

**Câu 1.** (3,0 điểm)

- a) Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số, nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.
- b) Cho ba số nguyên  $x, y, z$  có tổng chia hết cho 6. Chứng minh rằng biểu thức  $M = (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz$  chia hết cho 6.

**Câu 2.** (3,0 điểm)

a) Trong một bài thi trắc nghiệm môn Toán có 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 lựa chọn A; B; C; D. Nếu chọn đúng được 0,2 điểm. Bạn Bắc đã trả lời chắc chắn đúng 44 câu hỏi thì gần hết thời gian nên đành chọn ngẫu nhiên đáp án của 6 câu cuối. Tính xác suất để bạn Bắc đạt điểm tối đa

b) Người ta đặt một vòi chảy vào từ trên xuống và một vòi tháo nước ra tại lưng chừng của một bể nước. Khi bể không chứa nước nếu mở cả 2 vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước, còn nếu đóng vòi chảy ra và chỉ mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút bể đầy nước. Biết trong cùng một thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước nhiều gấp hai lần lượng nước của vòi chảy ra. Hỏi khi bể không có nước nếu mở cả hai vòi thì sau thời gian bao lâu mực trong bể nước ngang đến chỗ lắp vòi chảy ra.

**Câu 3.** (6,0 điểm)

a) Giải phương trình:  $(x^2 - x + 1)^4 + 4x^2(x^2 - x + 1)^2 = 5x^4$

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy + x + 2y = 14 \\ x^3 + 6x^2 + 12x - y = -7 \end{cases}$$

**Câu 4.** (7,0 điểm) Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại B, gọi O là trung điểm của AC, trên cạnh AB lấy điểm M bất kỳ (M khác A và B), vẽ  $\widehat{MON} = 90^\circ (N \in BC)$

- a) Chứng minh:  $MA = NB$
- b) Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, Qua B kẻ đường thẳng song song với MN, hai đường thẳng này cắt nhau tại E, ON cắt BE tại K  
Chứng minh rằng: KN là tia phân giác  $\widehat{BKC}$

c) Tia phân giác  $\widehat{EKC}$  cắt CE tại H. Chứng minh:  $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} = \frac{BE}{CK}$

**Câu 5.** (1,0 điểm)

Cho đa giác đều gồm 2025 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

## HƯỚNG DẪN CHẤM

CÂU	Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
<p><b>Câu 1 (3,0 điểm):</b></p> <p>a) Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số, nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên</p> <p>b) Cho ba số nguyên x, y, z có tổng chia hết cho 6. Chứng minh rằng biểu thức <math>M = (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz</math> chia hết cho 6.</p>			
<b>Câu 1 (3,0 đ)</b>		<p>Gọi mật khẩu đăng nhập của anh Bình là <math>\overline{abcd}</math> (<math>a, b, c, d \in N^*</math> và <math>a, b, c, d \leq 9</math> và <math>a \geq 2</math>)</p> <p>Theo đề bài ta có: <math>\overline{abcd} = x^2</math> và <math>\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)} = y^2</math></p> <p>Do đó: <math>x^2 - y^2 = 1111</math> (<math>x, y \in N^*; 32 \leq x, y \leq 99</math>)</p> <p><math>\Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 1.1111 = 11.101</math></p> <p>Vì <math>32 \leq x, y \leq 99</math> nên <math>x + y \neq 1111</math> và <math>x + y \neq 1</math></p> <p>Vậy nên không thể xảy ra trường hợp: <math>\begin{cases} x + y = 1111 \\ x - y = 1 \end{cases}</math> hoặc <math>\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1111 \end{cases}</math></p> <p>Mặt khác: <math>x + y &gt; x - y</math> (do x, y là các số nguyên dương) nên chỉ xảy ra trường hợp:</p> <p><math>\begin{cases} x - y = 11 \\ x + y = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 56 \\ y = 45 \end{cases}</math> (nhận)</p> <p>Vậy: mật khẩu đăng nhập của anh Bình là <math>56^2 = 3136</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
		<p><math>M = (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz</math></p> <p><math>= (xy + xz + y^2 + yz)(z + x) - 2xyz</math></p> <p><math>= [y(x + y + z) + zx](z + x) - 2xyz</math></p> <p><math>= y(x + y + z)(z + x) + zx(x + y + z) - 3xyz</math></p> <p><math>= (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz</math></p> <p>Do <math>x + y + z \vdots 6 \Rightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) \vdots 6</math> (1)</p> <p>Mặt khác: <math>x + y + z \vdots 6</math> nên trong 3 số x, y, z có ít nhất một số chẵn. Vì nếu cả ba số đều lẻ thì <math>x + y + z</math> lẻ <math>\Rightarrow x + y + z \not\vdots 6</math>. Trái với giả thiết.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

		$\Rightarrow 3xyz : 6 \quad (2)$	
		Từ (1) và (2) suy ra: $(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz : 6$	0,25
		Vậy M : 6	0,25

**Câu 2 (3,0 điểm):**

a) Trong một bài thi trắc nghiệm môn Toán có 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 lựa chọn A; B; C; D. Nếu chọn đúng được 0,2 điểm. Bạn Bắc đã trả lời chắc chắn đúng 44 câu hỏi thì gần hết thời gian nên đành chọn ngẫu nhiên đáp án của 6 câu cuối. Tính xác suất để bạn Bắc đạt điểm tối đa

b) Người ta đặt một vòi chảy vào từ trên xuống và một vòi tháo nước ra tại lưng chừng của một bể nước. Khi bể không chứa nước nếu mở cả 2 vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước, còn nếu đóng vòi chảy ra và chỉ mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút bể đầy nước. Biết trong cùng một thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước nhiều gấp hai lần lượng nước của vòi chảy ra. Hỏi khi bể không có nước nếu mở cả hai vòi thì sau thời gian bao lâu mực trong bể nước ngang đến chỗ lắp vòi chảy ra.

<b>Câu 2 (3,0 đ)</b>	<b>a)</b>	Xét 6 các câu trả lời cuối Có 4 lựa chọn câu trả lời thứ nhất. Có 4 lựa chọn câu trả lời thứ hai. Có 4 lựa chọn câu trả lời thứ ba. Có 4 lựa chọn câu trả lời thứ tư. Có 4 lựa chọn câu trả lời thứ năm. Có 4 lựa chọn câu trả lời thứ sáu Vậy số kết quả có thể là: $4.4.4.4.4.4 = 4096$ Để đạt điểm tối đa bạn Bình cần phải trả lời đúng tất cả các câu hỏi nên số kết quả thuận lợi là 1. Do đó xác suất để Bình đạt điểm tối đa là $\frac{1}{4096}$ .	0,5 0,5 0,5 0,5
	<b>b)</b>	Đổi 2 giờ 42 phút = 2,7 giờ Gọi thời gian vòi chảy vào chảy được lượng nước từ khi bể không chứa nước đến lúc nước trong bể ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x (giờ). ĐK: $0 < x < 1,5$ Trong 1 giờ, vòi chảy vào chảy được lượng nước vào bể là $1 : 1,5 = \frac{2}{3}$ (bể), vòi chảy ra tháo ra khỏi bể một lượng nước là: $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$ (bể) Khi lượng nước ngang vòi chảy ra nếu mở cả 2 vòi thì 1 giờ lượng nước trong bể có thêm là $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (bể) Trong x giờ vòi chảy vào được lượng nước là: $\frac{2}{3}x$ (bể) Trong $2,7 - x$ giờ còn lại cả 2 vòi cùng chảy vào được lượng nước là	0,25 0,25 0,25

	$\frac{1}{3}(2,7-x) \text{ (bể)}$ <p>Ta có phương trình: <math>\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2,7-x) = 1</math> nên <math>x = 0,3</math> (thỏa mãn)</p> <p>Vậy thời gian để vòi chảy vào được lượng nước từ khi bể không chứa nước đến lúc nước ngang vòi chảy ra là 0,3 giờ.</p>	0.25

**Câu 3 (6,0 điểm):**

a) Giải phương trình:  $(x^2 - x + 1)^4 + 4x^2(x^2 - x + 1)^2 = 5x^4$

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy + x + 2y = 14 \\ x^3 + 6x^2 + 12x - y = -7 \end{cases}$$

<b>Câu 3 (6,0 đ)</b>	<b>a)</b>	Đặt $(x^2 - x + 1)^2 = a; x^2 = b$ ( $a \geq 0; b \geq 0$ )	0.5
	<b>3đ</b>	$\Rightarrow a^2 + 4ab = 5b^2 \Leftrightarrow a(a-b) + 5b(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+5b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+5b=0 \end{cases}$ $a-b=0 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^2 = x^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = x \\ x^2 - x + 1 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ Vì $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow a + 5b \geq 0$ . Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - x + 1)^2 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0^2 - 0 + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (Vô lí)} \Rightarrow \text{Loại}$ Vậy $S = \{1\}$	0.5 0.5 0.5 0.5
	<b>b)</b>	$b) \begin{cases} xy + x + 2y = 14 \\ x^3 + 6x^2 + 12x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+2) + 2 + x = 16 \\ x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = y + 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+1) = 16 \quad (1) \\ (x+2)^3 = y+1 \quad (2) \end{cases}$ Thế (2) vào (1) được $(x+2)^4 = 16 \Leftrightarrow x+2 = \pm 2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 7 \\ x = -4 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$	0.5 0,5 0.5 0.5

	Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;7);(-4;-9)$ .	0,5

**Câu 4 (7,0 điểm):** Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại B, gọi O là trung điểm của AC, trên cạnh AB lấy điểm M bất kỳ ( M khác A và B), vẽ  $\widehat{MON} = 90^\circ (N \in BC)$

a) Chứng minh:  $MA = NB$

b) Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, Qua B kẻ đường thẳng song song với MN, hai đường thẳng này cắt nhau tại E, ON cắt BE tại K

Chứng minh rằng: KN là tia phân giác  $\widehat{BKC}$

c) Tia phân giác  $\widehat{EKC}$  cắt CE tại H. Chứng minh:  $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} = \frac{BE}{CK}$

Câu 4 (7,0 đ)	a) 3,5đ	<p>Vì BO là đường trung tuyến của <math>\Delta ABC</math> vuông cân tại B  <math>\Rightarrow</math> BO cũng là đường cao, cũng là đường phân giác  <math>\Rightarrow BO \perp AC</math> và <math>\widehat{ABO} = \widehat{CBO} = 45^\circ</math>          Xét <math>\Delta AMO</math> và <math>\Delta BNO</math> có:  <math>\widehat{MAO} = \widehat{OBN} = 45^\circ</math>  <math>AO = BO</math> (cùng <math>= \frac{1}{2} AC</math>)  <math>\widehat{AOM} = \widehat{BON}</math> (cùng phụ <math>\widehat{MOB}</math>)  <math>\Rightarrow \Delta AMO = \Delta BNO (g.c.g) \Rightarrow AM = BN</math></p>	0.5
	b) 2đ	<p>Do <math>\Delta AMO = \Delta BNO</math> (câu a)  <math>\Rightarrow OM = ON \Rightarrow \Delta OMN</math> vuông cân tại O  <math>\Rightarrow \widehat{ONM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{ONM} = 45^\circ</math> (cặp góc đồng vị)          Xét <math>\Delta NKB</math> và <math>\Delta NCO</math> có:</p>	0.5

	$\widehat{BKN} = \widehat{OCN} = 45^\circ (1)$ $\widehat{BNK} = \widehat{ONC} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$ $\Rightarrow \Delta NKB \sim \Delta NCO(g.g)$ $\frac{NK}{NC} = \frac{NB}{NO} \Rightarrow \frac{NK}{NB} = \frac{NC}{NO}$ $\Rightarrow \Delta NKC \sim \Delta NBO(c.g.c) \Rightarrow \widehat{CKN} = \widehat{NBO} = 45^\circ (2)$ <p>Từ (1) và (2) <math>\Rightarrow \widehat{CKN} = \widehat{BKN} \Rightarrow KN</math> là tia phân giác <math>\widehat{BKC}</math></p>	0.5 0.25 0.25
<b>c) 1,5đ</b>	<p>Ta có: <math>\widehat{CKN} = \widehat{BKN} = 45^\circ</math> (câu b) <math>\Rightarrow CK \perp BE</math> tại K</p> <p>Lại có: KH là tia phân giác <math>\widehat{CKE} \Rightarrow \widehat{CKH} = 45^\circ</math></p> <p>Mặt khác: <math>CE \parallel AB(gt) \Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{ABC} = 90^\circ</math></p> <p>Xét <math>\Delta KNB</math> và <math>\Delta KHC</math> có: <math>\widehat{CKH} = \widehat{BKN} = 45^\circ</math></p> $\widehat{HCK} = \widehat{KBN} \text{ (cùng phụ } \widehat{KCB} \text{)}$ $\Delta KNB \sim \Delta KHC(g.g) \Rightarrow \frac{KN}{KH} = \frac{KB}{KC}$ $\Rightarrow \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} = \frac{KC}{KB} + \frac{KB}{KC} = \frac{KC^2 + KB^2}{KB \cdot KC} = \frac{BC^2}{KB \cdot CK} (*)$ <p>Vì <math>\Delta KBC \sim \Delta CBE(g.g) \Rightarrow \frac{KB}{CB} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow BC^2 = KB \cdot BE</math></p> <p>Thay vào (*) ta có: <math>\Rightarrow \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} = \frac{KB \cdot BE}{KB \cdot CK} = \frac{BE}{CK}</math></p>	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
<p><b>Câu 5 (1,0 điểm):</b> Cho đa giác đều gồm 2025 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.</p>		
<b>Câu 5 (1.0đ)</b>	<p>-Ta có đa giác đều gồm 2025 cạnh nên có 2025 đỉnh. Do đó tồn tại 2 đỉnh kề nhau được sơn bởi cùng một màu. Giả sử 2 đỉnh đó là P và Q được sơn màu đỏ.</p> <p>- Vì đa giác đã cho là đa giác đều có số đỉnh lẻ, nên tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ. Giả sử đỉnh đó là A.</p> <p>-Nếu A tô màu đỏ thì ta có tam giác APQ là tam giác cân có 3 đỉnh A,P,Q được tô cùng màu đỏ.</p> <p>Nếu A tô màu xanh, khi đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q.</p>	0.25 0.25

	<p>Nếu cả hai đỉnh <math>B</math> và <math>C</math> được tô màu xanh thì tam giác <math>ABC</math> cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.</p>	0.25
	<p>-Ngược lại, nếu một trong hai đỉnh <math>B</math> và <math>C</math> được tô mà đỏ thì tam giác <math>BPQ</math> hoặc tam giác <math>CPQ</math> là tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ.</p>	0.25

Ghi chú: HS làm theo cách khác, lập luận chặt chẽ vẫn cho điểm tối đa.

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 9  
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-9>