

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau sao cho $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Chứng minh:
 $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$.

Câu 2 (3,0 điểm)

Một hộp có chứa 25 viên bi giống nhau được đánh số từ 1 đến 25. An bốc ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, ghi số của viên bi đã bốc lên bảng rồi bỏ lại viên bi đó vào hộp. Tiếp đến, Bình bốc ngẫu nhiên một viên bi trong hộp và ghi số của viên bi đã bốc lên bảng. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- Hai số mà An và Bình ghi lên bảng có tổng chia hết cho 2.
- Tổng bình phương hai số mà An và Bình ghi lên bảng chia hết cho 3.

Câu 3 (2,0 điểm)

Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ với b, c là các số nguyên. Biết rằng tồn tại các số nguyên tố m, n với $m < n$ sao cho $P(m) = 1$ và $P(n) = 4$. Tính giá trị của $P(2)$.

Câu 4 (3,0 điểm)

Gọi x, y là các số nguyên dương sao cho $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x}$ là một số nguyên. Gọi d là ước chung lớn nhất của x và y . Khi đó:

- Tìm một cặp (x, y) mà $x + y = d^2$.
- Chứng minh rằng $x + y$ chia hết cho d^2 .

Câu 5 (2,0 điểm)

Cho x, y là các số thực dương sao cho $x + y + xy = x^2 + y^2$. Chứng minh rằng:

$$x + y \leq 4 \text{ và } \frac{x}{y+2xy} + \frac{y}{x+2xy} \geq \frac{2}{5}.$$

Câu 6 (2,0 điểm)

Tập hợp A gồm một vài phân tử, các phân tử đều là số nguyên dương không lớn hơn 30.

Tập A được gọi là “đặc biệt” nếu không tồn tại hai số a, b thuộc A với $a > b$ sao cho $\frac{a+b}{a-b} \in \mathbb{Z}$.

- Tìm một tập hợp A “đặc biệt” gồm 10 phân tử.
- Tồn tại hay không một tập hợp A “đặc biệt” gồm 11 phân tử?

Câu 7 (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở F . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của F lên AB, AC và gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh:

- $\widehat{MEC} = \widehat{MDB}$.
- ME vuông góc với AB .
- $AB \cdot MD = AC \cdot ME$.

----- HẾT -----