu có phương trình $(x-8)^2 + (y+7)^2 + z^2 = 4$. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Giải

Ta có:

$$(x-8)^2 + (y+7)^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow (x-8)^2 + [y-(-7)]^2 + (z-0)^2 = 2^2.$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I(8 ; -7 ; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Ví dụ 4 Cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6z + 5 = 0$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Giải

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6z + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 . 5 . x + 25 + y^2 + z^2 + 2 . 3 . z + 9 = 25 + 9 - 5$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 29$.

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I(5 ; 0 ; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{29}$.

Ví dụ 5 Cho hai điểm $A(6 ; -8 ; 1)$ và $B(0 ; 6 ; 3)$. Xác định tâm I của mặt cầu đường kính AB.

Giải

Tâm $I(x ; y ; z)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB nên

$$x = \frac{6+0}{2} = 3;\ \ y = \frac{-8+6}{2} = -1;\ \ z = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Vậy $I(3 ; -1 ; 2)$.

Ví dụ 6 Cho hai điểm $I(-2 ; 4 ; 5)$ và $M(1 ; 2 ; 7)$. Xác định bán kính của mặt cầu tâm I, biết mặt cầu đi qua điểm M.

Giải

Bán kính của mặt cầu đó bằng: $IM = \sqrt{[1-(-2)]^2 + (2-4)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{17}$.

Vấn đề 3. Lập phương trình mặt cầu

Ví dụ 7 Lập phương trình mặt cầu có tâm $I(0 ; -12 ; 3)$ và bán kính 4.

Giải

Phương trình mặt cầu đó là: $(x-0)^2 + [y-(-12)]^2 + (z-3)^2 = 4^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+12)^2 + (z-3)^2 = 16.$$

Ví dụ 8 Lập phương trình mặt cầu tâm $I(-3 ; -7 ; 8)$, biết mặt cầu đi qua điểm $A(-2 ; -5 ; 7)$.

Giải

Bán kính của mặt cầu đó bằng:

$$IA = \sqrt{[-2-(-3)]^2 + [-5-(-7)]^2 + (7-8)^2} = \sqrt{6}.$$

Vậy phương trình mặt cầu đó là: $(x+3)^2 + (y+7)^2 + (z-8)^2 = 6$.

Ví dụ 9 *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Cho hai điểm $A(1 ; -2 ; 3)$, $B(2 ; 0 ; 1)$ và mặt cầu (S) tâm A đi qua B.

a) Mặt cầu (S) có bán kính $R = AB$.	Đ	S
b) $AB = 9$.	Đ	S
c) Phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 81$.	Đ	S
d) Phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.	Đ	S

Giải

Mặt cầu (S) tâm A đi qua B nên có bán kính bằng AB.

Ta có: $AB = \sqrt{(2-1)^2 + [0-(-2)]^2 + (1-3)^2} = 3$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0.$$

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **Đ**.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 10 Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (*Hình 5*).

Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)
Hình 5

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, toạ độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm toạ độ. Như vậy, điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(3 ; -1 ; 6)$, $B(1 ; 4 ; 8)$, $C(7 ; 9 ; 6)$, $D(7 ; -15 ; 18)$. Tìm toạ độ của điểm M trong không gian, biết khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA = 6$, $MB = 7$, $MC = 12$, $MD = 24$.

Giải

Gọi toạ độ của M là $(a ; b ; c)$. Khi đó, các số a, b, c thoả mãn các phương trình:

$(a-3)^2 + (b+1)^2 + (c-6)^2 = 6^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 6a + 2b - 12c + 10 = 0$ (1)

$(a-1)^2 + (b-4)^2 + (c-8)^2 = 7^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 8b - 16c + 32 = 0$ (2)

$(a-7)^2 + (b-9)^2 + (c-6)^2 = 12^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 18b - 12c + 22 = 0$ (3)

$(a-7)^2 + (b+15)^2 + (c-18)^2 = 24^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 14a + 30b - 36c + 22 = 0$ (4)

Trừ tương ứng theo từng vế của (4) cho (3), (3) cho (1), (2) cho (1), ta có:

$$48b - 24c = 0 \Leftrightarrow c = 2b \quad (5)$$

$$-8a - 20b + 12 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-5b + 3}{2} \quad (6)$$

$$4a - 10b - 4c + 22 = 0 \quad (7)$$

Thế (5) và (6) vào (7), ta có: $-10b + 6 - 10b - 8b + 22 = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

Suy ra $a = -1$, $c = 2$. Vậy $M(-1 ; 1 ; 2)$.

C. BÀI TẬP

41. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $(-3x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 12^2$. **B.** $x^2 + (y + 5)^2 + (7z - 9)^2 = 11^2$.

C. $(x - 2)^2 + (5y - 1)^2 + (z - 8)^2 = 19^2$. **D.** $x^2 + (y + 5)^2 + (z - 18)^2 = 14^2$.

42. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + 20 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 2z + 2 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 54 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 40 = 0$.

43. Tâm của mặt cầu (S): $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 + (z + 7)^2 = 64$ có toạ độ là:

A. $(-5 ; 6 ; -7)$. **B.** $(5 ; -6 ; 7)$.

C. $(-5 ; -6 ; 7)$. **D.** $(5 ; -6 ; -7)$.

44. Tâm của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - x - 10z - 6 = 0$ có toạ độ là:

A. $\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; -5\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 3\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 5\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; -3\right)$.

45. Bán kính của mặt cầu (S): $(x + 9)^2 + (y - 16)^2 + (z + 25)^2 = 16$ bằng:

A. 4. **B.** 256. **C.** 8. **D.** 16.

46. Bán kính của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 4y - 2z + 5 = 0$ bằng:

A. 25. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 225.

47. Phương trình của mặt cầu tâm $I(-11 ; -13 ; 15)$ bán kính 9 là:

A. $(x+11)^2+(y+13)^2+(z-15)^2=9$.

B. $(x+11)^2+(y+13)^2+(z-15)^2=81$.

C. $(x-11)^2+(y-13)^2+(z+15)^2=9$.

D. $(x-11)^2+(y-13)^2+(z+15)^2=81$.

48. Cho hai điểm $I(-2 ; 4 ; 5)$ và $M(1 ; 2 ; 7)$. Mặt cầu tâm I đi qua điểm M có phương trình là:

A. $(x-2)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=\sqrt{17}$.

B. $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\sqrt{17}$.

C. $(x-2)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=\sqrt{17}$.

D. $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=17$.

49. Cho hai điểm $A(-12 ; 3 ; 7)$ và $B(-10 ; -1 ; 5)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là:

A. $(x+11)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=6$.

B. $(x+11)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=\sqrt{24}$.

C. $(x+11)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$.

D. $(x-11)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=24$.

50. *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Cho hai điểm $M(0 ; -1 ; 1)$ và $N(4 ; 1 ; 5)$.

a) Mặt cầu đường kính MN có tâm là trung điểm của đoạn thẳng MN.	**Đ**	**S**
b) Nếu I là trung điểm của MN thì $I(2 ; 0 ; 6)$.	**Đ**	**S**
c) Bán kính của mặt cầu đường kính MN bằng 3.	**Đ**	**S**
d) Phương trình mặt cầu đường kính MN là: $(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=9$.	**Đ**	**S**

51. Cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+(y+4)^2+(z+5)^2=49$.

a) Xác định toạ độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

b) Điểm $A(0 ; 3 ; -5)$ có thuộc mặt cầu (S) hay không?

c) Điểm $B(1 ; -4 ; -1)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S)?

d) Điểm $C(7 ; 3 ; -5)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S)?

e) Lập phương trình tham số của đường thẳng IC.

g) Xác định toạ độ các giao điểm M, N của đường thẳng IC và mặt cầu.

52. Lập phương trình mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau:

a) (S) có tâm $I(3 ; -4 ; 5)$ bán kính 9.

b) (S) có tâm $K(-4 ; 6 ; 7)$ và đi qua điểm $H(-5 ; 4 ; 5)$.

c) (S) có đường kính AB với $A(1 ; 3 ; -1)$ và $B(-1 ; -1 ; -5)$.

53. Cho mặt cầu (S) có tâm $O(0 ; 0 ; 0)$ và bán kính 2.

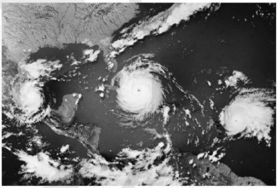
a) Lập phương trình mặt cầu (S).

b) Lấy các điểm $A(1 ; 0 ; -1)$ và $B(1 ; 1 ; 0)$. Lập phương trình đường thẳng AB. Tìm toạ độ các điểm C và D là giao điểm của đường thẳng AB và mặt cầu (S).

54. Tại một thời điểm có bão, khi đặt hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) ở một vị trí phù hợp thì tâm bão có toạ độ $(300 ; 200 ; 1)$ (*Hình 6*).

a) Lập phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng ảnh hưởng của bão ở cấp độ: bán kính gió mạnh từ cấp 10, giật từ cấp 12 trở lên khoảng 100 km tính từ tâm bão.

b) Tại một vị trí có toạ độ $(350 ; 245 ; 1)$ thì có bị ảnh hưởng bởi cơn bão được mô tả ở câu a hay không?



(Nguồn: https://istockphoto.com)

Hình 6

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

55. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $-x + 2y - 9z + 7 = 0$?

A. $\vec{n}_1 = (1 ; 2 ; 9)$.

B. $\vec{n}_2 = (1 ; -2 ; 9)$.

C. $\vec{n}_3 = (1 ; 2 ; -9)$.

D. $\vec{n}_4 = (-1 ; 2 ; 9)$.

56. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q): $5x - 6z + 4 = 0$?

A. $\vec{n}_1 = (5 ; 0 ; -6)$.

B. $\vec{n}_2 = (5 ; -6 ; 4)$.

C. $\vec{n}_3 = (5 ; 0 ; 6)$.

D. $\vec{n}_4 = (5 ; 6 ; 4)$.

57. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (R): $z - 2 = 0$?

A. $\vec{n}_1 = (1 ; -2 ; 0)$.
B. $\vec{n}_2 = (1 ; 0 ; -2)$.
C. $\vec{n}_3 = (0 ; 0 ; 1)$.
D. $\vec{n}_4 = (1 ; 2 ; 0)$.

58. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng $d : \begin{cases} x = 9 + 6t \\ y = -10 - 7t \\ z = 11 + 8t \end{cases}$?

A. $\vec{u}_1 = (9 ; -10 ; 11)$.
B. $\vec{u}_2 = (6 ; 7 ; 8)$.
C. $\vec{u}_3 = (9 ; 10 ; 11)$.
D. $\vec{u}_4 = (6 ; -7 ; 8)$.

59. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng $d : \begin{cases} x = 8 - t \\ y = 7 \\ z = -6 + 9t \end{cases}$?

A. $\vec{u}_1 = (-1 ; 0 ; 9)$.
B. $\vec{u}_2 = (8 ; 7 ; 6)$.
C. $\vec{u}_3 = (1 ; 0 ; 9)$.
D. $\vec{u}_4 = (8 ; 7 ; -6)$.

60. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng

$$d : \frac{x-2}{15} = \frac{y+9}{-10} = \frac{z-7}{5}?$$

A. $\vec{u}_1 = (2 ; -9 ; 7)$.
B. $\vec{u}_2 = (-2 ; 9 ; -7)$.
C. $\vec{u}_3 = (15 ; 10 ; 5)$.
D. $\vec{u}_4 = (3 ; -2 ; 1)$.

61. Mặt cầu (S): $(x - 23)^2 + (y - 8)^2 + (z - 44)^2 = 81$ có bán kính bằng:

A. 23.
B. 9.
C. 8.
D. 44.

62. Toạ độ tâm của mặt cầu (S): $(x + 19)^2 + (y - 20)^2 + (z + 21)^2 = 22$ là:

A. $(-19 ; 20 ; -21)$.
B. $(19 ; 20 ; -21)$.
C. $(-19 ; 20 ; 21)$.
D. $(19 ; 20 ; 21)$.

63. Cho $a + b + c \neq 0$.

Khoảng cách từ gốc toạ độ O đến mặt phẳng $x + a + b + c = 0$ bằng:

A. $|a + b + c|$.
B. $\dfrac{|a + b + c|}{a^2 + b^2 + c^2}$.
C. $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{|a + b + c|}$.
D. $\dfrac{|a + b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **64**, **65**, **66**, chọn phương án: đúng **(Đ)** hoặc sai **(S)**.*

64. Cho điểm $I(1 ; 2 ; 3)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng Δ.

a) Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

b) Vectơ có toạ độ $(2 ; 1 ; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

c) Vectơ có toạ độ $(2 ; 1 ; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

d) Phương trình mặt phẳng (P) là: $2x + y + z - 9 = 0$.

a)	**Đ**	**S**
b)	**Đ**	**S**
c)	**Đ**	**S**
d)	**Đ**	**S**

65. Cho hai mặt phẳng (P_1): $x + 4y - 2z + 2 = 0$, (P_2): $-2x + y + z + 3 = 0$.

a) Vectơ $\vec{n}_1 = (1 ; 4 ; -2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1).

b) Vectơ $\vec{n}_2 = (2 ; 1 ; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_2).

c) $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$ với $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1), (P_2).

d) Hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) vuông góc với nhau.

a)	**Đ**	**S**
b)	**Đ**	**S**
c)	**Đ**	**S**
d)	**Đ**	**S**

66. Cho hai điểm $A(0 ; 2 ; 0)$ và $B(2 ; -4 ; 0)$.

a) Trung điểm I của đoạn thẳng AB có toạ độ là $(1 ; -1 ; 0)$.

b) $AB = 40$.

c) Mặt cầu (S) tâm A và đi qua B có bán kính $R = \sqrt{10}$.

d) Phương trình mặt cầu (S) tâm A và đi qua B là:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 10.$$

a)	**Đ**	**S**
b)	**Đ**	**S**
c)	**Đ**	**S**
d)	**Đ**	**S**

67. Cho bốn điểm $A(0 ; 1 ; 1)$, $B(-1 ; 0 ; 3)$, $C(0 ; 0 ; 2)$ và $D(1 ; 1 ; -2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

b) Lập phương trình tham số của các đường thẳng AB và AC.

c) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC).

d) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

e) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

68. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $M(6 ; -7 ; 10)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1 ; -2 ; 1)$;

b) (P) đi qua điểm $N(-3 ; 8 ; -4)$ và có một cặp vectơ chỉ phương là

$$\vec{u} = (3 ; -2 ; -1),\ \vec{v} = (1 ; 4 ; -5);$$

c) (P) đi qua điểm $I(1 ; -4 ; 0)$ và song song với mặt phẳng (Q):

$$5x + 6y - 7z - 8 = 0;$$

d) (P) đi qua điểm $K(0 ; -3 ; 4)$ và vuông góc với đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-4}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-7}{2}.$$

69. Lập phương trình của mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau:

a) (S) có tâm $I(-2 ; 3 ; 8)$ bán kính $R = 100$;

b) (S) có tâm $I(3 ; -4 ; 0)$ và đi qua điểm $M(2 ; -3 ; 1)$;

c) (S) có đường kính là AB với $A(-1 ; 0 ; 4)$ và $B(1 ; 0 ; 2)$.

70. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1 : \dfrac{x+2}{9} = \dfrac{y-1}{27} = \dfrac{z-3}{-27}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-7}{3}$;

b) $\Delta_1 : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-6}{5} = \dfrac{z+3}{-4}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x+13}{7} = \dfrac{y+9}{5} = \dfrac{z+15}{8}$;

c) $\Delta_1 : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+6}{3} = \dfrac{z+3}{2}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x+17}{2} = \dfrac{y-33}{-3} = \dfrac{z+16}{2}$.

71. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ),

biết $\Delta_1 : \begin{cases} x = 8 + \sqrt{2}t_1 \\ y = 9 - t_1 \\ z = 10 + t_1 \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = -7 + t_2 \\ y = -9 + \sqrt{2}t_2 \\ z = 11 - t_2 \end{cases}$ (t_1, t_2 là tham số).

72. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị

của độ), biết $\Delta : \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ (t là tham số) và (P): $3x + 4y + 5z + 60 = 0$.

73. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết (P_1): $5x + 12y - 13z - 14 = 0$ và (P_2): $13x - 5y - 12z + 7 = 0$.

74. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + 4t_1 \\ y = 9 + t_1 \\ z = 1 - 6t_1 \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = -4 + 3t_2 \\ y = 1 - 18t_2 \\ z = -5 - t_2 \end{cases}$ (t_1, t_2 là tham số).

Chứng minh rằng $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

75. Một nguồn âm phát ra sóng âm là sóng cầu (mặt đầu sóng là mặt cầu). Khi gắn trên hệ trục toạ độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét, vị trí nguồn âm có toạ độ $(2 ; 3 ; 1)$, cường độ âm chuẩn phát ra có bán kính 10 m.

a) Lập phương trình mặt cầu mô tả ranh giới nhận được cường độ âm chuẩn.

b) Tại một vị trí có toạ độ $(5 ; 0 ; 2)$ có nhận được cường độ âm chuẩn từ nguồn âm trên hay không?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. C. **2. C.** **3. D.** **4. B.** **5. A.** **6. C.** **7. D.**

8. a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **Đ**.

9. Ta có: $(-3) - 3 . 0 - 4 . 1 + 1 = -6 \neq 0$ nên I không thuộc (P).

Vectơ $\vec{n} = (1 ; -3 ; 4)$ không là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vì $(P) // (Q)$ mà $\vec{n} = (1 ; -3 ; 4)$ không là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), tức là giá của $\vec{n}$ không vuông góc với (P) nên giá của $\vec{n}$ không vuông góc với (Q), hay $\vec{n} = (1 ; -3 ; 4)$ không là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Ta có: $\vec{m} = (1 ; -3 ; -4)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Vì $(R) // (P)$ nên $\vec{m}$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (R). Phương trình mặt phẳng (R) là:

$$1 . (x + 3) - 3 . (y - 0) - 4 . (z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 4z + 7 = 0.$$

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **S**.

10. a) Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$3 \,.\, (x-2) - 4 \,.\, (y-1) + 5 \,.\, (z+4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 5z + 18 = 0.$$

b) Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (-7 \,;\, 3 \,;\, 6)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Phương trình của (P) là: $(-7) \,.\, (x-5) + 3 \,.\, (y+2) + 6 \,.\, (z-1) = 0 \Leftrightarrow -7x + 3y + 6z + 35 = 0.$

c) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2 \,;\, -8 ;\, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (1 \,;\, -7 \,;\, -8)$.

Khi đó, $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (43 \,;\, 13 \,;\, -6)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Vậy mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$43 \,.\, (x-0) + 13 \,.\, (y-3) - 6 \,.\, (z-7) = 0 \Leftrightarrow 43x + 13y - 6z + 3 = 0.$$

11. Phương trình mặt phẳng đó là: $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{7} + \dfrac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 63x + 45y + 35z - 315 = 0.$

12. Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-1 \,;\, -1 \,;\, 2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Vậy phương trình (P) là:

$$(-1) \,.\, (x-3) - 1 \,.\, (y+4) + 2 \,.\, (z-2) = 0 \Leftrightarrow -x - y + 2z - 5 = 0.$$

13. Vì $(P) \,//\, (Q)$ nên $\vec{n} = (3 \,;\, -2 \,;\, 4)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Vậy phương trình (P) là:

$$3 \,.\, (x-4) - 2 \,.\, (y+3) + 4 \,.\, (z-7) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 4z - 46 = 0.$$

14. Ta có: $\vec{n}_1 = (1 \,;\, -1 \,;\, 0)$, $\vec{n}_2 = (0 \,;\, 1 \,;\, 1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (Q), (R) và $\left[\vec{n}_1, \vec{n}_2\right] = (-1 \,;\, -1 \,;\, 1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) nên vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với cả $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$. Suy ra $\left[\vec{n}_1, \vec{n}_2\right]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

Vậy phương trình (P) là:

$$(-1) \,.\, (x-1) - 1 \,.\, (y+2) + 1 \,.\, (z-4) = 0 \Leftrightarrow -x - y + z - 5 = 0.$$

15. Khoảng cách từ $M(x_0 \,;\, y_0 \,;\, z_0)$ đến các mặt phẳng $x - a = 0$, $y - b = 0$, $z - c = 0$ lần lượt bằng $|x_0 - a|$, $|y_0 - b|$, $|z_0 - c|$.

16. a) Ta có $\vec{n}_1 = (1 \,;\, 2 \,;\, -3)$, $\vec{n}_2 = (-4 \,;\, -8 \,;\, 12)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (P_1), (P_2). Do $\vec{n}_2 = -4\vec{n}_1$, $3 \neq (-4) \,.\, 5$ nên $(P_1) \,//\, (P_2)$.

b) Chọn điểm $M_0\left(\dfrac{3}{4} \,;\, 0 \,;\, 0\right) \in (P_2)$. Suy ra khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P_1) bằng:

$$d(M_0, (P_1)) = \frac{\left|\dfrac{3}{4} + 5\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{23\sqrt{14}}{56}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P_1), (P_2) bằng $\dfrac{23\sqrt{14}}{56}$.

17. Đặt $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ ($a, b, c > 0$). Vì các đường thẳng SA, SB, SC đôi một vuông góc nên có thể gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ thoả mãn $S(0 ; 0 ; 0)$, $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0.$

Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) là:

$$SH=\frac{\left|\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}.$$

Suy ra $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}.$

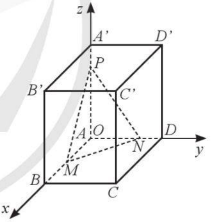
18. Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$

Ta có: $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}\neq 1$, suy ra điểm $D(1 ; 2 ; 3)$ không thuộc mặt phẳng (ABC).

Vậy A, B, C, D không đồng phẳng.

19. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ thoả mãn $A(0 ; 0 ; 0)$ trùng gốc O, $B(2a ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 3a ; 0)$, $A'(0 ; 0 ; 4a)$ (*Hình 7*).

Ta có: $M(a ; 0 ; 0)$, $N(0 ; 2a ; 0)$, $P(0 ; 0 ; 3a)$, $C'(2a ; 3a ; 4a)$.



Hình 7

Phương trình mặt phẳng (MNP) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{3a}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{3a}-1=0.$$

Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (MNP) bằng:

$$\frac{\left|\frac{2a}{a}+\frac{3a}{2a}+\frac{4a}{3a}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{2a}\right)^2+\left(\frac{1}{3a}\right)^2}}=\frac{23a}{7}.$$

20. a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(a ; 0 ; 0)$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, suy ra $\overrightarrow{DC}=(a ; 0 ; 0)$.

Mà $D(0 ; b ; 0)$ nên $C(a ; b ; 0)$.

Vì $B(a\ ;0\ ;0)$, $C(a\ ;b\ ;0)$ nên trung điểm M của BC có toạ độ là $\left(a\ ;\dfrac{b}{2}\ ;0\right)$.

Vì $S(0\ ;0\ ;c)$, $C(a\ ;b\ ;0)$, $D(0\ ;b\ ;0)$ nên trọng tâm G của tam giác SCD có toạ độ là $\left(\dfrac{a}{3}\ ;\dfrac{2b}{3}\ ;\dfrac{c}{3}\right)$.

b) Phương trình mặt phẳng (SBD) là: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0$.

c) Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) là:

$$\frac{\left|\dfrac{\frac{a}{3}}{a}+\dfrac{\frac{2b}{3}}{b}+\dfrac{\frac{c}{3}}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\frac{abc}{3\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

21. Phương trình mặt phẳng chứa mặt dưới của mái nhà là: $z-33=0$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng chứa mặt dưới của mái nhà bằng: $\dfrac{|35-33|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=2$.

Vậy độ dày của mái nhà đó là 2 dm.

§2 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

22. C. **23. D.** **24. C.** **25. D.** **26. B.** **27. A.** **28. D.** **29. B.** **30. D.**

31. Ta có: $\vec{u}=(2\ ;3\ ;6)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ, $\vec{n}=(1\ ;-2\ ;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{u}\ .\ \vec{n}|}{|\vec{u}|\ .\ |\vec{n}|}=\frac{|2\ .\ 1+3\ .\ (-2)+6\ .\ (-2)|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\ .\ \sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{16}{21}.$$

Suy ra $\alpha\approx 50^\circ$.

Đáp số: a) **S**, b) **S**, c) **Đ**, d) **Đ**.

32. Ta có: $\vec{n}_1=(2\ ;-3\ ;-6)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1), $\vec{n}_2=(2\ ;2\ ;1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_2).

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\ .\ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\ .\ |\vec{n}_2|}=\frac{|2\ .\ 2+(-3)\ .\ 2+(-6)\ .\ 1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-6)^2}\ .\ \sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{8}{21}.$$

Suy ra $\alpha\approx 68^\circ$.

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **S**.

33. a) Vì M thuộc Δ nên $M(2 - 3t ; 4 + t ; 5 - 2t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Ta có: $2 - 3t = 5$, suy ra $t = -1$. Do đó $4 + t = 4 + (-1) = 3$, $5 - 2t = 5 - 2 . (-1) = 7$. Vậy $M(5 ; 3 ; 7)$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} 8 = 2 - 3t \\ 2 = 4 + t \\ 9 = 5 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow t = -2$. Suy ra tồn tại số thực t thoả mãn hệ phương trình đó. Vậy điểm $N(8 ; 2 ; 9)$ thuộc đường thẳng Δ.

c) Xét hệ phương trình $\begin{cases} -1 = 2 - 3t \\ 5 = 4 + t \\ 4 = 5 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Suy ra không tồn tại số thực t thoả mãn hệ phương trình đó. Vậy điểm $P(-1 ; 5 ; 4)$ không thuộc đường thẳng Δ.

Do $\vec{u} = (-3 ; 1 ; -2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ và Δ // Δ' nên $\vec{u} = (-3 ; 1 ; -2)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ'.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ' là: $\begin{cases} x = -1 - 3t' \\ y = 5 + t' \\ z = 4 - 2t' \end{cases}$ (t' là tham số).

d) Vì I thuộc Δ nên $I(2 - 3a ; 4 + a ; 5 - 2a)$ $(a \in \mathbb{R})$. Mà I thuộc (P) nên $(2 - 3a) - (4 + a) + (5 - 2a) + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Vậy $I(-4 ; 6 ; 1)$.

34. a) Phương trình tham số và phương trình chính tắc của Δ lần lượt là:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases} (t \text{ là tham số}), \ \frac{x-2}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-7}{4}.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{MN} = (3 ; 5 ; -1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ. Suy ra phương trình tham số và phương trình chính tắc của Δ lần lượt là:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5t \\ z = 4 - t \end{cases} (t \text{ là tham số}), \ \frac{x+1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z-4}{-1}.$$

c) Vectơ $\vec{n} = (2 ; -5 ; 6)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) mà $\Delta \perp (P)$ nên $\vec{n} = (2 ; -5 ; 6)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Suy ra phương trình tham số và phương trình chính tắc của Δ lần lượt là:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$ (t là tham số), $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z+1}{6}$.

35. a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-7 ; 1 ; -2)$ và có $\vec{u}_1 = (5 ; -7 ; -2)$ là vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-5 ; -10 ; 3)$ và có $\vec{u}_2 = (-3 ; -4 ; 7)$ là vectơ chỉ phương.

Ta có: $\dfrac{5}{-3} \neq \dfrac{-7}{-4}$, suy ra $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (2 ; -11 ; 5)$,

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (-57 ; -29 ; -41).$$

Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] . \overrightarrow{M_1M_2} = (-57) . 2 + (-29) . (-11) + (-41) . 5 = 0$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng. Vậy Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-2 ; 1 ; 0)$ và có $\vec{u}_1 = (5 ; -1 ; 3)$ là vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-2 ; 1 ; 1)$ và có $\vec{u}_2 = (4 ; 5 ; -6)$ là vectơ chỉ phương.

Ta có: $\dfrac{5}{4} \neq \dfrac{-1}{5}$, suy ra $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (0 ; 0 ; 1)$,

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-9 ; 42 ; 29).$$

Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] . \overrightarrow{M_1M_2} = (-9) . 0 + 42 . 0 + 29 . 1 = 29 \neq 0$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng.

Vậy Δ_1, Δ_2 chéo nhau.

c) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0 ; -5 ; 1)$ và có $\vec{u}_1 = (3 ; 2 ; -3)$ là vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(1 ; 3 ; 1)$ và có $\vec{u}_2 = (-6 ; -4 ; 6)$ là vectơ chỉ phương.

Ta có: $-2\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, suy ra $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (1 ; 8; 0)$ và $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{2}{8}$ nên $\vec{u}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ không cùng phương.

Vậy $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$.

36. a) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (2 ; 1 ; 0)$, $\vec{u}_2 = (1 ; -1 ; 2)$.

Ta có: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|2 . 1 + 1 . (-1) + 0 . 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} . \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{\sqrt{30}}{30}$.

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) \approx 79^\circ$.

b) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (1 ; -2 ; -2)$, $\vec{u}_2 = (2 ; 2 ; -1)$.

Ta có: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|1 . 2 + (-2) . 2 + (-2) . (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} . \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 0$.

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) = 90^\circ$.

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (-1 ; 2 ; -3)$, $\vec{u}_2 = (2 ; -1 ; -1)$.

Ta có: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|(-1) . 2 + 2 . (-1) + (-3) . (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} . \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{42}$.

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) \approx 84^\circ$.

37. a) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-\sqrt{3} ; 0 ; 1)$ và mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1 ; -\sqrt{3} ; -1)$.

Ta có: $\sin(\Delta, (P)) = \dfrac{|(-\sqrt{3}) . 1 + 0 . (-\sqrt{3}) + 1 . (-1)|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2} . \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{15} + \sqrt{5}}{10}$.

Suy ra $(\Delta, (P)) \approx 38^\circ$.

b) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2 ; -3 ; 3)$ và mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3 ; -4 ; 5)$.

Ta có: $\sin(\Delta, (P)) = \dfrac{|2 . 3 + (-3) . (-4) + 3 . 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2} . \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \dfrac{3\sqrt{11}}{10}$.

Suy ra $(\Delta, (P)) \approx 84^\circ$.

38. Hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (5 ; 12 ; -13)$, $\vec{n}_2 = (3 ; 4 ; 5)$.

Ta có: $\cos((P_1), (P_2)) = \dfrac{|5 . 3 + 12 . 4 + (-13) . 5|}{\sqrt{5^2 + 12^2 + (-13)^2} . \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \dfrac{1}{65}$.

Suy ra $((P_1), (P_2)) \approx 89^\circ$.

39. Góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 45^o.

40*. Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi hai vectơ chỉ phương vuông góc với nhau. Suy ra $(-3) . 5 + 4 . 3 + m . 2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

§3 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

41. D. **42. B.** **43. A.** **44. C.** **45. A.** **46. C.** **47. B.** **48. D.** **49. A.**

50. a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **Đ**.

51. a) Tâm $I(0 ; -4 ; -5)$, bán kính $R = 7$.

b) $IA = 7 = R$ nên A thuộc mặt cầu.

c) $IB = \sqrt{17} < R$ nên B nằm trong mặt cầu.

d) $IC = \sqrt{98} > R$ nên C nằm ngoài mặt cầu.

e) Ta có: $\overrightarrow{IC} = (7 ; 7 ; 0)$, chọn $\vec{u} = \dfrac{1}{7}\overrightarrow{IC} = (1 ; 1 ; 0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng IC. Suy ra phương trình tham số của đường thẳng IC là: $\begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = -5. \end{cases}$

g) Toạ độ giao điểm của đường thẳng IC và mặt cầu (S) tương ứng với tham số t thoả mãn:

$t^2 + (-4 + t + 4)^2 + (-5 + 5)^2 = 49 \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{49}{2} \Leftrightarrow t = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ hoặc $t = \dfrac{-7\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $M\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2} ; -4 + \dfrac{7\sqrt{2}}{2} ; -5\right)$, $N\left(\dfrac{-7\sqrt{2}}{2} ; -4 - \dfrac{7\sqrt{2}}{2} ; -5\right)$.

52. a) $(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 81$.

b) $(x+4)^2 + (y-6)^2 + (z-7)^2 = 9$.

c) $x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.

53. a) Phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

b) Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}$ (t là tham số).

Toạ độ giao điểm của đường thẳng AB và mặt cầu (S) tương ứng với tham số t thoả mãn: $1^2 + t^2 + (-1 + t)^2 = 4 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $C\left(1 ; \frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $D\left(1 ; \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

54. a) Phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$(x-300)^2 + (y-200)^2 + (z-1)^2 = 100^2.$$

b) Khoảng cách từ vị trí có toạ độ (350 ; 245 ; 1) đến tâm bão là:

$$d = \sqrt{(350-300)^2 + (245-200)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4\,525} < 100.$$

Vậy vị trí có toạ độ (350 ; 245 ; 1) bị ảnh hưởng bởi cơn bão.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

55. B. **56. A**. **57. C**. **58. D**. **59. A**. **60. D**. **61. B**. **62. A**. **63. A**.

64. a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **S**.

65. a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **Đ**.

66. a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **S**.

67. a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1 ; -1 ; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0 ; -1 ; 1)$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1 ; 1 ; 1)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = -t_1 \\ y = 1 - t_1 \\ z = 1 + 2t_1 \end{cases}$ (t_1 là tham số).

Phương trình tham số của đường thẳng AC là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t_2 \\ z = 1 + t_2 \end{cases}$ (t_2 là tham số).

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y + z - 2 = 0$.

d) Ta có: $1 + 1 - 2 - 2 \neq 0$. Suy ra toạ độ của điểm $D(1 ; 1 ; -2)$ không thoả mãn phương trình $x + y + z - 2 = 0$. Vậy D không thuộc mặt phẳng (ABC) hay A, B, C, D không đồng phẳng.

e) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) là: $\frac{|1+1-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

68. a) $x - 2y + z - 30 = 0$.

b) $x + y + z - 1 = 0$.

c) $5x + 6y - 7z + 19 = 0$.

d) $-x + 3y + 2z + 1 = 0$.

69. a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 8)^2 = 10\,000$.

b) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + z^2 = 3$.

c) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 2$.

70. a) $\Delta_1 // \Delta_2$. b) Δ_1, Δ_2 cắt nhau. c) Δ_1, Δ_2 chéo nhau.

71. $(\Delta_1, \Delta_2) \approx 76^\circ$.

72. $(\Delta, (P)) \approx 19^\circ$.

73. $((P_1), (P_2)) \approx 62^\circ$.

74. Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là: $\vec{u_1} = (4 ; 1 ; -6)$ và $\vec{u_2} = (3 ; -18 ; -1)$. Ta có:

$$\vec{u_1} . \vec{u_2} = 4 . 3 + 1 . (-18) + (-6) . (-1) = 0.$$

Suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

75. a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 100$.

b) Khoảng cách từ vị trí có toạ độ (5 ; 0 ; 2) đến nguồn âm là:

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (0-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{19} < 10.$$

Vậy tại vị trí có toạ độ (5 ; 0 ; 2) có thể nhận được cường độ âm chuẩn từ nguồn âm.

Chương VI MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT

§1 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

1. Định nghĩa

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là *xác suất của A với điều kiện B*, kí hiệu là $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Nếu $\mathrm{P}(B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.

2. Nhận xét

• Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra:

Nếu $\mathrm{P}(B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B)$.

• Người ta chứng minh được rằng:

Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \,.\, \mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B).$$

Công thức trên được gọi là *công thức nhân xác suất*.

• Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó, ta có:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

• Cho A và B là hai biến cố với $0 < \mathrm{P}(A) < 1$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) \text{ và } \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B \mid \overline{A}).$$

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính xác suất có điều kiện

Ví dụ 1 Cho hai biến cố A, B có $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,8$; $P(A \cap B) = 0,4$. Tính các xác suất sau: $P(A \mid B)$; $P(B \mid A)$.

Giải

Ta có: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,4}{0,8} = 0,5$; $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,4}{0,5} = 0,8$.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở **Ví dụ 2, 3**, chọn phương án: đúng **(Đ)** hoặc sai **(S)**.*

Ví dụ 2 Cho hai xúc xắc cân đối và đồng chất. Gieo lần lượt từng xúc xắc trong hai xúc xắc đó.

Xét các biến cố:

A: "Tổng số chấm trên hai xúc xắc bằng 5";

B: "Xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm".

a) Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 5, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm, là xác suất có điều kiện $P(A \mid B)$.	**Đ**	**S**
b) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.	**Đ**	**S**
c) $P(B) = \dfrac{1}{6}$.	**Đ**	**S**
d) Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 5, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm, là $\dfrac{1}{6}$.	**Đ**	**S**

Giải

Không gian mẫu có số phần tử là 36.

Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 5, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm, là xác suất có điều kiện $P(A \mid B)$. Biến cố $A \cap B$ chỉ có 1 kết quả thuận lợi là xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm và xúc xắc thứ hai xuất hiện mặt 3 chấm nên $P(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$. Có 6 khả năng xảy ra khi xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm nên $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$. Suy ra

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}.$$

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **Đ**.

Ví dụ 3 Cho hai đồng xu cân đối và đồng chất. Tung lần lượt từng đồng xu trong hai đồng xu đó.

Xét các biến cố:

A: "Đồng xu thứ hai xuất hiện mặt sấp (S)";

B: "Đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt ngửa (N)".

a) Xác suất để đồng xu thứ hai xuất hiện mặt S, biết rằng đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt N, là xác suất có điều kiện $P(A \mid B)$.

b) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

c) $P(B) = \frac{1}{4}$.

d) Xác suất để đồng xu thứ hai xuất hiện mặt S, biết rằng đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt N, là $\frac{1}{2}$.

Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**

Giải

Không gian mẫu có số phần tử là 4.

Xác suất để đồng xu thứ hai xuất hiện mặt S, biết rằng đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt N, là xác suất có điều kiện $P(A \mid B)$. Biến cố $A \cap B$ chỉ có 1 kết quả thuận lợi là đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt N, đồng xu thứ hai xuất hiện mặt S nên $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Có 2 khả năng xảy ra khi đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt N nên $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Suy ra

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Đáp án: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

Ví dụ 4 Một nhóm học sinh tham gia một kì thi Olympic Tin học của trường, trong đó có 5 học sinh lớp 12A. Sau khi chấm điểm, có 3 học sinh lớp 12A đạt giải. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong nhóm học sinh trên. Tính xác suất chọn được học sinh đạt giải, biết rằng học sinh đó thuộc lớp 12A.

Giải

Xét các biến cố:

A: "Chọn được học sinh đạt giải";

B: "Chọn được học sinh thuộc lớp 12A".

Khi đó, xác suất chọn được học sinh đạt giải, biết rằng học sinh đó thuộc lớp 12A, là xác suất của A với điều kiện B.

Ta có: $n(B) = 5$, $n(A \cap B) = 3$. Suy ra $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{3}{5}$.

Vậy xác suất chọn được học sinh đạt giải, biết rằng học sinh đó thuộc lớp 12A, là $\dfrac{3}{5}$.

Ví dụ 5 Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy bóng ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét các biến cố:

A: "Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất";

B: "Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai".

a) Tính các xác suất $P(A)$, $P(A \mid B)$, $P(A \mid \overline{B})$, $P(B)$, $P(B \mid A)$, $P(B \mid \overline{A})$.

b) Chứng minh rằng A, B là hai biến cố độc lập.

Giải

a) Không gian mẫu có số phần tử là 49.

- Một kết quả thuận lợi cho biến cố A là một cách chọn quả bóng màu xanh ở lần thứ nhất (có 3 khả năng) và chọn quả bóng tuỳ ý ở lần thứ hai (có 7 khả năng). Do đó $n(A) = 3 \,.\, 7 = 21$, suy ra $n(\overline{A}) = 49 - n(A) = 49 - 21 = 28$.

  Tương tự, ta có: $n(B) = 7 \,.\, 4 = 28$, $n(\overline{B}) = 49 - 28 = 21$.

- Một kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cap B$ là một cách chọn quả bóng màu xanh ở lần thứ nhất (có 3 khả năng) và chọn quả bóng màu đỏ ở lần thứ hai (có 4 khả năng). Vì vậy $n(A \cap B) = 3 \,.\, 4 = 12$. Tương tự, ta có: $n(A \cap \overline{B}) = 3 \,.\, 3 = 9$, $n(B \cap \overline{A}) = 4 \,.\, 4 = 16$.

  Ta có: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{21}{49} = \dfrac{3}{7}$; $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$;

  $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{n(A \cap \overline{B})}{n(\overline{B})} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$; $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{28}{49} = \dfrac{4}{7}$;

  $P(B \mid A) = \dfrac{n(B \cap A)}{n(A)} = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$; $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{n(B \cap \overline{A})}{n(\overline{A})} = \dfrac{16}{28} = \dfrac{4}{7}$.

b) Vì $P(A) = P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{3}{7}$ và $P(B) = P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{4}{7}$ nên A, B là hai biến cố độc lập.

Vấn đề 2. Tính xác suất có điều kiện bằng sơ đồ hình cây

Ví dụ 6 Một hộp có 12 quả bóng bàn màu trắng và 10 quả bóng bàn màu vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Có 10 quả bóng bàn trong hộp được đánh số, trong đó có 4 quả bóng bàn màu trắng và 6 quả bóng bàn màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng bàn trong hộp. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để quả bóng bàn được lấy ra có màu trắng, biết rằng quả bóng bàn đó được đánh số.

Giải

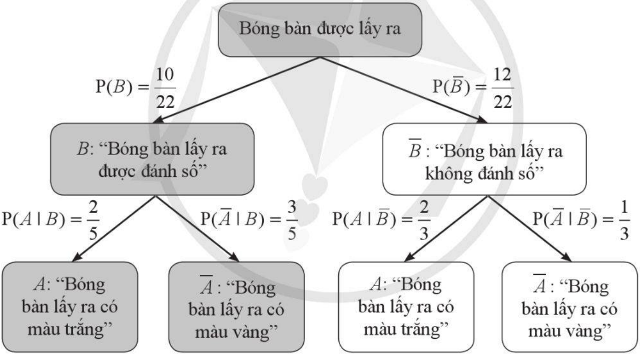
Xét các biến cố:

A: "Quả bóng bàn lấy ra có màu trắng";

B: "Quả bóng bàn lấy ra có đánh số".

Khi đó, xác suất để quả bóng bàn được lấy ra có màu trắng, biết rằng quả bóng bàn đó được đánh số, là xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Sơ đồ hình cây biểu thị cách tính xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$ được vẽ như sau:



Vậy xác suất để quả bóng bàn được lấy ra có màu trắng, biết rằng quả bóng đó được đánh số, là $\frac{2}{5}$.

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 7 Một doanh nghiệp trước khi xuất khẩu áo sơ mi trong lô hàng S phải qua hai lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo trong lô hàng đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc áo sơ mi trong lô hàng S. Tính xác suất để một chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu.

Giải

Xét các biến cố:

A: "Chiếc áo sơ mi qua được lần kiểm tra thứ nhất";

B: "Chiếc áo sơ mi qua được lần kiểm tra thứ hai";

C: "Chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu".

Khi đó, xác suất để chiếc áo sơ mi qua được lần kiểm tra thứ hai, biết rằng đã qua được lần kiểm tra thứ nhất, là xác suất có điều kiện $P(B \mid A)$ và $P(C) = P(B \cap A)$.

Ta có: $P(B \mid A) = 0,95$; $P(A) = 0,98$.

Suy ra $P(C) = P(B \cap A) = P(A) \,.\, P(B \mid A) = 0,98 \,.\, 0,95 = 0,931$.

Vậy xác suất để một chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu là 0,931.

Ví dụ 8 Một lô sản phẩm có 25 sản phẩm, trong đó có 8 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

Giải

Xét các biến cố:

A: "Lần thứ nhất lấy ra sản phẩm chất lượng thấp";

B: "Lần thứ hai lấy ra sản phẩm chất lượng thấp";

C: "Cả hai lần đều lấy ra sản phẩm chất lượng thấp".

Khi đó, xác suất để lần thứ hai lấy ra sản phẩm chất lượng thấp, biết lần thứ nhất lấy ra sản phẩm chất lượng thấp, là xác suất có điều kiện $P(B \mid A)$ và $P(C) = P(B \cap A)$.

Ta có: $P(A) = \dfrac{8}{25}$; $P(B \mid A) = \dfrac{7}{24}$.

Suy ra $P(C) = P(B \cap A) = P(A) \,.\, P(B \mid A) = \dfrac{8}{25} \,.\, \dfrac{7}{24} = \dfrac{7}{75}$.

Vậy xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp là $\dfrac{7}{75}$.

C. BÀI TẬP

1. Nếu hai biến cố A, B thoả mãn $P(B) = 0,6$; $P(A \cap B) = 0,2$ thì $P(A \mid B)$ bằng:

A. $\frac{3}{25}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

2. Nếu hai biến cố A, B thoả mãn $P(B) = 0,3$; $P(A \mid B) = 0,5$ thì $P(A \cap B)$ bằng:

A. 0,8. **B.** 0,2. **C.** 0,6. **D.** 0,15.

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở câu **3**, **4**, chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

3. Lớp 12A có 40 học sinh. Trong một buổi kiểm tra định kì, số học sinh của lớp được chia thành hai phòng như sau:

Học sinh \ Phòng	1	2
Nam	11	8
Nữ	9	12

Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp 12A.

Xét các biến cố:

A: "Học sinh được chọn ở phòng 2";

B: "Học sinh được chọn là học sinh nữ".

a) Biến cố học sinh được chọn là học sinh nữ ở phòng 2 là $A \cap B$.	**Đ**	**S**
b) $P(A \cap B) \neq \frac{3}{10}$.	**Đ**	**S**
c) $P(B) = \frac{21}{40}$.	**Đ**	**S**
d) $P(A \mid B) = \frac{4}{7}$.	**Đ**	**S**

4. Một doanh nghiệp trước khi xuất khẩu mũ thời trang trong lô hàng X phải qua hai lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc mũ trong lô hàng đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 96% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 91% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc mũ thời trang trong lô hàng X.

Xét các biến cố:

A: "Chiếc mũ thời trang chọn ra qua được lần kiểm tra thứ nhất";

B: "Chiếc mũ thời trang chọn ra qua được lần kiểm tra thứ hai".

a) Xác suất để chiếc mũ thời trang qua được lần kiểm tra thứ hai, biết rằng đã qua được lần kiểm tra thứ nhất, là xác suất có điều kiện $P(B \mid A)$.	**Đ**	**S**
b) Xác suất để một chiếc mũ thời trang đủ tiêu chuẩn xuất khẩu là $P(B \cap A)$.	**Đ**	**S**
c) $P(B \mid A) > 0,91$.	**Đ**	**S**
d) Xác suất để một chiếc mũ thời trang đủ tiêu chuẩn xuất khẩu là 0,8736.	**Đ**	**S**

5. Trong một đợt thi chứng chỉ hành nghề có 160 cán bộ tham gia, trong đó có 84 nam và 76 nữ. Khi công bố kết quả của kì kiểm tra đó, có 59 cán bộ đạt loại giỏi, trong đó có 30 cán bộ nam và 29 cán bộ nữ. Chọn ra ngẫu nhiên một cán bộ. Tính xác suất để cán bộ được chọn ra đạt loại giỏi, biết rằng cán bộ đó là nữ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

6. Một hộp đựng 5 quả bóng màu vàng và 3 quả bóng màu trắng, các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên lần thứ nhất một quả bóng (không hoàn lại), rồi lần thứ hai lấy một quả bóng khác. Tính xác suất để lần thứ nhất lấy được quả bóng màu vàng, lần thứ hai lấy được quả bóng màu trắng.

7. Một hộp đựng 24 chai nước giải khát có hình dạng và kích thước như nhau, trong đó có 2 chai nước giải khát ghi giải thưởng "Bạn nhận được thêm một chai nước giải khát". Chọn ra ngẫu nhiên lần lượt (không hoàn lại) hai chai nước trong hộp. Tính xác suất để cả hai chai đều ghi giải thưởng.

8. Một công ty có hai chi nhánh. Sản phẩm của chi nhánh I chiếm 54% tổng sản phẩm của công ty. Trong quá trình sản xuất phân loại, có 75% sản phẩm của công ty đạt loại A, trong đó có 65% của chi nhánh I. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của công ty. Tính xác suất sản phẩm được chọn đạt loại A, biết rằng sản phẩm được chọn của chi nhánh I (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

9. Một hộp có 12 quả bóng màu xanh, 7 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng trong hộp, lấy không hoàn lại. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ, biết rằng lần thứ nhất đã lấy được quả bóng màu xanh.

§2 CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN. CÔNG THỨC BAYES

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A, B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$, ta có:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \,.\, \mathrm{P}(A \mid \overline{B}).$$

2. Công thức Bayes

Với hai biến cố A, B mà $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$, ta có: $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}$.

***Nhận xét*:** Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(A) > 0$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$.

Do $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \,.\, \mathrm{P}(A \mid \overline{B})$ nên công thức Bayes còn có dạng:

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \,.\, \mathrm{P}(A \mid \overline{B})}.$$

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính xác suất bằng cách sử dụng công thức xác suất toàn phần

Ví dụ 1 Một công ty thời trang có hai chi nhánh cùng sản xuất một loại áo thời trang, trong đó có 56% áo thời trang ở chi nhánh I và 44% áo thời trang ở chi nhánh II. Tại chi nhánh I có 75% áo chất lượng cao và tại chi nhánh II có 68% áo chất lượng cao (kích thước và hình dạng bề ngoài của các áo là như nhau). Chọn ngẫu nhiên 1 áo thời trang. Xác suất chọn được áo chất lượng cao là bao nhiêu?

Giải

Xét các biến cố:

A: "Chọn được áo chất lượng cao";

B: "Chọn được áo ở chi nhánh I";

$\overline{B}$: Chọn được áo ở chi nhánh II".

Từ giả thiết, ta có:

$$P(B) = 0{,}56;\ P(A \mid B) = 0{,}75;\ P(\overline{B}) = 0{,}44;\ P(A \mid \overline{B}) = 0{,}68.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B)\ .\ P(A \mid B) + P(\overline{B})\ .\ P(A \mid \overline{B}) = 0{,}56\ .\ 0{,}75 + 0{,}44\ .\ 0{,}68 = 0{,}7192.$$

Vậy xác suất chọn được áo chất lượng cao là 0,7192.

Ví dụ 2 Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu?

Giải

Xét các biến cố:

A: "Chọn được người không bị bệnh tiểu đường";

B: "Chọn được người cao tuổi là nam";

$\overline{B}$: "Chọn được người cao tuổi là nữ".

Từ giả thiết, ta có: $P(B) = \dfrac{260}{500} = 0{,}52;\ P(A \mid B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6;$

$$P(\overline{B}) = \frac{240}{500} = 0{,}48;\ P(A \mid \overline{B}) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B)\ .\ P(A \mid B) + P(\overline{B})\ .\ P(A \mid \overline{B}) = 0{,}52\ .\ 0{,}6 + 0{,}48\ .\ 0{,}45 = 0{,}528.$$

Vậy xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là 0,528.

Ví dụ 3 Có hai hộp bóng bàn, các quả bóng bàn có kích thước và hình dạng như nhau. Hộp thứ nhất có 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng. Hộp thứ hai có 6 quả bóng bàn màu trắng và 4 quả bóng bàn màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng bàn ở hộp thứ hai ra. Tính xác suất để lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai.

Giải

Vì hộp thứ nhất có 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng nên khi lấy 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất thì có hai khả năng: khả năng thứ nhất là lấy được 3 quả bóng bàn màu trắng và 1 quả bóng bàn màu vàng; khả năng thứ hai là lấy được 2 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng.

Xét các biến cố:

A: "Lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai";

B: "Lấy được 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất, trong đó có 1 quả bóng bàn màu vàng";

$\overline{B}$: "Lấy được 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất, trong đó có 2 quả bóng bàn màu vàng".

• *Xét khả năng thứ nhất*: Số cách lấy 4 quả bóng bàn từ hộp thứ nhất là C_5^4, có 1 cách lấy 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 cách lấy 1 quả bóng bàn màu vàng, suy ra $P(B) = \dfrac{1 \,.\, 2}{C_5^4} = \dfrac{2}{5}$. Vì khi đó hộp thứ hai có 9 quả bóng bàn màu trắng và 5 quả bóng bàn màu vàng nên $P(A \mid B) = \dfrac{5}{14}$.

• *Xét khả năng thứ hai*: Số cách lấy 4 quả bóng bàn từ hộp thứ nhất là C_5^4, có C_3^2 cách lấy 2 quả bóng bàn màu trắng và 1 cách lấy 2 quả bóng bàn màu vàng, suy ra $P(\overline{B}) = \dfrac{C_3^2 \,.\, 1}{C_5^4} = \dfrac{3}{5}$. Vì khi đó hộp thứ hai có 8 quả bóng bàn màu trắng và 6 quả bóng bàn màu vàng nên $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{6}{14}$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B) \,.\, P(A \mid B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A \mid \overline{B}) = \frac{2}{5} \,.\, \frac{5}{14} + \frac{3}{5} \,.\, \frac{6}{14} = \frac{2}{5}.$$

Vậy xác suất để lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai là $\dfrac{2}{5}$.

Vấn đề 2. Tính xác suất bằng cách sử dụng công thức Bayes

Ví dụ 4 Có hai chiếc hộp, hộp I chứa 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen, hộp II chứa 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II.

a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi màu trắng.

b) Giả sử viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi màu trắng. Tính xác suất để viên bi màu trắng đó thuộc hộp I.

Giải

a) Xét các biến cố:

A: "Lấy được viên bi màu trắng từ hộp II";

B: "Lấy được viên bi màu trắng từ hộp I bỏ sang hộp II";

$\overline{B}$: "Lấy được viên bi màu đen từ hộp I bỏ sang hộp II".

Tương tự như *Ví dụ 3*, theo giả thiết ta có:

$$P(B) = P(\overline{B}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};\ P(A \mid B) = \frac{7}{11};\ P(A \mid \overline{B}) = \frac{6}{11}.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B)\ .\ P(A \mid B) + P(\overline{B})\ .\ P(A \mid \overline{B}) = \frac{1}{2} . \frac{7}{11} + \frac{1}{2} . \frac{6}{11} = \frac{13}{22}.$$

Vậy xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi màu trắng là $\frac{13}{22}$.

b) Gọi N là biến cố "Viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi thuộc hộp I". Khi đó ta cần tính $P(N \mid A)$.

Ta có: $P(N) = \frac{1}{11}$; $P(A) = \frac{13}{22}$. Để tính $P(A \mid N)$, hay xác suất để lấy được viên bi màu trắng từ hộp II, biết rằng viên bi đó thuộc hộp I, ta xét các trường hợp sau:

• Viên bi được lấy từ hộp I bỏ sang hộp II có màu đen. Khi đó xác suất lấy được viên bi trắng thuộc hộp I bằng 0.

• Viên bi được lấy từ hộp I bỏ sang hộp II có màu trắng. Khi đó xác suất lấy được viên bi màu trắng thuộc hộp I bằng $P(B) = \frac{1}{2}$.

Do đó, $P(A \mid N) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(N \mid A) = \frac{P(A \mid N)\ .\ P(N)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{11}}{\frac{13}{22}} = \frac{1}{13}.$$

Vậy xác suất viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi thuộc hộp I, biết rằng viên bi đó màu trắng, là $\frac{1}{13}$.

Ví dụ 5 Một loại linh kiện do hai nhà máy I, II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là: 0,04; 0,03. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy I và 120 sản phẩm của nhà máy II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó.

a) Tính xác suất để linh kiện được lấy ra không phải là phế phẩm.

b) Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Hỏi xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao hơn?

Giải

a) Xét các biến cố:

A: "Linh kiện được lấy ra không phải là phế phẩm";

M: "Linh kiện được lấy ra do nhà máy I sản xuất";

$\overline{M}$: "Linh kiện được lấy ra do nhà máy II sản xuất".

Theo giả thiết, ta có:

$$P(M) = \frac{80}{200} = 0,4;\ P(\overline{M}) = \frac{120}{200} = 0,6;\ P(\overline{A} \mid M) = 0,04;\ P(\overline{A} \mid \overline{M}) = 0,03;$$

$$P(A \mid M) = 1 - 0,04 = 0,96;\ P(A \mid \overline{M}) = 1 - 0,03 = 0,97.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(M)\ .\ P(A \mid M) + P(\overline{M})\ .\ P(A \mid \overline{M}) = 0,4\ .\ 0,96 + 0,6\ .\ 0,97 = 0,966.$$

Vậy xác suất để linh kiện được lấy ra không phải là phế phẩm là 0,966.

b) Xác suất linh kiện phế phẩm được lấy ra do nhà máy I sản xuất là:

$$P(M \mid \overline{A}) = \frac{P(M)\ .\ P(\overline{A} \mid M)}{P(\overline{A})} = \frac{0,4\ .\ 0,04}{1 - 0,966} = \frac{8}{17}.$$

Xác suất linh kiện phế phẩm được lấy ra do nhà máy II sản xuất là:

$$P(\overline{M} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{M})\ .\ P(\overline{A} \mid \overline{M})}{P(\overline{A})} = \frac{0,6\ .\ 0,03}{1 - 0,966} = \frac{9}{17}.$$

Vậy xác suất linh kiện phế phẩm được lấy ra do nhà máy II sản xuất là cao hơn.

Ví dụ 6 Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm A, cho kết quả như sau: Khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 70%, còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1 000 000 con (*Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005*). Hỏi khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm A thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là bao nhiêu?

Giải

Xét các biến cố:

M: "Con bò ở Hà Lan bị bệnh bò điên";

D: "Con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm A".

Theo giả thiết, ta có: $P(M) = 0{,}000013$; $P(D \mid M) = 0{,}7$; $P(D \mid \overline{M}) = 0{,}1$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(D) = P(M) \,.\, P(D \mid M) + P(\overline{M}) \,.\, P(D \mid \overline{M}) = 0{,}000013 \,.\, 0{,}7 + (1 - 0{,}000013) \,.\, 0{,}1$$
$$= 0{,}1000078.$$

Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(M \mid D) = \frac{P(M) \,.\, P(D \mid M)}{P(D)} = \frac{0{,}000013 \,.\, 0{,}7}{0{,}1000078} = \frac{91}{1\,000\,078}.$$

Vậy xác suất để một con bò Hà Lan bị bệnh bò điên nếu nó phản ứng dương tính với xét nghiệm A là $\frac{91}{1\,000\,078}$.

C. BÀI TẬP

10. Nếu hai biến cố A, B thoả mãn $P(B) = 0{,}4$; $P(A \mid B) = 0{,}5$; $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}3$ thì $P(A)$ bằng:

A. 0,38. **B.** 0,8. **C.** 0,2. **D.** 0,18.

11. Nếu hai biến cố A, B thoả mãn $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \mid B) = 0{,}4$ thì $P(B \mid A)$ bằng:

A. 0,5. **B.** 0,6. **C.** 0,8. **D.** 0,2.

12. *Trong mỗi ý a), b), c), d), chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Một kho hàng có các thùng hàng với bề ngoài giống hệt nhau, trong đó có 24 thùng hàng loại I và 26 thùng hàng loại II. Trong số các thùng hàng đó, có 95% thùng hàng loại I và 80% thùng hàng loại II đã được kiểm định. Chọn ngẫu nhiên một thùng hàng.

Xét các biến cố:

A: "Chọn được thùng hàng loại I";

B: "Chọn được thùng hàng đã được kiểm định".

a) $P(A) = 0{,}48$; $P(\overline{A}) = 0{,}52$.	**Đ**	**S**
b) $P(B \mid A) = 0{,}8$.	**Đ**	**S**
c) $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}95$.	**Đ**	**S**
d) $P(B) = 0{,}872$.	**Đ**	**S**

13. Trước khi đưa ra thị trường một sản phẩm, công ty phỏng vấn 800 khách hàng và được kết quả là 550 người nói sẽ mua, còn 250 người nói sẽ không mua. Theo kinh nghiệm của nhà sản xuất thì trong những người nói sẽ mua sẽ có 60% số người chắc chắn mua, còn trong những người nói sẽ không mua lại có 1% người chắc chắn mua. Chọn ngẫu nhiên một khách hàng. Xác suất chọn được khách hàng chắc chắn mua là bao nhiêu?

14. Huy thực hiện liên tiếp hai thí nghiệm. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là 0,6. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là 0,8. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là 0,3. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Cả hai thí nghiệm đều thành công";

B: "Thí nghiệm thứ nhất không thành công, còn thí nghiệm thứ hai thành công";

C: "Thí nghiệm thứ hai thành công".

15. Một xí nghiệp mỗi ngày sản xuất ra 1 600 sản phẩm, trong đó có 35 sản phẩm lỗi. Lần lượt lấy ra ngẫu nhiên 2 sản phẩm không hoàn lại để kiểm tra. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Sản phẩm lấy ra lần thứ hai không bị lỗi, biết sản phẩm lấy ra lần thứ nhất không bị lỗi";

B: "Sản phẩm lấy ra lần thứ hai bị lỗi, biết sản phẩm lấy ra lần thứ nhất không bị lỗi";

C: "Sản phẩm lấy ra lần thứ hai không bị lỗi, biết sản phẩm lấy ra lần thứ nhất bị lỗi";

D: "Sản phẩm lấy ra lần thứ hai bị lỗi, biết sản phẩm lấy ra lần thứ nhất bị lỗi";

E: "Sản phẩm lấy ra lần thứ hai bị lỗi".

16. Một đội tuyển thi bắn súng có 10 xạ thủ, bao gồm 4 xạ thủ hạng I và 6 xạ thủ hạng II. Xác suất bắn trúng mục tiêu của xạ thủ hạng I và hạng II lần lượt là 0,75 và 0,6. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ đó chỉ bắn 1 viên đạn. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất để viên đạn đó trúng mục tiêu.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

17. Cho hai biến cố xung khắc A, B với $P(A) = 0,15$; $P(B) = 0,45$. Khi đó, $P(A \mid B)$ bằng:

A. 0,6. **B.** 0,3. **C.** 0,0675. **D.** 0.

18. Cho hai biến cố A, B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$ và $\mathrm{P}(A \cap B) = 0,2$; $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0,3$. Khi đó, $\mathrm{P}(A)$ bằng:

A. 0,06. **B.** 0,5. **C.** 0,1. **D.** 0,67.

19. Cho hai biến cố A, B sao cho $\mathrm{P}(A) = 0,5$; $\mathrm{P}(B) = 0,2$; $\mathrm{P}(A \mid B) = 0,25$. Khi đó, $\mathrm{P}(B \mid A)$ bằng:

A. 0,1. **B.** 0,4. **C.** 0,9. **D.** 0,625.

20. *Trong mỗi ý a), b), c), d, chọn phương án: đúng (**Đ**) hoặc sai (**S**).*

Cho các biến cố A, B thoả mãn $0 < \mathrm{P}(A) < 1$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$.

a) $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \,.\, \mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}(\overline{A}) \,.\, \mathrm{P}(B \mid \overline{A})$.

b) $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.

c) $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(A)}$.

d) $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$.

Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**
Đ	**S**

21. Trong một ngày hội giao lưu học sinh, chỉ có 350 học sinh trường Hoà Bình và 450 học sinh trường Minh Phúc đứng ở hội trường. Trong các học sinh giao lưu, tỉ lệ học sinh trường Hoà Bình bị cận thị là 0,2, còn tỉ lệ học sinh trường Minh Phúc bị cận thị là 0,3. Các học sinh của hai trường đứng lẫn với nhau. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Xác suất chọn được học sinh bị cận thị là bao nhiêu?

22. Trên bàn có hai hộp bi với hình dạng và kích thước như nhau. Hộp thứ nhất có 6 viên bi đỏ, 7 viên bi vàng; còn hộp thứ hai có 10 viên bi đỏ, 11 viên bi vàng. Các viên bi có hình dạng và kích thước như nhau. Chọn ngẫu nhiên một hộp bi và từ hộp đó lấy ngẫu nhiên một viên bi. Tính xác suất để viên bi được lấy có màu đỏ.

23. Giả sử trong một nhóm 80 người có 69 người không nhiễm bệnh và 11 người nhiễm bệnh. Để phát hiện ra người nhiễm bệnh, người ta tiến hành xét nghiệm tất cả mọi người của nhóm đó. Biết rằng đối với người nhiễm bệnh, xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 0,9; còn đối với người không nhiễm bệnh, xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 0,05.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

b) Giả sử X là một người trong nhóm bị xét nghiệm có kết quả dương tính. Tính xác suất để X là người nhiễm bệnh.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

1. C. **2. D.**

3. Không gian mẫu có số phần tử là 40. Biến cố học sinh được chọn là học sinh nữ ở phòng 2 là $A \cap B$. Ta có:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10};\ \mathrm{P}(B) = \frac{9+12}{40} = \frac{21}{40}.$$

Suy ra $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{21}{40}} = \dfrac{4}{7}.$

Đáp số: a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **Đ**.

4. Xác suất để chiếc mũ thời trang qua được lần kiểm tra thứ hai, biết rằng đã qua được lần kiểm tra thứ nhất, là xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(B \mid A)$. Ngoài ra, xác suất để một chiếc mũ thời trang đủ tiêu chuẩn xuất khẩu là $\mathrm{P}(B \cap A)$.

Theo giả thiết, ta có: $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}91$; $\mathrm{P}(A) = 0{,}96$.

Suy ra $\mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(A) \,.\, \mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}96 \,.\, 0{,}91 = 0{,}8736$.

Đáp số: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **Đ**.

5. Xét các biến cố:

A: "Cán bộ được chọn ra đạt loại giỏi";

B: "Cán bộ được chọn ra là nữ".

Khi đó, xác suất để cán bộ được chọn ra đạt loại giỏi, biết rằng cán bộ đó là nữ, là xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Ta có: $n(B) = 76$; $n(A \cap B) = 29$. Suy ra $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{29}{76} \approx 0{,}38.$

Vậy xác suất để cán bộ được chọn ra đạt loại giỏi, biết rằng cán bộ đó là nữ, là khoảng 0,38.

6. Xét các biến cố:

A: "Lần thứ nhất lấy được quả bóng màu vàng";

B: "Lần thứ hai lấy được quả bóng màu trắng";

C: "Lần thứ nhất lấy được quả bóng màu vàng, lần thứ hai lấy được quả bóng màu trắng".

Khi đó, xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu trắng, biết lần thứ nhất lấy được quả bóng màu vàng là xác suất có điều kiện $P(B \mid A)$ và $P(C) = P(A \cap B)$.

Ta có: $P(A) = \frac{5}{8}$. Vì sau khi lấy một quả bóng màu vàng ở lần thứ nhất thì trong lần thứ hai chỉ còn 4 quả bóng màu vàng và 3 quả bóng màu trắng.

Do đó, $P(B \mid A) = \frac{3}{7}$.

Suy ra $P(C) = P(A \cap B) = P(A) . P(B \mid A) = \frac{5}{8} . \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$.

Vậy xác suất để lần thứ nhất lấy được quả bóng màu vàng, lần thứ hai lấy được quả bóng màu trắng là $\frac{15}{56}$.

7. Xét các biến cố:

A: "Chai được chọn ở lần thứ nhất có ghi giải thưởng";

B: "Chai được chọn ở lần thứ hai có ghi giải thưởng";

C: "Cả hai chai được chọn đều ghi giải thưởng".

Khi đó, xác suất để chai được chọn ở lần thứ hai có ghi giải thưởng, biết chai được chọn ở lần thứ nhất có ghi giải thưởng, là xác suất có điều kiện $P(B \mid A)$ và $P(C) = P(A \cap B)$.

Ta có: $P(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$. Vì sau khi lấy một chai có ghi giải thưởng thì trong lần thứ hai chỉ còn 1 chai có ghi giải thưởng và tổng số chai là 23. Do đó, $P(B \mid A) = \frac{1}{23}$.

Suy ra $P(C) = P(A \cap B) = P(A) . P(B \mid A) = \frac{1}{12} . \frac{1}{23} = \frac{1}{276}$.

Vậy xác suất để cả hai chai đều ghi giải thưởng là $\frac{1}{276}$.

8. Xét các biến cố:

M: "Sản phẩm được chọn đạt loại A";

N: "Sản phẩm được chọn của chi nhánh I".

Khi đó, sản phẩm được chọn đạt loại A, biết rằng sản phẩm được chọn của chi nhánh I, là xác suất có điều kiện $P(M \mid N)$.

Ta có: $P(N \mid M) = 0{,}65$; $P(M) = 0{,}75$; $P(N) = 0{,}54$.

Khi đó, $P(M \cap N) = P(N \cap M) = P(M) . P(N \mid M) = 0{,}75 . 0{,}65 = 0{,}4875$.

Suy ra $P(M \mid N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{0{,}4875}{0{,}54} \approx 0{,}9$.

Vậy xác suất sản phẩm được chọn đạt loại A, biết rằng sản phẩm được chọn của chi nhánh I, là khoảng 0,9.

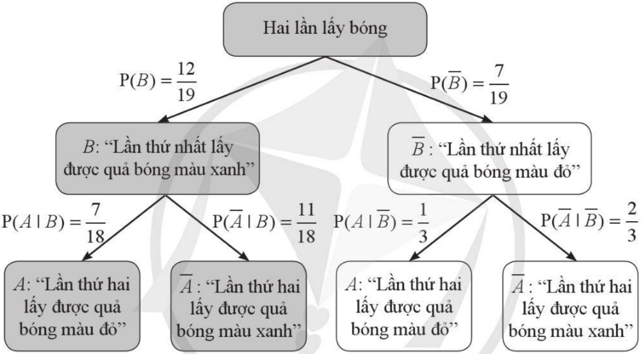
9. Xét các biến cố:

A: "Lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ";

B: "Lần thứ nhất lấy được quả bóng màu xanh".

Khi đó, xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ, biết rằng lần thứ nhất đã lấy được quả bóng màu xanh, là xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Sơ đồ hình cây biểu thị cách tính xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$, được vẽ như sau:



Vậy xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ, biết rằng lần thứ nhất đã lấy được quả bóng màu xanh, là $\frac{7}{18}$.

§2 CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN. CÔNG THỨC BAYES

10. A. **11. C.**

12. Theo giả thiết, ta có: $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}95$; $\mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(A) = \frac{24}{50} = 0{,}48$; $\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{26}{50} = 0{,}52$. Suy ra

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \,.\, \mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}(\overline{A}) \,.\, \mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}48 \,.\, 0{,}95 + 0{,}52 \,.\, 0{,}8 = 0{,}872.$$

Đáp số: a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **Đ**.

13. Xét các biến cố:

A: "Khách hàng được chọn chắc chắn mua";

B: "Khách hàng được chọn nói sẽ mua".

Theo giả thiết, ta có:

$$P(B) = \frac{550}{800} = \frac{11}{16};\ P(\overline{B}) = \frac{250}{800} = \frac{5}{16};\ P(A \mid B) = 0,6;\ P(A \mid \overline{B}) = 0,01.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B) \,.\, P(A \mid B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A \mid \overline{B})$$
$$= \frac{11}{16} \,.\, 0,6 + \frac{5}{16} \,.\, 0,01 = \frac{133}{320}.$$

Vậy xác suất chọn được khách hàng chắc chắn mua là $\frac{133}{320}$.

14. Xét biến cố M: "Thí nghiệm thứ nhất thành công".

Khi đó, $P(A) = P(M \cap C)$; $P(B) = P(\overline{M} \cap C)$.

Theo giả thiết, ta có: $P(M) = 0,6$; $P(\overline{M}) = 0,4$; $P(C \mid M) = 0,8$; $P(C \mid \overline{M}) = 0,3$.

Suy ra xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = P(M \cap C) = P(M) \,.\, P(C \mid M) = 0,6 \,.\, 0,8 = 0,48;$$

Xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = P(\overline{M} \cap C) = P(\overline{M}) \,.\, P(C \mid \overline{M}) = 0,4 \,.\, 0,3 = 0,12.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất của biến cố C là:

$$P(C) = P(M \cap C) + P(\overline{M} \cap C) = 0,48 + 0,12 = 0,6.$$

15. Xét các biến cố:

M: "Sản phẩm lấy ra lần thứ nhất không bị lỗi";

N: "Sản phẩm lấy ra lần thứ hai không bị lỗi".

Khi đó, $P(A) = P(N \mid M)$; $P(B) = P(\overline{N} \mid M)$; $P(C) = P(N \mid \overline{M})$; $P(D) = P(\overline{N} \mid \overline{M})$; $P(E) = P(\overline{N})$.

• Sau khi lấy một sản phẩm không bị lỗi thì số sản phẩm còn lại 1 599, số sản phẩm lỗi là 35 nên xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = P(N \mid M) = \frac{1\,599 - 35}{1\,599} = \frac{1\,564}{1\,599};$$

Xác suất của biến cố B là: $P(B) = P(\overline{N} \mid M) = \frac{35}{1\,599}$.

• Sau khi lấy một sản phẩm bị lỗi thì số sản phẩm còn lại 1 599, số sản phẩm lỗi là 34 nên xác suất của biến cố C là:

$$P(C) = P(N \mid \overline{M}) = \frac{1\,599 - 34}{1\,599} = \frac{1\,565}{1\,599};$$

xác suất của biến cố D là:

$$P(D) = P(\overline{N} \mid \overline{M}) = \frac{34}{1\,599}.$$

• Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất của biến cố E là:

$$P(E) = P(\overline{N}) = P(M) \,.\, P(\overline{N} \mid M) + P(\overline{M}) \,.\, P(\overline{N} \mid \overline{M})$$
$$= \frac{1\,600 - 35}{1\,600} \,.\, \frac{35}{1\,599} + \frac{35}{1\,600} \,.\, \frac{34}{1\,599} = \frac{7}{320}.$$

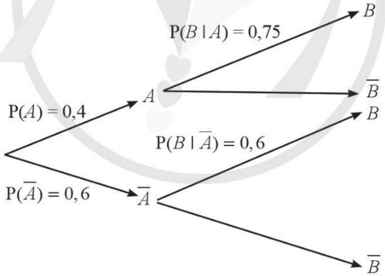
16. Xét các biến cố:

A: "Chọn được xạ thủ hạng I";

B: "Viên đạn đó trúng mục tiêu".

Khi đó, $P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$; $P(\overline{A}) = \frac{6}{10} = 0,6$; $P(B \mid A) = 0,75$; $P(B \mid \overline{A}) = 0,6$.

Sơ đồ hình cây biểu thị tình huống đã cho là:



Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B) = P(A) \,.\, P(B \mid A) + P(\overline{A}) \,.\, P(B \mid \overline{A}) = 0,4 \,.\, 0,75 + 0,6 \,.\, 0,6 = 0,66.$$

Vậy xác suất để viên đạn đó trúng mục tiêu là 0,66.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

17. D. **18. B**. **19. A**.

20. Đáp số: a) **Đ**, b) **Đ**, c) **S**, d) **S**.

21. Xét các biến cố:

A: "Học sinh được chọn bị cận thị";

B: "Học sinh được chọn thuộc trường Hoà Bình".

Theo giả thiết, ta có:

$$\mathrm{P}(B) = \frac{350}{800} = \frac{7}{16};\ \mathrm{P}(\overline{B}) = \frac{450}{800} = \frac{9}{16};\ \mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}2;\ \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = 0{,}3.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\,.\,\mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B})\,.\,\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$$

$$= \frac{7}{16}\,.\,0{,}2 + \frac{9}{16}\,.\,0{,}3 = \frac{41}{160}.$$

Vậy xác suất chọn được học sinh bị cận thị là $\frac{41}{160}$.

22. Xét các biến cố:

A: "Lấy được viên bi màu đỏ";

B: "Chọn được hộp bi thứ nhất".

Theo giả thiết, ta có:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{B}) = \frac{1}{2};\ \mathrm{P}(A \mid B) = \frac{6}{13};\ \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = \frac{10}{21}.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\,.\,\mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B})\,.\,\mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = \frac{1}{2}\,.\,\frac{6}{13} + \frac{1}{2}\,.\,\frac{10}{21} = \frac{128}{273}.$$

Vậy xác suất để viên bi được lấy có màu đỏ là $\frac{128}{273}$.

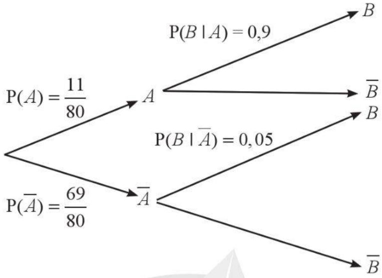
23. a) Xét các biến cố:

A: "Người được chọn nhiễm bệnh";

B: "Người được chọn xét nghiệm có kết quả dương tính".

Khi đó, $\mathrm{P}(A) = \frac{11}{80};\ \mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{69}{80};\ \mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}9;\ \mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}05.$

Sơ đồ hình cây biểu thị tình huống đã cho là:



b) Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất người X xét nghiệm có kết quả dương tính là:

$$P(B) = P(A) \,.\, P(B \mid A) + P(\overline{A}) \,.\, P(B \mid \overline{A}) = \frac{11}{80} \,.\, 0{,}9 + \frac{69}{80} \,.\, 0{,}05 = \frac{267}{1\,600}.$$

Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \,.\, P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{\frac{11}{80} \,.\, 0{,}9}{\frac{267}{1\,600}} = \frac{66}{89}.$$

Vậy xác suất để X là người nhiễm bệnh, biết rằng X có kết quả xét nghiệm dương tính, là $\frac{66}{89}$.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, toà nhà số 128 đường Xuân Thủy, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐAN – NGUYỄN THỊ QUÝ – ĐÀO ANH TIẾN
Thiết kế sách:
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN
Trình bày bìa:
PHAN THỊ LƯƠNG
Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

Bài tập TOÁN 12 – TẬP HAI

Mã số:....................
Mã ISBN:......................

In .... cuốn, khổ 17 x 24 cm, tại ....
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản: ....
Quyết định xuất bản số: ....
In xong và nộp lưu chiểu năm .....