TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên) - NGUYỄN DUY HIẾU - PHẠM THỊ BÉ HIỀN

(TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP.HỒ CHÍ MINH)

GIẢI TOÁN 12

KHỐI ĐA DIỆN VÀ KHỐI TRÒN XOAY

DÙNG CHO HỌC SINH LỚP CHUYÊN

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Trong thời gian vừa qua, được sự giúp đỡ của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, trường Trung học phổ thông chuyên Lê Hồng Phong đã biên soạn bộ sách "*Giải toán dành cho học sinh lớp chuyên*" theo định hướng bám sát sách giáo khoa, bổ sung các chủ đề nâng cao theo trình độ trường chuyên và các nội dung thi Đại học. Bộ sách đã được đông đảo học sinh và giáo viên các trường chuyên sử dụng và tin cậy.

Trong quá trình đổi mới giáo dục, đáp ứng yêu cầu mới của sách giáo khoa chuyên ban, chúng tôi biên soạn lại bộ sách Giải toán dành cho học sinh các trường chuyên và học sinh khá giỏi ở các trường Trung học phổ thông trên toàn quốc. Bộ sách "*Giải toán lớp 12*" được biên soạn nhằm đáp ứng tốt nhất cho các kì thi Tốt nghiệp THPT và đặc biệt là kì thi Tuyển sinh Đại học – Cao đẳng. Bộ sách này gồm năm quyển:

- Giải toán 12 – Hàm số mũ – lôgarit và số phức;
- Giải toán 12 – Phương pháp toạ độ trong không gian;
- Giải toán 12 – Khảo sát hàm số;
- Giải toán 12 – Khối đa diện và khối tròn xoay;
- Giải toán 12 – Tích phân – Nguyên hàm.

Nội dung quyển "*Giải toán 12 – Khối đa diện và khối tròn xoay*" bám sát theo cấu trúc của sách giáo khoa Hình học 12 (Nâng cao) và được trình bày theo hai chương như sau:

- *Chương I.* Khối đa diện. Thể tích của khối đa diện;
- *Chương II.* Mặt cầu. Mặt trụ. Mặt nón.

Trong mỗi bài học, chúng tôi xây dựng hệ thống bài tập rèn luyện dựa theo các vấn đề cụ thể, một số bài tập được trích trong các đề thi đại học để bạn đọc tham khảo. Chúng tôi có cung cấp đáp án và hướng dẫn giải sơ lược của một số bài tập tiêu biểu nhằm giúp các bạn đọc ôn tập, nâng cao kiến thức, rèn luyện kĩ năng giải toán.

Hi vọng quyển sách sẽ giúp ích cho các bạn học sinh trong quá trình học tập, rèn luyện nâng cao bộ môn Toán lớp 12, chủ động và tự tin bước vào kì thi Đại học – Cao đẳng để đạt được kết quả tốt nhất; quyển sách này cũng là tài liệu hỗ trợ cho giáo viên Toán các trường Trung học phổ thông trong công tác đào tạo học sinh giỏi.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về theo địa chỉ sau:

- Trường Trung học phổ thông chuyên Lê Hồng Phong, *235 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.*
- Ban biên tập Toán – Tin, Công ty CP DVXBGD Gia Định – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, *231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.*

Trân trọng cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I.

KHỐI ĐA DIỆN. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. KHỐI ĐA DIỆN. KHỐI CHÓP. KHỐI LĂNG TRỤ

1. Xét một hình (H) gồm hai đặc điểm:

a) (H) gồm hữu hạn các đa giác phẳng;

b) (H) chia không gian thành hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài của (H).

Hình (H) cùng với các điểm nằm trong (H) được gọi là *khối đa diện* giới hạn bởi hình (H).

Mỗi đa giác của hình (H) được gọi là một *mặt* của khối đa diện.

Các đỉnh, các cạnh của mỗi mặt còn gọi lần lượt là *đỉnh*, *cạnh* của khối đa diện.

2. Khối đa diện được gọi là *khối lăng trụ* nếu nó được giới hạn bởi một hình lăng trụ.

Khối đa diện được gọi là *khối chóp* nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp.

Khối đa diện được gọi là *khối chóp cụt* nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp cụt.

Tương tự ta có các định nghĩa về khối chóp n-giác, khối chóp cụt n-giác, khối chóp đều, khối hộp, ...

3. Tên của khối lăng trụ hay khối chóp được đặt theo tên của hình lăng trụ hay hình chóp giới hạn nó. Chẳng hạn với hình lăng trụ ngũ giác ABCDE.A'B'C'D'E' ta có khối lăng trụ ngũ giác ABCDE.A'B'C'D'E', với hình chóp tứ giác đều S.ABCD ta có khối chóp tứ giác đều S.ABCD.

4. Chú ý: Khối đa diện được giới hạn bởi hữu hạn các đa giác phẳng, nhưng không phải bất kì hình nào gồm hữu hạn các đa giác phẳng cũng giới hạn được một khối đa diện.

Từ đây trở đi ta chỉ xét các khối đa diện giới hạn bởi hình (H) gồm một số hữu hạn các đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện sau:

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung;

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Hình (H) gồm các đa giác đó được gọi là một *hình đa diện* (hay gọi đơn giản là *đa diện*).

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

II. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

1. Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có điểm trong chung thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2). Khi đó ta còn nói có thể ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) để được khối đa diện (H).

2. Chú ý: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Chứng minh một số tính chất liên quan đến đỉnh, cạnh và mặt của một khối đa diện

1. PHƯƠNG PHÁP

- *Áp dụng thích hợp các tính chất được nêu trong định nghĩa của khối đa diện để chứng minh.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là những tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4, 6, 8, 10.

Giải

Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lần lượt là c và m.

Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của khối đa diện là $c = \frac{3m}{2} \Rightarrow 3m = 2c \Rightarrow 3m$ chia hết cho 2 mà 3 không chia hết cho 2 nên m phải chia hết cho 2, nghĩa là m là số chẵn.

Các ví dụ:

- Khối tứ diện ABCD là khối đa diện có 4 mặt mà mỗi mặt là một tam giác.
- Xét tam giác BCD và hai điểm A, E ở về hai phía của mặt phẳng (BCD). Khi đó ta có khối lục diện ABCDE là khối đa diện có 6 mặt mà mỗi mặt là những tam giác.
- Khối bát diện ABCDEF là khối đa diện có 8 mặt mà mỗi mặt là những tam giác.
- Xét ngũ giác ABCDE và hai điểm M, N ở về hai phía của mặt phẳng chứa ngũ giác. Khi đó ta có khối thập diện MABCDEN là khối đa diện có 10 mặt mà mỗi mặt là những tam giác.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng không tồn tại một khối đa diện có:

a) số cạnh ít hơn số mặt.

b) số đỉnh ít hơn số cạnh.

Giải

a) Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện (H) lần lượt là c và m.

Vì mỗi mặt của khối đa diện có ít nhất 3 cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt nên ta có: $2c \geq 3m \Rightarrow c > m$. Vậy không thể tồn tại một khối đa diện mà số cạnh ít hơn số mặt.

b) Gọi số cạnh và số đỉnh của khối đa diện (H) lần lượt là c và đ.

Vì mỗi đỉnh của khối đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh và qua 2 đỉnh bất kì có đúng một cạnh nên ta có: $2c \geq 3đ \Rightarrow c > đ$. Vậy không thể tồn tại một khối đa diện mà số đỉnh ít hơn số cạnh.

Vấn đề 2. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện

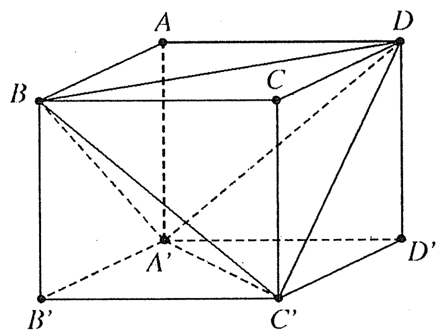
1. PHƯƠNG PHÁP

> • *Tuỳ theo yêu cầu của bài toán, chúng ta chọn những mặt phẳng thích hợp để phân chia khối đa diện thành nhiều khối đa diện.*
>
> • *Để chứng minh có thể lắp ghép các khối đa diện (H_1), (H_2), ..., (H_n) thành khối đa diện (H) ta có thể chứng minh khối đa diện (H) có thể phân chia thành các khối đa diện (H_1), (H_2), ..., (H_n).*

2. VÍ DỤ: Chia một khối lập phương thành 5 khối tứ diện.

Giải

Ta có thể chia khối lập phương ABCD.A'B'C'D' (hình bên) thành 5 khối tứ diện sau đây: DA'D'C', A'ABD, C'BCD, BA'B'C', BDC'A'.



C. BÀI TẬP

1. Một khối đa diện có ít nhất bao nhiêu đỉnh? Tại sao?

2. Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba cạnh thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn.

3. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì đó là khối tứ diện.

4. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, DB. Hãy phân chia tứ diện ABCD thành 4 khối tứ diện mà có các đỉnh là 4 trong 7 điểm A, B, C, D, E, F, G.

5. Hãy phân chia khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' thành ba khối tứ diện có các đỉnh là 4 trong 6 đỉnh của khối lăng trụ.

6. Hãy dùng ba mặt phẳng chứa các đỉnh của khối bát diện ABCDEF có các mặt là những tam giác đều để phân chia khối bát diện đó thành 8 khối tứ diện.

7. Hãy dùng 4 mặt phẳng để phân chia khối chóp S.ABCD thành 10 khối tứ diện.

§2. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MẶT PHẲNG. SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

1. Phép biến hình trong không gian trong không gian là một quy tắc F đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với một điểm M' duy nhất. M' gọi là *ảnh* của M qua phép biến hình F và kí hiệu là M' = F(M).

2. Qua phép biến hình F, mỗi hình (H) được biến thành hình (H') gồm tất cả các ảnh của các điểm thuộc (H).

II. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MẶT PHẲNG (P)

1. Định nghĩa 1: Phép *đối xứng qua mặt phẳng* (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.

2. Định lí: Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'N' = MN.

Ta có thể nói: "*Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì*".

3. Định nghĩa 2: Nếu qua phép đối xứng qua mặt phẳng (P) mà hình (H) biến thành chính nó thì ta nói (P) là *mặt phẳng đối xứng* của hình (H).

III. HÌNH BÁT DIỆN ĐỀU VÀ MẶT PHẲNG ĐỐI XỨNG CỦA NÓ

1. Hình đa diện gồm 8 mặt là những tam giác đều EAB, EBC, ECD, EDA, FAB, FBC, FCD và FDA gọi là hình bát diện đều. Kí hiệu là ABCDEF.

2. Tính chất: Bốn đỉnh A, B, C, D nằm trên một mặt phẳng và đó là một mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều ABCDEF.

IV. PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN VÀ SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC HÌNH

1. Định nghĩa: Phép biến hình trong không gian được gọi là *phép dời hình* nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì. Nghĩa là nếu F biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'N' = MN.

2. Một số phép dời hình trong không gian:

- Phép *tịnh tiến theo vectơ* $\vec{v}$ là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

- Phép *đối xứng tâm* O là phép biến hình biến O thành chính nó và biến điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'. Nếu qua phép đối xứng tâm O mà hình (H) biến thành chính nó thì ta nói O là *tâm đối xứng* của hình (H).

- Phép *đối xứng qua đường thẳng* d là phép biến hình biến mọi điểm thuộc d thành chính nó và biến điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của MM'. Nếu qua phép đối xứng trục d mà hình (H) biến thành chính nó thì ta nói d là trục đối xứng của hình (H).

3. Hai hình bằng nhau

- Hai hình gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

- **Đặc biệt:** Hai đa diện gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

• **Định lí:** Hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là AB = A'B', AC = A'C', AD = A'D', BC = B'C', CD = C'D' và DB = D'B'.

• **Hệ quả 1:** Hai tứ diện đều có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

• **Hệ quả 2:** Hai hình lập phương có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Chứng minh hai hình bằng nhau

1. PHƯƠNG PHÁP

• *Để chứng minh hai hình (H) và (H') bằng nhau ta chỉ ra một phép dời hình f biến hình này thành hình kia.*

• ***Chú ý:*** *Nếu (H), (H') là tứ diện hay hình lập phương thì ngoài phương pháp nêu trên, ta có thể áp dụng định lí về sự bằng nhau của hai tứ diện, hai tứ diện đều, hai lập phương.*

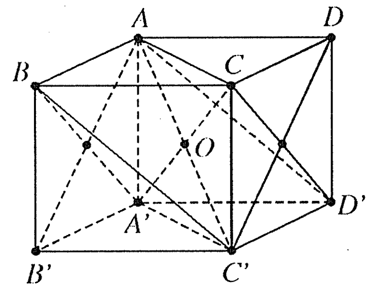
2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) Các hình chóp A.A'B'C'D' và C'.ABCD bằng nhau.

b) Các hình lăng trụ ABC.A'B'C' và AA'D'.BB'C' bằng nhau.

Giải



a) Gọi O là tâm của hình lập phương. Ta có:

Qua phép đối xứng tâm O, hình chóp A.A'B'C'D' biến thành hình chóp C'.CDAB mà phép đối xứng tâm là phép dời hình nên hình chóp A.A'B'C'D' và C'.ABCD bằng nhau.

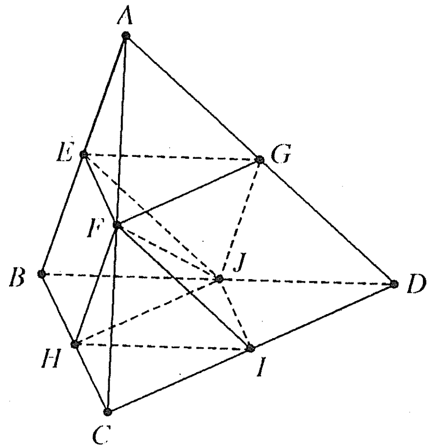
b) Qua phép đối xứng qua mặt phẳng (AB'C'D) thì hình lăng trụ ABC.A'B'C' biến thành hình lăng trụ AA'D'.BB'C' mà phép đối xứng mặt là một phép dời hình nên hình lăng trụ ABC.A'B'C' và AA'D'.BB'C' bằng nhau.

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G, H, I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD, BC, CD, DB. Chứng minh hai tứ diện EFGJ và IFHJ bằng nhau.

Giải

Gọi O là giao điểm của HG và FJ. Ta có các tứ giác: FGJH, EFIJ là các hình bình hành.

Do đó O là trung điểm của FJ, GH, EI nên phép đối xứng tâm O sẽ biến E thành I, biến F thành J, biến G thành H và biến J thành F. Suy ra phép đối xứng tâm O biến EFGJ thành IJHF. Do đó hai tứ diện EFGJ và IJHF bằng nhau.



Vấn đề 2. Chứng minh một phép biến hình là phép dời hình

1. PHƯƠNG PHÁP

• *Ta chứng minh rằng "Với M, N bất kì có ảnh qua f là M', N' thì M'N' = MN".*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm là những phép dời hình.

Giải

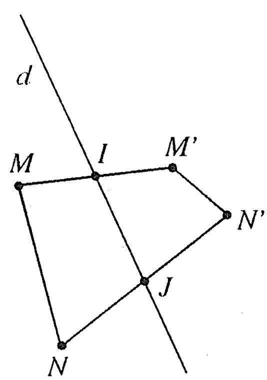
* Giả sử phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N'. Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$$

$$\Rightarrow MN = M'N'.$$

Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}$ là một phép dời hình.

* Giả sử phép đối xứng qua trục d biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N'. Gọi I, J lần lượt là trung điểm MM' và NN'. Khi đó ta có:



$$MN^2 - M'N'^2 = \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}\right)\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN} + \overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN'}\right)\left(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN'} + \overrightarrow{IM'}\right)$$

$$= \left(2\overrightarrow{IJ}\right)\left(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IN'} + \overrightarrow{IM'} - \overrightarrow{IM}\right)$$

$$= 2\overrightarrow{IJ}.(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}) = 0 \text{ (vì } \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{N'N})$$

$\Rightarrow \quad MN = M'N'$.

Vậy phép đối xứng trục là một phép dời hình.

* Giả sử phép đối xứng qua tâm O biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N'. Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{ON'} \quad \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{M'N'} \Rightarrow M'N' = MN.$$

Vậy phép đối xứng tâm O là một phép dời hình.

C. BÀI TẬP

1. Cho khối tứ diện đều ABCD. Gọi M là trung điểm AB. Chứng minh hai khối tứ diện AMCD và BMCD bằng nhau.

2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BB', DD'. Chứng minh rằng: Mặt phẳng (CEF) chia khối hộp thành hai khối đa diện bằng nhau.

3. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi I là trung điểm AA'. Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua B và qua D. Gọi $H = IA_1 \cap BB'$ và $G = IA_2 \cap DD'$.

a) Chứng minh hai khối tứ diện HBA_1C và $GDCA_2$ bằng nhau.

b) Chứng minh hai khối tứ diện HBAC và GDA_2C bằng nhau.

4. Gọi Đ là phép đối xứng qua mặt phẳng (P) và a là một đường thẳng nào đó. Giả sử Đ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Trong trường hợp nào thì:

a) a trùng với a'?

b) a song song với a'?

c) a cắt a'?

d) a và a' chéo nhau?

5. Tìm các mặt phẳng đối xứng của các hình sau đây:

a) Hình chóp tứ giác đều.

b) Hình chóp cụt tam giác đều.

c) Hình hộp chữ nhật mà không có mặt nào là hình vuông.

6. Chứng minh rằng:

a) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.

b) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau là một phép đối xứng qua đường thẳng.

7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P, H, K, E lần lượt là trung điểm các cạnh BB', BA, BC, CC', C'B' và C'D'. Chứng minh hai khối tứ diện BMNP và C'HKE bằng nhau.

§3. PHÉP VỊ TỰ.
SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN.
CÁC KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. PHÉP VỊ TỰ TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa: Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ gọi là *phép vị tự*. Điểm O gọi là *tâm vị tự* và số k gọi là tỉ số vị tự.

2. Tính chất

• Nếu phép vị tự biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và do đó M'N' = |k| MN.

• Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng. Từ đó suy ra phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng.

II. HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG

1. Định nghĩa: Hình (H) gọi là *đồng dạng* với hình (H') nếu có một phép vị tự biến (H) thành (H_1) mà hình (H_1) bằng với hình (H').

2. Chú ý

- Hai hình tứ diện đều bất kì luôn luôn đồng dạng với nhau.
- Hai hình lập phương bất kì luôn luôn đồng dạng với nhau.

III. KHỐI ĐA DIỆN VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Định nghĩa: Khối *đa diện đều* là một khối *đa diện lồi* có hai tính chất sau:

- Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh.
- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh.

Khối đa diện đều mà mỗi mặt có n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh gọi là khối đa diện đều loại {m; p}.

2. Chú ý: Người ta chứng minh được rằng: "Chỉ có 5 loại khối đa diện đều". Đó là loại {3; 3}, loại {4; 3}, loại {3; 4}, loại {5; 3} và loại {3; 5}. Tuỳ theo số mặt của chúng, 5 khối đa diện lồi trên lần lượt có tên gọi là: khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối mười hai mặt đều (thập nhị diện đều) và khối hai mươi mặt đều (nhị thập diện đều).

3. Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều:

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3; 3}	Tứ diện đều	4	6	4
{4; 3}	Lập phương	8	12	6
{3; 4}	Bát diện đều	6	12	8
{5; 3}	Mười hai mặt đều	20	30	12
{3; 5}	Hai mươi mặt đều	12	30	20

B. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng phép vị tự biến mỗi đường thẳng a thành một đường thẳng a′ song song hoặc trùng với a, biến mỗi mặt phẳng (α) thành một mặt phẳng (α') song song hoặc trùng với (α).

2. Cho một khối tứ diện đều, hãy chứng minh rằng:

a) Trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.

b) Trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

3. Hai đỉnh của một khối tám mặt đều được gọi là hai đỉnh *đối diện* nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là *đường chéo* của khối tám mặt đều. Chứng minh rằng trong khối tám mặt đều:

a) Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau.

c) Ba đường chéo bằng nhau.

4. Chứng minh rằng:

a) Tâm các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

b) Tâm các mặt của một khối tám mặt đều là các đỉnh của một khối lập phương.

§4. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

- *Thể tích* của một khối đa diện là số đo phần không gian mà nó chiếm chỗ.
- Ta thừa nhận các tính chất hiển nhiên sau đây:

a) Hai khối đa diện (H_1) và (H_2) bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

b) Nếu khối đa diện (H) được phần chia thành hữu hạn các khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng của tất cả các khối đa diện nhỏ đó.

c) Khối lập phương có cạnh bằng 1 thì có thể tích bằng 1.

- Để đơn giản, thể tích của khối đa diện giới hạn bởi hình (H) cũng được gọi là thể tích của hình đa diện (H).
- Khối lập phương có cạnh bằng 1 được gọi là *khối lập phương đơn vị*.

II. THỂ TÍCH CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN THƯỜNG GẶP

1. Định lí: Khối hộp chữ nhật với ba kích thước là ba số dương a, b, c có thể tích là $V = abc$.

2. Định lí: Khối chóp có diện tích đáy là $S_{đáy}$ và chiều cao là h có thể tích bằng $V = \frac{1}{3}S_{đáy}h$.

3. Định lí: Khối lăng trụ có diện tích đáy là $S_{đáy}$ và chiều cao là h có thể tích bằng $V = S_{đáy}h$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

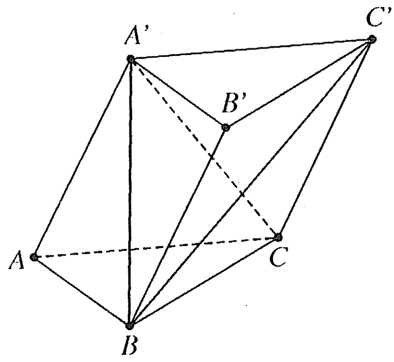
Ví dụ 1: Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' biết diện tích của mặt BCC'B' bằng $10cm^2$ và khoảng cách giữa cạnh bên AA' và (BCC'B') bằng 6cm.

Giải

Ta có:

$$V_{ABC.A'B'C'} = V_{A'ABC} + V_{A'BB'C'} + V_{A'BCC'}$$

mà



* $V_{A'ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.d(A',(ABC))$

$= \frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d(B,(A'B'C')) = V_{A'BB'C'}$ (1)

* $V_{A'BB'C'} = \frac{1}{3}S_{BB'C'}.d(A',(BB'C'))$

$= \frac{1}{3}S_{BCC'}.d(A',(BCC')) = V_{A'BCC'}$ (2)

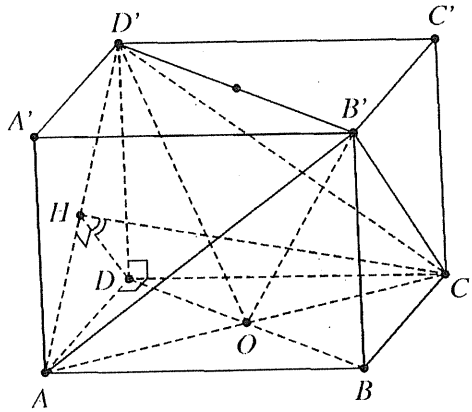
Do đó: $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'BCC'} = \frac{1}{3}S_{BCC'}.d(A',(BCC'))$

$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}S_{BCC'B'}.d(AA',(BCC'B')) = \frac{1}{6}.10.6 = 10\ (cm^3).$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' cạnh đáy a. Mặt phẳng (ACD') tạo với (AA'D'D) một góc 60°.

a) Tính thể tích hình lăng trụ đã cho.

b) Chứng minh (B'AC) ⊥ (D'AC)



Giải

a) Gọi O = AC ∩ BD. Vẽ DH ⊥ AD'.

Ta có: (DCH) ⊥ AD'

$\Rightarrow \quad \widehat{DHC} = \left((ACD'),(AA'D'D)\right) = 60^\circ$

$\Rightarrow \quad DH = CD\cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Vì $\frac{1}{D'D^2} = \frac{1}{DH^2} - \frac{1}{DA^2} = \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow D'D = \frac{a}{\sqrt{2}}.$

Do đó: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.D'D = \frac{a^3}{\sqrt{2}}.$

b) Ta có $\Delta ODD'$ vuông tại D, có $OD = DD' = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow OD' = a$.

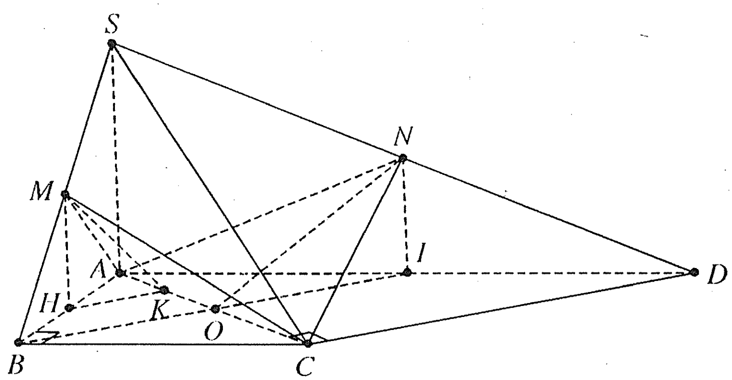
Ta cũng có $\Delta OBB' = \Delta ODD'$ nên $OB' = a$. Suy ra: $OD' = a = OB'$.

Vì $B'D' = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta B'D'O$ vuông tại O.

Vì $\widehat{B'OD'} = \big((B'AC),(D'AC)\big) \Rightarrow (B'AC) \perp (D'AC)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp SABCD, đáy là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a, SA ⊥ (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Tính thể tích hình chóp biết rằng (MAC) vuông góc với (NAC).

Giải



Gọi I, H lần lượt là trung điểm AD và AB, O là giao điểm của AC và BI, vẽ HK // BI ($K \in AC$).

Ta có: ABCI là hình vuông

$\Rightarrow$ $AC \perp BI$

mà $AC \perp NI$ (do NI // SA)

$\Rightarrow$ $AC \perp (NIO)$ $\Rightarrow$ $\widehat{NOI} = \big((NAC),(ACD)\big) = \alpha$.

Tương tự ta có: $\widehat{MKH} = \big((MAC),(ACB)\big) = \beta$.

Theo giả thiết ta suy ra : $\alpha + \beta = 90^o$.

Mặt khác ta có: $\tan\alpha = \dfrac{NI}{NO}$ và $\cot\beta = \dfrac{HK}{MH} = \tan\alpha$

$$\Rightarrow \frac{NI}{OI} = \frac{HK}{MH} \Rightarrow NI.MH = OI.HK$$

$$\Rightarrow \quad \frac{SA}{2}.\frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SA = a.$$

Mặt khác ta có: $S_{ABCD} = \dfrac{(AD + BC)AB}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$.

Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{a^3}{2}$.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, biết AB = BC = a, AD = 2a, SA $\perp$ (ABCD). Cho biết góc giữa (ACD) và (SAD) có số đo là 60°. Tính thể tích hình chóp.

2. Cho hình chóp đều SABC, cạnh đáy a. Lấy K là điểm thuộc cạnh SA với SA = 3SK. Tính thể tích hình chóp biết rằng SA $\perp$ (KBC).

3. Cho hình chóp SABC, SA = x, BC = y, các cạnh còn lại đều bằng 1.

a) Tính thể tích hình chóp theo x, y.

b) Với giá trị nào của x, y thì thể tích hình chóp lớn nhất?

4. Cho tam giác ABC cố định và một điểm S thay đổi. Thể tích của khối chóp S.ABC có thay đổi hay không nếu:

a) Đỉnh S di chuyển trên một mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC)?

b) Đỉnh S di chuyển trên một mặt phẳng song song với chỉ một cạnh đáy?

c) Đỉnh S di chuyển trên một đường thẳng song song với một cạnh đáy?

5. Với một mặt phẳng qua một cạnh của tứ diện và một điểm trên cạnh đối diện của tứ diện đó, hãy chia khối tứ diện thành hai khối tứ diện sao cho tỉ số thể tích của hai khối tứ diện này bằng một số k > 0 cho trước.

6. Cho tứ diện SABC có SA = SB = SC = 1, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Tính thể tích tứ diện.

7. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (T) đường kính AB = 2R. Điểm C di động trên (T). Trên đường thẳng d qua A, vuông góc với (α), lấy điểm S sao cho SA = R. Hạ $AH \perp SB$, $AK \perp SC$.

a) Chứng minh: $AK \perp (SBC)$, $SB \perp (AHK)$.

b) Chứng minh khi C thay đổi, K di động trên một đường tròn cố định.

c) Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHK.

8. Cho hình chóp SABC có các cạnh bên bằng nhau và bằng a. Các mặt bên hợp với đáy một góc α ($0 < \alpha < 90^o$).

a) Chứng minh SABC là hình chóp đều.

b) Tính thể tích hình chóp theo a và α.

9. Tính thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D' biết rằng AA'B'D' là khối tứ diện đều cạnh a.

10. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D', đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^o$. Biết $AB' \perp BD'$. Tính thể tích hình lăng trụ.

11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a và điểm M thuộc cạnh AB với AM = x (x < a). Mặt phẳng (P) qua M và chứa A'C'.

a) Tính diện tích thiết diện do (P) cắt hình lập phương.

b) (P) chia hình lập phương thành hai khối đa diện. Tính x để thể tích của một trong hai khối gấp đôi khối kia.

12. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' và một điểm $M \in AD$. Mặt phẳng (A'BM) cắt đường chéo AC' tại H.

a) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AD thì đường thẳng MH cắt A'B tại một điểm cố định.

b) Khi M là trung điểm AD, tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện tạo ra sau khi cắt hình hộp bởi mặt phẳng (A'BM).

c) Giả sử AA' = AB và $MB \perp AC$. Chứng minh $AC' \perp (A'BM)$ và H là trực tâm của $\Delta A'BM$.

13. Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có chiều cao h, $AB' \perp BC'$. Tính thể tích lăng trụ.

14. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 2a, AA' = a.

a) Tính khoảng cách giữa AD' và B'C.

b) Điểm M chia trong đoạn AD theo tỉ số $\frac{AM}{MD} = 3$. Tính d(M, (AB'C)).

c) Tính thể tích tứ diện AB'D'C.

15. Tính thể tích của khối lăng trụ n-giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.

16. Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại A, AC = b, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với (AA'CC') một góc 30°.

a) Tính độ dài đoạn AC'.

b) Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

17. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C, cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°.

a) Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

b) Chứng minh rằng mặt bên BCC'B' của hình lăng trụ ABC.A'B'C' là một hình chữ nhật.

c) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình lăng trụ ABC.A'B'C' (tổng đó gọi là *diện tích xung quanh* của hình (hoặc khối) lăng trụ đã cho).

18. Cho điểm M nằm trong hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Tổng đó bằng bao nhiêu nếu cạnh của tứ diện đều bằng a?

19. Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Mặt phẳng đi qua các điểm M, B', C chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

20. Cho khối chóp tam giác S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp S.ABC và S.A'B'C'. Chứng minh rằng: $\frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$.

21. Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM, song song với BD, chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

22. Chứng minh rằng nếu có phép vị tự tỉ số k biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D' thì $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = |k|^3$.

23. Cho hình chóp SABC đáy là tam giác đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC), SA = a. M là điểm thay đổi trên cạnh AB. Đặt $\widehat{ACM} = \alpha$. Hạ SH $\perp$ CM.

a) Tìm quỹ tích điểm H. Suy ra giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHC.

b) Hạ AI $\perp$ SC và AK $\perp$ SH. Tính độ dài SK, AK và thể tích tứ diện SAIK.

24. Cho hình chóp đều SABC cạnh đáy a, đường cao SH = h.

a) Cho mặt phẳng (P) qua BC và vuông góc với SA. Xác định thiết diện do (P) cắt hình chóp.

b) Nếu $\frac{h}{a} = \sqrt{3}$ thì (P) chia hình chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

25. Cho hình chóp SABC đáy là tam giác cân, AB = AC = 3a, BC = 2a. Mặt bên hợp với đáy một góc 60°. Hạ đường cao SH của hình chóp.

a) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và SA $\perp$ BC.

b) Tính thể tích hình chóp.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1. Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Gọi B' và D' lần lượt là trung điểm của AB và AD. Mặt phẳng (CB'D') chia khối tứ diện thành hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.

2. Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng sáu trung điểm của sáu cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A' và AA' nằm trên một mặt phẳng và mặt phẳng đó chia khối hộp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

3. Cho khối tứ diện ABCD, E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện ABCD thành bốn khối tứ diện.

a) Hãy kể tên bốn khối tứ diện đó.

b) Chứng tỏ rằng bốn khối tứ diện đó có thể tích bằng nhau.

c) Chứng tỏ rằng nếu ABCD là khối tứ diện đều thì bốn khối tứ diện nói trên bằng nhau.

4. Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy bằng S và AA' = h. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại A_1, B_1 và C_1. Biết $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ và $CC_1 = c$.

a) Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phần chia bởi mặt phẳng (P).

b) Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần đó bằng nhau?

5. Cho khối lăng trụ đều ABC.A'B'C' và M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

6. Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA = a, đáy là tam giác vuông cân có AB = BC = a. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABC.

b) Chứng minh rằng SC vuông góc với (AB'C').

c) Tính thể tích khối chóp S.A'B'C'.

7. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, đường cao SH và một mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC. Biết (α) cắt SH tại H_1 sao cho $\frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{3}$ và (α) cắt các cạnh bên SB, SC, SD lần lượt tại B', C' , D'.

a) Tính tỉ số diện tích thiết diện AB'C'D' và diện tích đáy của hình chóp.

b) Cho cạnh đáy bằng a. Tính thể tích hình chóp SAB'C'D'.

8. Cho tứ diện SPQR có $SP \perp SQ$, $SQ \perp SR$, $SR \perp SP$. Gọi A, B, C lần lượt là trung điểm của PQ, QR, RP.

a) Chứng minh các mặt bên của tứ diện SABC là các tam giác bằng nhau.

b) Tính thể tích tứ diện SABC khi SP = a, SQ = b, SR = c.

9. Cho hình chóp S.A`BCD, đáy là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = a, DC = 2a. Cạnh bên SD vuông với đáy, SD = $a\sqrt{3}$. Từ trung điểm E của CD, dựng EK $\perp$ SC (K $\in$ SC).

a) Tính thể tích hình chóp S.ABCD theo a và chứng minh rằng SC $\perp$ (EBK).

b) Tính khoảng cách từ trung điểm M của SA đến (SBC).

10. Cho AB là đoạn vuông góc chung của 2 nửa đường thẳng Ax, By vuông góc với nhau. Cho AB = a. Cho điểm M di động trên Ax và điểm N di động trên By sao cho độ dài MN không đổi.

a) Đặt AM = x , BN = y . Tính thể tích V của tứ diện ABMN theo a, x, y.

b) Tính giá trị lớn nhất của V.

c) Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

11. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật có diện tích bằng $\sqrt{3}$, góc hợp bởi hai đường chéo của đáy có số đo là 60°. Các cạnh bên nghiêng đều với đáy một góc 45°. Hãy tính thể tích hình chóp.

12. Cho hình chóp cụt tam giác đều ABC.A'B'C' có chiều cao h. Mặt bên BB'C'C vuông góc với mặt AB'C' và cách A một khoảng bằng 2h. Tính thể tích hình chóp cụt đó theo h.

13. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', AB = a, BC = b, AA' = c.

a) Tính diện tích tam giác ACD' theo a, b, c.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính thể tích tứ diện D'DMN theo a, b, c.

14. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Dựng mặt phẳng chứa đường chéo AC của hình vuông ABCD và qua trung điểm M của B'C'. Mặt phẳng đó chia hình lập phương thành hai phần. Tính thể tích của hai phần đó.

15. Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy là a, các cạnh bên tạo với đáy một góc 60°. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua BC và vuông góc với SA. Gọi H là giao điểm của SA với (P).

a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.HBC và S.ABC.

b) Tính thể tích khối chóp S.HBC và A.HBC.

16. Hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC. Biết (SMN) vuông góc (SBC).

a) Tính diện tích tam giác AMN theo a.

b) Tính thể tích khối chóp S.AMN và A.BCMN.

17. Hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC.

a) Tính diện tích tam giác AMN theo a.

b) Tính thể tích của khối chóp A.BCMN.

18. Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và cạnh SA vuông góc đáy, SA = 2a. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'.

a) Chứng minh SC vuông góc với (AB'D') và tứ giác AB'C'D' có hai đường chéo vuông góc nhau. Tính diện tích tứ giác AB'C'D'theo a.

b) Tính thể tích khối chóp S. AB'C'D'.

19. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với mặt đáy góc 60°. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. (P) cắt SB, SD lần lượt tại E và F.

a) Tính diện tích tứ giác AEMF theo a.

b) Tính thể tích cuả khối chóp S.AEMF.

20. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật vớiAB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SC và I là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh (SAC) vuông góc (SMB).

b) Tính thể tích của khối tứ diện AMNB.

21. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Mặt phẳng (α) qua AB và trung điểm M của cạnh SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phần chia bởi (α).

22. Hình chóp tứ giác đều SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, cạnh bên SA = $a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (α) chứa AB và vuông góc với (SCD), (α) cắt SC, SD lần lượt tại C' và D'.

a) Tính diện tích của tứ giác ABC'D' theo a.

b) Tính thể tích của khối đa diện ABCDD'C'.

23. Hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy là a. Mặt bên tạo với mặt đáy một góc 60°. Mặt phẳng (P) chứa AB và cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Biết (P) tạo với mặt đáy của hình chóp một góc 30°.

a) Tính diện tích của tứ giác ABMN theo a.

b) Tính thể tích của khối chóp SABMN.

24. Hình lăng trụ xiên ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên BB' = a, hình chiếu vuông góc của B' lên đáy (ABC) trùng với trung điểm I của cạnh AC.

a) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

b) Chứng minh rằng mặt bên ACC'A' là hình vuông.

c) Tính thể tích của khối lăng trụ.

25. Hình khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác cân tại A với AB = AC = a, $\widehat{BAC} = 2\alpha$. Góc giữa (A'BC) và mặt đáy là β. Tính thể tích của khối lăng trụ.

26. Hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Điểm A' cách đều 3 đỉnh A, B, C. Cạnh bên AA' tạo với mặt đáy một góc 60°.

a) Chứng minh rằng mặt bên BCC'B' là hình chữ nhật.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ.

c) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

27. Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'có đường chéo A'C = d, tạo với mặt đáy (ABCD) góc α và tạo với mặt bên (ABB'A') góc β. Chứng minh rằng thể tích của hình hộp chữ nhật là:

$$V = d^3 \sin\alpha \sin\beta.\sqrt{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}\ .$$

28. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' với M là trung điểm AA', (MB'C') chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Một khối đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

Chứng minh: Xét một khối đa diện (H). Gọi M_1 là một mặt bất kì của (H). Giả sử A, B, C là ba đỉnh liên tiếp của mặt M_1. Khi đó AB, AC là hai cạnh của (H). Gọi M_2 là mặt của (H) có chung cạnh AB với mặt M_1. Khi đó mặt M_2 phải có ít nhất một đỉnh nữa là D khác với A và B. Nếu D trùng với C thì hai mặt M_1 và M_2 có hai cạnh chung là AB và BC (vô lí vì hai mặt của (H) có đúng một cạnh chung). Do đó D không trùng với C. Suy ra (H) có ít nhất bốn đỉnh là A, B, C, D.

2. Gọi Đ là số đỉnh của đa diện và C là số cạnh của đa diện ấy. Vì mỗi đỉnh đều là đỉnh chung của ba cạnh và mỗi cạnh chỉ qua hai đỉnh nên 3Đ = 2C $\Rightarrow$ 3Đ là số chẵn $\Rightarrow$ Đ là số chẵn.

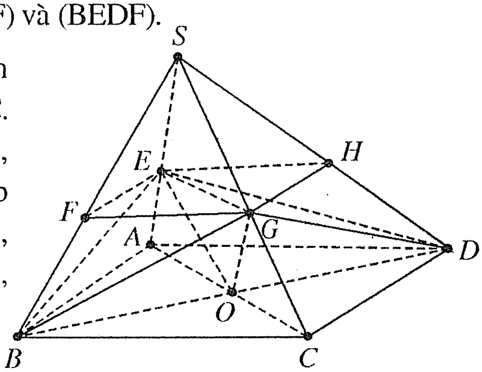
3. Giả sử A là đỉnh chung của ba cạnh AB, AC và AD của khối đa diện. Khi đó mặt của đa diện chứa cạnh AB, AC chính là tam giác ABC; mặt của đa diện chứa cạnh AC, AD chính là tam giác ACD; mặt của đa diện chứa cạnh AD, AB chính là tam giác AND. Vì BC, BD, DC là cạnh của đa diện đó nên tam giác BCD là mặt của đa diện. Vậy đa diện đã cho được giới hạn bởi 4 mặt ABC, ACD, ADB và BCD nên đa diện đó là một khối tứ diện.

4. Có thể chia tứ diện ABCD thành 4 khối tứ diện thoả yêu cầu bài toán: ACEF, EACG, EFCG, FGCD trong đó E, F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AD và BD.

5. A'ABC, A'BCB', A'B'C'C.

6. Dùng ba mặt phẳng sau: (ABCD), (AECF) và (BEDF).

7. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD và gọi O = BD $\cap$ AC. Ta dùng 4 mặt phẳng sau: (SAC), (EFGH), (EBD) và (GBC) để phân chia khối chóp S.ABCD thành 10 khối tứ diện sau: S.EFG, S.EHG, B.EFG, D.EHG, G.OBC, G.OCD, E.OAB, E.OAD, B.OEG và D.OEG.

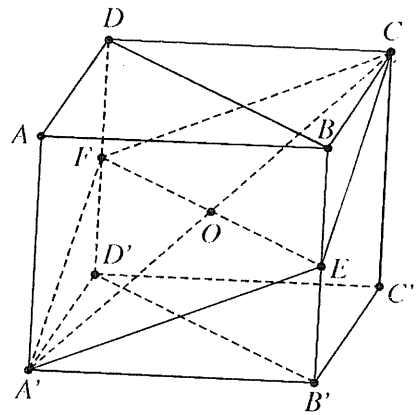


§2. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MẶT PHẲNG. SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

1. Ta có (MCD) $\perp$ AB tại M là trung điểm của AB nên (MCD) là mặt phẳng trung trực của AB. Do đó qua phép đối xứng qua (MCD) thì C, D, M, A lần lượt biến thành C, D, M, B. Suy ra tứ diện AMCD biến thành tứ diện BMCD.

Vì phép đối xứng qua mặt phẳng là một phép dời hình nên tứ diện AMCD và BMCD bằng nhau.

2. Vì A'F // CE nên (A'ECF) $\equiv$ (CEF). Mặt phẳng (CEF) chia hình hộp đã cho thành hai khối đa diện: CEA'FD'C'B' và ABCDFA'E.



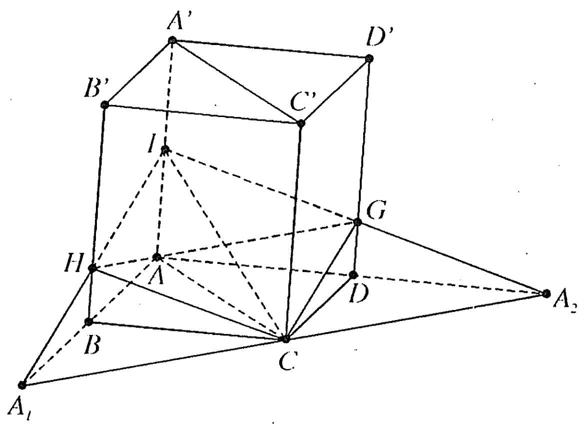
Gọi O là giao điểm của EF với A'C thì O là trung điểm của các đoạn thẳng: AC', A'C, BD', DB', EF

$\Rightarrow$ phép đối xứng tâm O biến: A thành C', A' thành C, E thành F, B thành D', D thành B'.

$\Rightarrow$ phép đối xứng $Đ_O$ biến khối đa diện ABCDFA'E thành C'D'A'B'ECF nên hai khối đa diện này bằng nhau.

3. a) Xét phép đối xứng qua mặt phẳng (ACC'A') ta có:

- H biến thành G;
- B biến thành D;
- C biến thành C;
- A_1 biến thành A_2.



Do đó $Đ_{(ACC'A')}$ biến tứ diện $HBCA_1$ thành tứ diện $GDCA_2$. Suy ra hai khối tứ diện $HBCA_1$ và $GDCA_2$ bằng nhau.

b) $Đ_{(HBC)}$ biến HBAC thành HBA_1C nên tứ diện HBAC bằng tứ diện HBA_1C. Ta đã có tứ diện HBA_1C bằng tứ diện GDA_2C. Suy ra hai khối tứ diện HBAC và $GDCA_2$ bằng nhau.

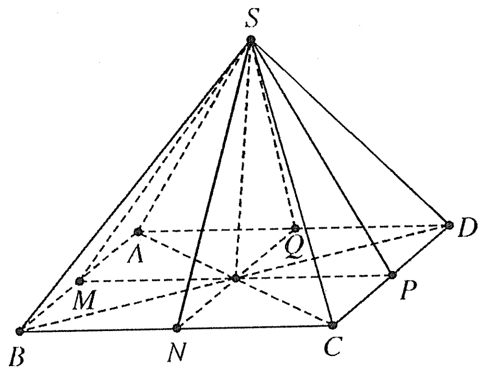
4. a) a trùng a' ⇔ a nằm trong (P) hoặc a vuông góc với (P).

b) a song song với a' ⇔ a song song với (P).

c) a cắt a' ⇔ a cắt (P) và a không vuông góc (P).

d) Không xảy ra a và a' chéo nhau.

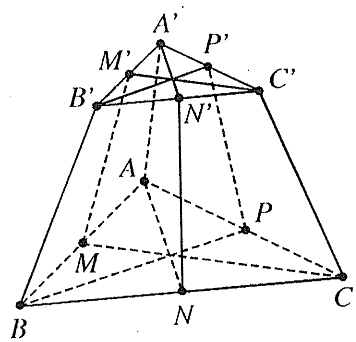
5. a) Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Ta có: phép đối xứng qua (SAC) biến: B thành D, D thành B, S thành S, A thành A và C thành C nên $Đ_{(SAC)}$ biến hình chóp SABCD thành chính nó. Suy ra (SAC) là một mặt phẳng đối xứng của hình chóp đều SABCD.



Tương tự ta cũng có (SBD), (SMP) và (SNQ) là các mặt phẳng đối xứng của hình chóp đều SABCD.

Vậy hình chóp đều SABCD có 4 mặt phẳng đối xứng.

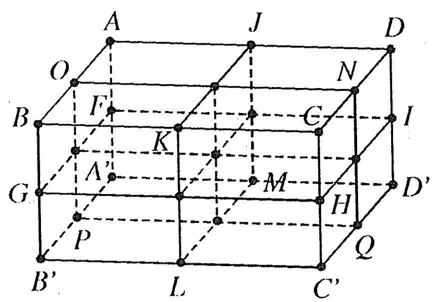
b) Xét hình chóp cụt tam giác đều ABC.A'B'C'.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA và M', N', P' lần lượt là trung điểm A'B', B'C', C'A'.

Chứng minh tương tự như trên, ta có các mặt phẳng đối xứng của hình chóp cụt đều ABC.A'B'C' là: (AA'N'N), (BB'P'P) và (CC'M'M).

c) Xét hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' mà không có mặt nào là hình vuông.



Gọi O, K, N, J, F, G, H, I, P, L, Q, M lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA, AA', BB', CC', DD', A'B', B'C', C'D' và D'A'. Ta có các mặt phẳng đối xứng của hình hộp trên là: (JKLM), (OPQN) và (GHIF).

6. a) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

Phép đối xứng qua (P) điểm M biến thành điểm M'.

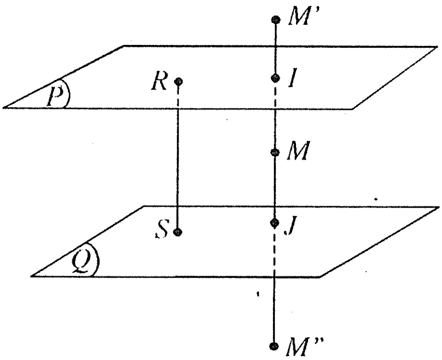
Phép đối xứng qua (Q) điểm M' biến thành điểm M".

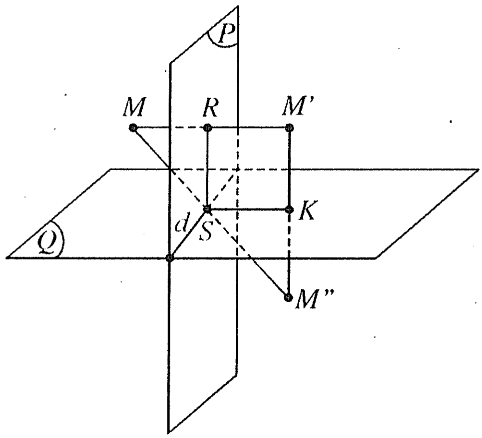
Gọi I, J lần lượt trung điểm của MM' và M'M".

Trên (P) lấy điểm R và trên (Q) lấy điểm S sao cho RS $\perp$ (P) và R, S cố định.

Ta có: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{IM'} + 2\overrightarrow{M'J} = 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{RS}$.

Vậy hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{RS}$.





b) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến d. Phép đối xứng qua (P) điểm M biến thành điểm M' và phép đối xứng qua (Q) điểm M' biến thành điểm M". Gọi R, K lần lượt trung điểm của MM' và M'M".

Ta có: MM' $\perp$ (P) $\Rightarrow$ MM' $\perp$ d ;

M'M" $\perp$ (Q) $\Rightarrow$ M'M" $\perp$ d.

Suy ra d $\perp$ (MM'M") $\Rightarrow$ MM" $\perp$ d tại S.

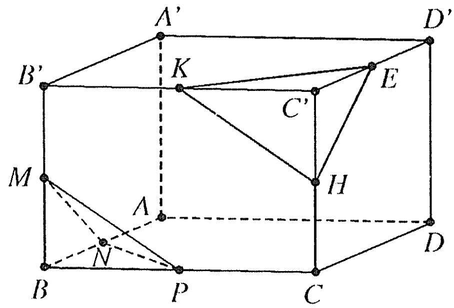
Vì MM' // (Q) nên SK // MM' mà K là trung điểm M'M" $\Rightarrow$ S là trung điểm MM". Vậy M và M" đối xứng qua đường thẳng d.

Vậy hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) là phép đối xứng qua đường thẳng là giao tuyến của (P) và (Q).

7. Ta có: BM = C'H, BN = C'E,

BP = C'K, MN = HE,

MP = HK và NP = EK.



Suy ra tứ diện BMNP và tứ diện C'HEK bằng nhau.

Chú ý: Ta có thể chứng minh bằng cách sau: qua phép đối xứng qua mặt phẳng (A'B'CD) thì B, M, N, P lần lượt biến thành các điểm C', K, E, H. Do đó hai khối tứ diện BMNP và C'KEH bằng nhau.

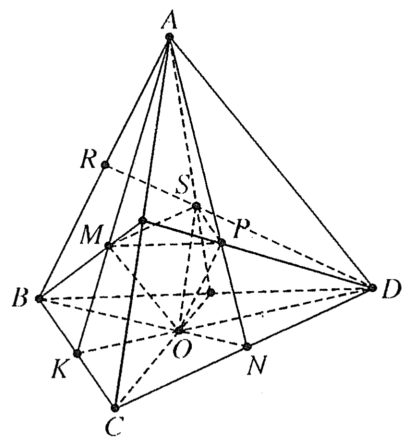
§3. PHÉP VỊ TỰ. SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN. CÁC KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Trên đường thẳng a lấy hai điểm M, N phân biệt. Qua phép vị tự $V_{(I;\,k)}$, các điểm M, N lần lượt biến thành M', N' thuộc đường thẳng a'. Ta có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

* Nếu M', N', M, N thẳng hàng thì a' trùng a.

* Nếu M, N, M' không thẳng hàng thì MN // M'N' nên a' // a.

2. a) Xét tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M, O, P, S lần lượt là trọng tâm các mặt (ABC), (BCD), (CDA), (DAB) của tứ diện.



Gọi K = AM ∩ BC, N = AP ∩ CD thì ta có:

$$\frac{AM}{AK} = \frac{AP}{AN} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad MP \,//\, KN \text{ và } MP = \frac{2}{3}KN.$$

Vì KN là đường trung bình của ΔBCD nên $KN = \frac{a}{2}$.

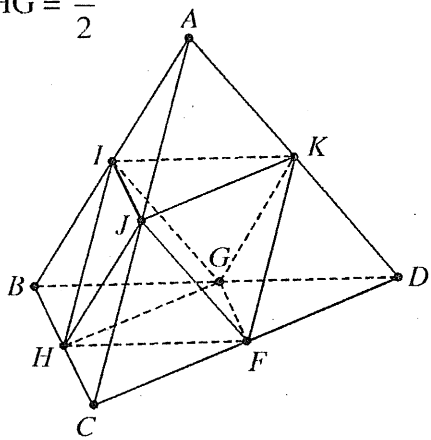
Do đó ta có MP = $\frac{a}{3}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có MS = SP = OM = OP = OS = $\frac{a}{3}$.

Vậy tứ diện OMPS có các mặt là tam giác đều và mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh nên OMPS là tứ diện đều.

b) Xét tứ diện đều ABCD, cạnh a . Gọi trung điểm của AB, AC, AD, BC, CD và DB lần lượt là I, J, K, H, F và G. Ta có:

$$KI = KJ = KF = KG = HI = HJ = HF = HG = \frac{a}{2}$$



(vì chúng đều là đường trung bình của tam giác đều có cạnh bằng a).

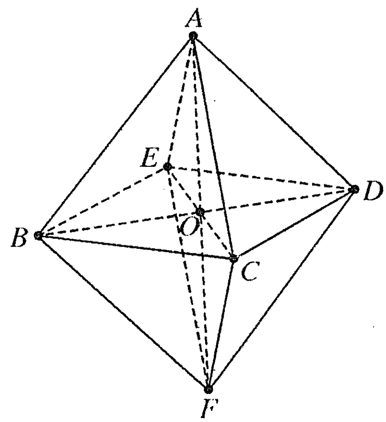
Suy ra tám tam giác KIJ, KJF, KFG, KGI, HIJ, HJF, HFG và HGI là tám tam giác đều bằng nhau.

Hình đa diện KIJFGH có tám mặt là những tam giác đều bằng nhau và mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng 4 cạnh nên KIJFGH là một bát diện đều.

3. a) Xét khối tám mặt đều BCDEAF. Ta có:

* BCDE là hình thoi ⇒ EC và BD cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường.

* AEFC là hình thoi ⇒ AF và EC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường ⇒ O cũng là trung điểm của AF.



Vậy ba đường chéo AF, EC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) BCDE là hình thoi ⇒ BD ⊥ EC (1);

AEFC là hình thoi ⇒ AF ⊥ EC (2);

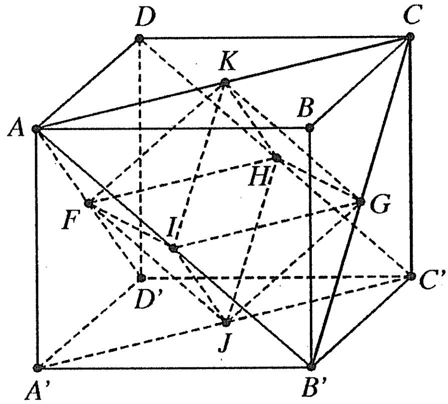
ABFD là hình thoi ⇒ AF ⊥ BD (3).

Từ (1), (2) và (3) ⇒ ba đường chéo AF, BD, EC đôi một vuông góc với nhau.

c) Ta có $\quad \Delta ABD = \Delta EBD \Rightarrow OA = OE \Rightarrow AF = EC \quad (1);$

$$\Delta AEC = \Delta BEC \Rightarrow OA = OB \Rightarrow AF = BD \quad (2).$$

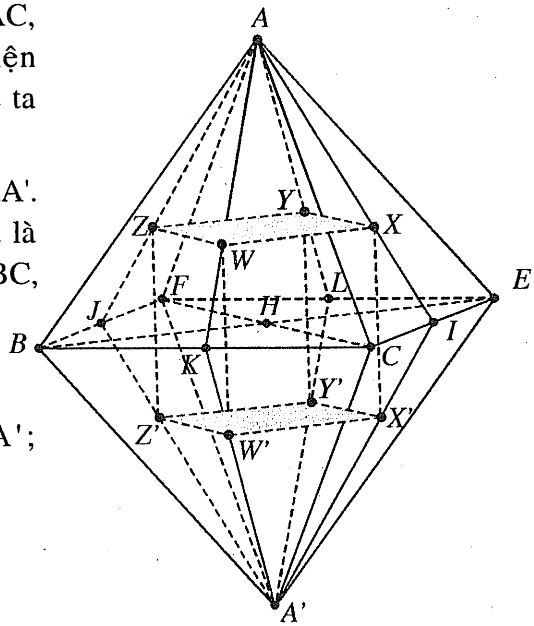
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AF = EC = BD$.



4. a) Xét hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi tâm của các mặt ABCD, CDD'C', D'C'B'A', B'A'AB, ADD'A' và BCC'B' lần lượt là K,H, J, I, F và G.

Ta có: các đoạn thẳng AC, AB', AD', CB', B'D' và D'C là các đường chéo của các mặt của hình lập phương đã cho nên AC = AB' = AD' = CB' = B'D' = D'C.

Do đó ACB'D' là một tứ diện đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$ mà 6 điểm K, H, J, I, F và G lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CD', D'B', B'A, AD', B'C của tứ diện ACB'D' nên áp dụng kết quả của bài 2 ta suy ra KHJIFG là một bát diện đều.



b) Xét hình tám mặt đều BCEFAA'. Gọi X, Y, Z, W, X', Y', Z', W' lần lượt là tâm của các mặt ACE, AEF, AFB, ABC, A'CE, A'EF, A'FB, A'BC.

Ta có:

$$XX' = YY' = ZZ' = WW' = \frac{1}{3}AA';$$

$$XY = \frac{2}{3}IL = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}FC = \frac{1}{3}FC.$$

Tương tự ta có

$$YZ = ZW = WX = X'Y' = Y'Z' = Z'W' = W'X' = XY.$$

Vì AA' = FC nên ta có:

$$YZ = ZW = WX = X'Y' = Y'Z' = Z'W' = W'X' = XY = XX' = YY' = ZZ' = WW'.$$

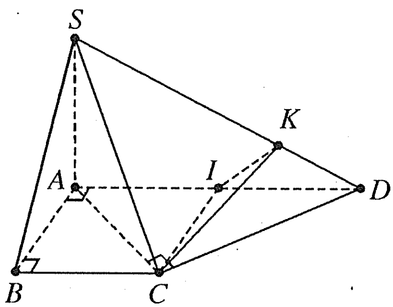
Mặt khác XY ⊥ XW, XY ⊥ XX' (do lần lượt song song với FC, BE và AA' đôi một vuông góc nhau). Vậy khối đa diện XYZW.X'Y'Z'W' có các mặt là hình vuông và mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh đi qua nên nó là khối đa diện đều loại {4; 3} hay là hình lập phương.

§4. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1. Gọi I là trung điểm AD. Ta có:

$$AI \perp AD \text{ và } AI \perp SA \Rightarrow AI \perp (SAD) \Rightarrow AI \perp SD.$$

Vẽ IK ⊥ SD thì ta có:



$$SD \perp (CIK) \Rightarrow CK \perp SD.$$

Vậy $\widehat{CKI} = \left(A, SD, C\right) = 60^\circ$

$$\Rightarrow \quad IK = CI\cot 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

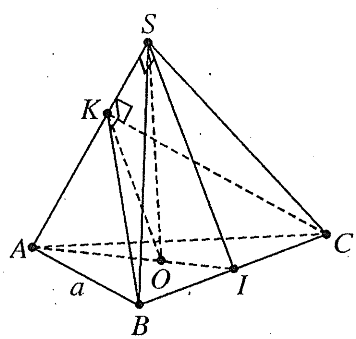
Ta có : $\Delta IKD \backsim \Delta SAD \Rightarrow \dfrac{SA}{SD} = \dfrac{IK}{ID}$

$$\Rightarrow \quad SA = \frac{IK}{ID}SD \Rightarrow SA = \frac{a}{\sqrt{3}a}.a\sqrt{5} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

Vì $S_{ABCD} = \dfrac{(AD+BC)AB}{2} = \dfrac{(2a+a)a}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$.

Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$.

2. Gọi O là tâm của ΔABC. Vì SABC là hình chóp đều nên SO ⊥ (ABC). Gọi I = AO ∩ BC.



Ta có $\dfrac{AK}{AS} = \dfrac{AO}{AI} \Rightarrow KO \parallel SI.$ (1)

Vì SA ⊥ (KBC) ⇒ SA ⊥ KO. (2)

(1) và (2) ⇒ SA ⊥ SI.

Đặt SA = x, ta có $SI^2 = AI^2 - SA^2 = \dfrac{3a^2}{4} - x^2$.

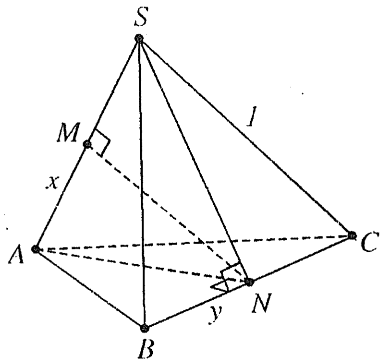
Mặt khác $SI^2 = SB^2 - BI^2 = x^2 - \frac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} - x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SA = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Vậy $\quad V_{\text{tứ diện}} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a^3}{12\sqrt{2}}.$

3. a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC.



Ta có ΔSBC và ΔABC cân cạnh đáy là BC

$\Rightarrow \quad AN \perp BC$ và $SN \perp BC$

$\Rightarrow \quad BC \perp (SAN)$.

Ta cũng có $NS = NA \Rightarrow \Delta NSA$ cân tại N

$\Rightarrow$ NM là đường cao của ΔNSA.

$$V_{SABC} = 2V_{CSAN}$$

$$= \frac{2}{3}S_{NSA}.CN = \frac{1}{3}SA.MN.\frac{BC}{2}$$

mà $AN^2 = AB^2 - BN^2 \;\Rightarrow MN^2 = AN^2 - AM^2 = AB^2 - BN^2 - AM^2$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-(x^2+y^2)}.$$

Do đó: $V_{SABC} = \frac{1}{12}xy\sqrt{4-(x^2+y^2)}$.

b) Ta có $V_{SABC} \le \frac{1}{24}(x^2+y^2)\sqrt{4-(x^2+y^2)} = \frac{1}{24}\sqrt{(x^2+y^2)^2(4-x^2+y^2)}$

mà $(x^2+y^2)^2[4-(x^2+y^2)] = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2[8-2(x^2+y^2)]$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{2(x^2+y^2)+[8-2(x^2+y^2)]}{3}\right)^3 = \frac{1}{2}.\frac{8^3}{27} = \frac{4.8^2}{27}$$

$$\Rightarrow \quad V_{SABC} \le \frac{1}{24}\sqrt{\frac{4.8^2}{27}} = \frac{2}{9\sqrt{3}}.$$

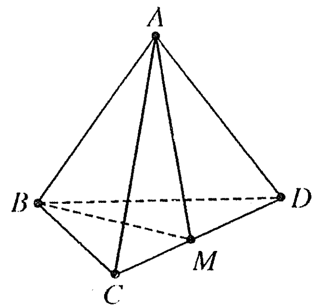
Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ và $x^2 + y^2 = 8 - 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy V_{SABC} đạt GTLN $\Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. a) Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC), vì (P) song song (ABC) nên ta có độ dài SH không đổi, mà diện tích ΔABC không đổi nên $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH$ không thay đổi.

b) Vì S di chuyển trên mặt phẳng (Q) chỉ song song với một cạnh đáy nên nếu gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) thì ta có độ dài SH thay đổi, mà diện tích ΔABC không đổi nên $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH$ thay đổi.

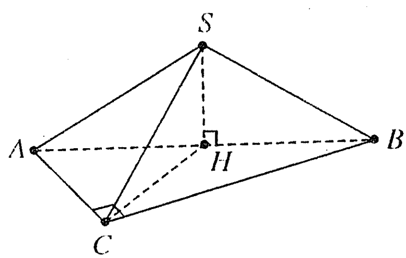
c) Vì S di chuyển trên đường thẳng d song song với một cạnh đáy nên nếu gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) // d thì ta có độ dài SH thay đổi, mà diện tích ΔABC không đổi nên $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH$ thay đổi.



5. Xét khối tứ diện ABCD và M là điểm thuộc cạnh CD. Khi đó (ABM) chia khối tứ diện ABCD thành hai khối tứ diện ABMC và ABMD. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C, D trên (MAB).

Ta có: $k = \frac{V_{ABMC}}{V_{ABMD}} = \frac{S_{AMB}.CH}{S_{AMB}.DK} = \frac{CH}{DK} = \frac{CM}{DM}$.

Vậy khi M nằm trên cạnh CD và MC = k.MD thì $\frac{V_{ABMC}}{V_{ABMD}} = k$.



6. a) Ta có $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$ và $AC = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad AB^2 = BC^2 + AC^2$

$\Rightarrow \quad \Delta ACB$ vuông tại C.

b) Gọi H là trung điểm AB, ta có SH ⊥ (ABC)

$$\Rightarrow \quad V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH$$

mà $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

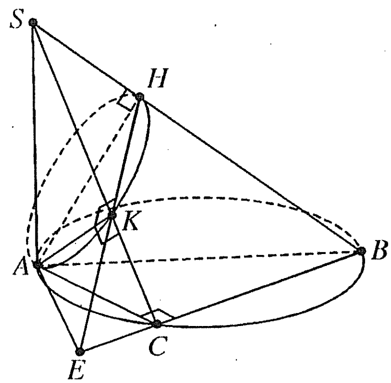
7. a) BC ⊥ AC và BC ⊥ SA ⇒ BC ⊥ (SAC)

⇒ BC ⊥ AK mà AK ⊥ SC

⇒ AK ⊥ (SBC)

⇒ SB ⊥ AK mà AH ⊥ SB

⇒ SB ⊥ (AHK).



b) Ta có K ∈ (AHK) cố định. (1)

Mặt khác AK ⊥ HK. (2)

Từ (1) và (2) ⇒ K ∈ đường tròn (T') đường kính AK, nằm trên (AHK) cố định.

c) $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{AHK} = \dfrac{1}{6}SH.AH.KI$ (I là hình chiếu của K trên AH).

Vì $AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{R.2R}{R\sqrt{5}} = \dfrac{2R}{\sqrt{5}}$, $SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$ và K di động trên (T')

nên: $V_{Max} \Leftrightarrow KI \max \Leftrightarrow$ I là trung điểm AH $\Leftrightarrow KI = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$.

Vậy GTLN của V là $V_{Max} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{2R}{\sqrt{5}}.\dfrac{R}{\sqrt{5}}.\dfrac{R}{\sqrt{5}} = \dfrac{R^3}{10\sqrt{5}}$.

8. a) Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC), M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Ta có:

$$AB \perp (SMH) \Rightarrow \widehat{SMH} = \big((SAB),(HAB)\big) = \alpha.$$

Tương tự ta có:

$$\widehat{SNH} = \widehat{SPH} = \alpha \Rightarrow \Delta SHM = \Delta SHN = \Delta SHP$$

$\Rightarrow$ HM = HN = HP

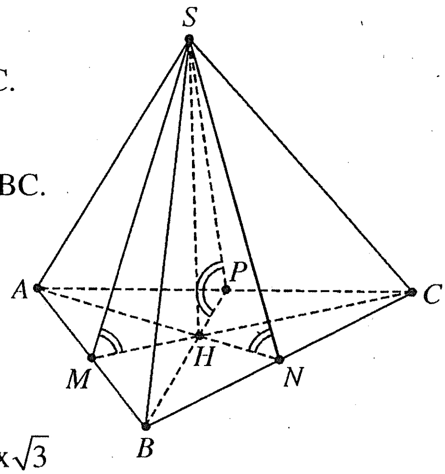
$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Vì SA = SB = SC $\Rightarrow$ HA = HB = HC

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Vậy ΔABC đều.

Do đó SABC là hình chóp đều.



b) Đặt x = AM.

Ta có: AB = 2x $\Rightarrow$ MC = $x\sqrt{3}$

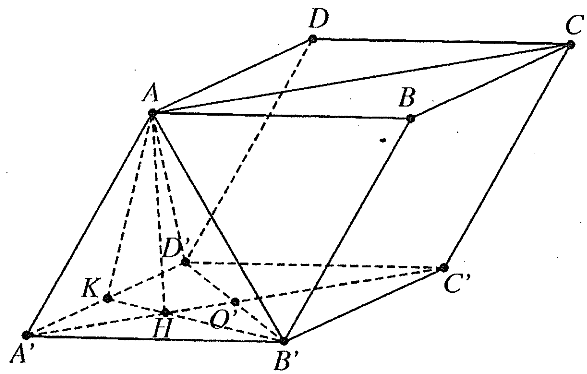
$$\Rightarrow MH = \frac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SM = \frac{HM}{\cos\alpha} = \frac{x\sqrt{3}}{3\cos\alpha}.$$

Ta lại có: $SM^2 + MA^2 = SA^2 \Rightarrow \dfrac{3x^2}{9\cos^2\alpha} + x^2 = a^2 \Rightarrow x = \dfrac{3a\cos\alpha}{\sqrt{3+9\cos^2\alpha}}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha} \text{ và } SH = SM\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}.\frac{3\sqrt{3}a^2\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha} = \frac{a^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^3}}.$$

9. Gọi O' = A'C' $\cap$ B'D' và H là hình chiếu của A trên (A'B'C'D') thì do AA'B'D' là tứ diện đều nên A, H, O' thẳng hàng và $A'H = \frac{2}{3}AO' = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Vì AH $\perp$ (A'B'C'D') nên ΔAHA' vuông tại H

$$\Rightarrow AH^2 = A'A^2 - A'H^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$S_{A'B'C'D'} = 2S_{A'B'D'} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

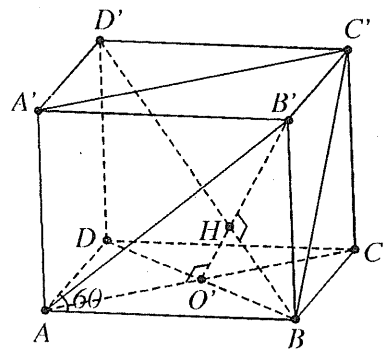
Vậy thể tích khối hộp là $V = S_{A'B'C'D'}.SH = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{2}$.

10. Ta có $AC \perp (BB'D'D)$

$\Rightarrow AC \perp BD'$ mà theo giả thiết $BD' \perp AB'$

$\Rightarrow BD \perp (AB'C)$.

Gọi $O = AC \cap BD$ và $H = BD' \cap B'O$.



Ta có: ΔABD đều $\Rightarrow BD = a \Rightarrow OB = \frac{a}{2}$.

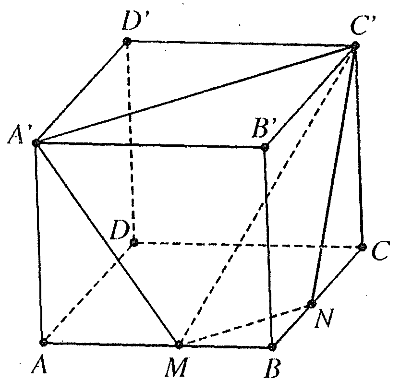
Vì $OB' = 3HO$ mà $OB^2 = OH.OB' = 3OH^2$

$$\Rightarrow OH = \frac{OB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow OB' = 3HO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BB' = \sqrt{OB'^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $V_{\text{lăng trụ}} = S_{ABCD}.B'B = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

11. a) Ta có: $\left.\begin{matrix} M \in (MA'C') \cap (ABCD) \\ A'C' // (ABCD) \end{matrix}\right\}$



$\Rightarrow \quad (MA'C') \cap (ABCD) = MN$

và $\quad MN // A'C'$ ($N \in BC$).

Vậy thiết diện của (MA'C') với hình lập phương là tứ giác MNC'A'. Ta có MNC'A' là hình thang cân.

Vẽ $MH \perp A'C'$ ta có:

$$MH^2 = \sqrt{MA'^2 - HA'^2} = \sqrt{a^2 + x^2 - \left(\frac{a\sqrt{2} - (a-x)\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2 + x^2}{2}}.$$

Vậy $S_{MNC'A'} = \dfrac{(MN + C'A')MH}{2}$

$$= \frac{\left[(a-x)\sqrt{2} + a\sqrt{2}\right]}{2} \cdot \frac{\sqrt{2a^2 + x^2}}{\sqrt{2}} = \frac{(2a-x)\sqrt{2a^2+x^2}}{2}.$$

b) Ta có thể tích hình chóp cụt BMN.B'A'C' là :

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(S_{B'A'C'} + S_{BMN} - \sqrt{S_{A'B'C'}S_{BMN}}\right)BB'$$

$$= \frac{a}{3}\left[\frac{a^2}{2} + \frac{(a-x)^2}{2} - \frac{a(a-x)}{2}\right] = \frac{a}{6}\left(a^2 - ax + x^2\right).$$

Từ đề bài, ta có $V = 3V_1 \Leftrightarrow a^3 = \dfrac{a}{2}(a^2 - ax + x^2)$

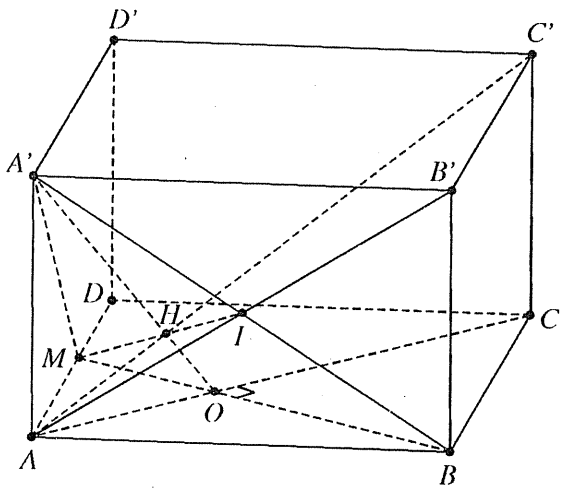
$$\Leftrightarrow x^2 - ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow x = a(1 + \sqrt{5}).$$

12. a) $MH \subset (MA'B)$ và $MH \subset (ADC'B') \Rightarrow MH = (MA'B) \cap (ADC'B')$.

Gọi $I = A'B \cap AB'$ thì I cố định

và $I \in (MA'B) \cap (ADC'B')$

$\Rightarrow$ MH qua I cố định.



b) Ta có:

$$V_{A'AMB} = \frac{1}{3}S_{AMB}.AA'$$

$$= \frac{1}{12}AD.AB.AA'$$

$$= \frac{1}{12}V_{hộp}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{A'AMB}}{V_{DMBC.D'A'B'C'}} = \frac{1}{11}.$$

c) Ta có $MB \perp AC$ mà $MB \perp AA' \Rightarrow MB \perp (A'AC) \Rightarrow MB \perp A'O$

$\Rightarrow$ A'O là đường cao của $\Delta A'MB$. (1)

Ta lại có: A'ABB' là hình vuông $\Rightarrow A'B \perp AB'$. (2)

Vì $DA \perp (AA'B'B) \Rightarrow A'B \perp AD$. (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow A'B \perp (DAB')$ mà $MI \subset (DAB') \Rightarrow MI \perp A'B$

$\Rightarrow$ MI là đường cao $\Delta A'MB$. (4)

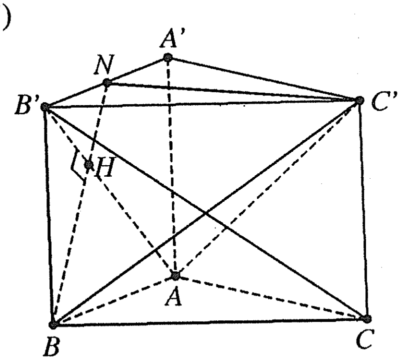
Từ (1) và (4) $\Rightarrow$ H là trực tâm $\Delta A'MB$.

13. Gọi N là trung điểm A'B' thì ta có:

$C'N \perp A'B'$ và $C'N \perp AA' \Rightarrow C'N \perp (AA'B'B)$

$\Rightarrow C'N \perp AB'$ mà $AB' \perp BC' \Rightarrow AB' \perp (BNC')$

$\Rightarrow AB' \perp BN$.



Ta có $BH = 2HN$ và $BB'^2 = BH.BN$

$\Rightarrow h^2 = 2HN.3HN = 6HN^2 \Rightarrow HN = \dfrac{h\sqrt{6}}{6}$

$\Rightarrow BN = 3.HN = \dfrac{h\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow B'N = \sqrt{BN^2 - B'B^2} = \sqrt{\dfrac{6h^2}{4} - h^2} = \dfrac{h\sqrt{2}}{2}$

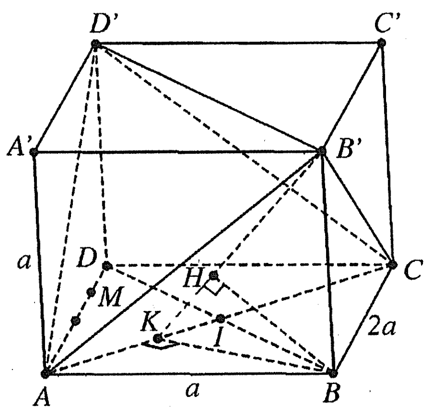
$\Rightarrow B'A' = h\sqrt{2}$.

Do đó $V = S_{đáy}.BB' = \dfrac{B'A'^2\sqrt{3}}{4}.B'B = \dfrac{2h^3\sqrt{3}}{4} = \dfrac{h^3\sqrt{3}}{2}$.

14. a) Vì $(AA'D'D) \,//\, (BB'C'C)$

$\Rightarrow d(AD', B'C) = d((AA'D'D), (BB'C'C))$

$= AB = a$.



b) Vì DM cắt (B'AC) tại A

$\Rightarrow \dfrac{d(M,(B'AC))}{d(D,(B'AC))} = \dfrac{MA}{DA} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow d(M, (B'AC)) = \dfrac{3}{4} d(D, (B'AC))$. (1)

Vì BD cắt (B'AC) tại I là trung điểm BD

$\Rightarrow d(D, (B'CA)) = d(B, (B'CA))$. (2)

Vẽ $BK \perp AC$, $BH \perp KB'$.

Ta có: $AC \perp BB'$ và BK $\Rightarrow AC \perp (KBB')$

$\Rightarrow AC \perp BH$ mà $BH \perp KB'$

$\Rightarrow BH \perp (ACB')$

$\Rightarrow d(B, (B'CA)) = BH$.

Ta có: $$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2}$$

$\Rightarrow$ $BH = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow$ $d(B, (B'CA)) = \frac{2a}{3}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow d(M, (B'CA)) = \frac{3}{4}.\frac{2a}{3} = \frac{a}{2}$.

c) Ta có $V_{ACB'D'} = V_{hộp} - (V_{BACB'} + V_{DACD'} + V_{A'AB'D'} + V_{C'B'D'C})$

$$= 2a^3 - 4.\frac{1}{6}BA.BC.BB' = 2a^3 - \frac{2}{3}.2a^3 = \frac{2a^3}{3}.$$

15. Xét lăng trụ n–giác đều $A_1A_2\ldots A_n.\,A'_1A'_2\ldots A'_n$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi O, O' lần lượt là tâm của n–giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ và $A'_1A'_2\ldots A'_n$.

Gọi V là thể tích của lăng trụ $A_1A_2\ldots A_n.\,A'_1A'_2\ldots A'_n$, ta có:

$$V = n\,V_{OA_1A_2.O'A'_1A'_2} = n.S_{OA_1A_2}.OO'.$$

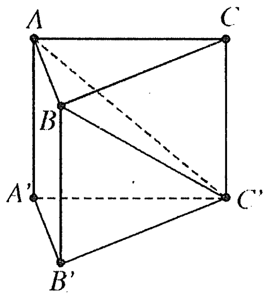
Ta có $OO' = a$.

ΔOA_1A_2 cân tại O có $A_1A_2 = a$ và $\widehat{A_1OA_2} = \frac{2\pi}{n}$.

Gọi I là trung điểm A_1A_2 thì ta có:

$$OI = A_1A_2.\cot\widehat{IOA_1} = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}.$$

Do đó $V = n.\frac{1}{2}.A_1A_2.OI.OO' = \frac{na^3}{4}\cot\frac{\pi}{n}$.

16. 

a) Ta có $AB \perp AC$ và $AB \perp AA'$

$\Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$

$\Rightarrow \widehat{AC'B} = (BC', (AA'C'C)) = 30^o$.

ΔABC vuông tại A $\Rightarrow AB = AC\tan 60^o = b\sqrt{3}$.

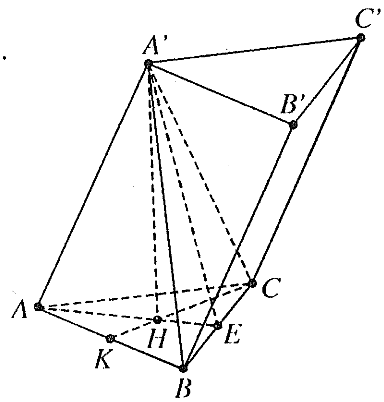
$\Delta ABC'$ vuông tại A $\Rightarrow AC' = AB\cot 30^o = b\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3b$.

b) Ta có $A'A = \sqrt{C'A^2 - A'C'^2} = \sqrt{9b^2 - b^2} = 2b\sqrt{2}$.

Do đó: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.b^2\sqrt{3}$.

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \dfrac{1}{2}b^2\sqrt{3}.2b\sqrt{2} = b^3\sqrt{6}$.

17. a) Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Ta có $HA = HB = HC$ và $A'A = A'B = A'C$

$\Rightarrow A'H$ nằm trên trục của tam giác ABC

$\Rightarrow A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{A'AH} = \left(A'A, (ABC)\right) = 60^o$.

Ta có: $AH = \dfrac{2}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

$$A'H = AH\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a;\ S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

b) Ta có $BC \perp AE$ (vì H cũng là trực tâm của ΔABC);

$BC \perp A'H$ (vì $A'H \perp (ABC)$).

Do đó $BC \perp (A'AE) \Rightarrow AA' \perp BC$ mà $AA' \,//\, BB'$ nên $BC \perp BB'$.

Vì BCC'B' là hình bình hành có $BC \perp BB'$ nên BCC'B' là hình chữ nhật.

c) Ta có:

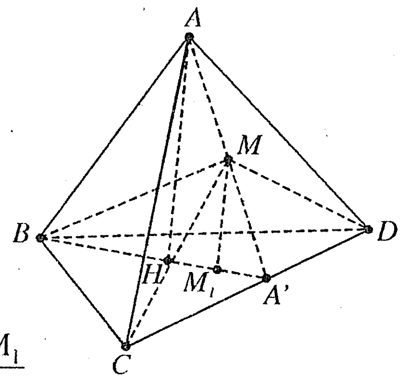
* $AA' = 2AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{BCC'B'} = AA'.BC = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

$* \quad HE = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A'E = \sqrt{A'H^2 + HE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$

$\Rightarrow S_{ABB'A'} = 2S_{A'AB} = 2S_{A'BC} = A'E.BC = \frac{a^2\sqrt{39}}{6}$.

Vậy $S_{xq} = 2.S_{ABB'A'} + S_{BCC'B'} = a^2\left(\frac{\sqrt{39}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

18. Gọi h là đường cao của tứ diện và a là cạnh của tứ diện.



Gọi A' là giao điểm của AM với (BCD), H là hình chiếu của A trên (BCD), M_1 là hình chiếu của M trên (BCD).

Ta có: B, H, M_1, A' thẳng hàng.

Do đó $\frac{V_{M.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{BCD}.MM_1}{\frac{1}{3}.S_{BCD}.A'H} = \frac{MM_1}{A'H} = \frac{MM_1}{h}$

$\Rightarrow \quad MM_1 = h.\frac{V_{M.BCD}}{V_{A.BCD}}$.

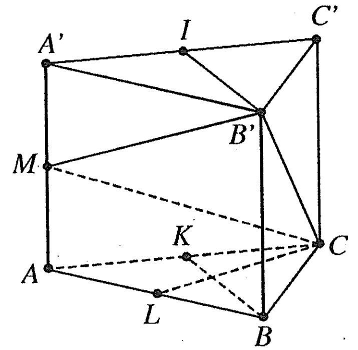
Tương tự nếu gọi M_2 là hình chiếu của M trên (ACD); M_3 là hình chiếu của M trên (ABD); M_4 là hình chiếu của M trên (ABC) thì ta có:

$$MM_2 = h\frac{V_{M.ACD}}{V_{ABCD}}; MM_3 = h\frac{V_{M.ABD}}{V_{ABCD}}; MM_4 = h\frac{V_{M.ABC}}{V_{ABCD}}$$

$$\Rightarrow MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 = h\left(\frac{V_{MBCD} + V_{MABD} + V_{MACD} + V_{MABC}}{V_{ABCD}}\right) = h$$

mà $h = AH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

19. Gọi a là cạnh của ΔABC. Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của A'C', AC và AB.



Ta có

$$S_{A'C'CM} = \frac{(A'M + C'C)A'C}{2}$$

$$= \frac{(MA + B'B)AB}{2} = S_{ABB'M}. \quad (1)$$

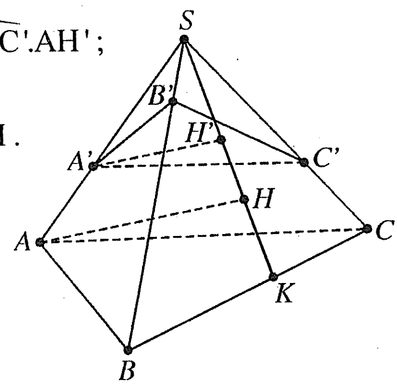
Vì d(B', (A'ACC')) = B'I = BK = CL = d(C, (A'ABB')). (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$V_{B'.CC'A'M} = \frac{1}{3}S_{C'CMA'}.d(B',(C'CMA'))$$

$$= \frac{1}{3}S_{B'BAM}.d(C,(B'BAM)) = V_{C.BB'AM} \Rightarrow \frac{V_{B'.CC'A'M}}{V_{C.BB'AM}} = 1.$$

20. Dựng AH $\perp$ (SBC) tại H và AH' $\perp$ (SBC) tại H', ta có:



$$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{SB'C'}.AH' = \frac{1}{6}SB'.SC'.\sin\widehat{B'SC'}.AH';$$

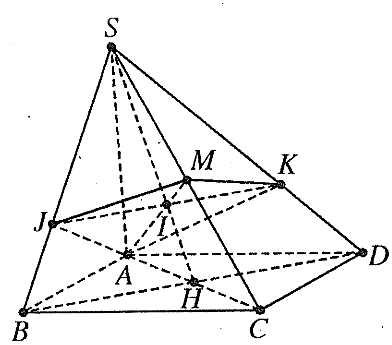
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{SBC}.AH = \frac{1}{6}SB.SC.\sin\widehat{BSC}.AH.$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SB.SC.AH}{SB'.SC'.AH'}$$

mà $\dfrac{AH}{AH'} = \dfrac{SA}{SA'}$

nên ta có $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$.

21. Gọi H = AC $\cap$ BD, I = SH $\cap$ AM



$\Rightarrow$ I là điểm chung của (P) và (SBD).

Vì (P) // BD nên (P) cắt (SBD) theo giao tuyến d qua I và song song với BD.

Gọi K, J lần lượt là giao điểm của d với SD và SB.

Ta có: $\frac{SK}{SD} = \frac{SJ}{SB} = \frac{SI}{SH} = \frac{2}{3}$ (do I là trọng tâm ΔSAC).

Áp dụng bài 20 và gọi V là thể tích của hình chóp SABCD ta có:

$$\frac{V_{SAJM}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SJ}{SB} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{SAJM}}{V} = \frac{1}{6}.$$

Tương tự ta cũng có $\frac{V_{SAKM}}{V} = \frac{1}{6}$.

Do đó $\frac{V_{SAJM}}{V} + \frac{V_{SAKM}}{V} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.AKMJ}}{V} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.AKMJ}}{V_{ABCDKMJ}} = \frac{1}{2}$.

22. Dựng AH là đường cao của tứ diện ABCD.

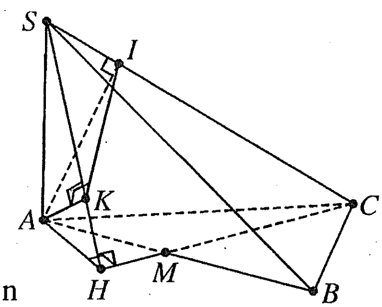
Gọi I là tâm vị tự và $H' = V_{(I;\, k)}(H)$.

Ta có $\overrightarrow{IA'} = k\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IH'} = k\overrightarrow{IH} \Rightarrow \overrightarrow{A'H'} = k\overrightarrow{AH} \Rightarrow A'H' = |k|AH$.

Vì qua $V_{(I;\, k)}$ thì ΔBCD biến thành $\Delta B'C'D'$ nên $\Delta B'C'D'$ đồng dạng với ΔBCD theo tỉ số $|k|$. Suy ra $S_{B'C'D'} = k^2 S_{BCD}$.

Do đó: $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{3V_{A'B'C'D'}}{3V_{ABCD}} = \frac{S_{B'C'D'}.A'H'}{S_{BCD}.AH} = |k|^3$.

23. a) Ta có:



+ $H \in (ABC)$ cố định.

+ $CH \perp SH$ và $CH \perp SA$

$\Rightarrow CH \perp (SAH) \Rightarrow CH \perp AH$

$\Rightarrow$ H nhìn AC cố định dưới góc 90^o.

Vậy tập hợp điểm H là nửa đường tròn $\overset{\frown}{ABC}$ đường kính AC, nằm trong mặt phẳng (ABC).

Ta có: $V_{SAHC} = \frac{1}{3}S_{AHC}.SA = \frac{1}{6}SA.AC.d(H, AC)$

nên V_{SAHC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ d(H, AC) lớn nhất

$\Leftrightarrow$ H là trung điểm của cung $\overset{\frown}{ABC} \Leftrightarrow d(H, AC) = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Vậy $Max(V_{SAHC}) = \frac{1}{6}.a.a.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}$.

b) Ta có: $AH = AC.\sin\alpha$; $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$

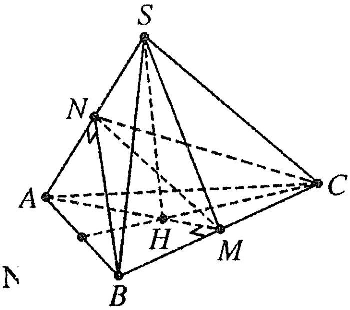
$$\Rightarrow \quad SK = \frac{SA^2}{SH} = \frac{a}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}} \text{ và } AK = \frac{AS.AH}{SH} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}.$$

Ta có: $V_{SAKI} = \frac{1}{3}.S_{SAK}.d\big(I,(SAH)\big) = \frac{1}{6}SK.AK.d\big(I,(SAH)\big)$

mà $d(I, (SAH)) = \frac{1}{2}d(C, (SAH)) = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}AC\cos\alpha = \frac{1}{2}a\cos\alpha.$

Vậy $V_{SAKI} = \frac{1}{6}.\frac{a}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}.\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}.\frac{1}{2}a\cos\alpha = \frac{a^3\sin 2\alpha}{24(1+\sin^2\alpha)}.$

24. a) SABC là hình chóp đều, SH là đường cao
$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Gọi $M = AH \cap BC \Rightarrow$ M là trung điểm BC.

Ta có: $BC \perp AM$ và SM $\Rightarrow BC \perp (SAM)$

$\Rightarrow BC \perp SA$.

Gọi N là hình chiếu của B trên SA thì $SA \perp BN$

Vậy $(BNC) \perp SA \Rightarrow (P) \equiv (BCN)$.

Do đó thiết diện của hình chóp với (P) là ΔBCN.

b) Ta có thiết diện chia hình chóp thành 2 phần là hai hình chóp có cung đáy là ΔBCN và hai đường cao lần lượt SN và AN.

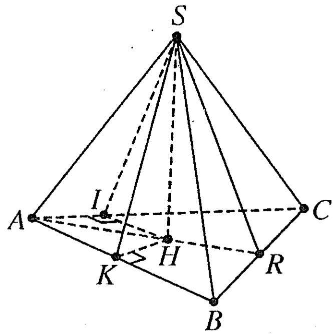
Ta có $\Delta SAH \backsim \Delta MAN \Rightarrow \frac{SA}{AM} = \frac{AH}{AN} \Rightarrow SA.AN = AH.AM$

mà $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $h = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow SA^2 = AH^2 + SH^2 = \frac{3a^2}{9} + 3a^2 = \frac{10a^2}{3}.$$

Vậy $\frac{AN}{SA} = \frac{AH.AM}{SA^2} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{10a^2}{3}} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{AN}{SN} = \frac{3}{17}$. Do đó $\frac{V_{ABCN}}{V_{SBCN}} = \frac{3}{17}$.

25. a) Gọi K, I, R lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC, BC. Ta có: AB ⊥ SH và HK ⇒ AB ⊥ (SHK)



$$\Rightarrow \left((SAB),(ABC)\right) = \widehat{SKH} = 60^\circ.$$

Tương tự ta có $\widehat{SIH} = 60^\circ = \widehat{SRH}$

$\Rightarrow \Delta SHK = \Delta SHI = \Delta SHR \Rightarrow HK = HI = HR$

⇒ H thuộc đường phân giác của ΔABC.

Ta có BC ⊥ SH và AH ⊥ BC (do AH là đường phân giác của ΔABC cân tại A) ⇒ BC ⊥ (SAH) ⇒ SA ⊥ BC.

b) Ta có: $S_{ABC} = AR.BR = a.2a\sqrt{2} = 2a^2.\sqrt{2}$.

Vì A, H, R thẳng hàng ⇒ BK = BR = a ⇒ AK = 2a.

Ta có $\Delta AKH \backsim \Delta ARB \Rightarrow \dfrac{HK}{RB} = \dfrac{AK}{AR}$

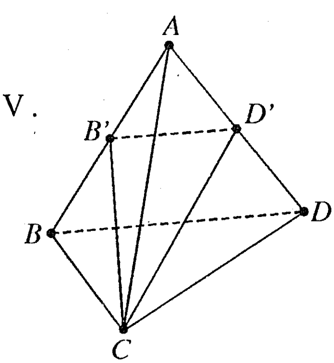
$$\Rightarrow HK = \frac{RB.AK}{AR} = \frac{a.2a}{2a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow SH = HK\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}2a^2\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1. Ta có:



* $\dfrac{V_{AB'CD'}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AB'}{AB}.\dfrac{AD'}{AD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{AB'CD'} = \dfrac{1}{4}V$.

* $V_{CBDD'B'} = V - V_{AB'CD'} = \dfrac{3}{4}V$.

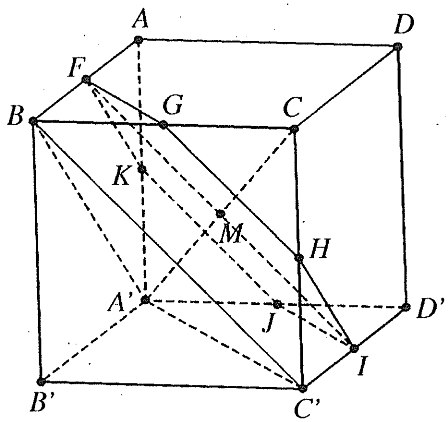
2. Gọi sáu trung điểm của sáu cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A' và AA' lần lượt là F, G, H, I, J và K.

Ta có:

* IJ là đường trung bình ΔA'C'D'	⇒ IJ // A'C'.	(1)
* FG là đường trung bình ΔABC	⇒ FG // AC mà AC // A'C'	
	⇒ FG // A'C'.	(2)
* GH là đường trung bình ΔBCC'	⇒ GH // BC'.	(3)
* KJ là đường trung bình ΔA'AD'	⇒ KJ // AD' mà AD' // BC'	
	⇒ KJ // BC'.	(4)

Tương tự ta có: FK // BA' và HI // BA'. (5)

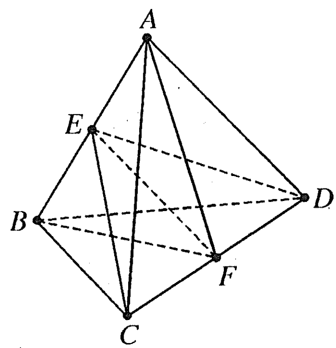
Từ (1), (2), (3), (4) và (5) ⇒ F, G, H, I, J và K cùng nằm trên mặt phẳng (P) qua F và song song (BA'C').



Gọi M là trung điểm FI thì M cũng là trung điểm của A'C; AC'; B'D; BD'. Do đó qua phép đối xứng tâm M thì FADCGHIJK biến thành IC'B'A'JKFQHK. Vì phép đối xứng là phép dời hình nên (P) chia khối hộp thành 2 phần bằng nhau.

3. a) Bốn khối tứ diện đó là: AECF; BECF; AEFD; BEFD.

b) Ta có E là trung điểm AB nên đường cao của tứ diện AECF và đường cao của tứ diện BECF bằng nhau. Suy ra thể tích của tứ diện AECF và thể tích BECF bằng nhau.



Chứng minh tương tự ta cũng có: $V_{AECF} = V_{AEFD} = V_{BEFD}$. Do đó thể tích của bốn khối tứ diện trên bằng nhau.

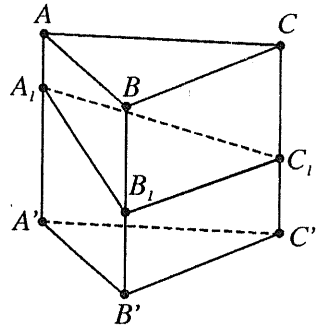
c) Khi ABCD là khối tứ diện đều thì ta có:

* Phép đối xứng qua mặt phẳng (ABF) biến tứ diện AECF thành tứ diện AEDF và AEFC thành BEFD.

* Phép đối xứng qua mặt phẳng (ECD) biến tứ diện AECF thành tứ diện BECF và AEFD thành BEFD.

Phép đối xứng qua mặt phẳng là một phép dời hình nên bốn tứ diện AECF, BECF, BEDF và AEDF bằng nhau.

4. Ta có:



$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1.ABC} + V_{A_1.BCC_1B_1}$$

$$= \frac{1}{3}AA_1.S_{ABC} + \frac{1}{3}d\left(A,(BCC_1B_1)\right).S_{BCC_1B_1}$$

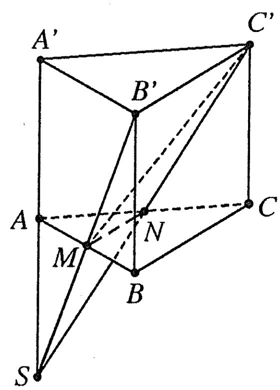
$$= \frac{1}{3}.a.S + \frac{1}{3}d\left(A,(BCC_1B_1)\right).BC.\frac{(BB_1 + CC_1)}{2}$$

$$= \frac{1}{3}.a.S + \frac{1}{3}(b+c).S = \frac{a+b+c}{3}.S.$$

Ta có $V_{A'B'C'.A_1B_1C_1} = \dfrac{(h-a)+(h-b)+(h-c)}{3}.S = \dfrac{3h-(a+b+c)}{3}.S$.

5. Gọi S là giao điểm của B'M với AA' và N là giao điểm của SC' với AC. Khi đó (MB'C') chia khối lăng trụ ABC.A'B'C' thành hai khối đa diện là AMN.A'B'C' và BB'MNCC' có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Ta có M là trung điểm AB và SA' // BB' nên A là trung điểm SA'. Suy ra N là trung điểm của SC'.

Gọi a và h lần lượt là cạnh đáy và chiều cao của lăng trụ.



Ta có $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SA'B'C'}} = \dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SM}{SB'}.\dfrac{SN}{SC'} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

$$\Rightarrow \frac{V_{SA'B'C'} - V_{SAMN}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{V_{AMN.A'B'C'}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow V_{AMN.A'B'C'} = \frac{7}{8}V_{SA'B'C'} = \frac{7}{8}.\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.SA'$$

$$= \frac{7}{24}.S_{ABC}.2h = \frac{7}{12}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{AMN.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{V_{AMN.A'B'C'}}{V_{BMB'.C'CN}} = \frac{7}{12-7} = \frac{7}{5}.$$

6. a) Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{6}a^3$.

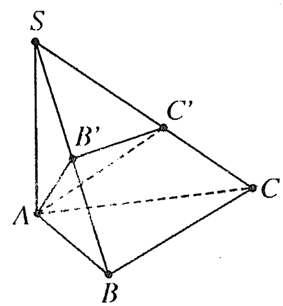
b) Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow AB' \perp BC$ mà $AB' \perp SB$ (do ΔSAB cân tại A, B' là trung điểm SB')

$\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow SC \perp AB'$. (1)

Mặt khác $SC \perp AC'$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp (AB'C')$.



c) Ta có: $\frac{SB'}{SB} = \frac{SB'.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$;

$\frac{SC'}{SC} = \frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$.

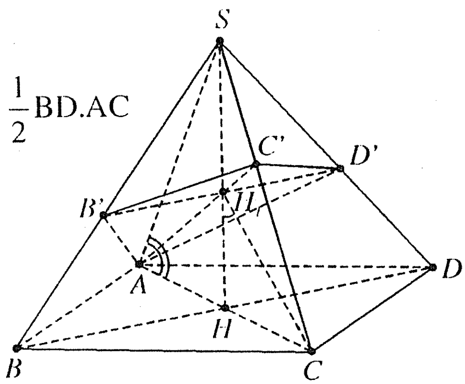
Do đó: $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{SAB'C'} = \frac{1}{6}V_{SABC} = \frac{a^3}{36}$.

7. a) Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ mà $(\alpha) \perp SC$

$\Rightarrow (\alpha) // BD \Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = B'D' // BD$ mà $BD \perp AC'$

$\Rightarrow B'D' \perp AC'$

$\Rightarrow S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}B'D'.AC'$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD.AC$



mà $B'D' = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

và $AC' = AC\sin\widehat{ACC'}$

nên $\frac{S_{AB'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{B'D'}{BD}.\frac{AC'}{AC} = \frac{1}{3}\sin\widehat{ACC'}$.

Ta có $\Delta SHA \backsim \Delta CHH_1$

$\Rightarrow \tan C = \tan A = \frac{SH}{AH} = \frac{CH}{H_1H}$ mà $\tan C = \frac{SH}{HC}$

$$\Rightarrow \tan^2 C = \tan C.\tan C = \frac{CH}{H_1H}.\frac{SH}{HC} = \frac{SH}{H_1H} = \frac{3}{2} \Rightarrow \cot^2 C = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{ACC'} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 C}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Vậy $\dfrac{S_{AB'C'D'}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{3}\sin\widehat{ACC'} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

b) $V_{SAB'C'D'} = \dfrac{1}{3}.S_{AB'C'D'}.SC' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{\sqrt{15}}.S_{ABCD}.SC' = \dfrac{a^2}{3\sqrt{15}}SC'$ (*)

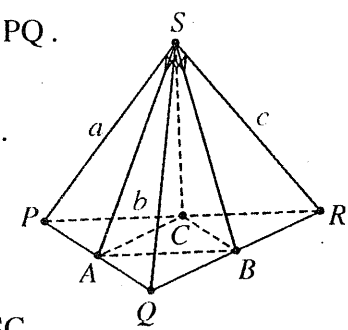
mà $SC' = SA\cos\widehat{ASC} = SC.\cos\widehat{ASC} = \dfrac{HC}{\cos C}.\cos\widehat{ASC}$

$$= \frac{HC.\cos(180^o - 2C)}{\sqrt{1-\sin^2 C}} = \frac{-HC.\cos 2C}{\sqrt{1-\frac{3}{5}}}$$

$$= -\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{5}{2}}(1-2\sin^2 C) = -\frac{a\sqrt{5}}{2}(1-2.\frac{3}{5}) = \frac{a\sqrt{5}}{10}. \quad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow V_{SAB'C'D'} = \dfrac{a^2}{3\sqrt{15}}.\dfrac{a\sqrt{5}}{10} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{90}$.

8. a) ΔSPQ vuông tại S, SA là trung tuyến $\Rightarrow SA = \dfrac{1}{2}PQ$.



BC là đường trung bình $\Delta PQR \Rightarrow BC = \dfrac{1}{2}PQ$.

Do đó SA = BC. (1)

Tương tự ta có: SB = AC và SC = AB. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta SAB = \Delta BCS = \Delta CBA = \Delta ASC$.

b) Ta có $\Delta PAC = \Delta AQB = \Delta CBR = \Delta BAC$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{PQR}$$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.d\left(S,(ABC)\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.S_{PQR}.d\left(S,(ABC)\right)$$

$$= \frac{1}{4}V_{SPQR} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.SP.SQ.SR = \frac{1}{12}abc.$$

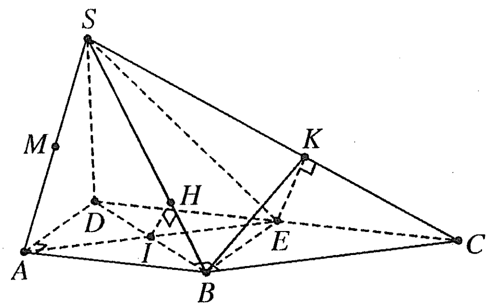
9. a) * $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SD = \frac{1}{3}.\frac{(AB+CD)AD}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$

* Ta có: $BE \perp CD$ và $BE \perp SD$

$\Rightarrow BE \perp (SCD)$

$\Rightarrow BE \perp SC$ mà $EK \perp SC$

$\Rightarrow SC \perp (EBK)$.



b) AM cắt (SBC) tại S

$$\Rightarrow \frac{d\left(M,(SBC)\right)}{d\left(A,(SBC)\right)} = \frac{MS}{AS} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A,(SBC)).$ (5)

Mặt khác $AE // BC \Rightarrow AE // (SBC)$

$\Rightarrow d(A, (SBC)) = d(I, (SBC))$ $(I = AB \cap AE)$. (6)

Vẽ $IH \perp SB$ tại H. (7)

Ta có $EB = ED = EC = a \Rightarrow \Delta DBC$ vuông tại B

$\Rightarrow BC \perp BD$ mà $BC \perp SD$

$\Rightarrow BC \perp (SBD) \Rightarrow BC \perp IH$. (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow IH \perp (SBC) \Rightarrow d(I, (SBC)) = IH$.

$$\Delta BHI \backsim \Delta BDS \Rightarrow \frac{HI}{SD} = \frac{IB}{SB} \Rightarrow IH = \frac{SD.IB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}.$$

Vậy $d(I, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$. (9)

Từ (5), (6) và (9) $\Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{20}$.

10. a) Dựng Bz // Ax, MH // AB ($H \in Bz$).

Ta có: $BN \perp AB$ và $BN \perp AM \Rightarrow BN \perp (ABM)$

$$\Rightarrow V_{ABNM} = \frac{1}{3}S_{ABM}.BN = \frac{1}{6}AB.AM.BN$$

$$\Rightarrow V_{ABNM} = \frac{1}{6}axy.$$

b) Đặt MN = b không đổi. Ta có: ΔBHN vuông tại B

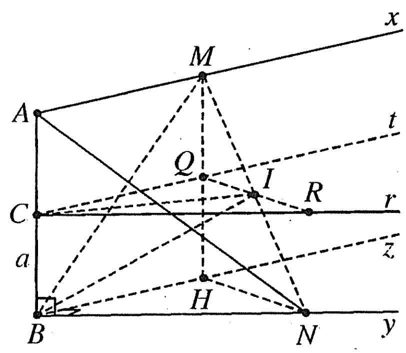
$$\Rightarrow HB^2 + BN^2 = x^2 + y^2 = HN^2 = MN^2 - MH^2 = b^2 - a^2$$

$$\Rightarrow xy \le \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABNM} \le \frac{1}{12}a(b^2-a^2).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{2}}$.

Vậy $\text{Max}V = \frac{1}{12}a(b^2-a^2)$.



c) $BN \perp (ABM) \Rightarrow BN \perp BM \Rightarrow \Delta BMN$ vuông tại B, I là trung điểm MN

$$\Rightarrow BI = \frac{MN}{2} = \frac{b}{2}.$$

Gọi C là trung điểm AB ta có: $CI = \sqrt{BI^2 - CB^2} = \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{2}$ không đổi.

Vẽ các tia Ct // Ax và Cr // By $\Rightarrow$ mặt phẳng (tCr) cố định.

Vậy tập hợp các trung điểm I của MN là $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm C, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{2}$ nằm trong góc vuông $\widehat{tCr}$.

11. Giả sử góc nhỏ giữa hai đường chéo của đáy là $\widehat{DOC} = 60^o$.

Ta có: $\widehat{CAD} = 30^o \Rightarrow \Delta ADC$ là nửa tam giác đều

$$\Rightarrow AD = CD.\tan C = CD\sqrt{3}$$

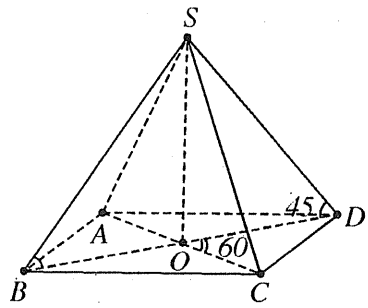
$\Rightarrow S_{ABCD} = AD.CD = CD^2\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow CD = 1,\ AD = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2.$

ΔSAC có $\widehat{SAC} = \widehat{SCA} = 45^o$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $S \Rightarrow SO = OC = 1.$

Vậy: $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.\sqrt{3}.1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$



12. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và B'C'. Ta có:

$MN \perp B'C'.$ (1)

$AB' = AC' \Rightarrow AN \perp B'C'.$ (2)

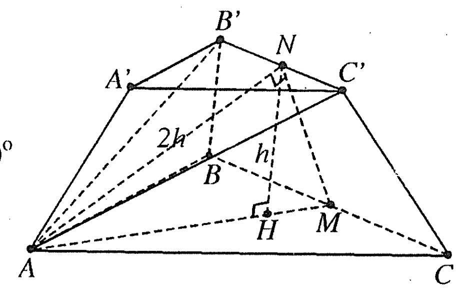
Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \big((AB'C'),(BB'C'C)\big) = 90^o$

$\Rightarrow AN \perp MN$ mà $AN \perp B'C'$

$\Rightarrow AN \perp (BB'C'C)$

$\Rightarrow AN = d(A, (BB'C'C)) = 2h.$



Gọi H là hình chiếu của N trên AM, ta có $NH \perp (ABC) \Rightarrow NH$ là đường cao hình chóp cụt

$\Rightarrow NH = h \Rightarrow AH = \sqrt{AN^2 - NH^2} = h\sqrt{3} \Rightarrow AH.AM = AN^2$

$\Rightarrow AM = \dfrac{AN^2}{AH} = \dfrac{4h^2}{h\sqrt{3}} = \dfrac{4h}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BC = \dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{4h}{\sqrt{3}} = \dfrac{8h}{3}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{16h^2\sqrt{3}}{9}.$

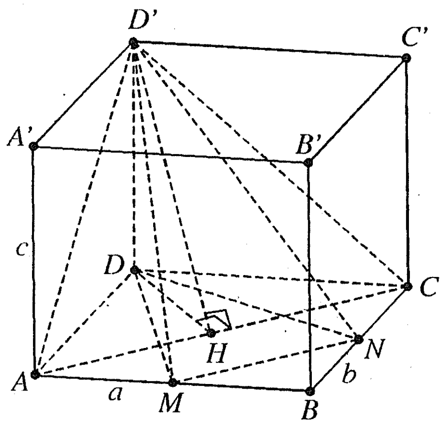
Ta lại có $A'N = \dfrac{AM - MH}{2} = \dfrac{\dfrac{4h}{\sqrt{3}} - \dfrac{h}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{h\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad B'C' = h \Rightarrow S_{A'B'C'} = \dfrac{h^2\sqrt{3}}{4}.$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{16h^2\sqrt{3}}{9} + \dfrac{h^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\dfrac{16h^2\sqrt{3}}{9}.\dfrac{h^2\sqrt{3}}{4}}\right).h$

$$= \frac{h^3\sqrt{3}}{3}\left(\frac{16}{9} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{97h^3\sqrt{3}}{108}.$$

13. a) Ta có $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Vẽ $DH \perp AC$ ta có $DH.AC = DA.CD$

$\Rightarrow DH = \dfrac{DC.DA}{AC} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\Rightarrow D'H = \sqrt{DD'^2 + DH^2}$

$= \sqrt{c^2 + \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2}}$.

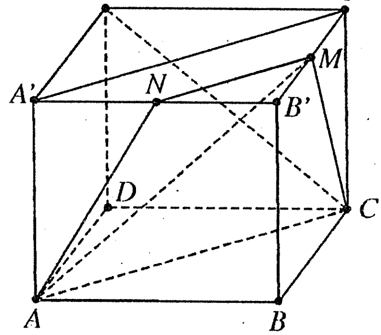
Vậy $S_{ACD'} = \dfrac{1}{2}AC.D'H = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

b) Ta có $S_{DMN} = S_{ABCD} - S_{ADM} - S_{CDN} - S_{BMN}$

$$= ab - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{8} = \frac{3ab}{8}.$$

Vậy $V_{D'DMN} = \dfrac{1}{3}S_{DMN}.D'D = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3ab}{8}.c = \dfrac{abc}{8}$.

14. Gọi N là trung điểm A'B', ta có $N \in (ACM)$.



Gọi V, V_1 lần lượt thể tích của hình lập phương, hình chóp cụt B'MN.BCA. Ta có $V = a^3$.

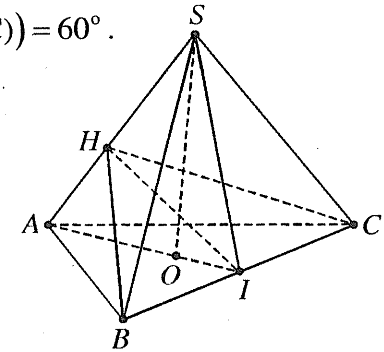
$V_1 = \dfrac{1}{3}\left(S_{ABC} + S_{NB'M} + \sqrt{S_{ABC}S_{NB'M}}\right)BB'$

$= \dfrac{1}{3}a\left(\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{8} + \sqrt{\dfrac{a^2}{2}.\dfrac{a^2}{8}}\right) = \dfrac{7a^3}{24}$.

Gọi $V_2 = V - V_1 = \dfrac{17a^3}{24}$. Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{17}$.

15. a) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp Δ ABC. Vì SABC là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$. Do đó ta có:

$$\left(SA,(ABC)\right) = \left(SB,(ABC)\right) = \left(SC,(ABC)\right) = 60^\circ.$$



Gọi I là trung điểm của BC thì O thuộc AI.

Ta có: $BC \perp AI$ và $BC \perp SI$

$\Rightarrow$ $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SA$. (1)

Vẽ $IH \perp SA$ tại H. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(HBC) \perp SA$ nên $(P) \equiv (HBC)$.

Vì ΔSAO vuông tại O có $\widehat{SAO} = \left(SA,(ABC)\right) = 60^\circ$

và $AO = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $SA = \dfrac{AO}{\cos SAO} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác ΔAHI vuông tại H nên:

$$AH = AI\cos\widehat{IAH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}.$$

Do đó: $\dfrac{V_{SHBC}}{V_{SABC}} = \dfrac{SH}{SA} = \dfrac{5a\sqrt{3}}{12}.\dfrac{3}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{5}{8}$.

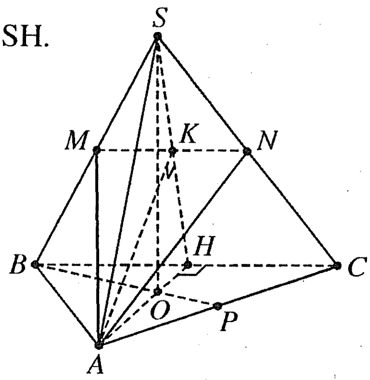
b) Ta có: $SO = SA\sin\widehat{SAO} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a$ và $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\Rightarrow \quad V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Do đó: $V_{SHBC} = \dfrac{5}{8}V_{SABC} = \dfrac{5}{8}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{96}$;

$$V_{AHBC} = \frac{3}{8}V_{SABC} = \frac{3}{8}.\frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}.$$

16. a) Gọi H là trung điểm của BC và $K = MN \cap SH$.



Ta có: $BC \perp AH$ và $BC \perp SH$

$\Rightarrow$ $BC \perp (SAH)$ mà $MN // BC$

$\Rightarrow$ $MN \perp (SAH)$

$\Rightarrow$ $(KA, KH) = ((SMN), (SBC)) = 90^o$.

Ta có: K là trung điểm của SH và $AK \perp SH$

$\Rightarrow \Delta ASH$ cân tại A $\Rightarrow SA = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó: $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra: $AK = \sqrt{AH^2 - KH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}MN.AK = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

b) Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

$\Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{15}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

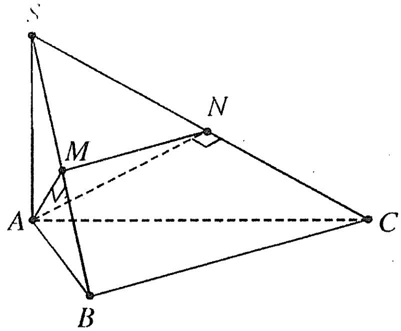
Mặt khác: $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Suy ra: $V_{SAMN} = \dfrac{1}{4}V_{SABC} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{96}$ và $V_{ABCNM} = \dfrac{3}{4}V_{SABC} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{32}$.

17. a) Ta có: $\Delta SAM \backsim \Delta SBA \Rightarrow \dfrac{AM}{BA} = \dfrac{SA}{SB}$

$\Rightarrow \quad AM = \dfrac{SA.BA}{SB} = \dfrac{2a.a}{\sqrt{SA^2 + BA^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tương tự ta có $AN = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.



Mặt khác: $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SM.SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{4}{5}$.

Tương tự ta cũng có $\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{4}{5}$.

Do đó: MN // BC và $MN = \dfrac{4}{5}BC = \dfrac{4a}{5}$.

Tam giác AMN cân tại A. Gọi H là trung điểm của MN.

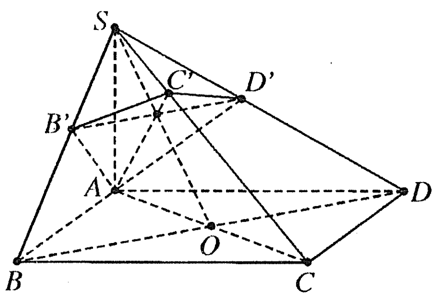
Ta có $AH \perp MN$ nên $AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{5} - \dfrac{4a^2}{25}} = \dfrac{4a}{5}$.

Do đó: $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}.MN.AH = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4a}{5}.\dfrac{4a}{5} = \dfrac{8a^2}{25}$.

b) Ta có : $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \dfrac{V_{AMNCB}}{V_{SABC}} = \dfrac{9}{25}$

$\Rightarrow \quad V_{AMNCB} = \dfrac{9}{25}V_{SABC} = \dfrac{9}{25}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

18. a) Ta có: $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$



$\Rightarrow \quad BC \perp AB'$ mà $SB \perp AB'$

$\Rightarrow \quad AB' \perp (SBC)$

$\Rightarrow \quad SC \perp AB'$.

Tương tự có $SC \perp AD'$.

Do đó $\quad SC \perp (AB'D')$.

$\Delta SAB = \Delta SAD$ mà AB' và AD' lần lượt là đường cao của Δ SAB và Δ SAD nên:

$SB' = SD'$ và $SB = SD \Rightarrow \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} \Rightarrow B'D' \text{ // } BD$.

Mặt khác: $BD \perp SA$ và $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$.

Do đó B'D' ⊥ (SAC) $\Rightarrow$ D'B' ⊥ AC' $\Rightarrow$ AB'C'D' có hai đường chéo vuông góc.

Ta có: $\dfrac{B'D'}{BD} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SB'.SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow B'D' = \dfrac{4}{5}BD = \dfrac{2a\sqrt{2}}{5}$.

AC' ⊥ SC nên ta có SA.AC = SC.AC'

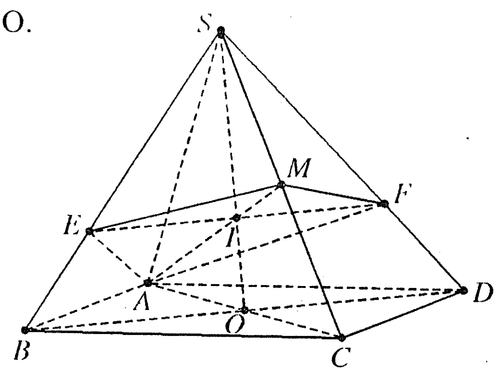
$$\Rightarrow AC' = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{2a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2}AC'.B'D' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2a\sqrt{2}}{5} = \dfrac{2a^2\sqrt{6}}{15}$.

b) Ta có: $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SC'.SC}{SC^2} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow SC' = \dfrac{2}{3}SC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $V_{SAB'C'D'} = \dfrac{1}{3}S_{AB'C'D'}.SC' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a^2\sqrt{6}}{15}.\dfrac{2a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{8a^3}{45}$.

19. a) Gọi O = AC ∩ BD và I = AM ∩ SO.



Ta có: EF qua I.

Vì (P) // BD nên EF // BD.

Vì các tam giác SAC và SBD là các tam giác cân tại S, có các góc $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = 60^0$ nên chúng là các tam giác đều.

Ta có: BD ⊥ AC và BD ⊥ SO

$\Rightarrow$ BD ⊥ (SAC) $\Rightarrow$ BD ⊥ AM mà EF // BD

$\Rightarrow$ EF ⊥ AM $\Rightarrow S_{AEMF} = \dfrac{1}{2}.AM.EF$.

Ta có: $AM = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và $\dfrac{EF}{BD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow EF = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $S_{AEMF} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{2a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

b) Ta có: AM ⊥ SC và SC ⊥ EF (do SC ⊥ BD)

$$\Rightarrow SC \perp (AEMF) \Rightarrow V_{SAEMF} = \frac{1}{3}S_{AEMF}.SM = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}.$$

20. a) Ta có: BM ⊥ SA (do SA ⊥ (ABCD)). (1)

$\Delta MAB \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BAC}$

mà $\widehat{AMB} + \widehat{ABM} = 90^o$

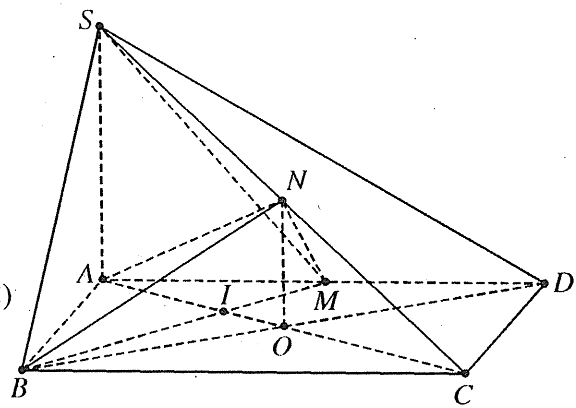
$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ABM} = 90^o$

$\Rightarrow$ BM ⊥ AC. (2)

Từ (1) và (2) ⇒ BM ⊥ (SAC)

mà BM ⊂ (SBM)

⇒ (SAC) ⊥ (SBM).



b) Gọi O = AC ∩ BD. Ta có: NO là đường trung bình của ΔSAC

⇒ NO // SA mà SA ⊥ (ABCD)

⇒ ON ⊥ (ABCD)

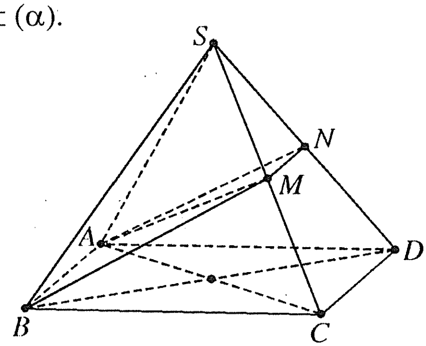
$$\Rightarrow V_{AMIB} = \frac{1}{3}.S_{ABM}.NO = \frac{1}{6}.AB.AM.NO = \frac{1}{6}.a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

21. Gọi N là trung điểm AD. Ta có:

MN // CD // AB ⇒ MN ⊂ (ABM) ⇒ MN ⊂ (α).

Do đó MN = (α) ∩ (SBC).

Suy ra (α) chia hình chóp thành hai khối đa diện: SABMN và ABCDNM.

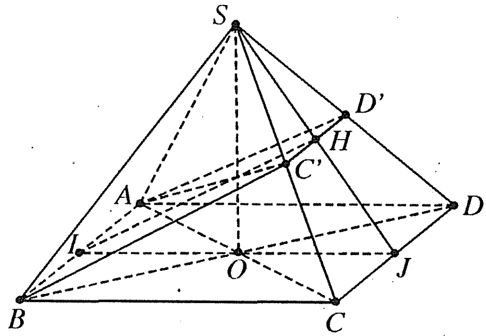


Ta có: $\frac{V_{SABMN}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{SABM} + V_{SAMN}}{V_{SABCD}}$

$$= \frac{V_{SABM}}{2V_{SABC}} + \frac{V_{SAMN}}{2V_{SACD}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB} + \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

22. a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $O \in IJ$.



Ta có: $AB \perp IJ$ và $AB \perp SO$

$\Rightarrow AB \perp (SIJ) \Rightarrow SJ \perp AB$. (1)

Vẽ $AH \perp SJ$ tại J. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (ABH) \perp SJ$

$\Rightarrow (ABH) \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABH) \equiv (\alpha)$.

Vì $C'D' = (\alpha) \cap (SCD)$ nên C'D' qua H.

Ta có: (α) qua AB, (SCD) qua CD mà AB // CD nên C'D' // AB // CD.

Do đó: ABC'D' là hình thang có đường cao là IH (do $IH \perp (SCD)$ nên $IH \perp C'D'$).

Ta có: $SJ = \sqrt{SD^2 - JD^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a = IJ = SI$ nên ΔSIJ đều. Do đó H là trung điểm của SJ và do đó C', D' lần lượt là trung điểm của SC, SD.

Suy ra: $C'D' = \dfrac{1}{2}CD = a$ và $IH = \dfrac{SJ\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $S_{ABC'D'} = \dfrac{(AB + C'D')IH}{2} = \dfrac{(2a + a)a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có: $\dfrac{V_{SABC'D'}}{V_{SABCD}} = \dfrac{V_{SAC'D'} + V_{SABC'}}{V_{SABCD}} = \dfrac{V_{SAC'D'}}{2V_{SACD}} + \dfrac{V_{SABC'}}{2V_{SABC}}$

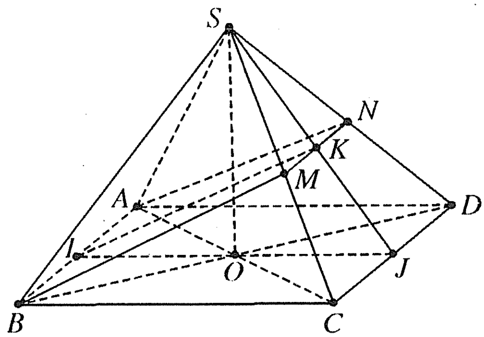
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD} + \frac{SC'}{SC}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{ABCDC'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow V_{ABCDC'D'} = \frac{5}{8}.V_{SABCD} = \frac{5}{8}.\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO$$

$$= \frac{5}{24}.(2a)^2.a\sqrt{3} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{6}.$$

23. a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $O \in IJ$.



Ta có: $CD \perp SO$ và $CD \perp SJ$

nên $CD \perp (SIJ)$

$\Rightarrow \left((SCD),(ABCD)\right) = \widehat{SJI} = 60^\circ$.

Tam giác SIJ cân có $\widehat{SJI} = 60^\circ$ nên ΔSIJ đều.

Gọi K là trung điểm của SJ thì $IK \perp AB$,

mà $IJ \perp AB$ nên $\left((ABK),(ABCD)\right) = \widehat{KIJ} = 30^\circ$

$$\Rightarrow (ABK) \equiv (P).$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD thì $MN \parallel AB$ nên $MN \subset (P)$. Do đó $MN = (P) \cap (SCD)$.

Ta có: $MN = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$; $IK = \frac{IJ\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

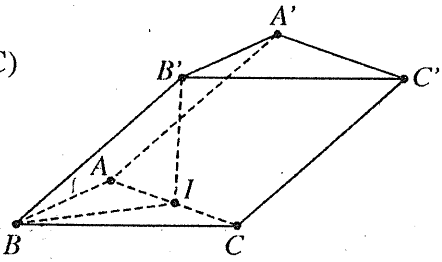
Do đó: $S_{ABMN} = \frac{(AB+MN)IK}{2} = \frac{(a+\frac{a}{2}).\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

b) Ta có: $\frac{V_{SABMN}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{SABM}+V_{SAMN}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{SABM}}{2V_{SABC}} + \frac{V_{SAMN}}{2V_{SACD}}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SC} + \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \quad V_{SABMN} = \frac{3}{8}.V_{SABCD} = \frac{3}{8}.\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{8}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

24. a) Ta có: B'I $\perp$ (ABC)



$\Rightarrow$ BI là hình chiếu của BB' trên (ABC)

$\Rightarrow \left(BB',(ABC)\right) = \widehat{B'BI}$.

Ta có: $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và BB' = a

nên $\cos\widehat{B'BI} = \dfrac{BI}{BB'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{B'BI} = 30^\circ$.

Do đó $\left(BB',(ABC)\right) = 30^\circ$.

b) Ta có: ACC'A' là hình thoi (AC = CC' = C'A' = A'A).

AC $\perp$ BI và AC $\perp$ B'I nên AC $\perp$ (B'IB)

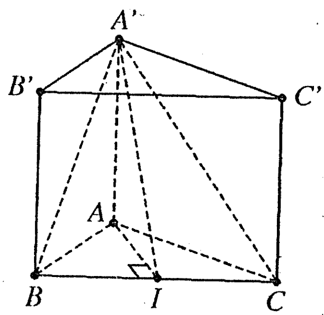
$\Rightarrow$ AC $\perp$ BB' $\Rightarrow$ AC $\perp$ CC'.

Vậy (ACC'A') là một hình vuông có cạnh a.

c) Ta có: $BI = \dfrac{1}{2}BB' = \dfrac{a}{2}$ và $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

nên $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.BI = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

25. Gọi I là trung điểm của BC. Ta có:



BC $\perp$ AI và BC $\perp$ AA' nên BC $\perp$ (AA'I)

$\Rightarrow \widehat{A'IA} = \left((A'BC),(ABC)\right) = \beta$.

Ta có:

ΔABI vuông tại I nên AI = ABcosα = acosα.

$\Delta AA'I$ vuông tại A nên AA' = AI.tanβ = acosα.tanβ.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 2\alpha = a^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

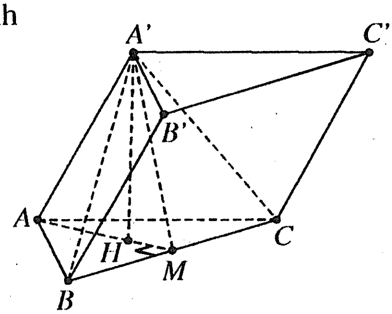
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = a^2\sin\alpha.\cos\alpha.a\cos\alpha\tan\beta = a^3\sin\alpha.\cos^2\alpha\ \tan\beta$.

26. a) Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC). Vì A' cách đều A, B và C nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có: $BC \perp AH$ và $BC \perp A'H$

$\Rightarrow BC \perp (A'AH) \Rightarrow BC \perp AA'$

$\Rightarrow BC \perp BB'$ mà BCC'B' là hình bình hành

$\Rightarrow$ BCC'B' là hình chữ nhật.



b) Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ AA' có hình chiếu trên (ABC) là AH

$\Rightarrow \left(AA',(ABC)\right) = \widehat{A'AH} = 60^o$;

$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow A'H = AH\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

c) Ta có: $A'M = \sqrt{A'H^2 + HM^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{36}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Ta có: $S_{ABB'A'} = S_{ACC'A'} = 2S_{A'AB} = 2S_{A'BC}$

$$= 2.\frac{1}{2}.BC.A'M = a.\frac{a\sqrt{39}}{6} = \frac{a^2\sqrt{39}}{6}.$$

$$A'A = \sqrt{A'H^2 + HA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{BCC'B'} = BC.BB' = a.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}.$$

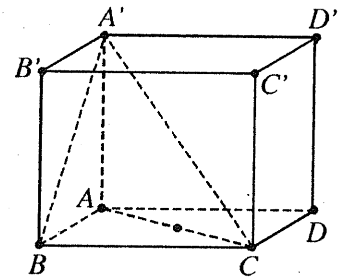
Vậy $S_{xq} = S_{ABB'A'} + S_{ACC'A'} + S_{BCC'B'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{13}+4\right)}{6}$.

27. Ta có: $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow \left(A'C,(ABCD)\right) = \widehat{A'CA} = \alpha$.

$CB \perp (ABB'A') \Rightarrow \left(A'C,(ABB'A')\right) = \widehat{CA'B} = \beta$.

$AC = CA'\cos\alpha = d\cos\alpha$.

$AA' = CA'\sin\alpha = d\sin\alpha$.



$BC = A'C\sin\beta = d\sin\beta$.

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\beta}$$

$$= d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

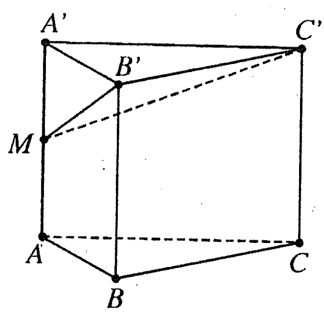
$$= d\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}}$$

$$= d\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.BC.AA'$

$$= d^3\sin\alpha\,\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

28. Ta có:



$$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}.S_{A'B'C'}.MA' = \frac{1}{3}.S_{A'B'C'}.\frac{1}{2}.AA'$$

$$= \frac{1}{6}.S_{A'B'C'}.A'A = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}.$$

Vậy tỉ số thể tích của hai phần là $\frac{1}{5}$.

Chương II.

MẶT CẦU. MẶT TRỤ. MẶT NÓN

§1. MẶT CẦU. KHỐI CẦU

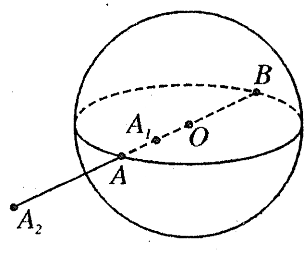
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. MẶT CẦU. KHỐI CẦU

1. Định nghĩa 1: Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi được gọi là *mặt cầu* có tâm là O và bán kính bằng R, kí hiệu là S(O; R).

Như vậy: Mặt cầu $S(O;\ R) = \{M | OM = R\}$.

2. Vị trí tương đối giữa điểm và mặt cầu: Cho điểm A và mặt cầu S(O; R). Ta có:

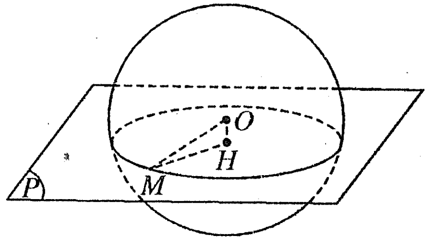


- Điểm A *thuộc* mặt cầu $\Leftrightarrow OA = R$;
- Điểm A *nằm trong* mặt cầu $\Leftrightarrow OA < R$;
- Điểm A *nằm ngoài* mặt cầu $\Leftrightarrow OA > R$.

3. Định nghĩa 2: Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu S(O; R) cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là *khối cầu* S(O; R).

Như vậy: Khối cầu $S(O;\ R) = \{M | OM \le R\}$.

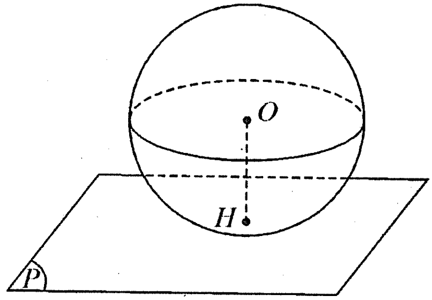
II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG



1. Cho mặt cầu S(O; R) và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O tới (P) và H là hình chiếu của O trên (P). Ta có:

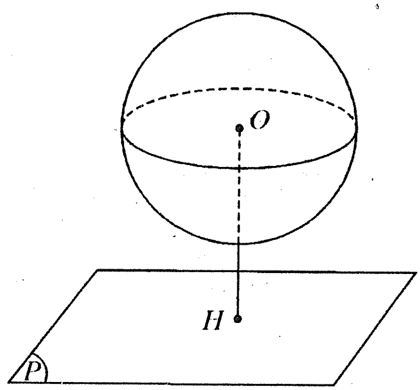
* Nếu d < R thì (P) cắt mặt cầu S(O; R) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P) có tâm H và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Trường hợp đặc biệt:



Khi d = 0 thì (P) đi qua tâm O của mặt cầu. Mặt phẳng đó được gọi là *mặt phẳng kính*; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có bán kính R, đường tròn đó gọi là *đường tròn lớn* của mặt cầu.

* Nếu d = R thì (P) và mặt cầu có một điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói (P) *tiếp xúc* với mặt cầu tại điểm H, hoặc ta nói (P) là tiếp diện của mặt cầu tại điểm H. Điểm H gọi là *tiếp điểm* của (P) và mặt cầu.

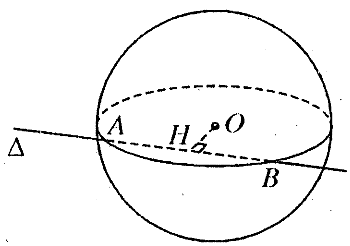


* Nếu d > R thì (P) và mặt cầu S(O; R) không có điểm chung.

2. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện: Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện H gọi là *mặt cầu ngoại tiếp* hình đa diện H và hình đa diện H gọi là *nội tiếp* mặt cầu đó.

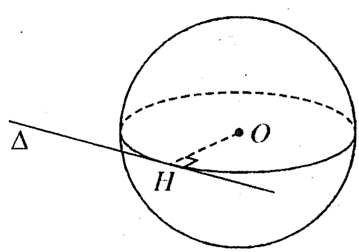
III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên Δ và d = OH là khoảng cách từ O tới Δ.

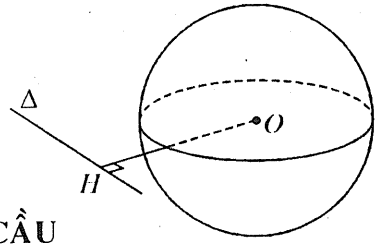


* Nếu d < R thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

* Nếu d = R thì Δ và mặt cầu có một điểm chung duy nhất H. Khi đó ta nói đường thẳng Δ *tiếp xúc* với mặt cầu tại điểm H, hoặc ta nói Δ là *tiếp tuyến* của mặt cầu tại H. Điểm H gọi là *tiếp điểm* của Δ và mặt cầu.



* Nếu d > R thì Δ và mặt cầu không có điểm chung.



IV. DIỆN TÍCH MẶT CẦU. THỂ TÍCH KHỐI CẦU

1. Mặt cầu bán kính R có diện tích là: $S = 4\pi R^2$.

2. Khối cầu bán kính R có thể tích là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xác định mặt cầu

1. PHƯƠNG PHÁP

• *Muốn chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một mặt cầu ta chứng minh các điểm đó cùng cách đều một điểm O cố định một khoảng R > 0 không đổi.*

• *Muốn chứng minh một đường thẳng D tiếp xúc với một mặt cầu S(O; R), ta chứng minh d(O, D) = R.*

• *Muốn chứng minh một mặt phẳng (P) tiếp xúc với một mặt cầu S(O; R), ta chứng minh d(O, (P)) = R.*

• *Tập hợp các điểm M trong không gian nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính AB.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right| = 4$ là một mặt cầu.

Giải

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right| = 4 \quad \Leftrightarrow \left|4\overrightarrow{MG}\right| = 4 \text{ (G là trọng tâm tứ diện ABCD)}$$

$$\Leftrightarrow MG = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm M trong không gian là mặt cầu tâm G bán kính R = 1.

Ví dụ 2: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \leq 2a^2 \ (*)$$

Giải

Áp dụng định lí trung tuyến trong tam giác ta có:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{a^2}{2} \text{ (I là trung điểm AB);}$$

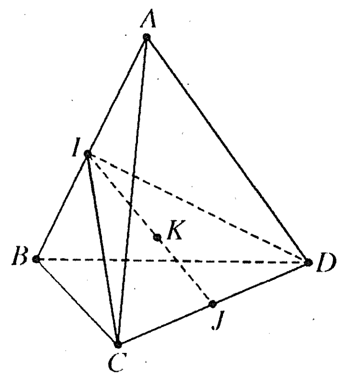
$$MC^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{CD^2}{2} = 2MJ^2 + \frac{a^2}{2} \text{ (J là trung điểm CD)}$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(MI^2 + MJ^2) + a^2$$

$$= 2\left(2MK^2 + \frac{IJ^2}{2}\right) + a^2 \text{ (K là trung điểm IJ).}$$

Ta có: $IJ^2 = \dfrac{IC^2 + ID^2}{2} - \dfrac{CD^2}{4} = IC^2 - \dfrac{a^2}{4}$

$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$



$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MK^2 + \frac{3a^2}{2}.$$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow 4MK^2 + \frac{3a^2}{2} \leq 2a^2 \Leftrightarrow MK^2 \leq \frac{a^2}{8} \Leftrightarrow MK \leq \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Vậy tập hợp các điểm M trong không gian là khối cầu tâm K bán kính $R = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

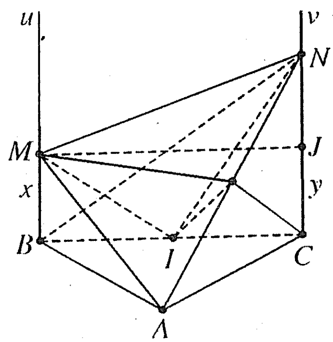
Ví dụ 3: Trong mặt phẳng (P) cho ΔABC vuông cân với AB = AC = a. Bu, Cv là những nửa đường thẳng vuông góc với (P) tại B và C và cùng phía với (P). Trên Bu, Cv lần lượt lấy M, N di động sao cho ΔAMN vuông tại M. Đặt BM = x, CN = y.

a) Tính y khi x = a, tính diện tích ΔAMN và suy ra $\cos\alpha$ với α là góc tạo bởi (AMN) và (P).

b) Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh rằng 4 điểm C, I, M, N thuộc một đường tròn và năm điểm A, C, I, M, N thuộc một mặt cầu. Xác định tâm mặt cầu này.

Giải

a) *Tính y khi x = a.*



Tam giác ABC vuông cân tại A, có

$$AB = AC = a \text{ nên } BC = a\sqrt{2}.$$

Tam giác ABM vuông tại B có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 2a^2.$$

Tam giác ACN vuông tại C có:

$$AN^2 = AC^2 + CN^2 = a^2 + y^2.$$

Tam giác MNJ vuông tại J có:

$$MN^2 = MJ^2 + JN^2 = 2a^2 + (y - a)^2.$$

Tam giác AMN vuông tại M nên:

$$AN^2 = AM^2 + MN^2 \Leftrightarrow a^2 + y^2 = 2a^2 + 2a^2 + (y - a)^2$$

$$\Leftrightarrow 2ay = 4a^2 \Leftrightarrow y = 2a.$$

- *Tính diện tích* ΔAMN.

Tam giác AMN vuông tại M nên:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.MN = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\sqrt{2a^2 + (y-a)^2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2} \quad (y = 2a).$$

- *Tính* $\cos\alpha$.

Ta có ΔABC là hình chiếu của ΔAMN trên mặt phẳng (P)

$$\Rightarrow S_{ABC} = S_{AMN}.\cos\alpha \text{ (với } \alpha \text{ là góc tạo bởi (AMN) và (P))}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}a^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

b) *Chứng minh 4 điểm thuộc một đường tròn.*

Ta có: $\left.\begin{matrix} AI \perp BC \\ AI \perp BM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AI \perp (BCNM) \Rightarrow AI \perp MN$ mà $MA \perp MN$

$\Rightarrow \quad MN \perp (AMI) \Rightarrow MN \perp MI. \quad (1)$

Ta lại có: $CN \perp CI. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CIMN nội tiếp.

- *Chứng minh 5 điểm thuộc một mặt cầu. Xác định tâm mặt cầu này.*

Ta có: $AM \perp MN$, $AI \perp IN$ $(AI \perp (BCMN))$, $AC \perp CN$

$\Rightarrow$ 5 điểm A, C, I, M, N cùng thuộc mặt cầu đường kính AN.

Tâm K của mặt cầu là trung điểm của AN.

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD, trong đó đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD ở B', C', D'.

a) Chứng minh rằng tứ giác AB'C'D' có hai góc đối diện vuông.

b) Chứng minh rằng nếu S di chuyển trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A thì (AB'C'D') luôn đi qua một đường thẳng cố định và A, B, B', C, C', D, D' cùng thuộc một mặt cầu cố định.

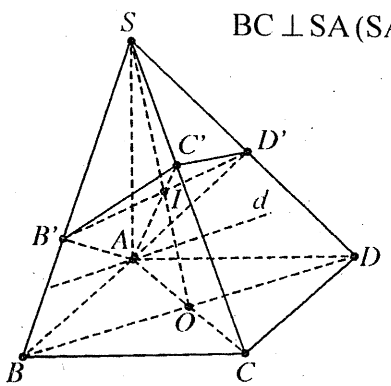
Giải

a) *Chứng minh rằng tứ giác AB'C'D' có hai góc đối diện vuông.*

Ta có:

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA\,(SA \perp (ABCD)) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB' \\ SC \perp (AB'C'D') \Rightarrow SC \perp AB' \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C'. \ (1)$$



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}CD \perp AD \\ CD \perp SA\,(SA \perp (ABCD))\end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD' \\ \qquad\qquad\qquad SC \perp (AB'C'D') \Rightarrow SC \perp AD'\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AD' \perp (SCD) \Rightarrow AD' \perp C'D'. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

b) * *Chứng minh rằng nếu S di chuyển trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A thì (AB'C'D') luôn đi qua một đường thẳng cố định.*

Ta có: $\left.\begin{array}{l}BD \perp AC \\ BD \perp SA\end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Trong (ABCD), từ A kẻ đường thẳng d song song với BD. Khi đó $d \perp SC$. Vậy đường thẳng d cố định chứa trong mặt phẳng (AB'C'D').

* *Chứng minh A, B, B', C, C', D, D' cùng thuộc một mặt cầu cố định.*

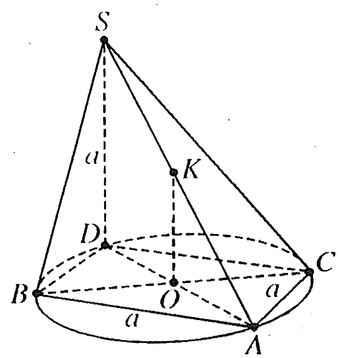
Ta có: $\left.\begin{array}{l}AB \perp BC \\ AD \perp DC \\ AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C \\ AD' \perp (SCD) \Rightarrow AD' \perp D'C \\ (AB'C'D') \perp SC \Rightarrow AC' \perp C'C\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ các điểm A, B, B', C, C', D, D' cùng thuộc một mặt cầu đường kính AC cố định.

Ví dụ 5: Cho ΔABC đều, cạnh a, nội tiếp trong đường tròn tâm O chứa trong mặt phẳng (P). Vẽ đường kính AD của đường tròn (O), dựng $SD \perp (P)$ và SD = a.

a) Chứng minh rằng ΔSAC, ΔSAB vuông.

b) Xác định tâm mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, B, C, D.



Giải

a) Ta có: $\left.\begin{array}{l}AB \perp BD \\ AB \perp SD\end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp SB$.

Suy ra tam giác SAB vuông tại B.

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp CD \\ AC \perp SD \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (SCD) \Rightarrow AC \perp SC.$$

Suy ra tam giác SAC vuông tại C.

b) Gọi K là trung điểm SA, ta có:

$$OK \parallel SD \Rightarrow OK \perp (P) \Rightarrow OK \text{ là trục của đường tròn } (O)$$
$$\Rightarrow KA = KB = KC = KD.$$

Tam giác SDA vuông tại D nên KS = KD = KA.

Suy ra K là tâm của mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, B, C, D.

Vấn đề 2. Mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp

1. PHƯƠNG PHÁP

1. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

– Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp. Khi đó ta nói hình chóp nội tiếp mặt cầu.

– Điều kiện hình chóp nội tiếp mặt cầu: "Hình chóp nội tiếp được trong một mặt cầu khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác nội tiếp một đường tròn".

– Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy của hình chóp và mặt trung trực của một cạnh bên.

2. Mặt cầu nội tiếp hình chóp

– Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp. Khi đó ta nói hình chóp ngoại tiếp mặt cầu.

– Điều kiện mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu:

- *"Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu S(O; R) tại điểm H khi và chỉ khi (P) vuông góc với bán kính OH tại điểm H".*
- *"Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu* $S(O;R) \Leftrightarrow d(O,(P)) = R$*".*

– Nếu một khối đa diện có hình cầu nội tiếp thì bán kính hình cầu nội tiếp là: $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$ *với V: thể tích khối đa diện;* S_{tp}*: diện tích toàn phần hình đa diện.*

– Tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp cách đều tất cả các mặt của hình chóp.

2. CÁC VÍ DỤ

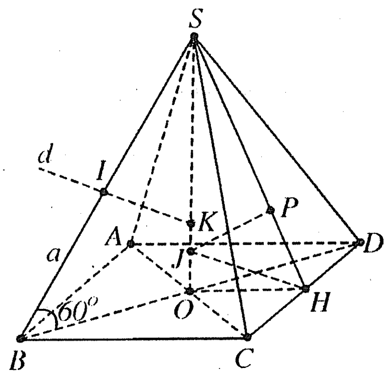
Ví dụ 1:

a) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng a và hợp với mặt đáy một góc 60^o. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp ấy.

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

Giải

a) * *Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Ta có SO là trục của hình vuông ABCD.

Gọi I là trung điểm của SB.

Trong mặt phẳng (SBD), qua I kẻ đường trung trực d của SB, d cắt SO tại K.

Khi đó ta có:

$K \in SO \Rightarrow KA = KB = KC = KD;$

$K \in d \quad \Rightarrow KS = KB.$

Suy ra K là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều S.ABCD.

Bán kính R = KS.

Tứ giác KIBO có $\widehat{KOB} = \widehat{KIB} = 90^0$ nên tứ giác KIBO là tứ giác nội tiếp. Khi đó:

$$SK.SO = SI.SB \Rightarrow SK = \frac{SI.SB}{SO} = \frac{SB^2}{2SO}\ (SI = \frac{1}{2}SB).$$

Tam giác SBD cân tại S, có $\widehat{SBD} = (SB,(ABCD)) = 60^0$ nên ΔSBD đều

$$\Rightarrow \quad SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\quad R = SK = \dfrac{a^2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}.$

* *Tìm tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.*

Gọi H là trung điểm CD. Trong tam giác SOH kẻ đường phân giác HJ ($J \in SO$).

Kẻ $JP \perp SH$ ($P \in SH$) $\Rightarrow JP \perp (SCD) \Rightarrow JP = d(J, (SCD))$.

Khi đó JO = JP (tính chất đường phân giác)

$\Rightarrow d(J,(ABCD)) = d(J, (SCD))$.

Tương tự suy ra J cách đều các mặt của hình chóp, nên J là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính r = JO.

Tam giác SBD đều nên $BD = SB = a \Rightarrow CD = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Tam giác SOH vuông tại O:

$$SH^2 = SO^2 + OH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{8}$$

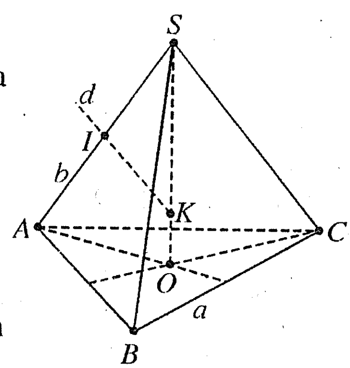
$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

HJ là đường phân giác tam giác SOH

$$\Rightarrow \frac{JO}{JS} = \frac{HO}{HS} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{r}{SO - r} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \sqrt{7}r = \frac{a\sqrt{3}}{2} - r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7} + 1}.$$

b) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC, suy ra SO là trục của tam giác ABC.



Gọi I là trung điểm cạnh SA. Trong (SAO), qua I kẻ đường trung trực d của SA, d cắt SO tại K.

Khi đó ta có:

$K \in SO \Rightarrow KA = KB = KC;$

$K \in d \Rightarrow KS = KA.$

Suy ra K là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều S.ABC. Bán kính R = SK.

Tứ giác KIAO có $\widehat{KOA} = \widehat{KIA} = 90^0$ nên tứ giác KIAO là tứ giác nội tiếp. Khi đó:

$$SK.SO = SI.SA \Rightarrow SK = \frac{SI.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO}\ (SI = \frac{1}{2}SA).$$

Tam giác đều ABC có cạnh bằng a nên: $AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAO vuông tại O:

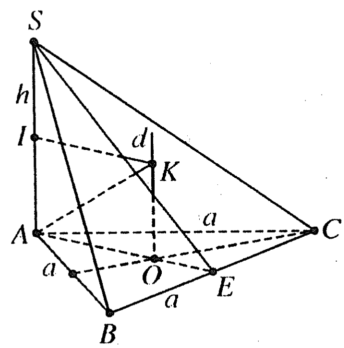
$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra : $R = SK = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

Ví dụ 2: Cho tứ diện SABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SA = h, tam giác ABC đều và có cạnh bằng a. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Giải



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

Qua O, dựng đường thẳng d // SA. Khi đó d ⊥ (ABC) và d là trục của tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SA, d), kẻ đường trung trực của SA, cắt d tại K.

IK là trung trực của SA nên IS = IA.

K ∈ d nên KA = KB = KC.

Vậy K là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

Bán kính R = KA.

Tam giác OAK vuông tại O, có:

$$AK^2 = AO^2 + OK^2 = \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4} \Rightarrow R = AK = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4}}.$$

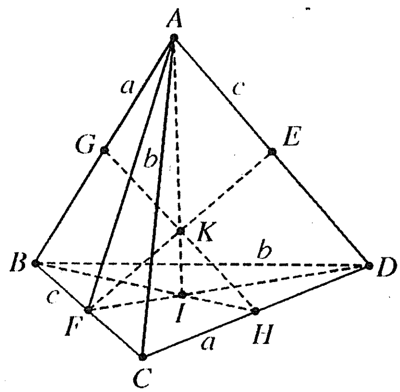
Ví dụ 3: Cho tứ diện ABCD với AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a.

a) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với bốn mặt của hình tứ diện.

Giải

a) Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, AB, CD. Gọi I là trọng tâm tam giác BCD, gọi K là trọng tâm tứ diện ABCD. Theo định nghĩa trọng tâm tứ diện, ta có K là điểm đồng quy của EF, GH và AI.



Ta có: $\Delta ABC = \Delta CDA$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ HA = HB $\Rightarrow$ ΔAHB cân tại H.

Vì G là trung điểm AB $\Rightarrow$ HG $\perp$ AB

$\Rightarrow$ HG là đường trung trực của AB

$\Rightarrow$ KA = KB. (1)

Chứng minh tương tự ta có:

HG là đường trung trực của CD $\Rightarrow$ KC = KD. (2)

EF là đường trung trực của AD $\Rightarrow$ KA = KD. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra K là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Bán kính R = AK. Áp dụng định lí trung tuyến cho tam giác ABC, ta có:

$$AF^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Tam giác AEF vuông tại E, nên ta có:

$$EF^2 = AF^2 - AE^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}.$$

K là trung điểm EF nên $KE = \frac{EF}{2}$.

Tam giác AEK vuông tại E, ta có:

$$AK^2 = AE^2 + EK^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}EF^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right) = \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{8} + \frac{c^2}{8}.$$

Suy ra $R = KA = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

b) Theo tính chất trọng tâm của tứ diện, ta có:

$$KI = \frac{1}{4}AI \Rightarrow d(K,(BCD)) = \frac{1}{4}d(A,(BCD)).$$

Tương tự: $d(K,(ACD)) = \dfrac{1}{4}d(A,(ACD))$;

$$d(K,(ABD)) = \frac{1}{4}d(C,(ABD));$$

$$d(K,(ABC)) = \frac{1}{4}d(D,(ABC)).$$

Vì $d(A,(BCD)) = d(B,(ACD)) = d(C,(ABD)) = d(D,(ABC))$ $\left(= \dfrac{3V_{ABCD}}{S}\right)$ (do tứ diện có 4 mặt là 4 tam giác bằng nhau theo trường hợp c.c.c, có diện tích bằng S).

Suy ra: $d(K,(BCD)) = d(K,(ACD)) = d(K,(ABD)) = d(K,(ABC))$.

Suy ra K là tâm của mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

Vậy có một mặt cầu tiếp xúc với bốn mặt của hình tứ diện, mặt cầu đó có tâm là K.

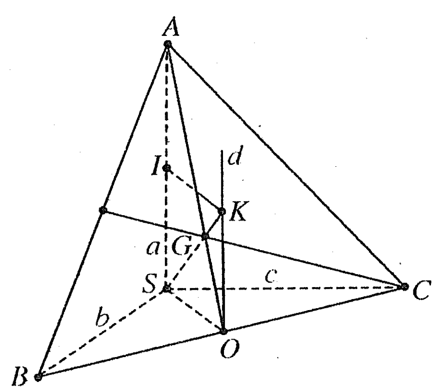
Ví dụ 4: Xác định tâm K và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ACB biết rằng SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Chứng minh rằng các điểm S, G, K thẳng hàng, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC.

Giải

Gọi O là trung điểm của BC, tam giác SBC vuông tại S nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Từ O dựng đường thẳng d song song với SA, khi đó d là trục của tam giác SBC.

Gọi I là trung điểm SA, trong (SA, d), qua I kẻ đường thẳng song song với SO, cắt d tại K. Do SO ⊥ SA nên IK ⊥ SA.



Vậy IK là đường trung trực của SA.

Ta có: K thuộc trục d nên K cách đều S, B, C.

KI là đường trung trực của SA nên K cách đều S và A. Vậy K là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC, bán kính R = SK.

Tam giác SOK vuông tại O nên ta có:

$$SK^2 = SO^2 + OK^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + SI^2 = \frac{b^2+c^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow R = SK = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

** Chứng minh rằng các điểm S, G, K thẳng hàng, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC.*

Ta có: $\left.\begin{matrix} OK // SA \\ \dfrac{OK}{SA} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{GO}{GA} = \dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} G \in SK \\ \dfrac{GK}{GS} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy các điểm S, G, K thẳng hàng.

Ví dụ 5: Trong (P) cho hình thang cân ABCD, AB // CD, ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính r. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại O, lấy điểm S sao cho OS = 2r. Giả sử CD = 4AB.

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp S.ABCD.

b) Chứng tỏ rằng O cách đều 4 mặt bên của hình chóp S.ABCD từ đó tìm tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Giải

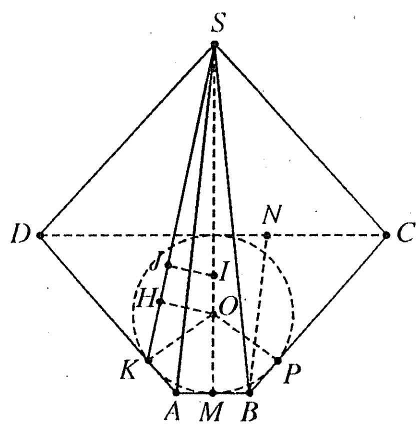
a) *Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp S.ABCD.*

Đặt AB = 2a $\Rightarrow \begin{cases} CD = 8a \\ AD = BC = 5a. \end{cases}$

Tam giác BCN vuông tại N:

$BN^2 = BC^2 - CN^2 = 25a^2 - 9a^2 = 16a^2$

$\Leftrightarrow 4r^2 = 16a^2 \Leftrightarrow r = 2a \Leftrightarrow a = \dfrac{r}{2}.$



Trong (ABCD), kẻ $OK \perp AD$ tại K.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AD \perp OK \\ AD \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SOK) \Rightarrow AD \perp SK.$

Suy ra SK là chiều cao của mặt bên SAD.

Tam giác SOK vuông tại O:

$$SK^2 = SO^2 + OK^2 = 4r^2 + r^2 = 5r^2 \Rightarrow SK = r\sqrt{5}.$$

Tương tự các mặt bên còn lại cũng có chiều cao bằng $r\sqrt{5}$ (SK = SM = ...).

Suy ra diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = \frac{1}{2}SK(AB + BC + CD + AD) + \frac{1}{2}BN(AB + CD)$$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2}r\sqrt{5}(2a + 5a + 8a + 5a) + \frac{1}{2}4a(2a + 8a)$$

$$= \frac{1}{2}r\sqrt{5}.20a + 20a^2 = 5r^2\sqrt{5} + 5r^2 = 5r^2(\sqrt{5} + 1).$$

Thể tích: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.5r^2.2r = \frac{10}{3}r^3$.

b) *Chứng tỏ rằng O cách đều 4 mặt bên của hình chóp S.ABCD từ đó tìm tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.*

Trong tam giác SOK, kẻ đường cao $OH \perp SK$ tại H. Do $AD \perp (SOK)$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AD \perp OH$. Suy ra $OH \perp (SAD) \Rightarrow$ OH là khoảng cách từ O đến (SAD).

Do các tam giác SOK , SOM, ... bằng nhau nên các đường cao tương ứng từ O bằng nhau, tức là khoảng cách từ O đến các mặt bên là bằng nhau và bằng OH.

Vậy O cách đều các mặt bên của hình chóp.

Do đó tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp là một điểm I thuộc đoạn SO.

Bán kính : $r' = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{10r^3}{5r^2(1+\sqrt{5})} = \frac{2r}{1+\sqrt{5}}$.

Vấn đề 3. Diện tích mặt cầu. Thể tích khối cầu

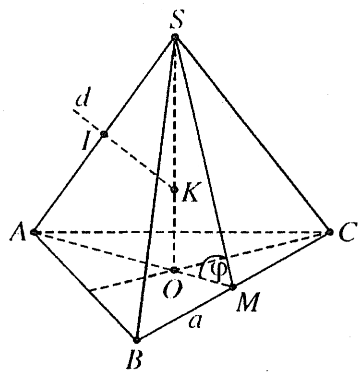
1. PHƯƠNG PHÁP

> * *Mặt cầu bán kính R có diện tích là:* $S = 4\pi R^2$.
>
> * *Khối cầu bán kính R có thể tích là:* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và mặt bên hợp với đáy một góc φ.

Giải



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC suy ra SO là trục của tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SAO), gọi I là trung điểm cạnh SA.

Trong (SAO), qua I kẻ đường trung trực d của SA, d cắt SO tại K.

Khi đó ta có: $K \in SO \Rightarrow KA = KB = KC$.

$K \in d \Rightarrow KS = KA$.

Suy ra K là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều S.ABC. Bán kính R = SK.

Tứ giác KIAO có $\widehat{KOA} = \widehat{KIA} = 90^o$ nên tứ giác KIAO là tứ giác nội tiếp. Khi đó:

$$SK.SO = SI.SA \Rightarrow SK = \frac{SI.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} \; \left(SI = \frac{1}{2}SA\right).$$

Tam giác SOM vuông tại O, có:

$$\tan\varphi = \frac{SO}{OM} \Rightarrow SO = OM.\tan\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\tan\varphi.$$

Tam giác SAO vuông tại O có:

$$SA^2 = SO^2 + AO^2 = \frac{3a^2}{36}.\tan^2\varphi + \frac{a^3}{3} = \frac{a^2}{12}\left(\tan^2\varphi + 4\right)$$

$$\Rightarrow R = SK = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{\frac{a^2}{12}\left(\tan^2\varphi + 4\right)}{2.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\tan\varphi} = \frac{a\sqrt{3}(\tan^2\varphi + 4)}{12\tan\varphi}.$$

$$S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}(\tan^2\varphi + 4)}{12\tan\varphi}\right)^2 = \frac{4\pi a^2(\tan^2\varphi + 4)^2}{12\tan^2\varphi}.$$

$$V_{\text{khối cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}(\tan^2\varphi + 4)}{12\tan\varphi}\right)^3.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông cân với AB = AC = a, BB' và CC' là 2 đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), ở cùng một phía đối với mặt phẳng đó, BB' = CC' = a.

a) Chứng minh rằng $\Delta AB'C'$ đều.

b) Tính thể tích khối chóp A.BCC'B'.

c) Chứng minh rằng 5 điểm A, B, C, C', B' thuộc một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ấy.

Giải

a) Tam giác ABC vuông cân tại A nên ta có:

$$BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow B'C' = a\sqrt{2}.$$

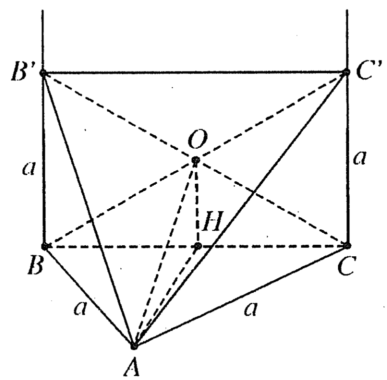
Tam giác ABB' vuông cân tại B:

$$AB' = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Tam giác ACC' vuông cân tại C:

$$AC' = AC\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Suy ra tam giác AB'C' đều.



b) Gọi H là trung điểm BC, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (BCC'B').$$

Suy ra: $V_{ABCC'B'} = \frac{1}{3}S_{BCC'B'}.AH = \frac{1}{3}BC.BB'.\frac{BC}{2} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}.a.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{3}$.

c) Gọi O là tâm của hình chữ nhật BCC'B', ta có:

$$OB = OC = OC' = OB' = \frac{BC'}{2} = \frac{\sqrt{a^2+2a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

Tam giác AOH vuông tại H:

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: OB = OC = OC' = OB' = OA.

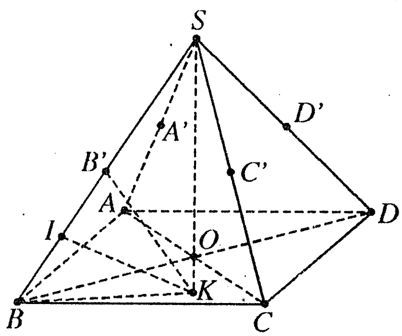
Vậy 5 điểm A, B, C, C', B' cùng thuộc một mặt cầu tâm O bán kính $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh cùng bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng thuộc một mặt cầu và tính thể tích khối cầu đó.

Giải



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Khi đó SO là trục của hình vuông ABCD và SO cũng là trục của hình vuông A'B'C'D'.

Gọi I là trung điểm của BB'. Trong mặt phẳng (SBO), kẻ đường trung trực của đoạn BB', cắt SO tại K.

Ta có: $K \in SO \Rightarrow \begin{cases} KA = KB = KC = KD \\ KA' = KB' = KC' = KD'. \end{cases}$

KI là đường trung trực của BB' nên KB = KB'.

Suy ra K cách đều 8 điểm A, B, C, D, A', B', C', D'.

Vậy 8 điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng thuộc một mặt cầu tâm K bán kính R = KB.

Tứ giác BIOK nội tiếp:

$$SK.SO = SI.SB \Rightarrow SK = \frac{SI.SB}{SO} = \frac{\frac{3a}{4}.a}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{3}{4}\frac{a^2}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Tam giác SIK vuông tại I: $IK^2 = SK^2 - SI^2 = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{9a^2}{16}$.

Tam giác BIK vuông tại I: $BK^2 = BI^2 + IK^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{9a^2}{16} = \frac{10a^2}{16}$.

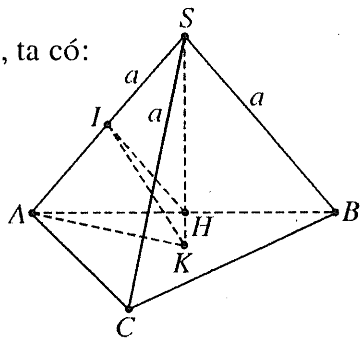
Suy ra: $R = BK = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{10a^2}{16}.\frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{5\pi\sqrt{10}.a^3}{24}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABC có SA = SB = SC = a và $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông và tìm hình chiếu vuông góc H của S lên (ABC).

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

Giải



a) Áp dụng định lí hàm số cos trong tam giác SAB, ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 &= SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\widehat{ASB} \\ &= a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos 120^\circ \\ &= 3a^2. \qquad (1) \end{aligned}$$

Tam giác SAC vuông cân tại S nên :

$$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 = 2a^2. \qquad (2)$$

Tam giác SBC cân tại S, có $\widehat{BSC} = 60^\circ$ nên tam giác SBC đều. Do đó:

$$BC = SB = SC = a \Rightarrow BC^2 = a^2. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Do đó tam giác ABC vuông tại C.

* *Tìm hình chiếu vuông góc H của S lên (ABC).*

Ta có: $\left.\begin{array}{l} SA = SB = SC \\ \text{H là hình chiếu của S trên (ABC)} \end{array}\right\} \Rightarrow HA = HB = HC.$

Mà tam giác ABC vuông tại C nên H là trung điểm của AB.

b) *Tính bán kính R hình cầu ngoại tiếp và bán kính r hình cầu nội tiếp hình chóp SABC.*

Ta có: SH là trục của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm SA, trong tam giác SAB kẻ đường trung trực d của SA, d cắt đường thẳng SH tại K. Ta có:

* K thuộc trục SH nên K cách đều A, B, C.

* K thuộc đường trung trực của SA nên K cách đều S và A.

Vậy K là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC, bán kính R = SK.

Tứ giác AIHK nội tiếp (do $\widehat{AIK} = \widehat{AHK} = 90^\circ$) nên:

$$SK.SH = SI.SA$$

$$\Rightarrow SK = \frac{SI.SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{a^2}{2.\frac{a}{2}} = a = R \text{ (}\Delta SHB \text{ nửa đều nên } SH = \frac{a}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \text{ và } V_{\text{khối cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Ví dụ 5:

1) Tìm công thức tính bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng với mặt cầu bán kính R, biết rằng mặt phẳng cách mặt cầu một khoảng bằng h.

2) Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là những tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

a) Tính chu vi đường tròn giao tuyến của (ABC) với mặt cầu đường kính CD.

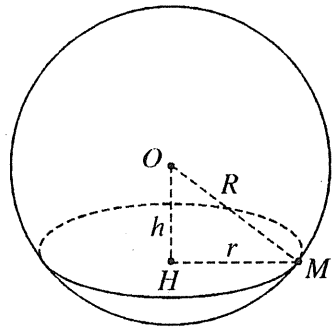
b) Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Giải

1) *Tìm công thức tính bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt cầu S(O; R), biết rằng mặt phẳng (P) cách mặt cầu một khoảng bằng h.*

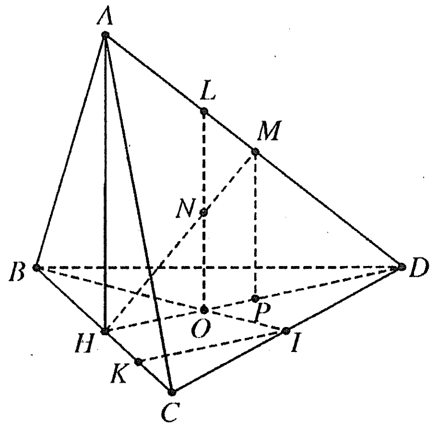
Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) và M là một điểm thuộc đường tròn giao tuyến. Tam giác OHM vuông tại H nên

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$



2)

a) *Tính chu vi đường tròn giao tuyến của (ABC) với mặt cầu đường kính CD.*



Gọi H là trung điểm BC.

Từ giả thiết hai mặt ABC và BCD là những tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, suy ra $AH \perp (BCD)$.

Gọi I là trung điểm CD, khi đó I là tâm của mặt cầu đường kính CD. Mặt cầu này có bán kính $R = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Gọi K là trung điểm HC, ta có: $IK \,//\, HD \Rightarrow IK \perp BC$.

Mà $IK \perp AH$ (do $AH \perp (BCD)$) nên suy ra $IK \perp (ABC)$.

Vậy IK là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ABC).

Xét tam giác đều BCD, ta có:

$$IK = \frac{1}{2}HD = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} = h.$$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến của (ABC) với mặt cầu đường kính CD, ta có:

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16}} = \frac{a}{4}.$$

Chu vi đường tròn giao tuyến: $P = 2\pi r = 2\pi\dfrac{a}{4} = \dfrac{a\pi}{2}$.

b) *Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.*

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Qua O dựng đường thẳng song song với AH, cắt AD tại L. Khi đó OL là trục của tam giác BCD.

Tam giác AHD vuông cân tại H (do $AH = HD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$). Gọi M là trung điểm AD thì ta có HM là đường trung trực của AD, HM cắt OL tại N.

$$\left.\begin{array}{l} N \in OL \quad \Rightarrow NB = NC = ND \\ N \in HM \quad \Rightarrow NA = ND \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ N là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bán kính R' = NA. Gọi P là trung điểm HD, ta có MP // AH // ON.

Xét tam giác HMP: $\frac{HN}{HM} = \frac{HO}{HP} = \frac{\frac{1}{3}HD}{\frac{1}{2}HD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}HM$.

Tam giác AHD vuông tại H có:

$$HM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AH\sqrt{2} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Tam giác AMN vuông tại M:

$$AN^2 = AM^2 + MN^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2 = \frac{5a^2}{12}.$$

Suy ra: $R = AN = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$.

Vấn đề 4. Tiếp tuyến của mặt cầu

1. PHƯƠNG PHÁP

1) Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu S(O; R) tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H.

2) Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu S(O; R) $\Leftrightarrow$ d(O, Δ) = R.

3) Trong trường hợp điểm A nằm ngoài mặt cầu thì:

• *Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu, chúng nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A.*

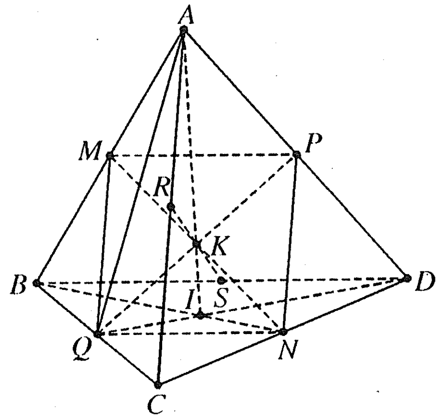
• *Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.*

• *Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Hãy chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của một tứ diện đều ABCD cho trước.

Giải



Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC, AC, BD.

Gọi K là trọng tâm của tứ diện ABCD thì ta có:

K là trung điểm của mỗi đoạn MN, PQ và RS. (1)

Gọi I là tâm tam giác đều BCD, ta có AI là trục của tam giác BCD. Suy ra $AI \perp CD$.

Ta lại có $BN \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABN)$

$$\Rightarrow CD \perp AB.$$

Tương tự ta cũng có: $AD \perp BC$ và $AC \perp BD$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} MQ // AC \\ MP // BD \\ AC \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \perp MP \Rightarrow$ MPNQ là hình chữ nhật $\Rightarrow MN = PQ$.

Chứng minh tương tự ta có: $MN = PQ = RS$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra K cách đều các điểm M, N, P, Q, R, S.

Vậy có tồn tại mặt cầu (C) có tâm K và đi qua các điểm M, N, P, Q, R, S.

Xét tam giác ABN có : $AN = BN = CD.\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác ABN cân tại N.

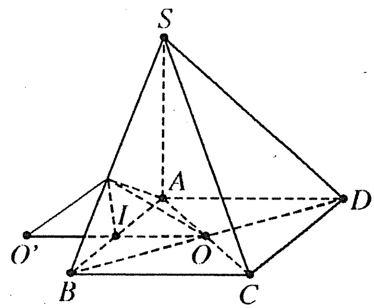
Suy ra đường trung tuyến MN vừa là đường cao. Vậy $MN \perp AB$ hay $KM \perp AB$.

Tương tự : KN $\perp$ CD, KP $\perp$ AD, KQ $\perp$ BC, KR $\perp$ AC, KS $\perp$ BD.

Vậy đường tròn (C) tâm K tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều tại trung điểm của mỗi cạnh.

Ví dụ 2: Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông ABCD có cạnh a và tâm O, ta lấy một điểm S di động. Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh SB, O' là điểm đối xứng của tâm O qua cạnh AB. Chứng minh rằng khi S di động trên tia Ox thì đường thẳng O'H luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Giải



Ta có AH $\perp$ HB nên tam giác ABH vuông tại H.

Gọi I là trung điểm AB. Ta có: $HI = IA = IB = \frac{a}{2}$.

Mặt khác O và O' đối xứng nhau qua AB nên: $IO = IO' = \frac{a}{2}$.

Suy ra: $IH = IO = IO' = \frac{a}{2}$.

Do đó tam giác OHO' vuông cân tại H. Suy ra O'H $\perp$ OH.

Tam giác HIO vuông cân tại I: $OH = OI\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (không đổi).

Vậy khi S di động trên tia Ox thì đường thẳng O'H luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ cố định.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, biết SA $\perp$ (ABCD) và SC hợp với (SAB) một góc 30°.

a) Chứng minh đường thẳng AB tiếp xúc với mặt cầu đường kính SD.

b) Mặt cầu đường kính SA cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại E, H, K. Chứng minh 4 điểm A, E, H, K đồng phẳng.

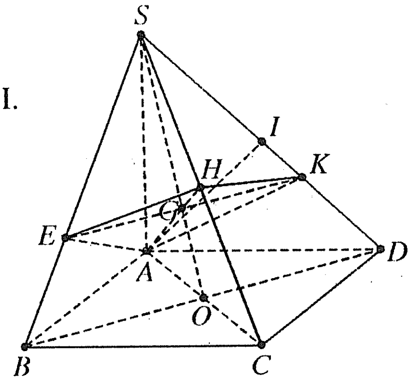
c) Tính S_{AEHK} và chu vi đường tròn giao tuyến qua 4 điểm A, E, H, K.

Giải

a) Chứng minh đường thẳng AB tiếp xúc với mặt cầu đường kính SD.

Mặt cầu đường kính SD có tâm I là trung điểm của SD.

Do $SA \perp AD$ nên A thuộc mặt cầu đường kính SD.



Ta lại có :

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AI.$$

Vậy AB tiếp xúc với mặt cầu đường kính SD tại A.

b) Mặt cầu đường kính SA cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại E, H, K. Chứng minh các điểm A, E, H, K đồng phẳng.

Ta có: $$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

Các điểm E, H, K thuộc mặt cầu đường kính SA nên ta có:

$$\widehat{SEA} = \widehat{SHA} = \widehat{SKA} = 90^\circ.$$

Ta có: $AH \perp SC$. (1)

$$\left.\begin{array}{l} AE \perp SB \\ AE \perp BC \; (BC \perp (SAB)) \end{array}\right\} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC. \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} AK \perp SD \\ AK \perp CD \; (CD \perp (SAD)) \end{array}\right\} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra 4 điểm A, E, H, K cùng thuộc mặt phẳng (P) qua A và vuông góc SC.

c) Tính S_{AEHK} và chu vi đường tròn giao tuyến qua 4 điểm A, E, H, K.

Ta có: $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp EH$; $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp KH$.

Suy ra 4 điểm A, E, H, K thuộc đường tròn đường kính AH (đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt cầu đường kính SA). Bán kính $R = \dfrac{AH}{2}$.

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SC, (SAB)) = \widehat{CSB} = 30^\circ$.

Tam giác SBC vuông tại B: $\tan\widehat{BSC} = \dfrac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \dfrac{BC}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAB vuông tại A:

$$SA^2 = SB^2 - AB^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2} = AC.$$

Suy ra tam giác SAC vuông cân tại A, suy ra H là trung điểm SC. Ta có:

$$AH = \frac{SC}{2} = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = a\text{. Vậy } R = \frac{a}{2}.$$

Chu vi đường tròn giao tuyến : $P = 2\pi R = 2\pi\frac{a}{2} = \pi a$.

Tam giác SAB vuông tại A: $SE.SB = SA^2 \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$.

Tam giác SAD vuông tại A: $SK.SD = SA^2 \Rightarrow \frac{SK}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $\frac{SE}{SB} = \frac{SK}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} EK // BD \\ EK = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a\sqrt{2}. \end{cases}$

Mà ta có : $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Suy ra: $EK \perp (SAC) \Rightarrow EK \perp AH$.

Vậy $S_{AEHK} = \frac{1}{2}AH.EK = \frac{1}{2}.a.\frac{2\sqrt{2}a}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Biết SA $\perp$ (ABCD), SA = a. Gọi (I ; R) là mặt cầu qua 4 điểm S, A, C, D.

a) Tính R theo a.

b) Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với mặt cầu (I; R).

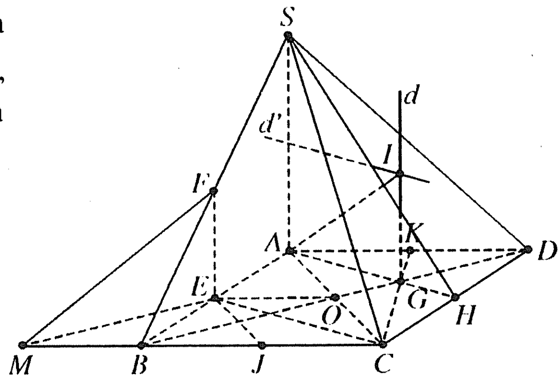
c) Chứng minh mặt phẳng (SAD) cắt mặt cầu đường kính SB. Tính chu vi của đường tròn giao tuyến.

d) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và SB. Trên tia đối của tia BC ta lấy điểm M sao cho BC = 2BM. Chứng minh (MEF) tiếp xúc với mặt cầu đường kính BC.

Giải

a) *Tính R theo a.*

Tam giác ABC có AB = BC = a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, cạnh a. Suy ra tam giác ACD cũng là tam giác đều cạnh a.



Gọi H là trung điểm CD, K là trung điểm AD, G là tâm tam giác đều ACD

Trong tam giác SAH, từ G kẻ đường thẳng d song song với SA.

Suy ra d ⊥ (ACD). Khi đó d là trục của tam giác ACD.

Trong mặt phẳng (SAH), kẻ đường trung trực Δ của SA, Δ cắt d tại I. Ta có:

$I \in d \Rightarrow IA = IC = ID;$

$I \in \Delta \Rightarrow IA = IS.$

Vậy 4 điểm S, A, C, D thuộc mặt cầu tâm I bán kính R = IA.

Tam giác AGI vuông tại G:

$$AI^2 = AG^2 + GI^2 = \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

Suy ra $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}.$

b) *Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với mặt cầu (I; R).*

Ta có: $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} BC // AD \\ AD \perp CG \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp CG \\ IG \perp (ABCD) \Rightarrow IG \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (CIG) \Rightarrow BC \perp IC.$

Vậy BC tiếp xúc với mặt cầu (I; R) tại C.

c) *Chứng minh mặt phẳng (SAD) cắt mặt cầu đường kính SB. Tính chu vi của đường tròn giao tuyến.*

Mặt cầu đường kính SB có tâm là trung điểm F của SB và bán kính: $R' = \dfrac{SB}{2}.$

Tam giác SAB vuông cân tại A: $SB = SA\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow R' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} CK \perp AD \\ CK \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CK \perp (SAD) \Rightarrow CK = d(C,(SAD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $BC // (SAD) \Rightarrow d(B, (SAD)) = d(C, (SAD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

F là trung điểm SB nên:

$$\frac{FS}{BS} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{d(F,(SAD))}{d(B,(SAD))} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(F,(SAD)) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} < R'.$$

Do đó mặt phẳng (SAD) cắt mặt cầu đường kính SB.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến, ta có:

$$r = \sqrt{R'^2 - d^2(F,(SAD))} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{16}} = \sqrt{\frac{5a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

Suy ra chu vi đường tròn giao tuyến: $P = 2\pi r = 2\pi\dfrac{a\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\pi a\sqrt{5}}{4}$.

d) *Chứng minh (MEF) tiếp xúc với mặt cầu đường kính BC.*

Tam giác ABC đều và E là trung điểm AB nên $CE \perp EB$. Vậy E thuộc mặt cầu đường kính BC tâm J là trung điểm BC.

Ta có: $MB // OE$ và $MB = OE \Rightarrow ME // BO$.

Vì EJ là đường trung bình tam giác ABC nên: $EJ // AC$.

Vì $BO \perp AC$, suy ra $ME \perp EJ$. (1)

EF là đường trung bình tam giác SAB nên: $EF // SA$.

Suy ra: $EF \perp (ABCD) \Rightarrow EF \perp EJ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(MEF) \perp EJ$ tại E.

Vậy (MEF) tiếp xúc với mặt cầu đường kính BC tại E.

C. BÀI TẬP

1. Cho mặt cầu đường kính AB = 2R. Cắt mặt cầu bằng một mặt phẳng vuông góc với AB sao cho AH = x (0 < x < 2R) ta được thiết diện là đường tròn (T). Gọi MNPQ là hình vuông nội tiếp đường tròn (T).

a) Tính theo R và x bán kính đường tròn (T), cạnh của hình vuông MNPQ và các đoạn thẳng AM, BM.

b) Tính thể tích của khối đa diện tạo bởi hai hình chóp AMNPQ và BMNPQ. Tính x để thể tích này đạt giá trị lớn nhất.

2. Trong mặt phẳng (P) cho hình thang cân ABCD với AB = 2a, BC = CD = DA = a. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) ta lấy một điểm di động S. Một mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với SB cắt SB, SC, SD tại P, Q, R theo thứ tự đó.

a) Chứng minh rằng 7 điểm A, B, C, D, P, Q, R luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính diện tích mặt cầu đó.

b) Chứng minh rằng tứ giác CDRQ là một tứ giác nội tiếp và đường thẳng QR luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên nửa đường thẳng Ax.

c) Cho SA = $a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.APQR và diện tích của tứ giác APQR.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB = 2a, AD = DC = a, SA $\perp$ (ABC), SA = a.

a) Tìm tâm mặt cầu (S) qua 4 điểm S, A, C, D. Tìm chu vi đường tròn giao tuyến của (SAB) với mặt cầu (S).

b) Chứng minh (SBC) $\perp$ (SAC).

c) Chứng minh AD tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

4. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C với AB = a, biết (SAB) $\perp$ (ABC), hai mặt (SAC) và (SBC) cùng hợp với (ABC) một góc α với $\tan\alpha = \sqrt{6}$ . .

a) Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua C. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của mặt cầu đi qua 4 điểm S, B, M, N.

5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SH = $\frac{3R}{2}$, nội tiếp mặt cầu (O; R). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SC.

a) Tìm giao tuyến của (BMN) và (ABCD). Chứng minh giao tuyến này tiếp xúc với mặt cầu (O; R).

b) Chứng minh 6 điểm A, B, C, D, M, N cùng thuộc một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu này.

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với SB tại S, cắt khối cầu (O; R) . Tính diện tích thiết diện thu được.

d) Tìm tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABC.

6. Cho khối cầu tâm O bán kính R và đường kính SS'. Một mặt phẳng vuông góc với SS'cắt khối cầu theo một đường tròn tâm H. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn này. Đặt SH = x ($0 < x < 2R$).

a) Tính các cạnh của tứ diện SABC theo R và x.

b) Xác định x để SABC là tứ diện đều, khi đó tính thể tích của tứ diện và chứng minh rằng S'A, S'B, S'C đôi một vuông góc.

7. Cho mặt cầu S(O; R) và (P) cách O một khoảng bằng h ($0 < h < R$). Gọi (L) là giao tuyến của mặt cầu (S) và(P). Lấy A là một điểm cố định thuộc (L). Một góc vuông xAy trong (P) quay quanh điểm A. Các cạnh Ax, Ay cắt (L) ở C và D. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) cắt mặt cầu ở B.

a) Chứng minh rằng $BC^2 + AD^2$ và $BD^2 + AC^2$ luôn không đổi.

b) Với vị trí nào của CD thì diện tích ΔBCD lớn nhất?

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng CD. Chứng minh rằng H luôn thuộc một đường tròn cố định.

8. Trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R, lấy điểm C tuỳ ý. Kẻ $CH \perp AB$ (H thuộc đoạn AB). Gọi I là trung điểm CH. Trên nửa đường thẳng $Ix \perp (ABC)$ tại I, lấy điểm S sao cho $\widehat{ASB} = 90°$.

a) Chứng minh rằng $\Delta CAB = \Delta SAB$.

b) Chứng minh rằng khi C chạy trên nửa đường tròn đó thì (SAB) cố định.

c) Cho AH = x. Tính thể tích tứ diện S.ABC theo R, x. Tìm x để thể tích ấy đạt giá trị lớn nhất.

d) Chứng minh rằng khi C chạy trên nửa đường tròn đó thì tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABI thuộc một đường thẳng cố định.

§2. MẶT TRỤ. HÌNH TRỤ. KHỐI TRỤ

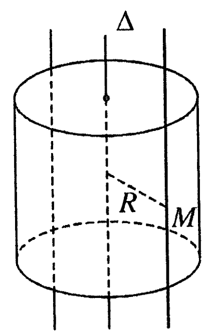
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. TRỤC CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Định nghĩa: *Trục của đường tròn* (O; R) là đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn đó.

2. Nhận xét: Khi điểm M không nằm trên đường thẳng Δ thì có một đường tròn duy nhất đi qua M và có trục là Δ, ta kí hiệu đường tròn đó là (C_M).

II. HÌNH TRÒN XOAY. MẶT TRÒN XOAY



1. Định nghĩa: Trong không gian, cho hình H và đường thẳng Δ. Hình gồm tất cả các đường tròn (C_M) với M thuộc H được gọi là *hình tròn xoay* sinh bởi H khi quay quanh Δ. Đường thẳng Δ gọi là *trục* của hình tròn xoay đó. Khi hình H là một đường cong thì hình tròn xoay sinh bởi nó được gọi là *mặt tròn xoay*.

2. Ví dụ:

- Nếu hình H là đường tròn có đường kính AB nằm trên đường thẳng Δ thì hình tròn xoay sinh bởi H khi quay quanh Δ là mặt cầu đường kính AB.

- Nếu H là hình tròn có đường kính AB nằm trên đường thẳng Δ thì hình tròn xoay sinh bởi H khi quay quanh Δ là khối cầu đường kính AB.

III. MẶT TRỤ

1. Định nghĩa: Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng $l \parallel \Delta$ sao cho $d(l, \Delta) = R$. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh Δ được gọi là *mặt trụ tròn xoay (T)*. Δ gọi là *trục* của mặt trụ (T), l gọi là *đường sinh* của mặt trụ (T), R gọi là *bán kính* của mặt trụ (T).

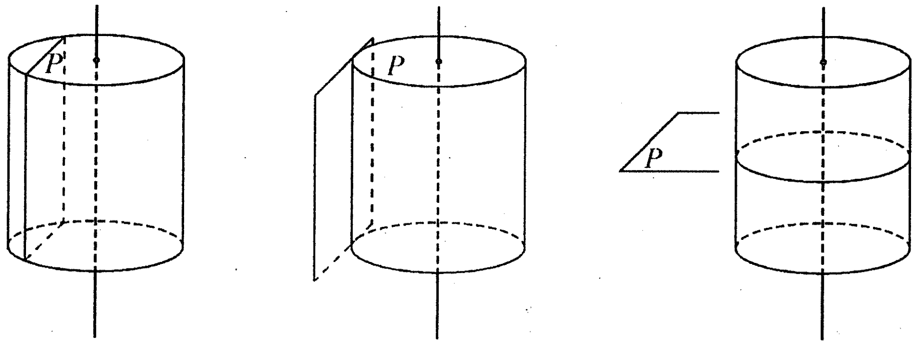
2. Tính chất

- Mặt trụ (T) là tập hợp các điểm M cách đường thẳng Δ cố định một khoảng bằng R không đổi.

- Nếu M_1 là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ thì đường thẳng l_1 đi qua M_1 và song song với Δ sẽ nằm trên mặt trụ đó.

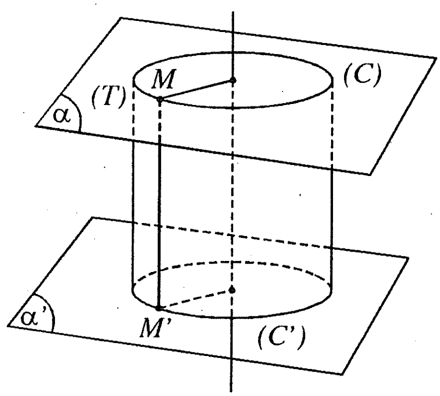
Cho mặt trụ (T) và mặt phẳng (P). Khi đó:

- Nếu $(P) \perp \Delta$ thì $(P) \cap (T) = C(I; R)$.
- Nếu $(P) // \Delta$ và $d((P), \Delta) = h$ thì:
  - Nếu $h < R$: (P) cắt (T) theo 2 đường sinh;
  - Nếu $h = R$: (P) tiếp xúc (T) , (P) được gọi là *tiếp diện* của mặt trụ (T);
  - Nếu $h > R$: $(P) \cap (T) = \varnothing$.



IV. HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ TRÒN XOAY

Cắt mặt trụ (T) trục Δ, bán kính R bởi 2 mặt phẳng phân biệt (P) và (P') cùng vuông góc với Δ, ta được giao tuyến là hai đường tròn (C) và (C').



1. Định nghĩa: Phần mặt trụ (T) nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hai hình tròn xác định bởi (C) và (C') được gọi là *hình trụ*.

Khi đó: hai đường tròn (C) và (C') gọi là hai *đường tròn đáy* của hình trụ, OO' gọi là *trục* hình trụ, độ dài OO' gọi là *chiều cao* của hình trụ, phần mặt trụ giữa hai đáy gọi là *mặt xung quanh* của hình trụ.

2. Khối trụ: Hình trụ cùng với phần bên trong của nó được gọi là *khối trụ*.

V. DIỆN TÍCH HÌNH TRỤ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

1. Diện tích xung quanh hình trụ có bán kính R, chiều cao h là: $S_{xq} = 2\pi Rh$.

2. Diện tích toàn phần hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh hình trụ với diện tích hai đáy.

3. Thể tích V của khối trụ tròn xoay có chiều cao h , bán kính mặt đáy R là $V = \pi R^2h$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xác định mặt trụ

1. PHƯƠNG PHÁP

Lưu ý kết quả sau: *Nếu một điểm M di động trong không gian có hình chiếu vuông góc M' trên (α) di động trên đường tròn (C) cố định thì M thuộc mặt trụ cố định (T) chứa (C) và có trục vuông góc với (α).*

2. CÁC VÍ DỤ

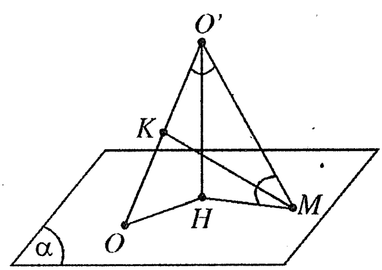
Ví dụ 1: Cho (α) và một điểm O nằm trên (α). Gọi O' là một điểm nằm ngoài (α) sao cho hình chiếu H của O' lên (α) không trùng với O. Một điểm M lưu động trên (α) sao cho $\widehat{OO'M} = \widehat{O'MH}$. Chứng minh rằng M nằm trên mặt trụ có trục là OO'.

Giải

Ta có: H là hình chiếu của O' trên $(\alpha) \Rightarrow O'H \perp (\alpha) \Rightarrow O'H \perp HM$

$\Rightarrow$ tam giác O'HM vuông tại H.

Từ M kẻ $MK \perp OO'$ tại K.



Xét hai tam giác vuông O'HM và MKO' có:

O'M là cạnh chung;

$\widehat{OO'M} = \widehat{O'MH}$.

Suy ra hai tam giác O'HM và MKO' bằng nhau.

Suy ra MK = O'H không đổi.

Vậy điểm M nằm trên mặt trụ có trục là OO' và bán kính bằng O'H.

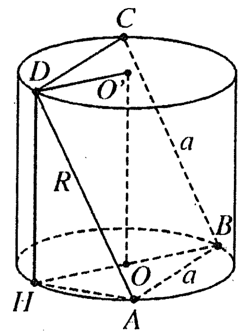
Ví dụ 2: Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là dây cung của hai đường tròn đáy, cạnh AD và BC không phải là đường sinh của hình trụ.

a) Tính độ dài cạnh của hình vuông ABCD.

b) Kẻ đường sinh DH. Chứng minh 5 điểm A, B, C, D, H cùng thuộc một mặt cầu. Tính thể tích mặt cầu đó.

Giải

a) Gọi a là độ dài cạnh hình vuông ABCD.



Kẻ đường sinh DH $\Rightarrow$ DH = OO' = R.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ AB \perp DH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (AHD) \Rightarrow AB \perp AH$

$$\Rightarrow \begin{cases} HB = 2R \\ AH \perp AB. \end{cases}$$

Tam giác AHD vuông tại H:

$$AH^2 = AD^2 - HD^2 = a^2 - R^2. \qquad (1)$$

Tam giác ABH vuông tại A:

$$AH^2 = HB^2 - AB^2 = 4R^2 - a^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a^2 - R^2 = 4R^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{2}R^2 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}R.$$

b) Ta có : $\begin{cases} AB \perp AD \\ HB \perp HD \\ CB \perp CD \end{cases}$

$\Rightarrow$ 5 điểm A, B, C, D, H cùng thuộc một mặt cầu đường kính BD.

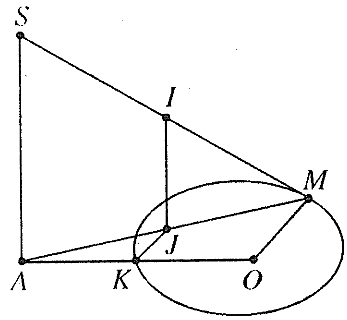
Bán kính $R' = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{\sqrt{DH^2 + HB^2}}{2} = \dfrac{R\sqrt{5}}{2}$.

Thể tích mặt cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R'^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{R\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \dfrac{5\sqrt{5}\pi R^3}{6}$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (O; R) và một điểm A sao cho OA = 2R. Trên đường thẳng vuông góc với (α) tại A, lấy một điểm S cố định. Gọi M là một điểm thuộc đường tròn (O; R) và I, J lần lượt là trung điểm của SM và AM.

Chứng minh rằng khi M di động trên đường tròn (O; R) thì IJ sinh ra một mặt trụ.

Giải



Vì IJ là đường trung bình tam giác SAM nên IJ // SA.

Ta có $SA \perp (\alpha) \Rightarrow IJ \perp (\alpha)$.

Gọi K là giao điểm của OA với đường tròn (O). Do OA = 2R nên K là trung điểm OA.

Suy ra JK là đường trung bình tam giác AOM $\Rightarrow JK = \dfrac{OM}{2} = \dfrac{R}{2}$ không đổi.

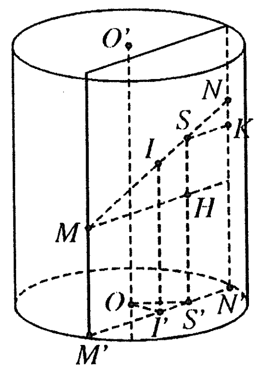
Vậy khi M di động trên đường tròn (O; R) thì IJ luôn vuông góc với (α) và cách điểm K cố định một khoảng $\dfrac{R}{2}$ không đổi . Do đó IJ sinh ra mặt trụ có trục qua K và vuông góc với (α), có bán kính bằng $\dfrac{R}{2}$.

Ví dụ 4: Cho hình trụ có trục là OO', bán kính đáy là R. Một điểm S cố định cách OO' một khoảng là a. Một đường thẳng d di động nhưng luôn qua S và cắt mặt trụ tại M và N.

a) Chứng minh rằng trung điểm I của MN luôn thuộc một mặt trụ cố định.

b) Giả sử d luôn hợp với OO' một góc α. Chứng minh rằng SM.SN không đổi.

Giải



a) Gọi M', N', I', S' lần lượt là hình chiếu của M, N, I, S lên mặt đáy tâm (O).

Ta có:

* I là trung điểm MN nên I' cũng là trung điểm M'N'. Do đó $OI' \perp M'N'$.

* S cố định nên S' cố định và $\widehat{OI'S'} = 90^0$.

Như vậy khi d di động nhưng luôn qua S thì I' luôn thuộc đường tròn đường kính OS' trong mặt phẳng đáy tâm (O) của hình trụ.

Vậy I luôn thuộc mặt trụ cố định có trục song song với OO' và có đường kính OS'.

b) Kẻ $MH \perp SS'(H \in SS') \Rightarrow MH // M'S'$ và $MH = M'S'$.

Kẻ $SK \perp NN'(K \in NN') \Rightarrow SK = S'N'$ và $SK // S'N'$.

Giả thiết d luôn hợp với OO' một góc α, ta suy ra $\widehat{MSH} = \alpha, \widehat{SNK} = \alpha$.

Tam giác SHM vuông tại H nên $\sin\alpha = \dfrac{MH}{SM} \Rightarrow SM = \dfrac{MH}{\sin\alpha} = \dfrac{S'M'}{\sin\alpha}$.

Tam giác SNK vuông tại K nên $\sin\alpha = \dfrac{SK}{SN} \Rightarrow SN = \dfrac{SK}{\sin\alpha} = \dfrac{S'N'}{\sin\alpha}$.

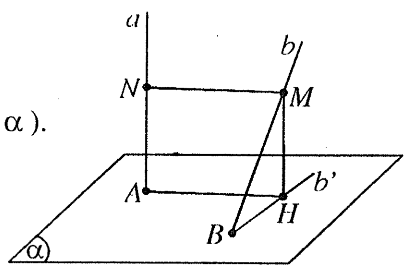
Suy ra $SM.SN = \dfrac{S'M'.S'N'}{\sin^2\alpha} = \dfrac{OS'^2 - R^2}{\sin^2\alpha} = \dfrac{a^2 - R^2}{\sin^2\alpha}$ không đổi

(S'M'.S'N' bằng phương tích của điểm S' đối với đường tròn (O; R)).

Ví dụ 5: Cho đường thẳng a và một điểm B cố định không thuộc a, b là đường thẳng di động luôn đi qua điểm B. Hãy nêu cách dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b ($N \in a$, $M \in b$) và chứng minh rằng điểm N luôn di động trên một mặt trụ cố định.

Giải

Dựng mặt phẳng (α) qua điểm B và vuông góc với đường thẳng a tại A.



Dựng b' là hình chiếu của đường thẳng b trên (α).

Trong (α), kẻ $AH \perp b'$ ($H \in b'$).

Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại M. Khi đó $HM \perp (\alpha)$

Từ M dựng đường thẳng song song với AH, cắt a tại N.

Khi đó MN là đoạn vuông góc chung của a và b.

Thật vậy, vì b' là hình chiếu của b trên (α) nên ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp a \\ AH \perp b' \Rightarrow AH \perp b \\ MN // AH \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} MN \perp a \\ MN \perp b. \end{cases}$$

Trong (α), ta có $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên H thuộc đường tròn đường kính AB cố định. Vì H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α) nên M luôn thuộc một mặt trụ cố định có trục song song với đường thẳng a và có đường kính là AB.

Vấn đề 2. Diện tích xung quanh hình trụ. Thể tích khối trụ

1. PHƯƠNG PHÁP

Dùng các công thức sau đây: $- S_{xq} = 2\pi Rh;$

$- S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy};$

$- V = \pi R2h.$

Nhận xét:

– Hình trụ nội tiếp (ngoại tiếp) hình lăng trụ là hình trụ có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp (ngoại tiếp) hai đa giác đáy của hình lăng trụ.

– Mặt cầu ngoại tiếp một hình trụ là mặt cầu chứa hai đường tròn đáy của hình trụ.

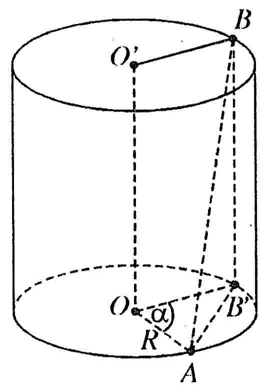
– Mặt cầu nội tiếp một hình trụ là mặt cầu tiếp xúc với hai đáy và tất cả các đường sinh của hình trụ.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao hình trụ là $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn O và O' có hai điểm di động A, B sao cho (OA, O'B) = α không đổi.

a) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Tính AB theo R và α.



Giải

a) $V = \pi R^2.h = \pi R^2.R\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi R^3$.

$S_{xq} = 2\pi R.h = 2\pi R.R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi R^2$.

b) Kẻ đường sinh BB', ta có: $\widehat{AOB'} = (OA, O'B) = \alpha$.

Áp dụng định lí hàm số cos cho tam giác OAB':

$$AB'^2 = OA^2 + OB'^2 - 2OA.OB'.\cos\alpha = 2R^2 - 2R^2.\cos\alpha.$$

Tam giác ABB' vuông tại B':

$$AB^2 = AB'^2 + BB'^2 = 2R^2 - 2R^2.\cos\alpha + \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 4R^2 - 2R^2.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow AB = R\sqrt{2}.\sqrt{2-\cos\alpha}.$$

Ví dụ 2: Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tính bán kính đáy và chiều cao của hình trụ để diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Gọi R là bán kính hình trụ và h là chiều cao của hình trụ.

Ta có: $V = \pi R^2 h$.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi Rh + 2.\pi R^2 = 2\pi(Rh + R^2).$$

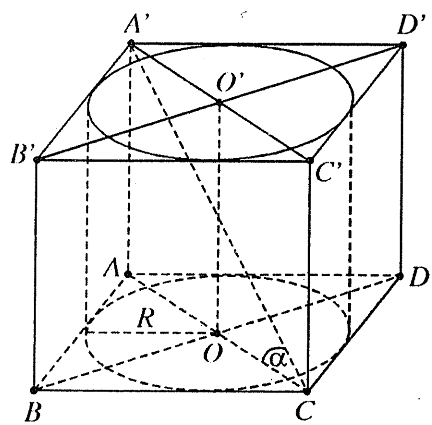
$$S_{tp} = 2\pi\left(\frac{Rh}{2} + \frac{Rh}{2} + R^2\right) \overset{\text{Cô-si}}{\geq} 2\pi\sqrt[3]{\frac{Rh}{2}.\frac{Rh}{2}.R^2}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{R^4h^2} = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2} \text{ không đổi.}$$

$$S_{tp} = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \pi R^2 h \\ \dfrac{Rh}{2} = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2R \\ V = 2\pi R^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2R \\ R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}. \end{cases}$$

Vậy diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} h = 2R \\ R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}. \end{cases}$

Ví dụ 3: Cho hình trụ bán kính đáy R nội tiếp trong lăng trụ tứ giác đều có đường chéo hợp với đáy một góc α. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của lăng trụ ngoại tiếp.



Giải

Hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn đáy hình trụ bán kính R nên có cạnh

$$AB = 2R \Rightarrow AC = 2R\sqrt{2}.$$

Đường chéo A'C hợp với đáy một góc $\alpha \Rightarrow \widehat{ACA'} = \alpha$.

Tam giác AA'C vuông tại A:

$$\tan\alpha = \frac{AA'}{AC} \Rightarrow AA' = AC.\tan\alpha = 2\sqrt{2}R\tan\alpha = OO'.$$

$$V_{\text{hình trụ}} = \pi R^2.OO' = \pi R^2.2\sqrt{2}R\tan\alpha = 2\sqrt{2}\pi R^3\tan\alpha.$$

$$S_{xq} = 2\pi R.OO' = 2\pi R.2\sqrt{2}R\tan\alpha = 4\sqrt{2}\pi R^2\tan\alpha.$$

$$V_{\text{lăng trụ}} = AB^2.AA' = 4R^2.2\sqrt{2}R\tan\alpha = 8\sqrt{2}R^3\tan\alpha.$$

Ví dụ 4: Bên trong một hình trụ vẽ một hình vuông ABCD cạnh a có 2 cạnh AB và CD lần lượt thuộc hai đáy của hình trụ. Mặt phẳng chứa hình vuông tạo với đáy của hình trụ một góc 45°. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ đó.

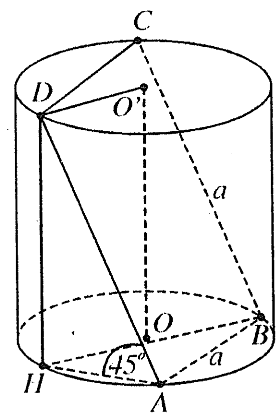
Giải

Vẽ đường kính BH của đường tròn đáy.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp AH \\ AB \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow ((ABCD),(ABH)) = \widehat{HAD} = 45^\circ$.

Suy ra tam giác AHD vuông cân tại H $\Rightarrow HA = HD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Tam giác HAB vuông tại A:



$$HB^2 = AB^2 + AH^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}a^2$$

$$\Rightarrow HB = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{HB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi a^3}{8\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 5: So sánh diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích của mặt cầu nội tiếp hình trụ.

Giải

Mặt cầu nội tiếp hình trụ nên $R_{mc} = R_{htrụ} = R$ và chiều cao của hình trụ $h = 2R$.

$$S_{xqht} = 2\pi Rh = 2\pi R.2R = 4\pi R^2;$$

$$S_{mc} = 4\pi R^2 \Rightarrow S_{mc} = S_{xqhtrụ}.$$

Vấn đề 3. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

1. PHƯƠNG PHÁP

a) Các thiết diện qua trục của một hình trụ là các hình chữ nhật bằng nhau.

b) Thiết diện vuông góc với trục của một hình trụ là một hình tròn bằng hình tròn đáy.

c) Nếu một điểm M di động trong không gian có hình chiếu M' lên một mặt phẳng (α) di động trên một đường tròn (C) cố định thì M thuộc mặt trụ cố định (T) chứa (C) và có trục vuông góc với (α).

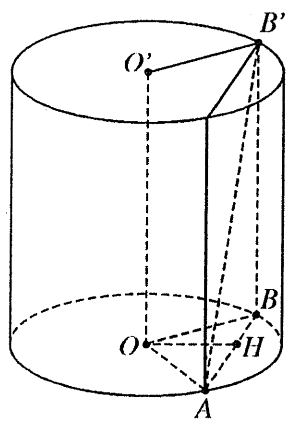
2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao $R\sqrt{3}$. Cho hai điểm A và B' lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB' và trục của hình trụ bằng 30°. Một mặt phẳng (P) chứa AB' và song song với trục của hình trụ.

a) Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi (P).

b) Tính góc giữa hai bán kính đi qua A và B'.

c) Tính khoảng cách giữa AB' và trục hình trụ.



Giải

a) Kẻ đường sinh AA' và BB', ta được thiết diện là hình chữ nhật AA'B'B.

Tam giác ABB' vuông tại B có

$$\widehat{AB'B} = (AB', OO') = 30^\circ;$$

$$\tan\widehat{AB'B} = \frac{AB}{BB'} \Rightarrow AB = BB'.\tan 30^0 = R\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = R;$$

$$S_{td} = AB.BB' = R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}.$$

b) Ta có: $OA = OB = AB = R \Rightarrow$ tam giác OAB đều.

$$O'B' // OB \Rightarrow (OA, O'B) = (OA, OB) = 60^0.$$

c) Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow OH \perp (P)$.

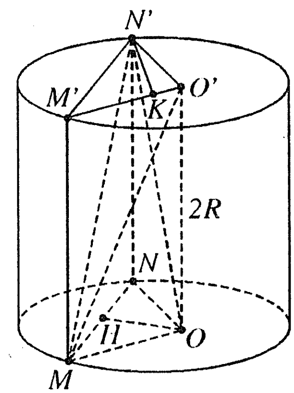
Ta có OO'//(P) $\Rightarrow$ $d(OO', AB') = d(OO', (P)) = d(O, (P)) = OH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao 2R. Trên các đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm M, N. Một mặt phẳng (P) qua MN và song song với trục hình trụ.

a) Tính khoảng cách từ OO' đến mặt phẳng (P) để thiết diện có diện tích bằng $2R^2$.

b) Xác định vị trí điểm M, N trên (O), (O') để khối tứ diện MONO' có thể tích lớn nhất. Khi đó tính độ dài MN theo R.

Giải



a) Kẻ đường sinh MM' và NN' ta được thiết diện là hình chữ nhật MM'NN'.

Gọi H là trung điểm MN.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} OH \perp MN \\ OH \perp MM' \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (P)$

$$\Rightarrow OH = d(O, (P)) = d(OO', (P)) = h.$$

Tam giác OHM vuông tại H nên

$$HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - h^2.$$

$$S_{MM'NN'} = MN.MM' = 2\sqrt{R^2 - h^2}.2R = 4R\sqrt{R^2 - h^2}.$$

$$S_{MM'NN'} = 2R^2 \Leftrightarrow 4R\sqrt{R^2 - h^2} = 2R^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - h^2} = R \Leftrightarrow 4R^2 - 4h^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}R^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

b) Kẻ $NK \perp O'M'$ $(K \in O'M') \Rightarrow NK \perp OM$ $(OM // O'M')$.

Ta lại có $NK \perp OO'$.

Suy ra $NK \perp (MOO')$

$$\Rightarrow V_{MONO'} = \frac{1}{3}NK.S_{MOO'} = \frac{1}{3}NK.\frac{1}{2}OO'.OM = \frac{R^2}{3}.NK.$$

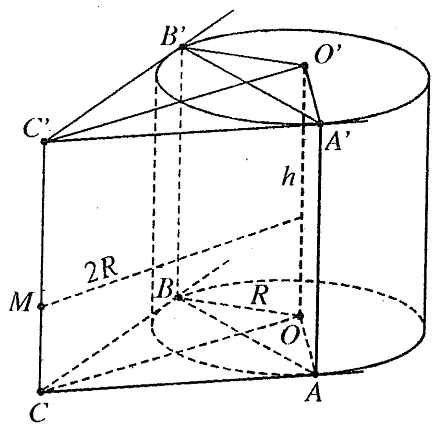
Ví dụ 3: Cho hình trụ có trục OO', bán kính đáy R và chiều cao h. Một điểm M cố định cách trục của hình trụ một khoảng bằng 2R. Qua M dựng hai mặt phẳng (α) và (β) tiếp xúc với mặt trụ theo các đường sinh AA' và BB'. Gọi Δ là giao tuyến của (α) và (β).

a) Chứng minh Δ vuông góc với đáy của hình trụ.

b) Chứng minh mặt phẳng (AA', BB') vuông góc với mặt phẳng (OO'M).

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (α), (β) và tính diện tích của thiết diện tạo ra khi mặt phẳng (AA', BB') cắt hình trụ.

Giải



a) Ta có: $\left.\begin{array}{l} AA' // BB' \\ AA' \subset (\alpha), BB' \subset (\beta) \\ \Delta = (\alpha) \cap (\beta) \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \quad \Delta // AA' // BB' \Rightarrow \Delta // OO'.$$

Do đó Δ vuông góc với đáy của hình trụ.

b) Đường thẳng cắt hai mặt phẳng chứa hai đáy của hình trụ lần lượt tại C và C'. Ta nhận xét thấy rằng $(MOO') \equiv (OO'C'C)$.

Khi đó CA và CB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $OC \perp AB$.

Ta lại có: $OO' \perp AB$.

Suy ra $AB \perp (OO'C'C)$.

Vì $AB \subset (AA', BB')$ nên $(AA', BB') \perp (OO'C'C)$.

c) Ta có: $((\alpha), (\beta)) = \widehat{ACB}$.

$$\Delta // OO' \Rightarrow d(M, OO') = d(C, OO') = CO = 2R.$$

Tam giác AOC vuông tại A có:

$$\sin\widehat{OCA} = \frac{OA}{OC} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OCA} = 30^o.$$

Suy ra $((\alpha), (\beta)) = \widehat{ACB} = 2\widehat{ACO} = 60^o$.

Tam giác OAC vuông tại A có:

$$AC^2 = OC^2 - OA^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AC = R\sqrt{3}.$$

Tam giác ABC có $CA = CB = R\sqrt{3}$ và $\widehat{ACB} = 60^o$ nên là tam giác đều.

Suy ra $AB = R\sqrt{3}$ và $S_{AA'B'B} = AB.AA' = \sqrt{3}Rh$.

C. BÀI TẬP

1. Trên các đường tròn đáy của một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy R, người ta lấy các điểm A và B. Xác định khoảng cách giữa các đường thẳng AB và trục của hình trụ trong các trường hợp sau:

a) $AB = \frac{3}{2}h$.

b) Góc giữa AB và mặt đáy là α.

2. Một mặt phẳng đi qua trục của một hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh 2R.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ.

c) Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

3. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a và đường cao SA = 2a. MNPQ là thiết diện song song với đáy, M thuộc SA và AM = x. Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp MNPQ và đường sinh là MA.

a) Tính diện tích MNPQ theo a và x.

b) Tính thể tích của hình trụ theo a và x.

c) Xác định vị trí của M để hình trụ có thể tích lớn nhất.

4. Cho hình trụ có trục là $OO' = 2R$, bán kính đáy R. Gọi A là một điểm trên đường tròn (O), B là một điểm trên đường tròn (O') sao cho $OA \perp O'B$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp OABO' là những tam giác vuông. Tính thể tích của hình chóp.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với OO'. Tính khoảng cách giữa OO' và mặt phẳng (α).

c) Chứng minh rằng (α) tiếp xúc với một mặt trụ cố định.

5. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là tâm của tam giác BCD, dựng mặt phẳng (α) vuông góc với AO tại một điểm I thuộc đoạn AO. Mặt phẳng (α) cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P. Một hình trụ có một đáy là hình tròn nội tiếp tam giác MNP và đáy kia nằm trên mặt phẳng (BCD). Xác định vị trí điểm I trên AO để khối trụ ấy có thể tích lớn nhất.

6. Cho hình lập phương cạnh a.

a) Tính thể tích hình trụ ngoại tiếp hình lập phương.

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.

7. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

(Đề thi ĐH khối A, năm 2006)

8. Cho hình trụ có bán kính đáy R = 5cm, chiều cao h = 7cm. Tính diện tích thiết diện tạo bởi hình trụ và mặt phẳng (α) song song với trục và cách trục 3cm.

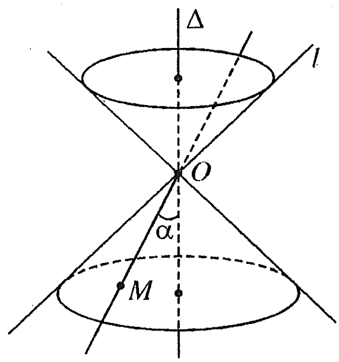
(Đề thi CĐ Công nghiệp Phúc Yên khối A, năm 2007)

§3. MẶT NÓN. HÌNH NÓN. KHỐI NÓN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. MẶT NÓN

Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ gọi là *mặt nón tròn xoay* (hay đơn giản là *mặt nón*).



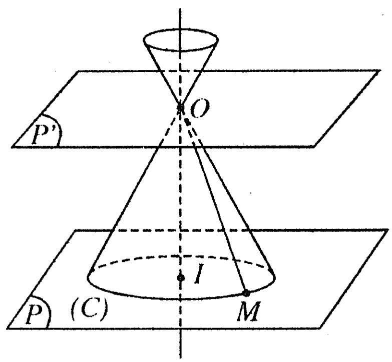
- Δ gọi là *trục* của mặt nón.
- l gọi là *đường sinh* của mặt nón.
- O gọi là *đỉnh* của mặt nón.
- Nếu gọi α là góc giữa l và Δ thì 2α gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón ($0^o < 2\alpha < 180^o$).

II. HÌNH NÓN. KHỐI NÓN

Cho mặt nón N với trục Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh 2α.

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại điểm I khác O.

(P) cắt mặt nón theo đường tròn (C) có tâm I. Lại gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O.



Khi đó: Phần của mặt nón N giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn xác định bởi (C) được gọi là *hình nón.*

- O: *đỉnh* của hình nón.
- Đường tròn (C): *đường tròn đáy.*
- Hình tròn (C): đáy của hình nón.
- Đoạn thẳng OM: *đường sinh* của hình nón.
- Đoạn thẳng OI: *trục* của hình nón.
- Độ dài OI: *chiều cao* của hình nón.

Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là *khối nón.*

III. DIỆN TÍCH HÌNH NÓN. THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Một hình chóp gọi là *nội tiếp* một hình nón nếu đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón và đỉnh của hình chóp là đỉnh hình nón.

1. Định nghĩa 1: *Diện tích xung quanh* của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

2. Định nghĩa 2: *Thể tích* của khối nón là giới hạn của thể tích của khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

3. Định lí 1: Diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy R và đường sinh d là:

$$S_{xq} = \pi Rd.$$

4. Định lí 2: Thể tích của khối nón có bán kính đáy R và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.R^2.h.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Diện tích xung quanh. Diện tích toàn phần hình nón. Thể tích khối nón

1. PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng các công thức sau: $- S_{xq} = \pi Rd.$

$- S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}.$

$- V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$

Những lưu ý khi tìm thiết diện của hình nón:

- *Thiết diện qua trục của hình nón là các tam giác cân và bằng nhau.*
- *Thiết diện qua đỉnh là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.*
- *Thiết diện vuông góc với trục là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.*

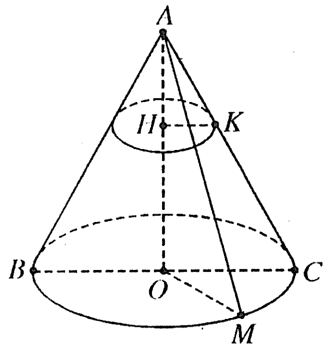
2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1:

a) Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của khối nón.

b) Cắt một hình nón có chiều cao h, bán kính đáy R bằng một mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng bằng x. Hãy tính diện tích thiết diện.

Giải



a) Tam giác ABC đều, có cạnh 2a nên ta có:

– Đường sinh AB = 2a = d;

– Bán kính đáy: OB = a;

– Đường cao $h = a\sqrt{3}$.

Suy ra $S_{xq} = \pi.R.d = 2\pi a^2$;

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2;$$

$$V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3.$$

b) AO = h, OH = h, OC = R.

Ta có: $\dfrac{HK}{OC} = \dfrac{AH}{AO} = \dfrac{h-x}{h} \Rightarrow HK = \dfrac{h-x}{h}R$.

Diện tích thiết diện: $S = \pi.HK^2 = \pi R^2\left(\dfrac{h-x}{h}\right)^2$.

Ví dụ 2: Tính thể tích của khối nón trong các trường hợp sau:

a) Đường sinh có độ dài là d và hợp với đáy một góc α.

b) Bán kính đáy là R, góc giữa đường sinh và trục của khối nón là β

c) Thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có diện tích bằng S.

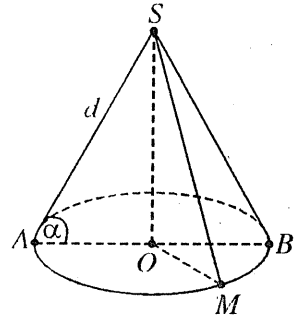
Giải

a) Tam giác SAO vuông tại O có $\widehat{SAO} = \alpha$, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{SO}{SA} \Rightarrow SO = SA.\sin\alpha = d.\sin\alpha = h;$$

$$\cos\alpha = \frac{AO}{SA} \Rightarrow AO = SA.\cos\alpha = d.\cos\alpha = R.$$

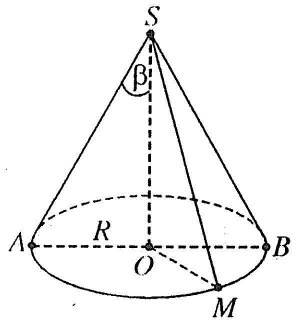
$$V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi d^3.\cos^2\alpha.\sin\alpha.$$



b) Tam giác SAO vuông tại O có $\widehat{ASO} = \beta$, ta có:

$$\tan\beta = \frac{AO}{SO} \Rightarrow SO = \frac{R}{\tan\beta}.$$

$$V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi R^3}{3\tan\beta}.$$

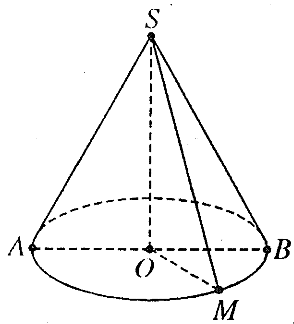


c) Tam giác SAB vuông cân nên ta có:

$$h = SO = OA = R;$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}SO.AB = R^2 = S \Rightarrow R = \sqrt{S}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{\pi S\sqrt{S}}{3}.$$

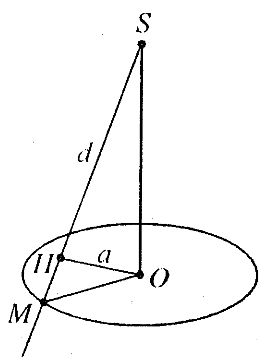


Ví dụ 3: Trong không gian cho 2 điểm cố định S và O. Một đường thẳng d di động qua S và luôn cách O một khoảng bằng a không đổi. Chứng minh rằng d di động trên một mặt nón cố định.

Giải

Gọi (P) là mặt phẳng qua O và vuông góc với SO. Giả sử đường thẳng d cắt (P) tại M. Ta có tam giác SOM vuông tại O. Vẽ đường cao OH của tam giác SOM, ta có: OH = d(O, d) = a.

Vì S, O cố định nên SO không đổi, đặt SO = h.



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOM, ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OM^2}\Rightarrow\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{h^2}=\frac{h^2-a^2}{a^2h^2}$$

$$\Rightarrow OM=\frac{ah}{\sqrt{h^2-a^2}} \text{ không đổi.}$$

Vậy d luôn di động trên một mặt nón cố định có đỉnh S và bán kính đáy $R=\frac{ah}{\sqrt{h^2-a^2}}$

Vấn đề 2. Hình nón nội tiếp, ngoại tiếp hình chóp. Hình nón nội tiếp, ngoại tiếp mặt cầu

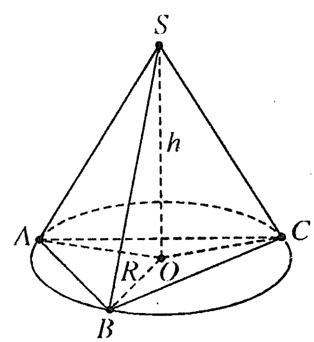
1. PHƯƠNG PHÁP

- *Một hình nón được gọi là nội tiếp một hình chóp nếu hình nón tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp.*
- *Một hình nón được gọi là ngoại tiếp một hình chóp nếu đường tròn đáy của hình nón là đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy của hình chóp và đỉnh của hình nón là đỉnh hình chóp.*
- *Một hình nón được gọi là nội tiếp một mặt cầu nếu hình nón có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu.*
- *Một hình nón được gọi là ngoại tiếp một mặt cầu nếu mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh và hình tròn đáy của hình nón.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính thể tích của hình nón biết thể tích hình chóp tam giác đều nội tiếp trong hình nón là V.

Giải



Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Ta có: $AB=R\sqrt{3}\Rightarrow S_{ABC}=\left(R\sqrt{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Gọi h là chiều cao của hình chóp. Khi đó h cũng là chiều cao của hình nón.

Ta có thể tích khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.h = \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.h = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2h \Rightarrow R^2h = \frac{4V}{\sqrt{3}}.$$

Thể tích khối nón là: $V_{K.nón} = \frac{1}{3}\pi R^2h = \frac{1}{3}\pi\frac{4V}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy là a và mặt bên có góc ở đáy là α.

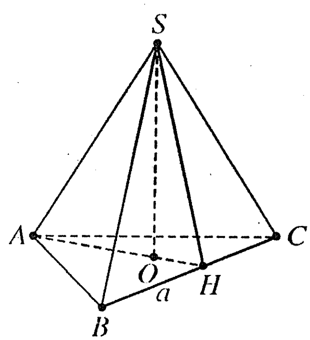
a) Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón nội tiếp hình chóp.

b) Chứng minh rằng chiều cao của hình chóp đã cho bằng:

$$h = \frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{\sin(\alpha + 30^\circ)\sin(\alpha - 30^\circ)}.$$

Giải

a) Gọi r là bán kính đáy của khối nón nội tiếp hình chóp. Khi đó r chính là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đáy ABC. Ta có:



$$r = OH = \frac{1}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Gọi H là trung điểm BC, ta có:

$SH \perp BC$ (tam giác SBC cân tại S).

Tam giác SHB vuông tại H có $\widehat{SBH} = \alpha$ nên:

$$\tan\alpha = \frac{SH}{HB} \Rightarrow SH = HB.\tan\alpha = \frac{a}{2}\tan\alpha.$$

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Khi đó SO là trục của tam giác ABC.

Tam giác SOH vuông tại O có:

$$SO^2 = SH^2 - OH^2 = \frac{a^2}{4}\tan^2\alpha - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{12}\left(3\tan^2\alpha - 1\right)$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{\frac{a^2}{12}\left(3\tan^2\alpha - 1\right)}.$$

$$S_{xq} = \pi rd = \pi\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a}{2}\tan\alpha = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{12}\tan\alpha.$$

$$V_{\text{khối nón}} = \frac{1}{3}\pi r^2.SO = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2.\sqrt{\frac{a^2}{12}\left(3\tan^2\alpha - 1\right)}$$

$$= \frac{\pi a^2}{36}\sqrt{\frac{a^2}{12}\left(3\tan^2\alpha - 1\right)}.$$

b) Theo câu a) ta có:

$$h = SO = \sqrt{\frac{a^2}{12}\left(3\tan^2\alpha - 1\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{\tan^2\alpha - \frac{1}{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2 30^\circ}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{(\tan\alpha - \tan 30^\circ)(\tan\alpha + \tan 30^\circ)} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sin(\alpha - 30^\circ)\sin(\alpha + 30^\circ)}{\cos^2\alpha.\cos^2 30^\circ}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{\sin(\alpha - 30^\circ)\sin(\alpha + 30^\circ)}.$$

Ví dụ 3: Cho một khối cầu bán kính R, một khối nón nội tiếp trong khối cầu đó có chiều cao là x ($0 < x < 2R$).

a) Tính thể tích V và diện tích xung quanh S của hình nón.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa V, S, R độc lập đối với x.

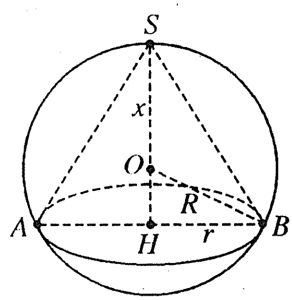
c) Với giá trị nào của x thì V lớn nhất?

Giải

a) Gọi r là bán kính đường tròn đáy hình nón, ta có:

$$r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} = \sqrt{2xR - x^2};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi x(2xR - x^2).$$



Ta thấy tam giác SHB vuông tại H có:

$$SB^2 = SH^2 + HB^2 = x^2 + (2xR - x^2) = 2xR$$

$$\Rightarrow SB = \sqrt{2xR}.$$

Suy ra $S = \pi r.SB = \pi\sqrt{\left(2xR - x^2\right).2xR}$.

b) $V=\frac{1}{3}\pi x(2xR-x^2)\Rightarrow x(2xR-x^2)=\frac{3V}{\pi}$.

$$S=\pi\sqrt{(2xR-x^2).2xR}=\pi\sqrt{\frac{3V}{\pi}2R}\Rightarrow S^2=\pi^2\frac{6VR}{\pi}\Leftrightarrow S^2=6\pi VR.$$

c) $V=\frac{1}{3}\pi x(2xR-x^2)=\frac{1}{3}\pi.x.x.(2R-x)=\frac{1}{6}\pi.x.x.(4R-2x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$V\overset{\text{Cô-si}}{\leq}\frac{1}{6}\pi\left(\frac{x+x+(4R-2x)}{3}\right)^3=\frac{32\pi R^3}{81}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 4R – 2x $\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}R$.

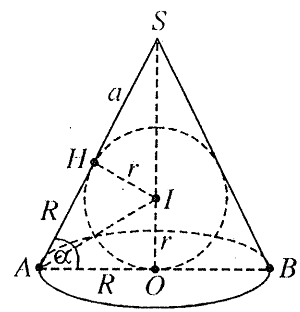
Vậy $V_{max}=\frac{32\pi R^3}{81}$.

Ví dụ 4: Cho biết hiệu giữa đường sinh và bán kính đáy của một hình nón là a, góc giữa đường sinh và mặt đáy là α. Tính diện tích mặt cầu nội tiếp hình nón.

Giải

Theo giả thiết ta có: $SA-OA=a$, $\widehat{SAO}=\alpha$.

Gọi R là bán kính đáy hình nón, r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón. Khi đó:



$$OA=AH=R;$$
$$IO=IH=r;$$
$$SH=a.$$

Tam giác SHI vuông tại H có $\widehat{HSI}=\frac{\pi}{2}-\alpha$ nên:

$$r=SH.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=a.\cot\alpha.$$

Diện tích mặt cầu nội tiếp hình nón:

$$S_{mc}=4\pi r^2=4\pi a^2\cot^2\alpha.$$

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao h và $\widehat{ASB} = \alpha$.

a) Tính diện tích xung quanh hình chóp.

b) Chứng minh rằng diện tích xung quanh mặt nón ngoại tiếp hình chóp bằng:

$$S = \frac{\pi h^2 \sqrt{2} \sin\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

2. Một hình nón có đường cao bằng 20cm, bán kính đáy R = 25cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.

b) Một thiết diện đi qua đỉnh, cách tâm đáy là 12cm. Tính diện tích thiết diện đó.

3. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn (O; R), góc ở đỉnh bằng 60° và AB là đường kính cố định của đáy.

a) Tính thể tích và diện tích xung quanh của khối nón.

b) C, D là 2 điểm thuộc đường tròn đáy và ở về cùng một phía đối với AB sao cho $\widehat{BAC} = \varphi$ ($\varphi < 45^\circ$) và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Tính góc giữa (SAB) và (SCD) theo φ.

4. Cho hình nón có đỉnh S, chiều cao h và bán kính đáy bằng R. Mặt phẳng (α) qua S cắt thiết diện là hình gì. Định vị trí của (α) để thiết diện có diện tích lớn nhất.

5. Dựng hai hình nón có chung đường tròn đáy nằm cùng phía so với mặt phẳng đáy sao cho hai đỉnh cách nhau một đoạn bằng a. Một mặt phẳng chứa trục của hình nón lần lượt cắt hai hình nón tạo thành hai thiết diện có góc ở đỉnh lần lượt là 2α và 2β ($\alpha < \beta$). Tính thể tích của phần giới hạn bởi hai mặt nón và mặt đáy của chúng.

6. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a, chiều cao bằng 2a. Tính thể tích hình cầu nội tiếp và thể tích hình cầu ngoại tiếp hình nón.

7. Một hình cầu có bán kính r nội tiếp trong một hình nón. Tính thể tích của hình nón biết rằng thiết diện chứa trục của hình nón có góc ở đỉnh bằng 2α.

§4. TỔ HỢP HÌNH CẦU, HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN

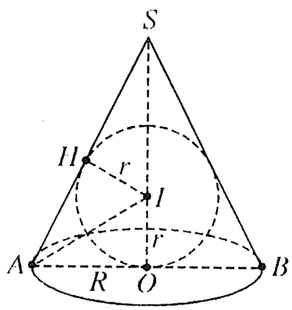
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

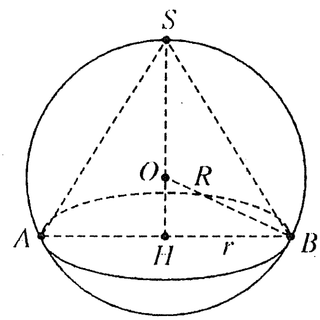
- Một hình cầu gọi là nội tiếp một hình nón khi nó có mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh và đáy của hình nón.

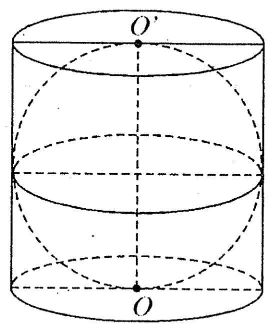
- Một hình cầu gọi là ngoại tiếp một hình nón khi nó có mặt cầu chứa đỉnh và đường tròn đáy của hình nón.

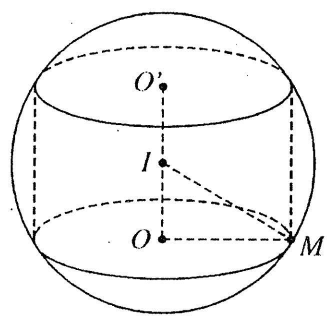
- Một hình cầu gọi là nội tiếp một hình trụ khi nó có mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh và hai đáy của hình trụ.

- Một hình cầu gọi là ngoại tiếp một hình trụ khi nó có mặt cầu chứa hai đường tròn đáy của hình trụ.









B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

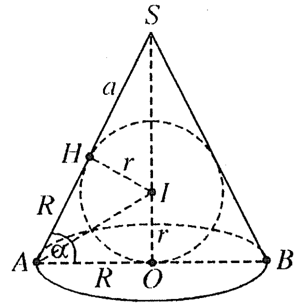
Ví dụ 1: Cho biết hiệu giữa đường sinh và bán kính đáy của một hình nón là a, góc giữa đường sinh và mặt đáy là α. Tính diện tích mặt cầu nội tiếp hình nón.

Giải

Theo giả thiết ta có:

$$SA - OA = a,\ \widehat{SAO} = \alpha.$$

Gọi R là bán kính đáy hình nón, r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón.



Khi đó: $OA = AH = R;\ IO = IH = r;\ SH = a.$

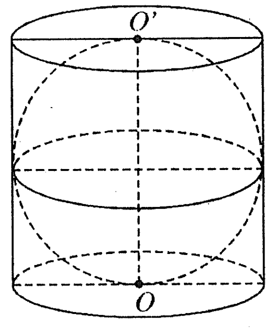
Tam giác SHI vuông tại H có $\widehat{HSI} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, suy ra:

$$r = SH.\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = a.\cot\alpha.$$

Diện tích mặt cầu nội tiếp hình nón là:

$$S_{mc} = 4\pi r^2 = 4\pi a^2\cot^2\alpha.$$

Ví dụ 2: So sánh diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích của mặt cầu nội tiếp hình trụ.



Giải

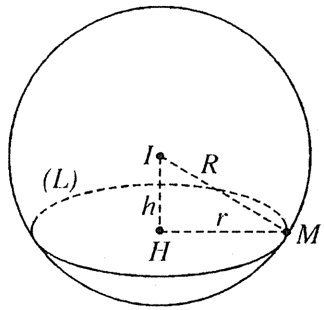
Vì mặt cầu nội tiếp hình trụ nên $R_{mc} = R_{htrụ} = R$ và chiều cao của hình trụ $h = 2R$.

Ta có: $S_{xqht} = 2\pi Rh = 2\pi R.2R = 4\pi R^2$,

$S_{mc} = 4\pi R^2$

$\Rightarrow S_{mc} = S_{xqhtrụ}$.

Ví dụ 3: Cho hình cầu (S) tâm I bán kính R. Một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn giao tuyến (L). Tìm vị trí của mặt phẳng (P) sao cho khối nón đỉnh I và đáy là đường tròn (L) có thể tích lớn nhất.



Giải

Gọi r là bán kính đường tròn (L) và h là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng (P). Ta có:

$$V_{nón} = \frac{1}{3}\pi r^2 h;$$

$$V^2 = \frac{\pi^2}{9}r^4.h^2 = \frac{4\pi^2}{9}.\frac{r^2}{2}.\frac{r^2}{2}.h^2 \le \frac{4\pi^2}{9}\left(\frac{\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+h^2}{3}\right)^3$$

$$= \frac{4\pi^2}{9.27}\left(r^2+h^2\right)^3 = \frac{4\pi^2R^6}{9.27}$$

$$\Rightarrow V \le \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}.$$

Vậy $V = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{r^2}{2} = h^2 \Leftrightarrow r^2 = 2h^2 \Leftrightarrow r^2 + h^2 = 3h^2 = R^2 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

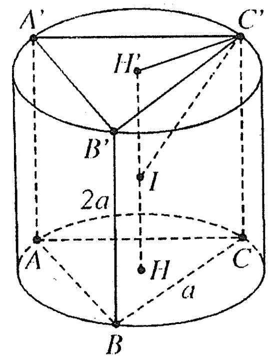
Khối nón có thể tích lớn nhất khi (P) cách tâm mặt cầu một khoảng bằng $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a.

a) Tính diện tích xung quanh hình trụ (T) và thể tích khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

b) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ (T).

Giải



a) Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh a, ta có: $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Suy ra:

$$S_{xqtrụ} = 2\pi Rh = 2\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right).2a = \frac{4}{\sqrt{3}}\pi a^2;$$

$$V_{trụ} = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2.2a = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

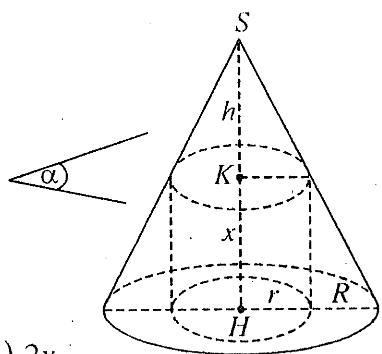
b) Gọi H, H' lần lượt là tâm của tam giác đều ABC và A'B'C'. Gọi I là trung điểm HH'. Khi đó: khối cầu ngoại tiếp hình trụ (T) có bán kính R' = IC. Suy ra:

$$R' = \sqrt{H'I^2 + H'C'^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V_{cầu} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{7\sqrt{7}}{24\sqrt{3}}a^3 = \frac{7\sqrt{7}}{18\sqrt{3}}\pi a^3.$$

Ví dụ 5: Cho hình nón có chiều cao h, đường tròn đáy có bán kính R. Một mặt phẳng (P) di động song song với đáy hình nón cắt hình nón theo đường tròn giao tuyến (L). Dựng hình trụ có một đáy là đường tròn (L), một đáy nằm trên đáy hình nón và có trục là trục của hình nón. Tìm vị trí của mặt phẳng (α) để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Giải



Gọi x là chiều cao của hình trụ và r là bán kính đáy hình trụ, suy ra $V_{trụ} = \pi r^2 x$.

Ta có: $\frac{r}{R} = \frac{SK}{SH} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-x)$;

$$V = \pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2.x = \frac{\pi R^2}{2h^2}(h-x)(h-x).2x.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$V \le \frac{\pi R^2}{2h^2}\left(\frac{(h-x)+(h-x)+2x}{3}\right)^3 = \frac{\pi R^2}{2h^2}.\frac{8h^3}{27} = \frac{4\pi R^2 h}{27}$$

Suy ra $V = \frac{4\pi R^2 h}{27} \Leftrightarrow h - x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.

Vậy khi vị trí mặt phẳng (α) cách đáy hình nón một khoảng bằng $\frac{h}{3}$ thì khối trụ có thể tích lớn nhất.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông ở B, SA vuông góc với đáy, SA = BC = a, AB = $a\sqrt{2}$.

a) Xác định tâm I và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón ngoại tiếp mặt cầu (I).

2. Cho hình chóp tam giác S.ABC. Hai mặt bên SAB và SBC của hình chóp cùng vuông góc với đáy, mặt bên còn lại tạo với đáy 1 góc α. Đáy ABC là tam giác vuông tại A, B = 60°, cạnh BC = a.

a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

b) Tính thể tích khối nón nội tiếp mặt cầu trên.

3. Cho mặt cầu (S) có bán kính R. Tìm hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp (S).

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, góc ABC = 60°, AB = 2a, hai mặt chéo SAC và SBD cùng vuông góc với mặt đáy, tam giác SBD đều. Hãy tính thể tích phần được giới hạn giữa hai khối nón: khối nón có đỉnh S, đường sinh SA và đáy là đường tròn đường kính AC với khối nón có đỉnh S, đường sinh SB và đáy là đường tròn đường kính BD.

5. Cho hình trụ (T_1) có trục là OO' = $R\sqrt{3}$, bán kính đáy R. Gọi MN là dây cung di động của đường tròn đáy, MN = R. Vẽ các đường sinh MM' và NN'của hình trụ, gọi I là trung điểm OO', J là trung điểm MN'.

a) Chứng minh IJ vuông góc với (MM'N'N).

b) Chứng minh J luôn thuộc một mặt trụ cố định (T_2) khi dây cung MN di động. Tính thể tích khối trụ được giới hạn bởi mặt trụ (T_2) và hai đáy của hình trụ (T_1).

c) Tính thể tích khối nón đỉnh I, trục IJ và đường sinh IM.

6. Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với đáy góc α. Tính thể tích khối cầu (S) ngoại tiếp hình chóp SABC và thể tích khối nón nội tiếp mặt cầu (S).

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

1. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a.

a) Tính thể tích V khối cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Tính thể tích V' khối trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và có trục AH (với H là tâm tam giác đều BCD) và tính các tỉ số $\frac{V}{V'}$, $\frac{V_{ABCD}}{V}$, $\frac{V_{ABCD}}{V'}$ (V_{ABCD} là thể tích tứ diện ABCD).

2. Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°.

a) Tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của hình chóp S.ABCDEF.

b) Tính diện tích S' của mặt nón và thể tích V' của khối nón ngoại tiếp hình chóp và tính các tỉ số: $\frac{S_{xq}}{S'}$, $\frac{V}{V'}$.

3. Tính tỉ số thể tích V của hình tám mặt đều cạnh a và thể tích V' của khối cầu ngoại tiếp hình tám mặt đều đó.

4. Cho tứ diện ABCD có CD = 2a, các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{2}$.

a) Xác định tâm I và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện.

5. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = a, DA = DB = a, DC = b, mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (DBC). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

6. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = 3a, AC = 4a, SA = 2a. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC.

a) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu qua 5 điểm A, B, C, B', C'.

b) Tính tỉ số thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABC và thể tích khối cầu qua 5 điểm A, B, C, B', C'.

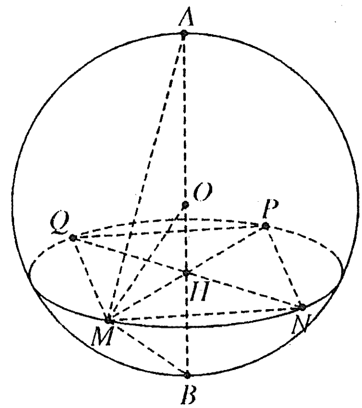
7. Tính thể tích khối lăng trụ tam giác đều có chiều cao h và nội tiếp trong mặt cầu bán kính R.

8. Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD), đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B có AB = BC = a, AD = 2a, góc giữa hai mặt (SAD) và (SCD) là 60°. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ACD.

9. Cho một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O'. Gọi A, B là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn đáy (O) và (O'). Cho biết thể tích của khối trụ là πa^3, AB = $a\sqrt{2}$, khoảng cách giữa OO' và AB là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính bán kính và đường cao của hình trụ đã cho.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

§1. MẶT CẦU. KHỐI CẦU



1. a) Gọi O là tâm mặt cầu đường kính AB, r là bán kính đường tròn (T).

Tam giác OHM vuông tại H nên ta có:

$$r^2 = HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - (x-R)^2$$

$$= 2xR - x^2 \Rightarrow r = \sqrt{2xR - x^2}.$$

Cạnh hình vuông MNPQ:

$$MN = r\sqrt{2} = \sqrt{2}.\sqrt{2xR - x^2}.$$

Tam giác AHM vuông tại H nên:

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 = x^2 + r^2 = x^2 + (2xR - x^2) = 2xR$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{2xR}.$$

Tam giác BHM vuông tại H nên:

$$BM^2 = BH^2 + HM^2 = (2R-x)^2 + r^2$$

$$= 4R^2 - 4xR + x^2 + (2xR - x^2) = 4R^2 - 2xR$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{4R^2 - 2xR}.$$

b) *Cách 1:*

$$V = V_{AMNPQ} + V_{BMNPQ} = \frac{1}{3}S_{MNPQ}.AH + \frac{1}{3}S_{MNPQ}.BH$$

$$= \frac{1}{3}S_{MNPQ}.AB = \frac{1}{3}MN^2.2R = \frac{1}{3}2(2xR - x^2).2R = \frac{4}{3}R(2xR - x^2).$$

$$V = \frac{4}{3}R.x(2R - x) \overset{\text{Cô-si}}{\leq} \frac{4}{3}R.\left(\frac{x + (2R - x)}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}R^3.$$

$$V = \frac{4}{3}R^3 \Leftrightarrow x = 2R - x \Leftrightarrow x = R.$$

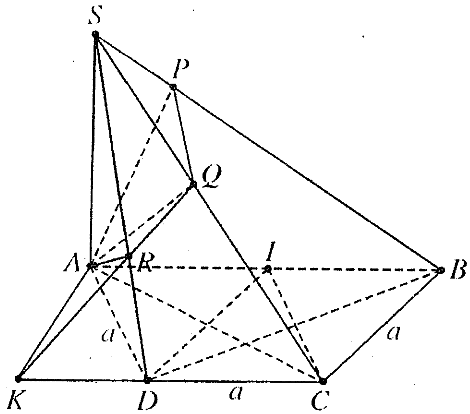
Vậy thể tích khối đa diện lớn nhất là $V_{max} = \frac{4}{3}R^3$ khi $x = R$.

Cách 2:

$$V = \frac{1}{3}S_{MNPQ}.AB = \frac{1}{3}MN^2.2R = \frac{1}{3}\left(r\sqrt{2}\right)^2.2R = \frac{4}{3}R.r^2.$$

V lớn nhất khi và chỉ khi r lớn nhất, mà $r \le R$ nên r lớn nhất khi $r = R$ $\Rightarrow V_{max} = \frac{4}{3}R^3$.

2. a) Gọi I là trung điểm AB, ta có :



$IA = IB = a$.

Tứ giác AICD là hình bình hành ($AI // CD$ và $AI = CD$)

$\Rightarrow IC = a = IA = IB$.

Suy ra $AC \perp CB$. (1)

Tứ giác IBCD là hình bình hành ($IB // CD$ và $IB = CD$)

$\Rightarrow ID = a = IA = IB$.

Suy ra $AD \perp DB$. (2)

$$\text{Ta có: } (P) \perp SB \Rightarrow \begin{cases} AP \perp SB & (3) \\ AQ \perp SB \\ AR \perp SB. \end{cases}$$

$$\text{Vì } \left.\begin{array}{l} BC \perp AC \\ BC \perp SA\,(SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AQ.$$

Ta lại có $AQ \perp SB \Rightarrow AQ \perp (SBC) \Rightarrow AQ \perp QB$. (4)

$$\text{Vì } \left.\begin{array}{l} BD \perp AD \\ BD \perp SA\,(SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp AR.$$

Ta lại có $AR \perp SB \Rightarrow AR \perp (SBD) \Rightarrow AR \perp RB$. (5)

Từ (1), (2), (3), (4), (5) suy ra 7 điểm A, B, C, D, P, Q, R luôn thuộc một mặt cầu đường kính AB cố định.

Bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = a$. Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

b) Ta có: $AR \perp (SBD) \Rightarrow AR \perp SD$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AR nên $SR.SD = SA^2$. (6)

Ta có: $AQ \perp (SBC) \Rightarrow AQ \perp SC$.

Tam giác SAC vuông tại A có đường cao AQ nên $SQ.SC = SA^2$. (7)

Từ (6) và (7) suy ra SR.SD = SQ.SC.

Do đó tứ giác CDRQ là một tứ giác nội tiếp

Trong mặt phẳng (SCD), QR cắt CD tại K. Ta chứng minh K cố định.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AK \subset (ABCD) \Rightarrow AK \perp SA \\ AK \subset (Q) \Rightarrow AK \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow AK \perp (SAB) \Rightarrow AK \perp AB$.

Như vậy nếu gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (ABCD), d đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB thì d cố định, khi đó K chính là giao điểm của d với đường thẳng CD. Do đó K cố định. Vậy đường thẳng QR luôn đi qua một điểm cố định K khi S chạy trên nửa đường thẳng Ax.

c) Các điểm P, Q, R đều nhìn SA dưới một góc vuông (chứng minh trên), do đó hình chóp S.APQR nội tiếp mặt cầu đường kính SA, bán kính $R = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta có: $SP \perp (Q) \Rightarrow V_{S.APQR} = \dfrac{1}{3}.S_{APQR}.SP \Rightarrow S_{APQR} = \dfrac{3V}{SP}$.

Ta có: $V_{S.APQR} = V_{S.APQ} + V_{S.AQR}$; $\dfrac{V_{S.AQR}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SR}{SD}.\dfrac{SQ}{SC}$; $\dfrac{V_{S.APQ}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SP}{SB}.\dfrac{SQ}{SC}$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AR nên:

$$SR.SD = SA^2 \Rightarrow \frac{SR}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + a^2} = \frac{3}{4}.$$

Tam giác SAC vuông tại A có đường cao AQ nên:

$$SQ.SC = SA^2 \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + 3a^2} = \frac{1}{2}.$$

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AP nên:

$$SP.SB = SA^2 \Rightarrow \frac{SP}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + 4a^2} = \frac{3}{7}.$$

Suy ra: $\dfrac{V_{S.AQR}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SR}{SD}.\dfrac{SQ}{SC} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow V_{S.AQR} = \dfrac{3}{8}V_{S.ACD}$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.APQ}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SP}{SB}.\dfrac{SQ}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14} \Rightarrow V_{S.APQ} = \dfrac{3}{14}.V_{S.ABC}$.

Ta lại có: $V_{S.ACD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ACD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{1}{4}DI.AC = \dfrac{1}{12}a\sqrt{3}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{1}{4}a^3$,

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{1}{2}AC.BC = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a = \frac{1}{2}a^3.$$

Suy ra: $V_{S.AQR} = \dfrac{3}{8}.\dfrac{1}{4}a^3 = \dfrac{3}{32}a^3$; $V_{S.APQ} = \dfrac{3}{14}.\dfrac{1}{2}a^3 = \dfrac{3}{28}a^3$.

Vậy $V = \left(\dfrac{3}{32} + \dfrac{3}{28}\right)a^3 = \dfrac{45}{224}a^3$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AP nên:

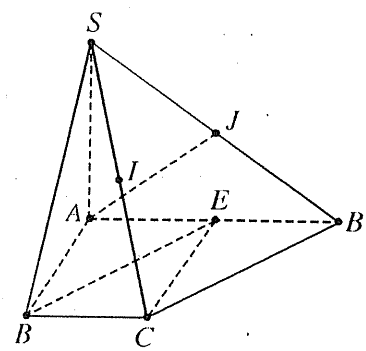
$$SP.SB = SA^2 \Rightarrow SP = \frac{SA^2}{SB} = \frac{3a^2}{a\sqrt{7}} = \frac{3a}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow S_{APQR} = \frac{3V}{SP} = \frac{3\dfrac{45}{224}a^3}{\dfrac{3a}{\sqrt{7}}} = \frac{45\sqrt{7}a^2}{224}.$$

3. a) Ta có:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC.$ (1)

$\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm S, A, C, D cùng thuộc mặt cầu đường kính SC, tâm là trung điểm I của SC, bán kính $R = \dfrac{SC}{2}$.

Tam giác ADC vuông cân tại D có $AD = DC = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên:

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{3}.$$

Suy ra $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi E là trung điểm AB, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} CE \perp AB \\ CE \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = CE = a.$$

Vì I là trung điểm SC nên:

$$\frac{d(I,(SAB))}{d(E,(SAB))} = \frac{SI}{SE} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I,(SAB)) = \frac{1}{2}d(E,(SAB)) = \frac{a}{2} = h.$$

Vì h < R nên (SAB) cắt mặt cầu (S).

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến của (SAB) với mặt cầu (S). Ta có:

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra chu vi đường tròn giao tuyến là $P = 2\pi r = 2\pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \pi a\sqrt{2}$.

b) Ta có: $\left.\begin{array}{l} DE \perp AC \\ DE \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow DE \perp (SAC).$ (3)

Vì tứ giác BEDC là hình bình hành (do BE song song và bằng CD) nên BC // DE. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.

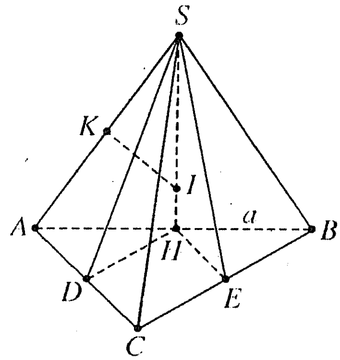
c) Từ chứng minh trên ta có: $BC \perp (SAC) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SC. \end{cases}$

Suy ra tứ diện SABC nội tiếp mặt cầu đường kính SB, tâm là trung điểm J của SB.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AJ.$

Do đó AD tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC tại A.

4. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC). Vì (SAB) $\perp$ (ABC) nên H thuộc giao tuyến AB. (1)



Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC và BC. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{SDH}=\big((SAC),(ABC)\big)=\alpha\\ \widehat{SEH}=\big((SBC),(ABC)\big)=\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{SDH}=\widehat{SEH}=\alpha.$$

Suy ra hai tam giác vuông SHD và SHE bằng nhau.

Suy ra HD = HE. (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trung điểm AB.

Tam giác ABC vuông tại C nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy SH là trục tam giác ABC.

Trong tam giác SAH, kẻ đường trung trực d của SA, d cắt SH tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC, bán kính R = SI.

Tứ giác AKIH nội tiếp nên: $SI.SH = SK.SA \Rightarrow SI = \dfrac{SK.SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH}$.

Tam giác ABC vuông cân tại C nên: $AC = BC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Tam giác SHE vuông tại H nên:

$$\tan\alpha = \frac{SH}{HE} \Rightarrow SH = HE.\tan\alpha = \frac{a}{2\sqrt{2}}.\tan\alpha \quad \left(HE = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}\right).$$

Tam giác SHA vuông tại H nên:

$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}.\tan\alpha\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8}.\tan^2\alpha + \frac{a^2}{4}$$

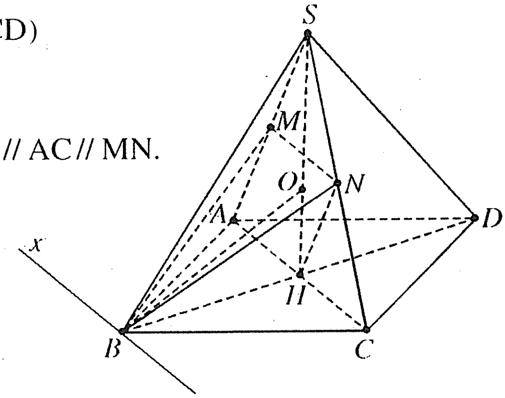
$$\Rightarrow SA = \frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{\tan^2\alpha + 2}$$

$$\Rightarrow R = SI = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{\dfrac{a^2}{8}\left(\tan^2\alpha + 2\right)}{2.\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\tan\alpha} = \frac{a\left(\tan^2\alpha + 2\right)}{4\sqrt{2}\tan\alpha}.$$

5. a) Ta có:

$$\begin{cases} MN // AC \\ MN \subset (BMN), AC \subset (ABCD) \\ B \in (BMN) \cap (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (BMN) \cap (ABCD) = Bx,\ Bx // AC // MN.$$



Hình chóp đều S.ABCD có trục SH nên tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp thuộc SH.

Ta có: $\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} AC \perp BD \\ AC \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBD) \\ BO \subset (SBD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp BO.$

Vì Bx //AC nên $Bx \perp BO$.

Vậy giao tuyến Bx tiếp xúc với mặt cầu (O; R) tại B.

b) Tam giác OHB vuông tại H nên:

$$\begin{cases} OH = SH - OS = \dfrac{3R}{2} - R = \dfrac{R}{2} \\ OB = R. \end{cases}$$

Ta có $\quad BH^2 = OB^2 - OH^2 \Leftrightarrow BH^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4}$

$$\Rightarrow BH = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\quad HA = HB = HC = HD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \quad (1)$

Tam giác SHC vuông tại H nên:

$$SC^2 = SH^2 + HC^2 = \left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9R^2}{4} + \frac{3R^2}{4} = 3R^2$$

$$\Rightarrow SC = R\sqrt{3} \Rightarrow HN = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

Tương tự: $HM = \frac{SA}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra H là tâm mặt cầu đi qua 6 điểm A, B, C, D, M, N.

Bán kính: $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

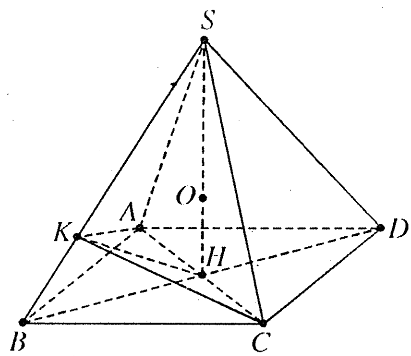
Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a$.

c) Trong (SBD), kẻ $HK \perp SB$ ($K \in SB$).

Ta có $AC \perp (SBD)$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AC \perp SB \Rightarrow SB \perp (AKC)$.

Như vậy mặt phẳng (α) vuông góc với SB tại S là mặt phẳng qua S và song song với (AKC).



Do đó: $\frac{d(O,(\alpha))}{d(O,(AKC))} = \frac{OS}{OH} = 2$

$\Rightarrow d(O,(\alpha)) = 2d(O,(AKC))$.

Ta lại có: $\dfrac{d(O,(AKC))}{d(S,(AKC))} = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow d(O,(AKC) = \frac{1}{3}d(S,(AKC)) = \frac{1}{3}SK \text{ (do } SK \perp (AKC))$$

$$\Rightarrow d(O,(\alpha)) = \frac{2}{3}SK.$$

Tam giác SHB vuông tại H nên:

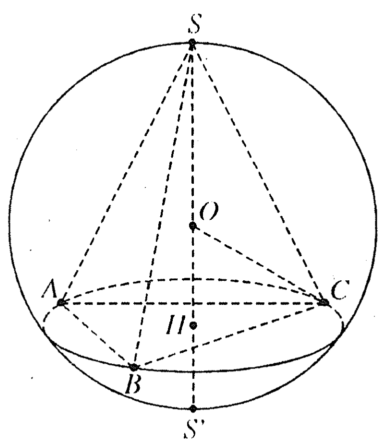
$$SK.SB = SH^2 \Rightarrow SK = \frac{SH^2}{SB} = \frac{\left(\frac{3R}{2}\right)^2}{R\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R.$$

Vậy $d(O,(\alpha)) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = h.$

Vì $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} < R$ nên mặt phẳng (α) cắt khối cầu (O; R) theo thiết diện là hình tròn có bán kính $R' = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{R}{2}.$

Diện tích thiết diện: $S = \pi R'^2 = \dfrac{\pi R^2}{4}.$

6. a) Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến, ta có: HA = HB = HC = r.



Ta có: $r^2 = R^2 - OH^2 = R^2 - (x - R)^2$

$$= 2xR - x^2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2xR - x^2}.$$

Tam giác ABC đều nên:

$$AB = BC = AC = r\sqrt{3} = \sqrt{3}.\sqrt{2xR - x^2}.$$

Tam giác SHC vuông tại H nên:

$$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{x^2 + (2xR - x^2)} = \sqrt{2xR}.$$

Vậy $SA = SB = SC = \sqrt{2xR}$.

b) Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC = \sqrt{2xR} \\ AB = BC = AC = \sqrt{3}.\sqrt{2xR - x^2}. \end{cases}$

Do đó tứ diện SABC là tứ diện đều khi và chỉ khi:

$$\sqrt{2xR} = \sqrt{3(2xR - x^2)} \Leftrightarrow 2xR = 3(2xR - x^2) \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}R.$$

Khi đó: $AB = \sqrt{3\left(2xR - x^2\right)} = \sqrt{3\left(\frac{8}{3}R^2 - \frac{16}{9}R^2\right)} = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.x.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{4R}{3}.\frac{\frac{24}{9}R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{24\sqrt{3}R^3}{81}.$$

Ta có: $S'H = 2R - x = 2R - \frac{4}{3}R = \frac{2}{3}R$;

$$r = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$$

$$S'A = S'B = S'C = \sqrt{S'H^2 + r^2} = \sqrt{\frac{4}{9}R^2 + \frac{8}{9}R^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

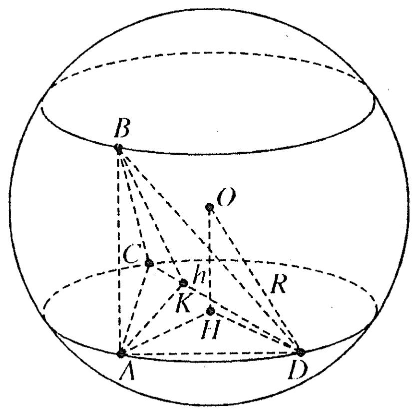
Xét tam giác S'BC có:

$$\begin{cases} S'B^2 = S'C^2 = \dfrac{4}{3}R^2 \\ BC^2 = \left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R\right)^2 = \dfrac{8}{3}R^2 \end{cases} \Rightarrow S'B^2 + S'C^2 = BC^2 \Rightarrow S'B \perp S'C.$$

Tương tự: $S'A \perp S'B$, $S'A \perp S'C$.

Vậy S'A, S'B, S'C đôi một vuông góc với nhau.

7. a) Ta có:



$$\begin{aligned} BC^2 + AD^2 &= (AB^2 + AC^2) + AD^2 \\ &= AB^2 + (AC^2 + AD^2) \\ &= (2OH)^2 + CD^2 \\ &= 4h^2 + 4r^2 \\ &= 4h^2 + 4(R^2 - h^2) \\ &= 4R^2 \text{ (không đổi).} \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} BD^2 + AC^2 &= (AB^2 + AD^2) + AC^2 \\ &= AB^2 + (AD^2 + AC^2) \\ &= 4R^2 \text{ (không đổi).} \end{aligned}$$

b) Trong (P), kẻ $AK \perp CD$ ($K \in CD$).

Ta có $AB \perp (P) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABK) \Rightarrow CD \perp BK$.

Vậy $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}BK.CD$.

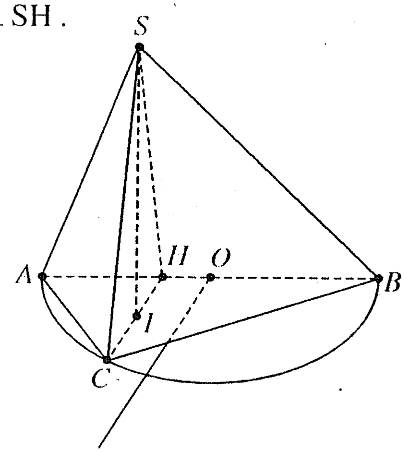
Vì $CD = 2r$ không đổi nên S_{BCD} lớn nhất khi và chỉ khi BK lớn nhất.

Tam giác ABK vuông tại A: $BK^2 = AB^2 + AK^2$, AB không đổi.

Do đó: $BK_{max} \Leftrightarrow AK_{max} \Leftrightarrow AK = AH \Leftrightarrow K \equiv H \Leftrightarrow CD \perp AH$ $(AK \le AH)$.

c) Trong mặt phẳng (P), ta có $AK \perp KH$ nên K luôn thuộc đường tròn đường kính AH trong mặt phẳng (P).

8. a) Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp CH \\ AB \perp SI \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp SH$.



Tam giác SAB vuông tại S có đường cao SH nên:

$$SA^2 = AH.AB.$$

Tam giác ABC vuông tại C có đường cao CH nên:

$$AC^2 = AH.AB.$$

Suy ra $SA = AC$.

Vậy hai tam giác vuông SAB và ACB bằng nhau.

Ta có $\widehat{ASB} = 90^\circ$ nên 4 điểm S, A, B, C cùng thuộc mặt cầu đường kính AB, bán kính R.

Diện tích mặt cầu: $S_{mc} = 4\pi R^2$.

b) Ta có: I là hình chiếu của S lên (P) suy ra ΔAIB là hình chiếu của ΔSAB lên (P).

Gọi φ là góc tạo bởi (SAB) và (P). Ta có:

$$S_{AIB} = S_{SAB}.\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{AIB}}{S_{SAB}} = \frac{S_{AIB}}{S_{ABC}} = \frac{IH}{CH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Vậy khi C chạy trên nửa đường tròn đó thì (SAB) luôn chứa AB cố định và tạo với (P) một góc 60°, suy ra (SAB) cố định.

c) Ta có: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SI$.

Tam giác ABC vuông tại C nên:

$$AC^2 = AH.AB = 2xR \Rightarrow AC = \sqrt{2xR} = SA.$$

$$BC^2 = BH.AB = 2R(2R - x) \Rightarrow BC = \sqrt{2R(2R - x)}.$$

$$CH.AB = AC.BC$$

$$\Rightarrow \quad CH = \frac{AC.BC}{AB} = \frac{\sqrt{2xR.2R(2R - x)}}{2R} = \sqrt{x(2R - x)}.$$

Ta có I là trung điểm CH, SI $\perp$ CH nên tam giác SCH cân tại S.

Theo câu a thì $\Delta CAB = \Delta SAB$. Từ đó suy ra CH = SH (hai đường cao tương ứng).

Suy ra tam giác SCH đều và $SI = \frac{CH\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3x(2R-x)}}{2}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SI = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.CH.AB.\frac{CH\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.2R.x(2R-x)$

$= \frac{\sqrt{3}}{6}Rx(2R-x)$.

Ta có: $V = \frac{\sqrt{3}}{6}R.x(2R-x) \leq \frac{\sqrt{3}}{6}R.\left(\frac{x+2R-x}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}R^3}{6}$

nên $V_{max} = \frac{\sqrt{3}}{6}R^3 \Leftrightarrow x = 2R - x \Leftrightarrow x = R$.

- *Có thể định x bằng cách khác như sau:*

Ta có: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SI = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.CH.AB.\frac{CH\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}R}{6}CH^2$.

$V_{max} \Leftrightarrow AH_{max} \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow x = R$.

d) Theo câu b), mặt phẳng (SAB) cố định, ta kí hiệu là mặt phẳng (Q).

Trong (Q), tam giác SAB vuông tại S nên O là tâm của tam giác SAB.

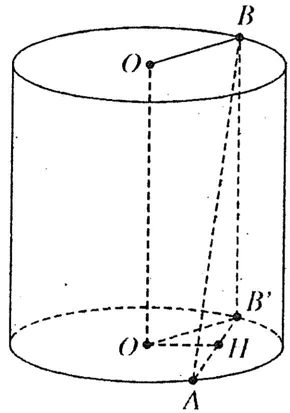
Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với (Q), ta có d cố định và d chính là trục của tam giác SAB. Do đó tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABI phải thuộc đường thẳng cố định d.

§2. MẶT TRỤ. HÌNH TRỤ. KHỐI TRỤ

1. Kẻ đường sinh BB'.

Ta có: $OO'//(ABB')$

$\Rightarrow$ $d(OO', AB) = d(OO', (ABB')) = d(O, (ABB'))$.



Gọi H là trung điểm AB', ta có:

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp AB' \\ OH \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (ABB') \Rightarrow OH = d(O,(ABB')).$$

a) Với $AB = \frac{3}{2}h$:

Tam giác ABB' vuông tại B' có:

$$AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = \sqrt{\left(\frac{3h}{2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{\frac{5h^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}h}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{5}h}{4}.$$

Tam giác OAH vuông tại H có:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{5}h}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16R^2 - 5h^2}}{4} = d(OO', AB).$$

b) Góc giữa AB và mặt đáy là α $\Rightarrow \widehat{BAB'} = \alpha$.

Tam giác ABB' vuông tại B' có

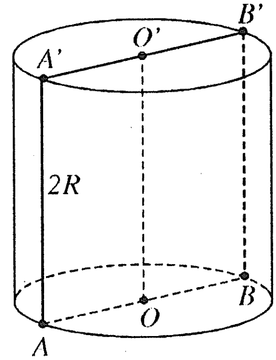
$$\tan\alpha = \frac{BB'}{AB'} = \frac{h}{AB'} \Rightarrow AB' = \frac{h}{\tan\alpha} \Rightarrow AH = \frac{h}{2\tan\alpha},$$

Tam giác OAH vuông tại H có:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2\tan\alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4R^2\tan^2\alpha - h^2}}{2\tan\alpha} = d(OO', AB).$$

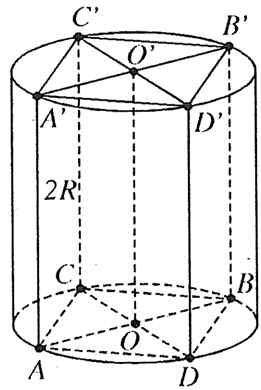
2. a) Thiết diện AA'B'B là hình vuông.



Suy ra AA' = AB = 2R.

$$S_{xq} = 2\pi R.OO' = 2\pi R.2R = 4\pi R^2.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{(O.R)} = 4\pi R^2 + 2.\pi R^2 = 6\pi R^2.$$



b) $V = S_{(O;\,R)}.OO' = \pi R^2.2R = 2\pi R^3.$

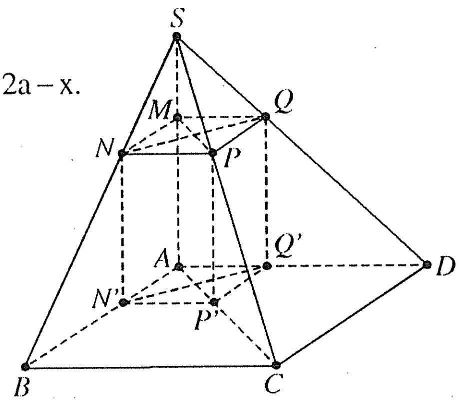
c) $V_{ACBD.A'C'B'D'} = S_{ACBD}.AA'$

$$= AC^2.2R = \left(\frac{2R}{\sqrt{2}}\right)^2.2R = 4\sqrt{2}R^3.$$

3. a) $S_{MNPQ} = MN.MQ = MN^2$ (MNPQ là hình vuông).

$$MN \,//\, AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{AB.SM}{SA} = \frac{a.(2a-x)}{a} = 2a - x.$$



$S_{MNPQ} = (2a - x)^2.$

b) Gọi R là bán kính đáy hình trụ, ta có:

$$R = \frac{MN}{2} = \frac{2a-x}{2}.$$

$$V_{trụ} = \pi R^2.x = \pi x\frac{(2a-x)^2}{4}.$$

c) Ta có: $\pi x\dfrac{(2a-x)^2}{4} = \dfrac{\pi}{8}.2x(2a-x)(2a-x) \overset{C}{\le} \dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{2x+(2a-x)+(2a-x)}{3}\right)^3$

$$= \frac{\pi}{8}.\frac{64a^3}{27} = \frac{8\pi a^3}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2x = 2a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{3}.$

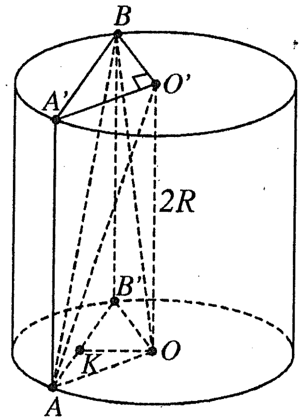
4. a) Tam giác OO'A vuông tại O (OO' là trục của hình trụ $\Rightarrow$ OO'$\perp$ OA).

Tam giác OO'B vuông tại O' (OO' là trục của hình trụ $\Rightarrow$ OO'$\perp$ O'B).

Tam giác AOB vuông tại O $\left(\left.\begin{matrix} OA \perp OO' \\ OA \perp O'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp (OO'B) \Rightarrow OA \perp OB\right)$.

Tam giác AO'B vuông tại O' (do BO' $\perp$ (AOO')).

$$V = \frac{1}{6}OA.O'B.OO' = \frac{1}{6}.R.R.2R = \frac{R^3}{3}.$$



b) Kẻ đường sinh AA' và BB', ta được thiết diện song song với trục là hình chữ nhật AA'BB'.

Gọi K là trung điểm AB' ta có:

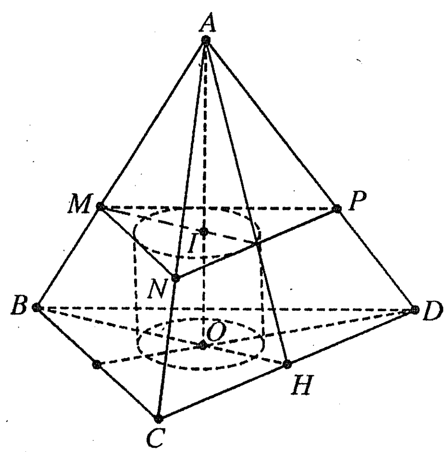
$$\left.\begin{matrix} OK \perp AB' \\ OK \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow OK \perp (\alpha)$$

$$\Rightarrow OK = d(O,(\alpha)) = d(OO',(\alpha)).$$

Tam giác OAB' vuông cân tại O nên: $OK = \dfrac{AB'}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(OO',(\alpha)) = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

c) Theo câu b) ta có $d(OO',(\alpha)) = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ nên (α) luôn tiếp xúc với mặt trụ có trục OO' và bán kính $r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ cố định.



5. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MNP và x = AI.

Ta có:

$$V_{h.trụ} = \pi r^2 OI = \pi r^2 (AO - x).$$

ABCD là tứ diện đều nên AO là trục của tam giác BCD $\Rightarrow$ AO $\perp$ (BCD).

Tam giác AOB vuông tại O nên:

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Mặt phẳng (α) vuông góc với OA nên (α) // (BCD).

Ta có tam giác MNP đồng dạng với tam giác BCD theo tỉ số $\frac{AI}{AO}$. Do đó tam giác MNP cũng là tam giác đều.

$$\frac{MP}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{3x}{a\sqrt{6}} \Rightarrow MP = \frac{3x}{\sqrt{6}} \quad (BD = a).$$

Diện tích tam giác MNP: $S_{MNP} = MP^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{24} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$.

Ta có: $S_{MNP} = p.r \Rightarrow r = \frac{S_{MNP}}{p} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{8}}{3.\frac{3x}{\sqrt{6}}} = \frac{9\sqrt{2}x}{8}$.

Suy ra: $V_{h.trụ} = \pi\left(\frac{9\sqrt{2}x}{8}\right)^2\left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - x\right) = \frac{81\pi}{96}x^2\left(a\sqrt{6} - 3x\right)$.

Ta có:

$$\frac{81\pi}{96}x^2\left(a\sqrt{6} - 3x\right) = \frac{81\pi}{96}.\frac{3}{2}.x.x\left(\frac{2\sqrt{6}a}{3} - 2x\right)$$

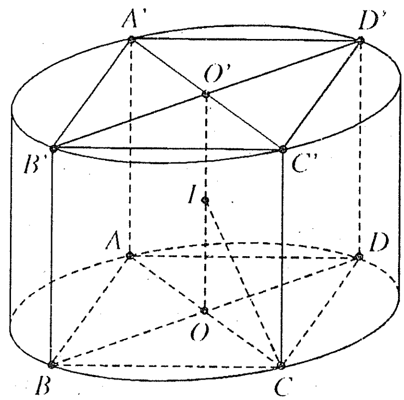
$$\overset{\text{Cô-si}}{\leq} \frac{81\pi}{64}\left(\frac{x + x + \frac{2\sqrt{6}a}{3} - 2x}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}\pi}{12}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}a}{3} - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}a}{9}$.

Khi đó: $\frac{AI}{AO} = \frac{2\sqrt{6}a}{9}.\frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{2}{3}$.

Vậy khi điểm I thuộc đoạn AO và chia tỉ lệ $\frac{AI}{AO} = \frac{2}{3}$ thì thể tích hình trụ là lớn nhất.

6. a) Hình trụ có chiều cao bằng a, có bán kính đáy bằng $r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



$$V_{h.trụ} = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 .a = \frac{\pi a^3}{2}.$$

b) Gọi I là trung điểm OO', R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.

Ta có I chính là tâm của mặt cầu.

Khi đó: $R = \sqrt{OI^2 + r^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

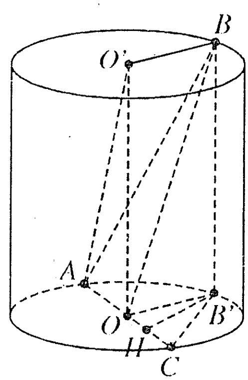
Vậy $\quad S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.

7. Kẻ đường sinh BB'. Tam giác ABB' vuông tại B' có:

$$AB'^2 = AB^2 - BB'^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2.$$

Tam giác AB'C vuông tại B' có:

$$CB'^2 = AC^2 - AB'^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2.$$



Kẻ đường cao B'H của tam giác vuông AB'C, ta có:

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'A^2} + \frac{1}{B'C^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

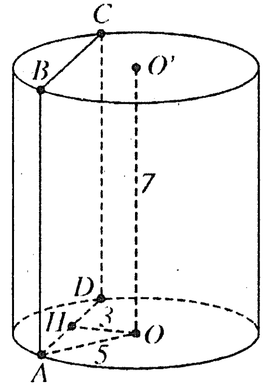
$$\Rightarrow B'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì B'H = d(B', (AOO')) = d(B, (AOO'))

$$\Rightarrow V_{ABOO'} = \frac{1}{3}B'H.S_{AOO'} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}AO.OO' = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

8. Mặt phẳng (ABCD) song song với trục OO' và cách trục 3cm.

Gọi H là trung điểm AD. Ta có:



$$\left.\begin{matrix} OH \perp AD \\ OH \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow OH = d(O,(ABCD)) = d(OO',(ABCD)) = 3cm.$$

Tam giác OHA vuông tại H có:

$$HA^2 = OA^2 - OH^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow HA = 4cm \Rightarrow AD = 8cm.$$

$$S_{ABCD} = AB.AD = 8.7 = 56\ (cm^2).$$

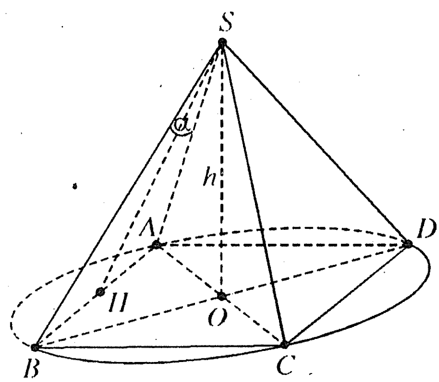
§3. MẶT NÓN. HÌNH NÓN. KHỐI NÓN

1. a) Gọi a là cạnh hình vuông ABCD.

Tam giác SOA vuông tại O có:

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Tam giác SAH vuông tại H có $\widehat{ASH} = \frac{\widehat{ASB}}{2} = \frac{\alpha}{2}$, suy ra



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{HA}{SA} \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(h^2 + \frac{a^2}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \left(4h^2 + 2a^2\right)\sin^2\frac{\alpha}{2} = a^2$$

$$\Leftrightarrow 4h^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{4h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} \Leftrightarrow a = \frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Tam giác SHA vuông tại H có:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{HA}{SH} \Rightarrow SH = \frac{HA}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

$$S_{xq} = 4.S_{SAB} = 2SH.AB = 2\frac{a}{2\tan\frac{\alpha}{2}}.a = \frac{a^2}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{4h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha.\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{2h^2\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = 2h^2\tan\alpha.$$

b) Ta có: $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$,

$$SA^2 = h^2 + \frac{a^2}{2} = h^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)^2 = h^2 + \frac{2h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

$$= h^2\frac{\cos\alpha + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{h^2}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{h}{\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Vậy $S = \pi.OA.SA = \pi\dfrac{\sqrt{2}h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}.\dfrac{h}{\sqrt{\cos\alpha}} = \dfrac{\sqrt{2}\pi h^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

2. a) $S = \pi Rd = \pi.25.10 = 250\pi$ (cm^2).

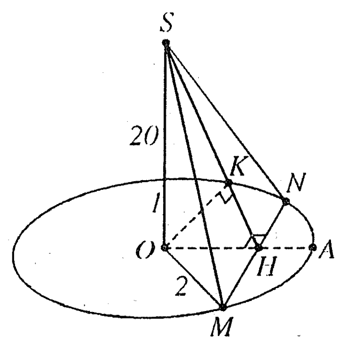
b) Theo hình vẽ ta có thiết diện qua đỉnh là tam giác SMN và d(O, (SMN)) = 12cm.

Kẻ bán kính OA ⊥MN tại H.

Khi đó MN ⊥ (SOH).

Kẻ OK ⊥ SH (K ∈ SH).

Suy ra OK = d(O, (SMN)) = 12cm.



Tam giác SOH vuông tại O có:

$$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{SO^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}-\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{144}-\frac{1}{400}=\frac{1}{225}$$

$\Rightarrow OH = 15cm.$

Tam giác OHM vuông tại H có:

$$HM^2 = OM^2 - OH^2 = 625 - 225 = 400$$

$\Rightarrow HM = 20cm \Rightarrow MN = 40cm.$

Tam giác SOH vuông tại H có:

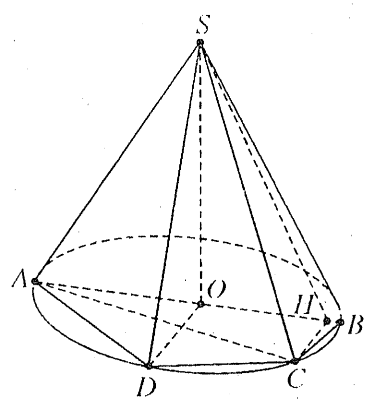
$$SH^2 = SO^2 + OH^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow SH = 25cm.$$

Vậy $S_{SMN} = \frac{1}{2}SH.MN = \frac{1}{2}.25.40 = 500cm^2.$

3. a) Tam giác SAB đều có cạnh $AB = 2R$, đường cao $SH = R\sqrt{3}$.

$$S_{xq} = \pi Rd = \pi R.2R = 2\pi R^2.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{3}.$$



b) Do $\widehat{BAD} = 45^0$ nên $OD \perp AB$

$\Rightarrow OH \perp (SAB).$

Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$)

$\Rightarrow CH \,//\, OD \Rightarrow CH \perp (SAB).$

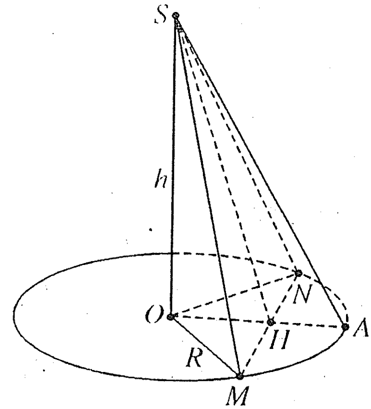
Suy ra ΔSOH là hình chiếu của ΔSCD lên mặt phẳng (SAB)

$$\Rightarrow S_{SOH} = S_{SCD}.\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{SOH}}{S_{SCD}} = \frac{OH}{AB}.$$

4. Thiết diện là tam giác SMN cân tại S.

Kẻ bán kính OA của hình nón vuông góc với MN tại H. Đặt x = OH.



Tam giác OHM vuông tại H có:

$$HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - x^2$$

$$\Rightarrow HM = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Tam giác SOH vuông tại O có:

$$SH^2 = SO^2 + OH^2 = h^2 + x^2$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{h^2 + x^2}.$$

Diện tích thiết diện:

$$S_{SMN} = \frac{1}{2}SH.MN = \frac{1}{2}\sqrt{h^2+x^2}.2\sqrt{R^2-x^2} = \sqrt{h^2+x^2}.\sqrt{R^2-x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

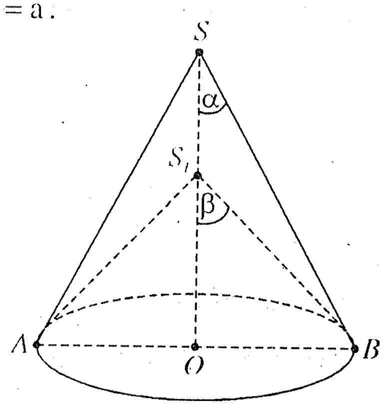
$$\sqrt{h^2+x^2}.\sqrt{R^2-x^2} \le \frac{(h^2+x^2)+(R^2-x^2)}{2} = \frac{h^2+R^2}{2}.$$

Suy ra $S_{max} = \dfrac{h^2+R^2}{2} \Leftrightarrow h^2+x^2 = R^2-x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{R^2-h^2}{2}}$.

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi giao tuyến của (α) với mặt đáy của hình nón cách tâm của đáy một khoảng bằng $\sqrt{\dfrac{R^2-h^2}{2}}$.

5. Theo giả thiết ta suy ra:

$$\widehat{OSB} = \alpha,\ \widehat{OS_1B} = \beta \text{ và } S_1S = OS - OS_1 = a.$$



Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Tam giác SOB vuông tại O nên:

$$\tan\alpha = \frac{R}{SO} \Rightarrow SO = \frac{R}{\tan\alpha}.$$

Tam giác S_1OB vuông tại O nên:

$$\tan\beta = \frac{R}{S_1O} \Rightarrow S_1O = \frac{R}{\tan\beta}.$$

Vì $OS - OS_1 = a \Leftrightarrow \dfrac{R}{\tan\alpha} - \dfrac{R}{\tan\beta} = a \Leftrightarrow R\dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta} = a$

$$\Leftrightarrow R = a\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}.$$

Suy ra: $SO = \dfrac{R}{\tan\alpha} = a\dfrac{\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$, $S_1O = \dfrac{R}{\tan\beta} = a\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$.

Gọi V, V_1 lần lượt là thể tích của hai hình nón ứng với đỉnh S và S_1. Ta có:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2.SO = \frac{1}{3}\pi R^2 a\frac{\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} = \frac{\pi R^2 a\tan\beta}{3(\tan\beta - \tan\alpha)};$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2.S_1O = \frac{1}{3}\pi R^2 a\frac{\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} = \frac{\pi R^2 a\tan\alpha}{3(\tan\beta - \tan\alpha)}.$$

Vậy thể tích của phần cần tìm là:

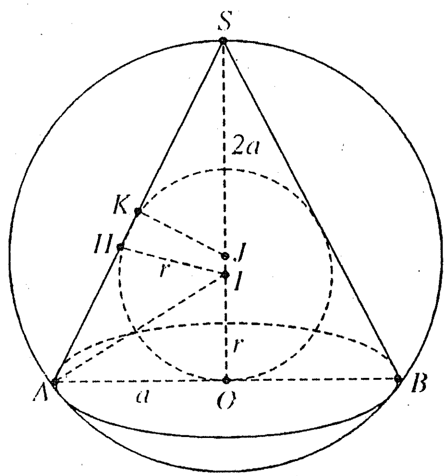
$$V' = V - V_1 = \frac{\pi R^2 a\tan\beta}{3(\tan\beta - \tan\alpha)} - \frac{\pi R^2 a\tan\alpha}{3(\tan\beta - \tan\alpha)} = \frac{\pi R^2 a}{3}.$$

6. Gọi I là tâm, r là bán kính và V_1 là thể tích hình cầu nội tiếp hình nón.

Tam giác SOA vuông tại O có:

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$$

$$\Rightarrow SA = a\sqrt{5}.$$



Tam giác SHI vuông tại H có:

$$SI^2 = SH^2 + HI^2$$

$$\Leftrightarrow (2a - r)^2 = (a\sqrt{5} - a)^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a.$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3.$$

Gọi J là tâm, R là bán kính và V_2 là thể tích hình cầu ngoại tiếp hình nón.

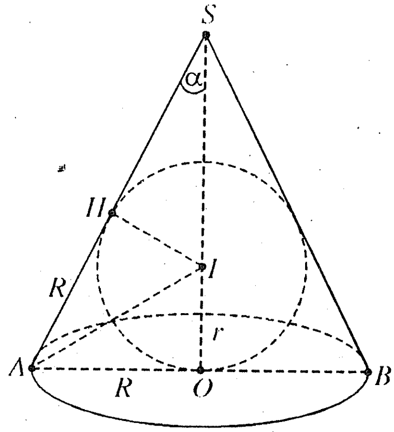
Ta có R = JS = JA = JB.

Gọi K là trung điểm của SA, vì tứ giác AKIO nội tiếp nên:

$$SI.SO = SK.SA \Rightarrow SI = \frac{SK.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{5a^2}{2.2a} = \frac{5}{4}a.$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5a}{4}\right)^3 = \frac{125\pi a^3}{48}.$$

7. Gọi R là bán kính đáy của hình nón.



Tam giác SHI vuông tại H có:

$$\begin{cases} SH = \dfrac{r}{\tan\alpha} = r\cot\alpha \\ SI = \dfrac{r}{\sin\alpha}. \end{cases}$$

Tam giác SAO vuông tại O có:

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 \Leftrightarrow (SH + R)^2 = (SI + r)^2 + R^2$$

$$\Leftrightarrow (r\cot\alpha + R)^2 = \left(\frac{r}{\sin\alpha} + r\right)^2 + R^2$$

$$\Leftrightarrow r^2\cot^2\alpha + 2rR\cot\alpha + R^2 = r^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha} + 1\right) + R^2.$$

$$\Leftrightarrow 2rR\cot\alpha = r^2\left(1 + \cot^2\alpha + \frac{2}{\sin\alpha} + 1\right) - r^2\cot^2\alpha$$

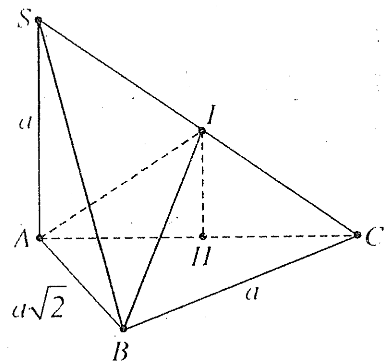
$$\Leftrightarrow 2rR\cot\alpha = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow R = r\left(\frac{1}{\sin\alpha} + 1\right)\tan\alpha$$

$$\Leftrightarrow R = r\left(\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}\right).$$

Suy ra $V_{nón} = \frac{1}{3}\pi R^2.SO = \pi r^2\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2.\left(\frac{r}{\sin\alpha} + r\right) = \pi r^3\frac{(1+\sin\alpha)^3}{\cos^2\alpha\sin\alpha}.$

§4. TỔ HỢP HÌNH CẦU, HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN



1. a) Gọi I là trung điểm SC. Tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm SC nên:

$$IS = IA = IC. \qquad (1)$$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA. \end{cases}$

Suy ra: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Tam giác SBC vuông tại B có I là trung điểm SC nên $IS = IB = IC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$IS = IA = IB = IC.$$

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC và bán kính $R = \dfrac{SC}{2}$.

Ta có: $SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2$

$= a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2$

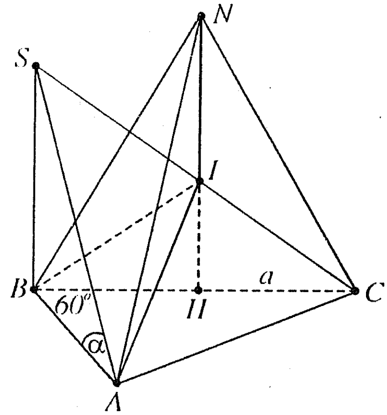
$\Rightarrow SC = 2a \Rightarrow R = a$.

b) *Nhận xét:* đường tròn giao tuyến của (ABC) với mặt cầu tâm I chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi H là trung điểm AC. Tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, bán kính $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có:

$$S_{xqnón} = \pi.r.IC = \pi\frac{a\sqrt{3}}{2}a = \frac{\pi a^2.\sqrt{3}}{2};$$

$$V_{nón} = \frac{1}{3}\pi.r^2.IH = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{8}.$$



2. a) Ta có: $\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (ABC) \\ (SBC) \perp (ABC) \\ SB = (SAB) \cap (SBC)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow SB \perp (ABC)$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l}AC \perp AB \text{ (gt)} \\ AC \perp SB \ (SB \perp (ABC))\end{array}\right\}$

$\Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp SA$.

Gọi I là trung điểm SC. Ta có:

– Tam giác SBC vuông tại B nên IS = IB = IC.

– Tam giác SAC vuông tại A nên IS = IA = IC.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC, bán kính $R = \dfrac{SC}{2}$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l}AC \perp (SAB) \\ AC = (SAC) \cap (ABC) \\ SA = (SAB) \cap (SAC) \\ AB = (SAB) \cap (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow \left((SAC),(ABC)\right) = (SA, AB) = \widehat{SAB} = \alpha$.

Tam giác ABC vuông tại A, $B = 60^{\circ}$, BC = a nên $AB = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại B nên $SB = AB.\tan\alpha = \dfrac{a}{2}\tan\alpha$.

Tam giác SBC vuông tại B nên

$$SC^2 = SB^2 + BC^2 = \frac{a^2}{4}\tan^2\alpha + a^2 = \frac{a^2}{4}\left(\tan^2\alpha + 4\right)$$

$$\Rightarrow SC = \frac{a}{2}\sqrt{\tan^2\alpha + 4}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{4}\sqrt{\tan^2\alpha + 4}.$$

$$S_{mcầu} = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\frac{a}{4}\sqrt{\tan^2\alpha + 4}\right)^2 = \frac{\pi a^2\left(\tan^2\alpha + 4\right)}{4}.$$

b) Khối nón nội tiếp mặt cầu có đường cao h = NH = R + IH

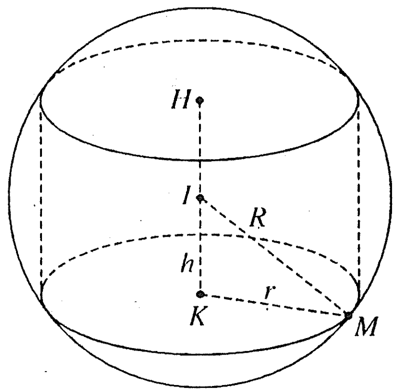
$$\Rightarrow h = \frac{a}{4}\sqrt{\tan^2\alpha + 4} + \frac{SB}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{\tan^2\alpha + 4} + \frac{a}{4}\tan\alpha$$

$$= \frac{a}{4}\left(\sqrt{\tan^2\alpha + 4} + \tan\alpha\right).$$

$$V_{nón} = \frac{1}{3}\pi R^2.h = \frac{1}{3}.\pi\frac{a^2}{16}\left(\tan^2\alpha + 4\right).\frac{a}{4}\left(\sqrt{\tan^2\alpha + 4} + \tan\alpha\right)$$

$$= \frac{\pi a^3}{192}\left(\tan^2\alpha + 4\right)\left(\sqrt{\tan^2\alpha + 4} + \tan\alpha\right).$$

3. Gọi 2h là chiều cao hình trụ và r là bán kính đáy hình trụ.



Ta có: $V_{trụ} = 2\pi r^2 h$

$$V^2 = 4\pi^2 r^4 h^2 = 4\pi^2.4.\frac{r^2}{2}.\frac{r^2}{2}.h^2$$

$$\leq 16\pi^2\left(\frac{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + h^2}{3}\right)^3$$

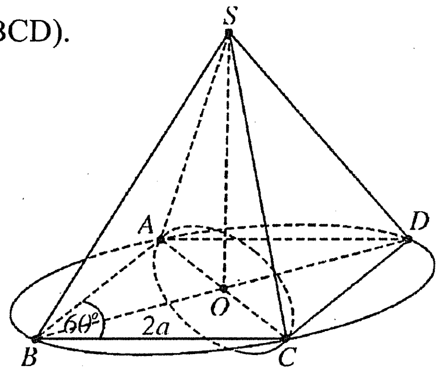
$$= \frac{16\pi^2}{27}\left(r^2 + h^2\right)^3 = \frac{16\pi^2 R^6}{27}$$

$$\Rightarrow V \leq \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Suy ra $V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{r^2}{2} = h^2 \Leftrightarrow r^2 = 2h^2 \Leftrightarrow r^2 + h^2 = 3h^2 = R^2 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}.$

Vậy $V_{max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$

z4. Ta có: $\left.\begin{array}{l}(SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ SO = (SAC) \cap (SBD)\end{array}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$



Tam giác ABC đều do có AB = BC, góc ABC = 60°, do đó

$$\begin{cases} AC = 2a \\ BO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow BD = 2a\sqrt{3}$.

Tam giác SBD đều nên $SO = \dfrac{BD\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy ta được:

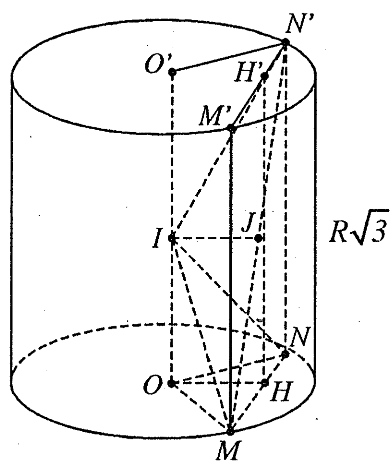
$$V_{\text{nón SAC}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 SO = \frac{\pi}{3}a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3};$$

$$V_{\text{nónSBD}} = \frac{1}{3}\pi(OB)^2 SO = \frac{\pi}{3}3a^2.a\sqrt{3} = \pi a^3\sqrt{3}.$$

Thể tích cần tìm: $V = V_{\text{nónSBD}} - V_{\text{nónSAC}} = \frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$.

5. a) Gọi H, H' lần lượt là trung điểm MN và M'N'.

Ta có tứ giác MNN'M' là hình chữ nhật.



J là trung điểm đường chéo MN' nên J cũng là trung điểm của đường trung bình HH'.

Vì I là trung điểm OO', nên IJ là đường trung bình hình chữ nhật OHH'O'.

Suy ra IJ // OH. (1)

Ta có MN = OM = ON = R nên tam giác OMN đều.

H là trung điểm MN nên OH vuông góc MN.

Vì OH cũng vuông góc NN' nên OH vuông góc với mặt phẳng (MNN'M'). (2)

Từ (1) và (2) suy ra IJ vuông góc với (MNN'M').

b) Ta có: $\left.\begin{array}{l} IJ//OH \\ OH \perp OO' \end{array}\right\} \Rightarrow IJ \perp OO'$; $IJ = OH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Vậy J luôn cách trục OO' một khoảng không đổi bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Suy ra J thuộc mặt trụ cố định có trục OO' và bán kính bằng $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Tính thể tích khối trụ (OO', r):

$$V = \pi r^2 OO' = \pi\frac{3R^2}{4}R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}\pi R^3}{4}.$$

c) Khối nón đỉnh I và trục IJ và đường sinh là IM có đáy đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật MNN'M' và có chiều cao là IJ. Ta được:

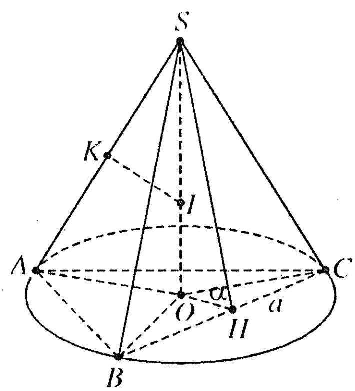
$$V_{nón} = \frac{1}{3}IJ.\pi\left(\frac{MN'}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{3}.\frac{R\sqrt{3}}{2}.\frac{R^2+3R^2}{4} = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{6}.$$

6. Gọi O là tâm hình chóp đều SABC, suy ra SO là trục tam giác ABC.

Gọi K là trung điểm SA, trong (SAO) kẻ đường trung trực của SA, cắt SO tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC, bán kính R = IS.

Tứ giác AKIO nội tiếp nên:

$$SI.SO = SK.SA = \frac{1}{2}SA^2 \Rightarrow SI = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SO}.$$



Tam giác SOH vuông tại O nên:

$$SO = OH.\tan\alpha = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\alpha$$

$$\Rightarrow R = SI = \frac{1}{2}\frac{6.a^2}{a\sqrt{3}\tan\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{\tan\alpha}.$$

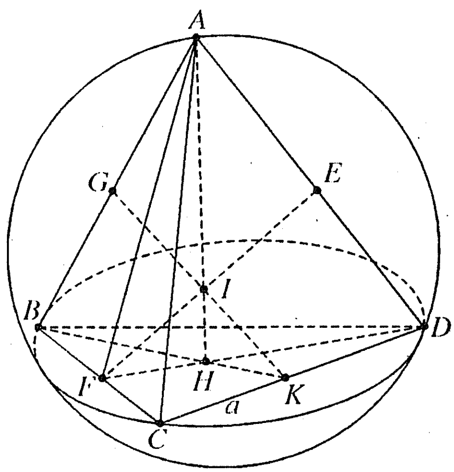
Ta có: $V_{\text{cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{\tan\alpha}\right)^3 = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{\tan^3\alpha}$.

Khối nón nội tiếp mặt cầu (S) có chiều cao SO và bán kính $r = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2.SO = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\tan\alpha = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}a^3\tan\alpha$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

1. a) Gọi I là trọng tâm của tứ diện đều ABCD. Khi đó I thuộc trục AH của tam giác BCD, do đó: IB = IC = ID. Tương tự ta cũng có IA = IC = ID.



Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều ABCD,

bán kính $R = IA = \dfrac{3}{4}AH$.

Tam giác ABH vuông tại H nên:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{4}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$$

b) $V' = \pi.BH^2.AH = \pi\dfrac{a^2}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$;

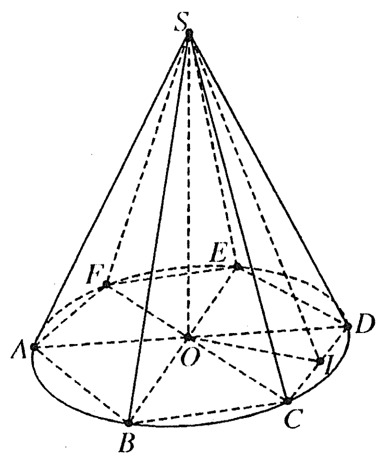
$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{BCD}.AH = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ta có: * $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}.\dfrac{9}{\pi a^3\sqrt{6}} = \dfrac{9}{8}$;

* $\dfrac{V_{ABCD}}{V} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}.\dfrac{8}{\pi a^3\sqrt{6}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$;

* $\dfrac{V_{ABCD}}{V'} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}.\dfrac{9}{\pi a^3\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

2. a) Gọi O là tâm của lục giác đều ABCDEF.



Ta có OA = OB = AB = a.

Từ giả thiết suy ra góc SAO = 60^o.

Hình chóp S.ABCDEF là hình chóp đều nên SO là trục của đáy.

Tam giác SAO vuông tại O nên:

$$SO = OA.\tan 60^o = a\sqrt{3}.$$

Tam giác SOI vuông tại O nên:

$$SI^2 = SO^2 + OI^2 = 3a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{15a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Ta có: $S_{xq} = 6S_{SCD} = 6.\dfrac{1}{2}SI.CD = 3\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.a = \dfrac{3a^2\sqrt{15}}{2}$;

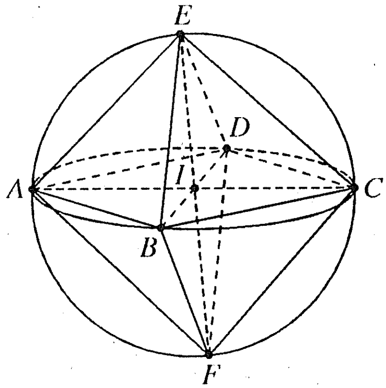
$$V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCDEF} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{2}.$$

b) Ta có: $S' = \pi.OA.SA = \pi.a.2a = 2\pi a^2$;

$$V' = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi a^2 a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\frac{S_{xq}}{S'} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{2.2\pi a^2} = \frac{3\sqrt{15}}{4};\ \frac{V}{V'} = \frac{3a^3}{2}.\frac{3}{\pi a^3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

3. * $V = 2V_{E.ABCD} = 2.\frac{1}{3}EI.S_{ABCD} = \frac{2}{3}EI.a^2$.

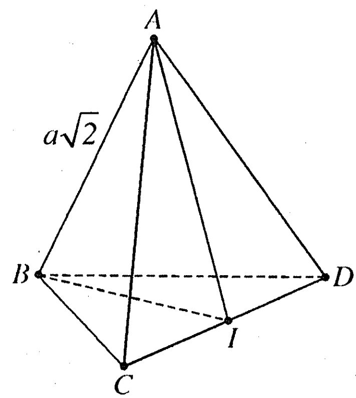


Ta có: $EI = AI = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

* $V' = \frac{4}{3}\pi.AI^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $\frac{V}{V'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.\frac{3}{\pi a^3\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi}$.

4. a) Nhận xét: với giả thiết CD = 2a, các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{2}$. Ta có:



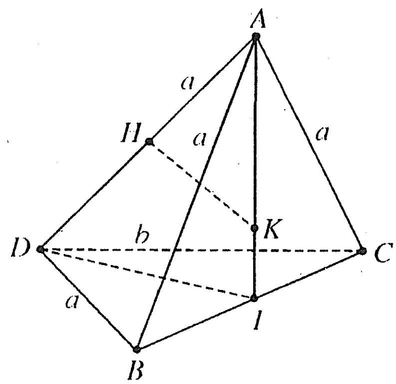
* Các tam giác ABC, ABD là các tam giác đều, có cạnh bằng $a\sqrt{2}$.
* Các tam giác ACD, BCD là các tam giác vuông cân lần lượt tại A và B. Do đó với I là trung điểm CD, ta có: IA = IC = ID và IB = IC = ID.

  Suy ra IA = IB = IC = ID.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, bán kính $R = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

b) $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$; $V_{kc} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

5. Gọi I là trung điểm BC.



Vì AB = AC nên AI ⊥ BC.

Ta có (ABC) ⊥ (DBC) nên AI ⊥ (DBC).

Vì AB = AC = AD = a nên AI là trục của tam giác BCD.

Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Ta có I là trung điểm BC nên tam giác BCD vuông tại D.

Trong tam giác ADI, kẻ đường trung trực của AD, cắt AI tại K.

Khi đó: KA = ID.

Vì K thuộc trục AI nên: KB = KC = KD.

Vậy K là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, bán kính R = AK.

Tam giác BCD vuông tại D nên:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow BC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow DI = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Tam giác ADI vuông tại I nên:

$$AI^2 = AD^2 - DI^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{4}\right) = \frac{3a^2 - b^2}{4}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2} \ (b < a\sqrt{3}).$$

Trong mặt phẳng (ADI), tứ giác DHKI nội tiếp nên:

$$AK.AI = AH.AD$$

$$\Rightarrow AK = \frac{AH.AD}{AI} = \frac{a^2}{2}.\frac{2}{\sqrt{3a^2 - b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}} = R.$$

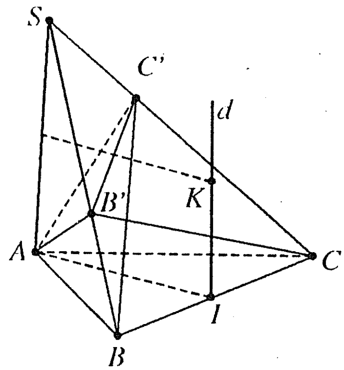
6. a) Ta có: AB $\perp$ AC (gt). (1)

Ta có: AC $\perp$ SA và AC $\perp$ AB

$\Rightarrow$ AC $\perp$ (SAB) $\Rightarrow$ AC $\perp$ SB.

Vì AB' $\perp$ SB (gt) nên SB $\perp$ (AB'C).

Suy ra SB $\perp$ B'C hay B'B $\perp$ B'C. (2)



* Tương tự ta chứng minh được:

AB $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ AB $\perp$ SC,

mà AC' $\perp$ SC (gt)

suy ra SC $\perp$ (ABC').

Do đó SC $\perp$ BC' hay CC' $\perp$ BC'. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra 5 điểm A, B, C, B', C' cùng thuộc mặt cầu đường kính BC, tâm là trung điểm I của BC, bán kính $R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{9a^2 + 16a^2}}{2} = \frac{5a}{2}$.

b) Qua I dựng đường thẳng d song song với SA. Khi đó d là trục tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SA, d), kẻ đường trung trực SA, cắt d tại K. Suy ra K là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

Bán kính $R' = KA = \sqrt{AI^2 + IK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{4} + a^2}$

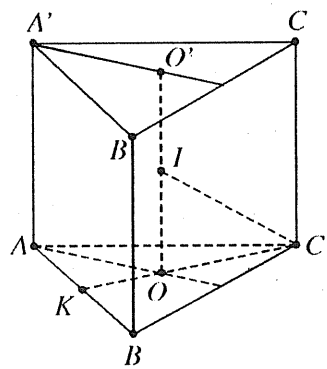
$$= \frac{a\sqrt{29}}{2} \left(IK = \frac{SA}{2} = a\right).$$

Gọi V là thể tích khối cầu qua 5 điểm A, B, C, B', C'. Gọi V' là thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

Ta có $\frac{V}{V'} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R'^3} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{25a^2}{4} \cdot \frac{4}{29a^2} = \frac{25}{29}$.

7. Gọi O, O' lần lượt là tâm của tam giác đều ABC và A'B'C'. Gọi I là trung điểm OO', khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C'.

Bán kính R = IC, $OI = \frac{h}{2}$.



Ta có: $OC = \sqrt{IC^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$

$$\Rightarrow CK = \frac{3}{2}\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2CK}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow V_{\text{lăng trụ}} = S_{ABC}.h = \frac{3\sqrt{3}h}{4}\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

8. Gọi H là trung điểm AD. Tứ giác ABCH là hình vuông.

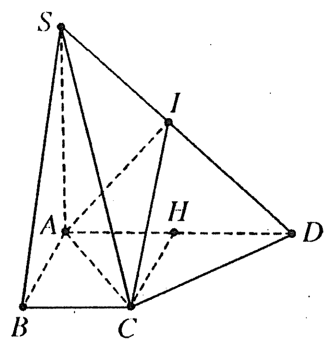
Suy ra CH = AH = HD = a.

Do đó $AC \perp CD$.

Vì $SA \perp CD$ nên $CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow$ $CD \perp SC$. (1)

Ta lại có $SA \perp AD$. (2)



Từ (1) và (2) suy ra tứ diện S.ACD nội tiếp mặt cầu đường kính SD, tâm là trung điểm I của SD, bán kính $R = \frac{SD}{2}$.

Ta có CH $\perp$ (SAD) nên: tam giác SHD là hình chiếu của tam giác SCD lên (SAD)

$$\Rightarrow S_{SHD} = S_{SCD}.\cos 60^0 \qquad \Rightarrow S_{SHD} = \frac{1}{2}S_{SCD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}SA.a = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}SC.a\sqrt{2} \qquad \Rightarrow SA = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{SA^2 + 2a^2}$$

$$\Rightarrow 2SA^2 = SA^2 + 2a^2 \qquad \Rightarrow SA^2 = 2a^2 \qquad \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

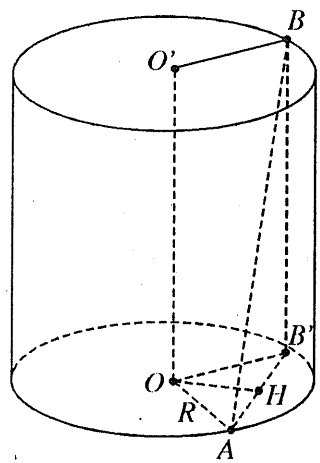
$$\Rightarrow SD = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6} \qquad \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi\frac{3}{2}a^2 = 6\pi a^2.$$

9. Kẻ đường sinh BB', gọi H là trung điểm AB'.

Ta có OH $\perp$ (ABB')

$$\Rightarrow OH = d(O, (ABB')) = (OO', AB) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Gọi R là bán kính hình trụ.

Tam giác OAH vuông tại H nên:

$$AH^2 = R^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow AB'^2 = 4AH^2 = 4R^2 - 3a^2.$$

Tam giác ABB' vuông tại B' nên:

$$BB'^2 = AB^2 - AB'^2 = 2a^2 - \left(4R^2 - 3a^2\right) = 5a^2 - 4R^2$$

$$\Rightarrow BB' = \sqrt{5a^2 - 4R^2}.$$

$$V_{\text{hình trụ}} = \pi R^2.BB' = \pi R^2\sqrt{5a^2 - 4R^2} = \pi a^3$$

$$\Rightarrow R^4(5a^2 - 4R^2) = a^6$$

$$\Rightarrow 4R^6 - 5a^2R^4 + a^6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{R}{a}\right)^6 - 5\left(\frac{R}{a}\right)^4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4t^3 - 5t^2 + 1 = 0\left(\text{đặt } t = \left(\frac{R}{a}\right)^2 > 0\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} R^2 = a^2 \\ R^2 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}a^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} R = a \\ R = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}}a. \end{array}\right.$$

* Với $R = a \Rightarrow BB' = a$;

* Với $R = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}}a \Rightarrow BB' = \dfrac{9-\sqrt{17}}{2}a$.

MỤC LỤC

Chương II.

MẶT CẦU. MẶT TRỤ. MẶT NÓN

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐTV kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN KHÁNH
Phó Giám đốc phụ trách Công ty CP DVXBGD Gia Định TRẦN THỊ KIM NHUNG

Biên tập lần đầu: LỤC VĂN HÀO
Biên tập tái bản: TRẦN THANH HÀ
Trình bày bìa: NGUYỄN MẠNH HÙNG
Biên tập kĩ thuật: DIỆU TÂM
Sửa bản in: LỤC VĂN HÀO
Chế bản: DIỆU TÂM

GIẢI TOÁN 12: KHỐI ĐA DIỆN VÀ KHỐI TRÒN XOAY

(Dành cho học sinh lớp chuyên)

Mã số: **TZT40m2 - TTS**
Số đăng kí KHXB: **57-2012/CXB/831-23/GD.**
In **3.000** cuốn (QĐ:21TK), khổ 17x24cm.
In tại Công ty Cổ phần in Phúc Yên. Số in: 397.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2012.