CHUYÊN ĐỀ SỐ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 1:PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ VÀ CHỮ SỐ

PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN

Tập hợp số tự nhiên: $\mathbb{N}$

Tập hợp số tự nhiên khác 0 (nguyên dương), ký hiệu là: $\mathbb{N}^*$

Có 10 chữ số: $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$.

Số tự nhiên có chữ số tận cùng là $0;2;4;6;8$ là các số chẵn.

Số tự nhiên có chữ số tận cùng là $1;3;5;7;9$ là các số lẻ.

Hai số tự nhiên liên tiếp hơn (kém) nhau 1 đơn vị. Hai số hơn (kém) nhau 1 đơn vị là hai số tự nhiên liên tiếp.

Hai số chẵn liên tiếp hơn (kém) nhau 2 đơn vị. Hai số chẵn hơn (kém) nhau 2 đơn vị là hai số chẵn liên tiếp.

Hai số lẻ liên tiếp hơn (kém) nhau 2 đơn vị. Hai số lẻ hơn (kém) nhau 2 đơn vị là hai số lẻ liên tiếp.

2.CẤU TẠO CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

Phân tích một số tự nhiên theo các chữ số:

$\overline{ab} = 10a + b$

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 10\overline{ab} + c = 100a + \overline{bc}$

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 10\overline{abc} + d = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 1000a + 10\overline{bc} + d$

Với điều kiện $\left(0 < a \le 9; 0 \le b,c,d \le 9\right)$

3.SO SÁNH HAI SỐ TỰ NHIÊN

Trong hai số tự nhiên, số nào có chữ số nhiều hơn thì lớn hơn.

Nếu hai số có cùng chữ số thì số nào có chữ số đầu tiên kể từ trái sang phải lớn hơn thì số đó lớn hơn. Nếu hai số có tất cả các cặp chữ số ở từng hàng đều bằng nhau thì hai số đó bằng nhau.

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1:Viết số tự nhiên từ giả thiết cho trước

I.Phương pháp giải

- Khi viết một số tự nhiên ta sử dụng 10 chữ số $0,1,2,3,4;5;6;7;8;9$. Chữ số đầu tiên kể từ bên trái của một số tự nhiên phải khác 0.
- Thông qua việc phân tích và xét hết khả năng có thể xảy ra, đối chiếu với giả thiết đề bài để lập số.

II.Bài toán

Bài 1: Cho bốn chữ số $0;3;8;9$.

a) Tìm số lớn nhất, số nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.
b) Tìm số lẻ lớn nhất, số chẵn nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

Lời giải:

a)Số lớn nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho phải có chữ số hàng nghìn là chữ số lớn nhất. Vậy chữ số hàng nghìn phải tìm là 9.

Chữ số hàng trăm phải là chữ số lớn nhất trong 3 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng trăm phải tìm là 8.

Chữ số hàng chục là chữ số lớn nhất trong 2 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng chục là 3.

Vậy số cần tìm là 9830.

Tương tự số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau từ 4 chữ số trên là 3089.

b)Tương tự số lẻ lớn nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 9803.

Số chẵn nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 3098.

Bài 2: Tìm số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$, thỏa mãn $\overline{abc} = (a+b+c)^3$

Lời giải:

Điều kiện: $0 < a \le 9; 0 \le b,c \le 9; a,b,c \in \mathbb{N}$

Nhận thấy: $100 \le \overline{abc} \le 999 \Rightarrow 100 \le (a+b+c)^3 \le 999 \Leftrightarrow 5^3 \le (a+b+c)^3 \le 9^3$

$\Leftrightarrow 5 \le a+b+c \le 9 \Rightarrow (a+b+c) \in \{5,6,7,8,9\}$

Nếu $a+b+c=5$ thì $(a+b+c)^3 = 125$. Thử lại $(1+2+5)^3 = 512$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=6$ thì $(a+b+c)^3 = 216$. Thử lại $(2+1+6)^3 = 729$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=7$ thì $(a+b+c)^3 = 343$. Thử lại $(3+4+3)^3 = 1000$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=8$ thì $(a+b+c)^3 = 512$. Thử lại $(5+1+2)^3 = 512$ (thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=9$ thì $(a+b+c)^3=729$. Thử lại $(7+2+9)^3=5832$ (không thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 512.

Bài 3: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

Phân tích: Bài toán có thể giải bằng "số phần" bằng cách biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần. Từ đó tính được số lớn ứng với bao nhiêu phần, số bé ứng với bao nhiêu phần.

Lời giải

Theo đầu bài. Nếu biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần.

Số lớn là: $(5+1):2=3$ (phần).

Số bé là: $5-3=2$ (phần)

Vậy tích sẽ bằng 12 lần số bé.

Ta có: Tích $=$ Số lớn $\times$ Số bé

Tích $=$ $12\times$ Số bé

Số lớn là 12.

Số bé là: $12:3.2=8$

Vậy hái số tự nhiên cần tìm là $12;8$.

Bài 4: Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi.

Phân tích: Thực hiện biểu diễn số bị chia theo số chia, số thương và số dư, từ đó thiết lập được hai đẳng thức liên quan giữa số thương, số chia, và số dư. Cuối cùng tìm được thương.

Lời giải

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a,b,c,d $\left(a,b,c,d\in\mathbb{N},b\neq 0;d<b\right)$. Ta có:

$a:b=c$ (dư d) $\Rightarrow a=c.b+d$

Theo đề ta có: $(a+15):(b+5)=c$ (dư d) $\Rightarrow a+15=c.(b+5)+d$

Hay $a+15=c.b+c.5+d$

Mà $a=c.b+d$ nên $a+15=c.b+c.5+d=c.b+d+15=c.b+c.5+d$

Suy ra $15=c.5$. Vậy $c=3$.

Bài 5: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải

Gọi 2 số đó là $a, b\left(a > b; a, b \in \mathbb{N}\right)$

Theo bài ra ta có: $a - b = 4 \Rightarrow b = a - 4\ \ (1)$

Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60 $\Rightarrow 3a - b = 60\ \ (2)$

Thay (1) vào (2) ta có $3a - \left(a - 4\right) = 60 \Rightarrow 3a - a + 4 = 60 \Rightarrow 2a = 56 \Rightarrow a = 28 \Rightarrow b = 24$

Vậy số cần tìm là $24; 28$.

Bài 6: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng và tích của chúng gấp 4008 lần hiệu của chúng.

Lời giải

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 5 phần.

Do đó số lớn là $\left(5 + 1\right) : 2 = 3$ (phần).

Số bé là: $5 - 3 = 2$ (phần).

Tích của hai số là: $2.3 = 6$ (phần)

Mà tích hai số là 4008 nên giá trị một phần là: $4008 : 6 = 668$.

Số bé là: $668.2 = 1336$

Số lớn là: $668.3 = 2004$.

Vậy hai số cần tìm là 2004 và 1336.

Bài 7: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng gấp 3 lần hiệu của chúng và tích của chúng gấp 124 lần hiệu của chúng.

Lời giải

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 3 phần.

Do đó số lớn là $\left(3 + 1\right) : 2 = 2$ (phần).

Số bé là: $2 - 1 = 1$ (phần).

Tích của hai số là: $2.1 = 2$ (phần)

Mà tích hai số là 124 nên giá trị một phần là: $124 : 2 = 62$.

Số bé là: $62.1=62$

Số lớn là: $62.2=124$.

Vậy hai số cần tìm là 62 và 124.

Bài 8: Tổng của hai số tự nhiên gấp ba hiệu của chúng. Tìm thương của hai số tự nhiên ấy.

Lời giải

Gọi hai số đó là a và b $\left(a,b\in\mathbb{N}\right)$

Ta có $\left(a+b\right)=3\left(a-b\right)\Rightarrow a+b=3a-3b\Rightarrow 4b=2a$

Suy ra $a=2b$ do đó $a:b=2$

Vậy thương hai số tự nhiên cần tìm là 2.

Bài 9: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải

Gọi số bị trừ là là a, số trừ là b $\left(a,b\in\mathbb{N}\right)$

Theo đề bài ta có : $a-b=4\ \left(1\right)$

Tăng số bị trừ lên 3 lần và giữ nguyên số chia vì hiệu của chúng bằng 60 nên : $3a-b=60\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ ta có $b=a-4$ thay vào $\left(2\right)$ ta được : $2a=56$ suy ra $a=28$ suy ra $b=24$.

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là $24;28$.

Bài 10: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 7 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 192 lần hiệu của chúng.

Lời giải

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 7 phần.

Do đó số lớn là $\left(7+1\right):2=4$ (phần).

Số bé là: $7-4=3$ (phần).

Tích của hai số là: $3.4=12$ (phần)

Mà tích hai số là 192 nên giá trị một phần là: $192:12=16$.

Số bé là: $16.3=48$

Số lớn là: $16.4=64$.

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là $64;48$.

Bài 11: Viết liên tiếp 15 số lẻ đầu tiên để được một số tự nhiên. Hãy xoá đi 15 chữ số của số tự nhiên vừa nhận được mà vẫn giữ nguyên thứ tự các chữ số còn lại để được:
a, Số lớn nhất.
b, Số nhỏ nhất.

<u>Lời giải</u>

Viết 15 số lẻ đầu tiên liên tiếp ta được số tự nhiên: $135791113151719212325272$9
Để sau khi xoá 15 chữ số ta nhận được số lớn nhất thì chữ số giữ lại đầu tiên kể từ bên trái phải là chữ số 9. Vậy trước hết ta xoá 4 chữ số đầu tiên của dãy$1,3,5,7$. Số còn lại là: $91113151719212325272$9
Ta phải xoá tiếp $15-4=11$ chữ số còn lại để được số lớn nhất. Để sau khi xoá nhận được số lớn nhất thì chữ số thứ hai kể từ bên trái phải là chữ số 9. Vậy tiếp theo ta phải xoá tiếp những chữ số viết giữa hai chữ số 9 trong dãy, đó là111315171. Số còn lại là: 992123252729.
Ta phải xoá tiếp $11-9=2$ chữ số từ số còn lại để được số lớn nhất. Chữ số thứ ba còn lại kể từ bên trái phải là 2, vậy để được số lớn nhất sau khi xoá 2 chữ số ta phải xoá số 12 hoặc 21. Vậy số lớn nhất phải là 9923252729.

b, Lập luận tương tự câu a. số phải tìm là 1111111122.

Bài 12: Tìm số lớn nhất có các chữ số khác nhau và tổng các chữ số bằng 6.

<u>Lời giải</u>

Viết 6 thành tổng các chữ số khác nhau là
$6+0;5+1;4+2;5+1+0;4+2+0;3+2+1;3+2+1+0$.

Vậy số lớn nhất có các chữ số khác nhau có tổng các chữ số bằng 6 cần tìm là 3210.

Bài 13: Tìm số bé nhất có tổng các chữ số bằng 21.

<u>Lời giải</u>

Số có hai chữ số có tổng các chữ số lớn nhất là 99. Vì $9+9=18$ và 18 nhỏ hơn 21 nên số cần tìm phải có nhiều hơn hai chữ số.

Xét các số có ba chữ số có tổng các chữ số bằng 21. Số bé nhất phải thỏa mãn có chữ số hàng trăm bé nhất. Vì $21-18=3$ nên số cần tìm là 399.

Bài 14: Tìm số bé nhất, số lớn nhất có các chữ số khác nhau và tích các chữ số bằng 30.

<u>Lời giải</u>

Viết 30 thành tích các chữ số khác nhau là $6\times5;6\times5\times1;5\times3\times2;5\times3\times2\times1$.

Vậy số bé nhất là 56, số lớn nhất là 5321.

Bài 15: Trung bình cộng của n số chẵn nhỏ nhất có hai chữ số là 14. Tìm n.

<u>Lời giải</u>

Số chẵn có hai chữ số và bé hơn 14 là $12;10$. Hai số chẵn lớn hơn 14 là $16;18$. Vậy $n=5$.

Dạng 2: Các bài toán giải bằng phân tích số

I.Phương pháp giải

- Phân tích một số tự nhiên theo các chữ số.

- Thông qua việc phân tích các giả thiết đề bài đề tìm số.

II.Bài toán

Bài 1: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng khi viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được số mới lớn gấp 26 lần số phải tìm.

<u>Lời giải:</u>

Gọi số cần tìm là: $\overline{ab}$ $(a\neq0;a,b<10;a,b\in\mathbb{N})$

Viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được: $\overline{12ab}$

Theo bài ra ta có: $\overline{12ab}=\overline{ab}.26\Leftrightarrow1200+\overline{ab}=\overline{ab}.26\Leftrightarrow\overline{ab}.26-\overline{ab}=1200$

$\Leftrightarrow\overline{ab}.(26-1)=1200\Leftrightarrow\overline{ab}.25=1200\Leftrightarrow\overline{ab}=48$

Thử lại ta thấy $1248:48=26$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 1248.

Bài 2: Cho số có hai chữ số. Nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó thì được thương là 18 và dư 4. Tìm số đã cho.

<u>Lời giải:</u>

Gọi số phải tìm là: $\overline{ab}$ $(a\neq0;a,b\in\mathbb{N};a,b<10)$

Theo bài ra ta có: $\overline{ab}=(a-b).18+4 \Leftrightarrow 10a+b=18a-18b+4 \Rightarrow 19b=8a+4$

Vì $8a+4$ là số chẵn $\Rightarrow$ b chẵn $\Rightarrow b\in\{0;2;4;6;8\}$

Với $b=0 \Rightarrow 8a+4=0$ (vô lý)

Tương tự với các trường hợp b còn lại : ta có $b=4; a=9$ thỏa mãn bài toán

Vậy số cần tìm là 94.

Bài 3: Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó gấp 5 lần tích các chữ số của nó.

Lời giải:

Gọi số phải tìm là: $\overline{abc}$ $(0<a\le 9; 0\le b,c\le 9; a,b,c\in\mathbb{N})$

$\overline{abc}=5.a.b.c \Rightarrow a,b,c\neq 0$

Nếu $c=0$ thì $\overline{abc}=0$ không thỏa mãn bài toán.

Nếu $c=5$ thì $\overline{ab5}=25\overline{ab}$ (1)

Số có ba chữ số chia hết cho 25 khi $\overline{b5}\,\vdots\,25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=7 \end{array}\right.$

Ta có: Vế trái (1) là một số tự nhiên lẻ nên vế phải cũng là một số tự nhiên lẻ $\Rightarrow b=2$ (loại) do đó $b=7 \Rightarrow \overline{a75}=25.a.7=175a \Rightarrow a=1$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 175.

Bài 4: Tìm các chữ số a, b , c thỏa mãn:

a) $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=\overline{abc}$

b) $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$

Lời giải: Điều kiện: $0<a\le 9; 0\le b,c\le 9; a,b,c\in\mathbb{N}$

a) Ta có $\overline{abc}=11(a+b+c) \Leftrightarrow 100a+10b+c=11a+11b+11c \Leftrightarrow b+10c=89a\le 99$

$\Rightarrow a=1 \Rightarrow b=9; c=8$ $(do: b+10c\le 99)$

b) Ta có: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=1111.a+111.b+11.c+d$

Vậy $1111.a+111.b+11.c+d=4321$

Nếu $a<3$ thì $111.b+11.c+d>2098$ (vô lý vì $b,c,d<10$)

Nếu $a>3$ thì vế trái >4321 (không thỏa mãn)

Vậy $a=3$. Suy ra $111.b+11.c+d=988$

Nếu $b<8$ thì $11.c+d>210$ (vô lý vì $c,d<10$)

Nếu $b>8$ thì vế trái >988 (không thỏa mãn)

Vậy $b=8$. Suy ra $11.c+d=100$

+ Nếu $c<9$ thì $d>11$ (vô lý vì $d<10$)

Do đó $c=9;d=1$

Vậy $a=3,b=8,c=9,d=1$ thỏa $3891+389+38+3=4321$.

Bài 5: Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Phân tích: Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$. Khi viết thêm chữ số 2 vào đằng sau ta được $\overline{abcde2}$

Khi viết thêm chữ số 2 vào đằng trước ta được $\overline{2abcde}$. Do đó ta cần phân tích các số $\overline{abcde2}$ và $\overline{2abcde}$ theo $\overline{abcde}$, từ đó theo mối quan hệ bài cho tìm được $\overline{abcde}$.

Lời giải

Gọi số cần tìm là: $\overline{abcde}$ $\left(0<a\le 9;0\le b,c,d,e\le 9;a,b,c,d,e\in \mathbb{N}\right)$

Theo bài ra ta có: $\overline{abcde2}=3.\overline{2abcde}$ $\Rightarrow 10.\overline{abcde}+2=3.200000+3.\overline{abcde}$ $\Rightarrow 7.\overline{abcde}=599998$

$\Rightarrow \overline{abcde}=85714$

Thử lại: $857142=3.285714$

Vậy số cần tìm là 857142.

Bài 6: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

Phân tích: Gọi số cần tìm là $\overline{abc3}$. Khi xóa chữ số 3 ta được $\overline{abc}$, do đó ta cần phân tích cấu tạo số $\overline{abc3}$ theo $\overline{abc}$, và theo mối quan hệ bài cho tìm được $\overline{abc}$ rồi suy ra số cần tìm.

Lời giải

Vì rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị nên số tự nhiên cần tìm có 4 chữ số.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc3}$ $\left(0<a\le 9;0\le b,c\le 9;a,b,c\in \mathbb{N}\right)$

Theo bài ra ta có: $\overline{abc3}-1992=\overline{abc}$ $\Rightarrow 10.\overline{abc}+3-1992=\overline{abc}$ $\Rightarrow 9.\overline{abc}=1989\Rightarrow \overline{abc}=221$

Vậy số cần tìm là 2213.

Bài 7: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

Phân tích: Ba số cần tìm là a,b,c $(0<a<b<c<9)$. Như vậy tổng $\overline{abc}+\overline{acb}$ cần phân tích cấu tạo số theo a, b, c ta được $200a+11(b+c)$, việc còn lại ta phân tích số 1444 về dạng $200.7+11.4$

Rồi đồng nhất với $200a+11(b+c)$ để tìm ra a, b, c

Lời giải

Gọi ba chữ số cần tìm là a,b,c $(0<a<b<c<9;a,b,c\in\mathbb{N})$.

Theo bài ra ta có:

$\overline{abc}+\overline{acb}=1444$

$\Leftrightarrow 100a+10b+c+100a+10c+b=1444$

$\Leftrightarrow 200a+11b+11c=1444$

$\Leftrightarrow 200a+11(b+c)=1400+11.4$

$\Rightarrow a=7;b=3;c=1$.

Vậy 3 số cần tìm là: $1;3;7$.

Bài 8: Cho ba chữ số a,b,c đôi một khác nhau và khác 0. Tổng của tất cả các số có hai chữ số được lập từ ba chữ số a,b,c bằng 627. Tính tổng $a+b+c$.

Lời giải:

Ta có các số có hai chữ số được lập thành từ ba chữ số a,b,c là:

$\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{cb}+\overline{ca}+\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc}$

Theo đầu bài ta có: $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{cb}+\overline{ca}+\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc}=627\Leftrightarrow 33(a+b+c)=627\Leftrightarrow a+b+c=19$

Vậy $a+b+c=19$.

Bài 9: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Phân tích: Từ mối liên hệ bài cho ta thiết lập được hai đẳng thức liên quan tới hai số, từ đó tìm được hai số.

Lời giải

Gọi thừa số được giảm là a, thừa số còn lại là b.

Theo đề bài ta có:

$a.b = 6210$; $(a-7).b = 5265 \Rightarrow a.b - 7.b = 5265 \Rightarrow 6210 - 7.b = 5265 \Rightarrow 7.b = 6210 - 5265 \Rightarrow 7.b = 945$

$\Rightarrow b = 945 : 7 = 135 \Rightarrow a = 6210 : 135 = 46$

Vậy hai thừa số cần tìm là $46;135$.

Bài 10: Một số có 3 chữ số, tận cùng bằng chữ số 7. Nếu chuyển chữ số 7 đó lên đầu thì ta được một số mới mà khi chia cho số cũ thì được thương là 2 dư 21. Tìm số đó.

<u>Phân tích:</u> Gọi $\overline{ab7}$ số tự nhiên có chữ số 7 là hàng đơn vị

$\overline{7ab}$ số tự nhiên có chữ số 7 là hàng trăm

Bằng việc phân tích cấu tạo số ta có thể giải bài toán theo hai cách:

Phân tích cấu tạo số theo $\overline{ab}$

<u>Lời giải</u>

Gọi $\overline{ab7}$ số tự nhiên có chữ số 7 là hàng đơn vị. $\left(0 < a \le 9; 0 \le b \le 9; a, b \in \mathbb{N}\right)$

$\overline{7ab}$ số tự nhiên có chữ số 7 là số hàng trăm.

Theo đề bài ta có: $\overline{7ab} : \overline{ab7} = 2$ dư 21

Hay: $\overline{7ab} = 2.\overline{ab7} + 21$

Ta có: $\overline{ab} = 10a + b; \overline{abc} = 100a + 10b + c \Rightarrow 700 + \overline{ab} = 2(10\overline{ab} + 7) + 21 \Rightarrow 700 + \overline{ab} = 20\overline{ab} + 14 + 21$

$\Rightarrow 700 - 14 - 21 = 20\overline{ab} - \overline{ab} \Rightarrow 665 = 19\overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} = 35$.

Vậy số tự nhiên có ba chữ số đó là: 357.

Bài 11: Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 7 vào đằng trước số đó thì được một số lớn gấp 5 lần so với số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào sau số đó

<u>Phân tích</u>: Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$. Khi viết thêm chữ số 7 vào đằng sau ta được $\overline{abcde7}$

Khi viết thêm chữ số 7 vào đằng trước ta được $\overline{7abcde}$. Do đó ta cần phân tích cấu tạo các số $\overline{abcde7}$ và $\overline{7abcde}$, từ đó theo mối quan hệ bài cho tìm được $\overline{abcde}$.

<u>Lời giải</u>

Gọi số tiền có năm chữ số là: $\overline{abcde}$ $\left(0 < a \le 9; 0 \le b, c, d, e \le 9; a, bc, d, e \in \mathbb{N}\right)$

Theo đề bài: $\overline{7abcde} = 5.\overline{abcde7}$

Ta có: $\overline{7abcde} = 700000 + \overline{abcde}; 5.\overline{abcde7} = 5.(10.\overline{abcde} + 7)$

$\Rightarrow \overline{7abcde} = 5.\overline{abcde7}$ $\Rightarrow 700000 + \overline{abcde} = 5.(10.\overline{abcde} + 7)$

$\Rightarrow 700000 + \overline{abcde} = 50.\overline{abcde} + 35$

$\Rightarrow 700000 - 35 = 50.\overline{abcde} - \overline{abcde} \Rightarrow 6999965 = 49.\overline{abcde} \Rightarrow \overline{abcde} = 14285$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 14285.

Bài 12: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên phải và một chữ số 2 vào bên trái của nó thì số ấy tăng gấp 36 lần.

Phân tích: Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$. Khi viết thêm chữ số 2 vào đằng trước và đằng sau ta được $\overline{2ab2}$. Do đó ta cần tìm cấu tạo số $\overline{2ab2}$ theo $\overline{ab}$, từ đó theo mối liên hệ bài cho tìm được $\overline{ab}$

Lời giải

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$. $(0 < a \le 9; 0 \le b \le 9; a, b \in \mathbb{N})$

Viết thêm một chữ số 2 vào bên trái và bên phải ta được: $\overline{2ab2}$, số đo tăng lên gấp 36 lần.

$\Rightarrow \overline{2ab2} = 36.\overline{ab} \Rightarrow 2000 + 10\overline{ab} + 2 = 36\overline{ab} \Rightarrow 26\overline{ab} = 2002 \Rightarrow \overline{ab} = 77$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 77.

Bài 13: Nếu ta viết thêm chữ số 0 vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số ta được một số mới có 3 chữ số lớn hơn số đầu tiên 7 lần. Tìm số đó.

Phân tích: Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$. Khi viết thêm chữ số 0 vào giữa ta được $\overline{a0b}$. Vì hai chữ số a, b không có cạnh nhau, nên ta cần phân tích cấu tạo số $\overline{a0b}$ theo các chữ số a, b từ đó theo mối liên hệ bài cho tìm được các chữ số a, b từ đó suy ra số $\overline{ab}$

Lời giải

Số tự nhiên có hai chữ số có dạng: $\overline{ab}$ $(0 < a \le 9; 0 \le b \le 9; a, b \in \mathbb{N})$

Thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số: $\overline{a0b}$

Theo đề bài: $\overline{a0b} = 7.\overline{ab}$

Hay $100a + b = 7.(10a + b)$ $\Rightarrow 30a = 6b \Rightarrow$ $5a = b$

Khi $a = 1$, ta được: $b = 5$ (nhận) $\Rightarrow$ $\overline{ab}$ là 15

Khi $a = 2$, ta được: $b = 10$ (loại)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 15.

Bài 14: Nếu xen vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số của chính số đó, ta được một số mới có bốn chữ số và bằng 99 lần số đầu tiên. Tìm số đó

Phân tích: Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$. Xen vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số của chính số đó ta được $\overline{aabb}$, đến đây nhiều ý tưởng sẽ phân tích cấu tạo số $\overline{aabb}$ theo $\overline{ab}$, tuy nhiên vì hai chữ số b, a ở hàng đơn vị và hàng nghìn không cạnh nhau, nên việc phân tích cấu tạo số theo $\overline{ab}$ là không ra mà ta cần phân tích cấu tạo số theo các chữ số a, b, từ đó theo mối liên hệ bài cho tìm được các chữ số a, b từ đó suy ra số $\overline{ab}$.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{ab}$ $\left(0 < a \le 9; 0 \le b \le 9; a,b \in \mathbb{N}\right)$

Theo bài ra, ta có: $\overline{aabb} = 99.\overline{ab}$ $\Leftrightarrow 1100a + 11b = 990a + 99b$ $\Leftrightarrow 110a - 88b = 0$ $\Leftrightarrow 5a - 4b = 0$

$\Leftrightarrow 5a = 4b$ $\Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{5}$

Mà $a;b$ là các số có 1 chữ số $\Rightarrow a = 4, b = 5$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 45.

Bài 15: Nếu xen vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số một số có hai chữ số kém số đó 1 đơn vị thì sẽ được một số có bốn chữ số lớn gấp 91 lần so với số đầu tiên. Hãy tìm số đó.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ $\left(0 < a \le 9; 0 \le b \le 9; a,b \in \mathbb{N}\right)$

Ta có: $\overline{ab\left(b-1\right)b} = \overline{ab}.91$

$\Leftrightarrow a.1000 + a.100 + b.10 - 10 + b = a.910 + b.91$

Bài 16: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số mới viết theo thứ tự ngược lại nhân với số phải tìm thì được 3154; số nhỏ trong hai số thì lớn hơn tổng các chữ số của nó là 27

Lời giải:

Gọi số cần tìm là: $\overline{ab}\left(a,b \in \mathbb{N}^*; a,b < 10\right)$

Thì số mới có dạng: $\overline{ba}$

Giả sử $\overline{ab} < \overline{ba}$

Theo đề ta có:

$\overline{ab}=a+b+27$

$10a+b=a+b+27$

$10a+b-a-b=27$

$9a \quad =27$

$a \quad =27:9$

$a \quad =3.$

Từ đó ta có $\overline{3b}.\overline{b3}=3154$

Vì $3.b$ có chữ số tận cùng là 4 nên $b=8$.

Vậy số cần tìm là 38 hoặc 83.

Bài 17: Cho số có hai chữ số . Nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó thì được thương là 18 và dư 4. Tìm số đã cho.

<u>Lời giải:</u>

Số tự nhiên có 2 chữ số là $\overline{ab}$ $(0<a\le 9; a\ne 0; a,b\in\mathbb{N})$.

Ta có $\overline{ab}:(a-b)$ được thương là 18 dư 4.

$\Rightarrow \overline{ab}=18(a-b)+4 \Rightarrow 10a+b=18a-18b+4 \;\Rightarrow 8a-19b+4=0 \Rightarrow 8a+4=19b$

$8a$ và 4 là hai số chẵn $\Rightarrow b$ chẵn $\Rightarrow b\in\{0;2;4;6;8\}$

Với $b=0 \;\Rightarrow 8a+4=0$ (loại vì $a>0$)

Với $b=2 \;\Rightarrow 8a+4=38 \Rightarrow a=4,25$ (loại vì $a\in\mathbb{N}$)

Với $b=4 \Rightarrow a=9 \Rightarrow \overline{ab}=94$.

Với $b=6 \;\Rightarrow 8a+4=114 \Rightarrow a=13,75$ (loại vì $a\in\mathbb{N}$)

Với $b=8 \;\Rightarrow 8a+4=152 \Rightarrow a=18,5$ (loại vì $a\in\mathbb{N}$)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 94.

Bài 18: Cho hai số có 4 chữ số và 2 chữ số mà tổng của hai số đó bằng 2750. Nếu cả hai số được viết theo thứ tự ngược lại thì tổng của hai số này bằng 8888 . Tìm hai số đã cho.

<u>Lời giải:</u>

Gọi 2 số cần tìm là: $\overline{abcd}$ và $\overline{xy}$ $\left(a,b,c,d,x,y\in\mathbb{N}; a,x\ne 0; a,b,c,d,x,y<10\right)$

Theo đề ta có: $\overline{abcd}+\overline{xy}=2750\ (1)$

$$\overline{dcba}+\overline{yx}=8888\ (2)$$

Cả 2 phép cộng đều không nhớ sang hàng nghìn nên từ (1) ta có $a=2$ và từ (2) ta có $d=8$.

Cũng từ (1) ta có $d+y$ có tận cùng bằng 0, mà $d=8$ nên $y=2$.

Từ (2) ta có $a+x$ có tận cùng bằng 8, mà $a=2$ nên $x=6$.

Từ (1) ta có $c+x+1$ (vì có nhớ 1) có tận cùng bằng 5, mà $x=6$ nên $c=8$.

Từ (2) ta có $b+y$ có tận cùng bằng 8, mà $y=2$ nên $b=6$.

Vậy hai số đó là: 2688 và 62.

Bài 19: Tìm số có bốn chữ số khác nhau, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa hàng nghìn và hàng trăm thì được số mới gấp 9 lần số phải tìm.

<u>Lời giải:</u>

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{N};a\neq 0;a,b,c,d<10\right)$

Số mới là $\overline{a0bcd}$

Ta có $\overline{a0bcd}=\overline{abcd}.9$

Hay $\overline{a0bcd}=\overline{abcd}.10-\overline{abcd}$

Hay $\overline{a0bcd}+\overline{abcd}=\overline{abcd0}$

Vì $d+d$ có tận cùng bằng 0 suy ra $d=0$ hoặc 5

Nếu $d=5$ ta có $c+c+1=0$ có tận cùng là 5 nên $c=2$ hoặc $c=7$.

Nếu $c=2$ thì $b+b=2$ nên $b=1$, do đó $0+a$ có tận cùng bằng 1 nên $a=1$ (loại vì a khác b)

Nếu $c=7$ thì $b+b+1$ có tận cùng là 7 nên $b=3$ hoặc $b=8$.

Nếu $b=3$ thì $0+a=3$ nên $a=3$ (loại).

Nếu $b=8$ thì $0+a+1=8$ nên $a=7$ (loại vì a khác c).

Nếu $d=0$ suy ra c khác 0 mà $c+c$ có tận cùng là 0 nên $c=5$. Khi đó $b+b+1$ có tận cùng là 5 nên $b=2$ hoặc $b=7$

Nếu $b=2$ thì $0+a$ có tận cùng bằng 2 nên $a=2$ (loại)

Nếu $b=7$ thì $0+a+1$ có tận cùng là 7 nên $a=6$

Vậy số cần tìm là 6750.

Bài 20: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

<u>Lời giải:</u>

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{N};a\neq 0;a,b,c,d<10\right)$

$\overline{abcd}.4=\overline{dcba}$

Ta có $\overline{abcd}$ và $\overline{dcba}$ là số có 4 chữ số

Nên ta có: $a.10^3.4=d.10^3\Rightarrow a=1\Rightarrow d=4$ hoặc $a=2;d=8$

Xét $\overline{abcd}$ với $a=1$ và $d=4$

Để có được $\overline{abcd}.4=\overline{dcba}$ thì $d.4$ trước hết phải có chữ số tận cùng là a

$\Rightarrow$ với $d=4$ thì $d.4=4.4=16$ có chữ số tận cùng là $6\neq a=1$ (loại)

Xét $\overline{abcd}$ với $a=2$ và $d=8$.

Do đó $\overline{abcd}.4=\overline{dcba}$ ta thấy: $d.4$ đã có chữ số lận cùng là $a=2$ (1)

Vì $a=2\Rightarrow b.4<10\Rightarrow b\in\{0;1;2\}$

Với $a=2,d=8,b=0\Rightarrow\overline{20c8}.4=\overline{8c02}\Rightarrow 60c=30$ (không thỏa mãn)

Với $a=2,d=8,b=1\Rightarrow\overline{20c8}.4=\overline{8c12}\Rightarrow 60c=420\Rightarrow c=7\Rightarrow$ có số 2178.

Với $a=2,d=8,b=2\Rightarrow\overline{20c8}.4=\overline{8c22}\Rightarrow 60c=810\Rightarrow$ (không thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là 2178.

Bài 21: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 9 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại

<u>Lời giải:</u>

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{N};a\neq 0;a,b,c,d<10\right)$

$\overline{abcd}.9=\overline{dcba}$

Ta có $\overline{abcd}$ và $\overline{dcba}$ là số có 4 chữ số

Nên ta có: $a.10^3.9=d.10^3\Rightarrow a=1\Rightarrow d=9$

Xét $\overline{abcd}$: vì $a=1\Rightarrow b.9<10\Rightarrow b=1$ hoặc $b=0$

Với $b=1$ thì $\overline{11c9}.9=\overline{9c11}$

Vì $b=1\Rightarrow\overline{11c9}.9$ có $c.9$ là số bé lớn hơn 2 chữ số $\Rightarrow c=1$ hoặc $c=0\Rightarrow$ Vô lý.

Với $b=0$ thì $\overline{10c9}.9=\overline{9c01}\Rightarrow c=8$

$\Rightarrow 1089.9=9801$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 9801.

Bài 22: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng trăm thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{N};a\neq 0;a,b,c<10\right)$

Khi xóa chữ số hàng trăm ta có số $\overline{bc}$

Ta có: $\overline{abc}=9\overline{bc}\Rightarrow 100a+\overline{bc}=9\overline{bc}\Rightarrow 8\overline{bc}=100a\,\vdots\,8\Rightarrow a=4$ hoặc $a=8$

Vì $\overline{bc}$ có hai chữ số $\Rightarrow a=4;\overline{bc}=50$

Vậy số cần tìm là 450.

Bài 23: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{N};a\neq 0;a,b,c,d<10\right)$

Xóa chữ số hàng trăm ta có số $\overline{bcd}$

Ta có: $\overline{abcd}=9\overline{bcd}\Rightarrow 1000a+\overline{bcd}=9\overline{bcd}\Rightarrow 8\overline{bcd}=1000a\,\vdots\,8\Rightarrow a=4$ hoặc $a=8$

Vì $\overline{bcd}$ có 3 chữ số $\Rightarrow a=4$ và $\overline{bcd}=500$

Vậy số cần tìm là 4500.

Bài 24: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng trăm bằng 0 và nếu xoá chữ số 0 đó thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{a0cd}$ $\left(a,c,d\in\mathbb{N};a\neq 0;a,c,d<10\right)$

Xóa chữ số hàng trăm ta có số $\overline{acd}$

Ta có: $\overline{a0cd}=9\overline{acd}\Rightarrow 1000a+\overline{cd}=9\left(100a+\overline{cd}\right)\Rightarrow 100a=8\overline{cd}\,\vdots\,8\Rightarrow a=4$ hoặc $a=8$

Vì $\overline{cd}$ có 2 chữ số $\Rightarrow a=4$ và $\overline{cd}=50$

Vậy số cần tìm là 4050 .

Bài 25: Một số tự nhiên có hai chữ số tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó . Tìm số ấy.

<u>Lời giải</u>

Số cần tìm là $\overline{ab}$ $\left(a,b\in\mathbb{N};a\neq 0;ab<10\right)$.

Viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị ta có số $\overline{a0b}$

Ta có: $\overline{a0b}=9\overline{ab}\Rightarrow 100a+b=9\left(10a+b\right)\Rightarrow 10a=8b\,\vdots\,8\Rightarrow a=4$ hoặc $a=8$

Vì $0<b\leq 9\Rightarrow a=4;b=5$

Vậy số cần tìm là 45 .

Bài 26: Gọi $S\left(n\right)$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n . Tìm số tự nhiên n sao cho $S\left(n\right)+n=2015$.

<u>Chú ý:</u> Có thể thay đầu bài bởi số khác

<u>Lời giải</u>

Nếu n có 3 chữ số thì $n\leq 999$ suy ra $S\left(n\right)\leq 27$ suy ra $S\left(n\right)+n\leq 999+27=1026<2015$ (loại)

Nếu n có nhiều hơn bốn chữ số: Suy ra $n>10000$ suy ra $S\left(n\right)+n>2015$ (loại)

Vậy n có bốn chữ số: Đặt $n=\overline{abcd}$ $\left(0<a\leq 9;0\leq b,c,d\leq 9\right)$

$\Rightarrow S(n)+n=\overline{abcd}+a+b+c+d=2015$

Nhận thấy: $0<a+b+c+d\leq 36\Rightarrow 2015-36\leq\overline{abcd}\leq 2015\Leftrightarrow 1979\leq\overline{abcd}\leq 2015$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\overline{ab}=19\\ \overline{ab}=20\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n=1993\\ n=2011\end{array}\right.$$

Nếu $\overline{ab}=19$ thì $\overline{abcd}=1993$ vì $0<1+9+9+3=22<36$ và $1979\leq 1993\leq 2015$

Nếu $\overline{ab}=20$ thì $\overline{abcd}=2011$ vì $0<2+0+1+1=4<36$ và $1979\leq 2011\leq 2015$

Vậy số tự nhiên n cần tìm là 1993 hoặc 2011.

Bài 27: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}-\overline{dcba}=1008$.

<u>Lời giải</u>

Điều kiện: $0<a,d\leq 9;0\leq b,c\leq 9;a>d$

Ta có:

$\overline{abcd}-\overline{dcba}=1008 \Leftrightarrow (1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=1008$
$\Leftrightarrow 999(a-d)+90(b-c)=1008 \Leftrightarrow 111(a-d)+10(b-c)=112=111+1 \Leftrightarrow 111(a-d-1)=1+10(c-b)$

Nếu $a-d-1=0 \Rightarrow$ $111(a-d-1)=0$ mà $1+10(c-b)$ là số lẻ $\Rightarrow$ vô lý

Nếu $a-d-1\geq 1 \Rightarrow$ $111(a-d-1)\geq 111$ mà $1+10(c-b)\leq 1+10.9=91 \Rightarrow$ vô lý

Vậy không tồn tại số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}-\overline{dcba}=1008$.

Bài 28: Tìm một số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 4106 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{N}; a\neq 0; a,b,c<10\right)$

Viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó, ta được: $\overline{abc2}$

Theo đề bài ta có: $\overline{abc2}=\overline{abc}+4106$

$\overline{abc}.10+2=\overline{abc}+4106$ (phân tích $\overline{abc2}$ theo cấu tạo số)

Ta có: $\overline{abc}.10-\overline{abc}=4106-2 \Leftrightarrow \overline{abc}.\left(10-1\right)=4106 \Leftrightarrow 9\overline{abc}=4104 \Leftrightarrow \overline{abc}=456$

Thử lại: $4562-456=4106$ (đúng)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 456.

Bài 29: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số. Biết rằng nếu ta xóa đi chữ số hàng chục và hàng đơn vị thì số đó giảm đi 4455 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{N}; a\neq 0; a,b,c,d<10\right)$

Xóa đi chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đó, ta được $\overline{ab}$

Theo đề bài ta có: $\overline{abcd}-\overline{ab}=4455$

$\overline{ab}.100+\overline{cd}-5=4455$ (phân tích $\overline{abcd}$ theo cấu tạo số)

$\Leftrightarrow \overline{cd}+\overline{ab}.100-\overline{ab}=4455 \Leftrightarrow \overline{cd}+\overline{ab}.(100-1)=4455 \Leftrightarrow \overline{cd}+\overline{ab}.99=45.99(4455=45.99)$
$\Leftrightarrow \overline{cd}=99.(45-\overline{ab})$

Ta nhận thấy tích của 99 và 1 là một số tự nhiên bé hơn 100 nên $45-\overline{ab}$ phải bằng 0 hoặc 1.

Nếu $45-\overline{ab}=0$ thì $45=\overline{ab}$ và $\overline{cd}=00$

Nếu $45-\overline{ab}=1 \Rightarrow \overline{ab}=44; \overline{cd}=99$

Thử lại: $4500-45=4455$; $4499-44=4455$

Vậy số cần tìm là 4500 hoặc 4499.

Bài 30: Chia một số tự nhiên có ba chữ số như nhau cho một số tự nhiên có ba chữ số như nhau ta được thương là 2 và có dư. Nếu xóa bớt một số ở số bị chia và xóa bớt một số ở số chia thì thương vẫn bằng 2 và số dư giảm đi 100. Tìm số bị chia và số chia lúc đầu.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{aaa}$ $\left(a \in \mathbb{N}; a \neq 0; a < 10\right)$

Ta có: $\begin{cases} \overline{aaa} = 2.\overline{bbb} + r\,(r \neq 0) \\ \overline{aa} = 2.\overline{bb} + r - 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r > 100\,(1) \\ r - 100 < \overline{bb} \leq 99\,(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 111a = 222b + r \\ 11a = 22b + r - 100\,(*) \end{cases} \Rightarrow r \vdots 111(3)$

Từ (1) ,(2) ,(3) suy ra $r = 111$, thay vào (*) ta được $a = 2b + 1$

- $b = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow$ hai số là 333 và 111 (loại vì $333 : 111 = 3$ không thỏa mãn)
- $b = 2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$ hai số là 555 và 222 (nhận vì $555 : 222 = 2$ dư 111 thỏa mãn)
- $b = 3 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow$ hai số là 777 và 333 (nhận vì $777 : 333 = 2$ dư 111 thỏa mãn)
- $b = 4 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow$ hai số là 999 và 444 (nhận vì $999 : 444 = 2$ dư 111 thỏa mãn)

Vậy số bị chia và số chia lúc đầu là: 555 và 222; 777 và 333; 999 và 444.

Bài 31: Tìm các số tự nhiên a, b, c biết $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2\left(b + c\right)$

Lời giải

Điều kiện: $a, b, c \in \mathbb{N}; a, b, c < 10$

Ta có $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \Rightarrow a > b; a > c$

Do $a^2 = 2\left(b + c\right) < 4a$ (do $b + c < 2a$) $\Rightarrow a < 4 \Rightarrow a \in \left\{1; 2; 3\right\}$

Thử chọn $a = 2; b = c = 1,$ thay vào điều kiện của bài toán $\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b + c) \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy $a = 2; b = c = 1$.

Bài 32: Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp 3 lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Lời giải

Gọi số cần tìm là: $\overline{abcde}$ $\left(a, b, c, d; e \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d; e < 10\right)$

Ta có phép nhân: $\overline{abcde}.3 = \overline{abcde2}$

$3e$ có tận cùng là 2 suy ra

$3.4=12$ nhớ 1 sang hàng chục

$3d+1$ tận cùng là 4 suy ra $d=1$

$3c$ tận cùng là 1 suy ra $c=7;3.7=21$ nhớ 2 sang hàng nghìn

$3b+2$ tận cùng là 7 suy ra $b=5;3.5=15$ nhớ 1 sang hàng chục nghìn

$3a+1$ tận cùng là 5 suy ra $a=8;3.8=24$ nhớ 2 sang hàng trăm nghìn $3.2+2=8$, được

$285714.3=857142$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 85741.

Bài 33: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

<u>Lời giải</u>

Vì rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị nên số tự nhiên cần tìm có 4 chữ số.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc3}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{N};a\neq 0;a,b,c<10\right)$

Theo bài ta có: $\overline{abc3}-1992=\overline{abc}\Rightarrow 10.\overline{abc}+3-1992=\overline{abc}\Rightarrow 9\overline{abc}=1989\Rightarrow \overline{abc}=221$

Vậy số cần tìm là: 2213.

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẾM

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

*) Nhận xét: Đối với "Bài toán đếm số" thì không có phương pháp chung nào cho mọi bài toán ở dạng này. Mà khi gặp mỗi bài toán có liên quan tới việc đếm số, đếm chữ số.... đòi hỏi sự tư duy, tố chất thông minh kết hợp với những kiến thức đã học về tập hợp số tự nhiên để giải bài toán. Qua mỗi bài toán cụ thể, học sinh sẽ tích lũy được những phương pháp giải, giúp hỗ trợ cho việc giải các bài toán khác ở dạng này được tốt hơn.

*) Đếm số tự nhiên lập được từ m số cho trước lấy ra từ tập hợp số $\{0;1;2....;9\}$ ta làm như sau:

+ Chọn một trong m số làm chữ số hàng cao nhất, rồi lập sơ đồ hình cây, sau đó đếm số lập được

+ Ví dụ: Từ các số 3, 6, 9 lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau?

Bước 1: Chọn chữ số 3 làm hàng trăm, ta có 2 số 369 và 396.

Bước 2: Từ sơ đồ, ta thấy từ 3 chữ số đã cho ta lập được 2 số có 3 chữ số khác nhau mà chữ số hàng trăm bằng 3. Tương tự, ta lập được 2 số có 3 chữ số khác nhau mà chữ số hàng trăm bằng 6, lập được 2 số có 3 chữ số khác nhau mà có chữ số hàng trăm bằng 9.

Bước 3: Vậy từ 3 chữ số đã cho ta lập được $3.2=6$ (số).

*) Để tìm số tự nhiên chưa biết, ta vận dụng hai phương pháp cơ bản sau:

- Phân tích cấu tạo số của một số tự nhiên.

Ta có: $\overline{ab}=10a+b$

$\overline{abc}=100a+10b+c=10\overline{ab}+c=100a+\overline{bc}$

$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=10\overline{abc}+d=100\overline{ab}+\overline{cd}=1000a+10\overline{bc}+d$

- Từ đặc điểm của số cần tìm và dữ kiện của bài toán ta lập luận, nhận xét để lựa chọn chữ số (thường sẽ nhận xét để chỉ ra chữ số của hàng đơn vị và chữ số hàng cao nhất).

PHẦN II. BÀI TẬP:

I.Phương pháp giải

- Liệt kê: Các phần tử thỏa mãn điều kiện cho trước ⇒ dùng phương pháp đếm (ít phần tử)

- Dựa vào quy luật hình thành các phần tử để đếm (chia hết cho 2, 3, … hoặc thỏa mãn điều kiện nào đó).

II.Bài toán

Dạng 1: Đếm số các chữ số của dãy số

Bài 1: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A .

a) Số A có bao nhiêu chữ số?

b) Tính tổng các chữ số của số A?

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Phân tích:

a) Cần đếm số chữ số của các dãy số sau: Dãy các số tự nhiên có 1 chữ số, dãy các số tự nhiên có 2 chữ số, dãy các số tự nhiên có 3 chữ số. Sau đó cộng các kết quả lại với nhau

b) Viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A. Số B có: $3.1000 = 3000$ chữ số mà mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt 300 lần

Lời giải:

a) Số A có bao nhiêu chữ số?

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: 9 (chữ số)

Từ 10 đến 99 số có 90 số gồm: $90.2 = 180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900.3 = 2700$ (chữ số)

Số A có: $9 + 180 + 2700 = 2889$ (chữ số).

b) Tính tổng các chữ số của số A?

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A.B có: $3.1000 = 3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt: $3000 : 100 = 300$ (lần)

Tổng các chữ số của B (cũng là của A):

$(0 + 1 + 2 + ... + 9).300 = 45.300 = 13500$ (chữ số)

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Cần đếm số chữ số 1 trong 11 dãy: $1, 2, 3, ..., 999$ $\quad (1)$

Ta xét dãy: $000, 001, 002, ..., 999$ $\quad (2)$

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 0 đến 9) đều có mặt

$$3.1000 : 10 = 300 \text{ (lần).}$$

Vậy ở đây (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Ở dãy (2) chữ số 0 có mặt 300 lần.

So với dãy (1) thì ở dãy (2) ta viết thêm các chữ số 0:

- Vào hàng trăm 100 lần (chữ số hàng trăm của các số từ 000 đến 099);

-Vào hàng chục 10 lần (chữ số hàng chục của các số từ 000 đến 009);

-Vào hàng đơn vị 1 lần (chữ số hàng đơn vị của 000).

Vậy chữ số 0 ở dãy (1) được viết là: $300-111=189$ (lần).

Bài 2: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A.

a) Số A có bao nhiêu chữ số?

b) Tính tổng các chữ số của số A?

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Phân tích:

a) Cần đếm số chữ số của các dãy số sau: Dãy các số tự nhiên có 1 chữ số, dãy các số tự nhiên có 2 chữ số, dãy các số tự nhiên có 3 chữ số. Sau đó cộng các kết quả lại với nhau

b) Viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A. Số B có: $3.1000=3000$ chữ số mà mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt 300 lần

Lời giải:

a) Số A có bao nhiêu chữ số?

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: 9 (chữ số)

Từ 10 đến 99 số có 90 số gồm: $90.2=180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900.3=2700$ (chữ số)

Số A có: $9+180+2700=2889$ (chữ số).

b) Tính tổng các chữ số của số A?

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A.Số B có: $3.1000=3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt: $3000:100=300$ (lần)

Tổng các chữ số của B (cũng là của A):

$(0+1+2+...+9).300=45.300=13500$ (chữ số)

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Cần đếm số chữ số 1 trong 11 dãy: $1,2,3,...,999$ (1)

Ta xét dãy: $000,001,002,...,999$ (2)

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 0 đến 9) đều có mặt

$$3.1000:10=300 \text{ (lần)}.$$

Vậy ở đây (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Ở dãy (2) chữ số 0 có mặt 300 lần.

So với dãy (1) thì ở dãy (2) ta viết thêm các chữ số 0:

- Vào hàng trăm 100 lần (chữ số hàng trăm của các số từ 000 đến 099);

-Vào hàng chục 10 lần (chữ số hàng chục của các số từ 000 đến 009);

-Vào hàng đơn vị 1 lần (chữ số hàng đơn vị của 000).

Vậy chữ số 0 ở dãy (1) được viết là: $300-111=189$ (lần).

Bài 3: Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?

Phân tích: Để đếm số trang sách ta cần phân số trang sách theo 3 loại

Loại 1: Số trang sách mà mỗi số có 1 chữ số

Loại 2: Số trang sách mà mỗi số có 2 chữ số

Loại 3: Số trang sách mà mỗi số có 3 chữ số

Từ đó tính số chữ còn lại để đánh dấu các trang có 3 chữ số, rồi tính được số trang sách

b) Nhận thấy số 100 là số thứ nhất có 3 chữ số. Bằng việc dùng phép chia dư ta cần tìm xem chữ số thứ 1010 thuộc số thứ bao nhiêu có 3 chữ số

Lời giải

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 phải dùng 9 chữ số (viết tắt chữ số).

Từ trang 10 đến trang 99 cần $(99-10)+1=90$ số có 2 chữ số, phải dùng 180 (chữ số)

Vì còn các trang gồm các số có 3 chữ số

$\Rightarrow$ Còn lại: $1998-(180+9)=1809$ (chữ số) là đánh dấu các trang có 3 chữ số.

$\Rightarrow$ Có: $1809:3=603$ số có 3 chữ số.

$\Rightarrow$ Cuốn sách đó có: $603+99=702$ (vì trang $1\rightarrow 99$ có 99 trang).

Cuốn sách có 702 trang.

b) Vì $1010>180+9$ nên chữ số thứ 1010 nằm trong các số có 3 chữ số

Ta có: $1010-(180+9)=821$ (chữ số) đánh dấu các trang có 3 chữ số tính từ trang 100 (số thứ nhất có 3 chữ số) nên có $821:3$ được 273 và dư $2\Rightarrow$ Chữ số thứ 1010 sẽ nằm ở số thứ 274 có 3 chữ số.

Số thứ 274 có 3 chữ số là $374\Rightarrow$ Chữ số thứ 1010 là chữ số 7 của 374.

Bài 4: Bạn Tâm đánh số trang của một cuốn vở có 110 trang bằng cách viết dãy số tự nhiên $1,2,3,...,110.$ Bạn Tâm phải viết tất cả bao nhiêu chữ số?

Lời giải:

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 có 9 trang, phải dùng 9 chữ số.

Từ trang 10 đến trang 99 có $(99-10)+1=90$ (trang), phải dùng 180 (chữ số).

Từ trang 100 đến trang 110 có $(110-100)+1=11$(trang), phải dùng $11.3=33$ (chữ số).

Vậy bạn Tâm phải viết tất cả: $9+180+33=222$ (chữ số).

Bài 5: Một cô nhân viên đánh máy liên tục dãy số chẵn bắt đầu từ 2: $2,4,6,8,10,12,...$ Cô phải đánh tất cả 2000 chữ số. Tìm chữ số cuối cùng mà cô đã đánh.

Lời giải:

Đánh từ số 2 đến số 8 cần $(8-2):2+1=4$ số chẵn có 1 chữ số, phải đánh 4 (chữ số).

Đánh từ số 10 đến số 98 cần $(98-10):2+1=45$ số chẵn có 2 chữ số, phải đánh $45.2=90$(chữ số).

Đánh từ số 100 đến số 998 cần $(998-100):2+1=450$ số chẵn có 3 chữ số, phải đánh $450.3=1350$ (chữ số).

Vì còn các số chẵn phải đánh gồm các số chẵn có 4 chữ số

$\Rightarrow$ Còn lại: $2000-(1350+90+4)=556$ chữ số là đánh các số chẵn có 4 chữ số

Có: $556:4$ được $139\Rightarrow$ chữ số thứ 2000 sẽ nằm ở số chẵn thứ 139 có 4 chữ số

Số chẵn thứ 139 có 4 chữ số là: $(139-1).2+1000=1276$.

$\Rightarrow$ Chữ số thứ 2000 là chữ số 6 của số 1276.

Bài 6: Bạn Mai viết dãy số lẻ $1;3;5;...;245$.

a) Bạn Mai phải viết tất cả bao nhiêu chữ số?

b) Nếu mỗi chữ số viết mất một giây thì viết đến số 245 mất bao nhiêu giây? Sau 5 phút, bạn Mai viết đến chữ số nào?

Lời giải:

a) Viết từ số 1 đến số 9 cần $\left(9-1\right):2+1=5$ số lẻ có 1 chữ số, phải viết 5 chữ số.

Viết từ số 11 đến số 99 cần $(99-11):2+1=45$ số lẻ có 2 chữ số, phải viết $45.2=90$ chữ số.

Viết từ số 101 đến số 245 cần $(245-101):2+1=73$ số lẻ có 3 chữ số, phải viết $73.3=219$ chữ số.

Vậy bạn Mai phải viết tất cả: $5+90+219=314$ (chữ số).

b) Nếu mỗi chữ số viết hết một giây thì viết đến số 245 mất 314 giây.

Đổi: $5\ phút=300\ giây$.

Sau 5 phút, bạn Mai viết đến chữ số thứ 300.

Vì $300>90+5$ nên chữ số thứ 300 nằm trong các số lẻ có 3 chữ số.

Ta có: $300-\left(90+5\right)=205$ chữ số để viết các số lẻ có 3 chữ số tính từ số 101 (số lẻ thứ nhất có 3 chữ số) mà có $205:3$ được 68 và dư 1.

$\Rightarrow$ Chữ số thứ 300 sẽ nằm ở số lẻ thứ 69 có 3 chữ số.

Số lẻ thứ 69 có 3 chữ số là $(69-1).2+101=237$

$\Rightarrow$ Chữ số thứ 300 là chữ số 2 của số 237.

Dạng 2: Đếm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Phân tích: Đây là bài toán đếm số tự nhiên có liên quan tới dấu hiệu chia hết cho 4. Trước hết ta cần viết số tự nhiên cầ n tìm dưới dạng $\overline{abc2}$, sau đó đếm số cách chọn mỗi chữ số tập hợp $\left\{0,1,2...,9\right\}$. Việc thực hiện số cách chọn các chữ số a,b,c có sự dang buộc lẫn nhau. Do đó nếu chữ số a có m cách chọn, chữ số b có n cách chọn, chữ số c có k cách chọn thì ta sẽ có $m.n.k$ số có bốn chữ số thỏa mãn bài toán. Việc chọn chữ số c phải thỏa mãn điều kiện chi chia hết cho 4 là $\overline{c2}\,\vdots\,4$.

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng: $\overline{abc2}$ $(a\neq 0, 0\le a,b,c\le 9)$.

Chữ số a có 9 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a,b chữ số c có 5 cách chọn $(1,3,5,7,9)$ để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có: $9.10.5=450$ (số).

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Phân tích: Số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5, ta cần hiểu chữ số 5 có thể là chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng chục, chữ số hàng trăm nên ta cần chia ra ba loại số có 3 chữ số thỏa mãn là: $\overline{5ab};\overline{a5b};\overline{ab5}$. Ở mỗi loại số ta thực hiện đếm số cách chọn mỗi chữ số từ tập hợp $\{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$ giống như bài 2.

Lời giải:

Ta chia ra 3 loại số:

Số đếm có dạng $\overline{5ab}$ $(0\le a,b\le 9, a\ne 5, b\ne 5)$: chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn các số thuộc loại này có: $9.9=81$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{a5b}$ $(0\le a,b\le 9, a\ne 5, b\ne 5, a\ne 0)$: chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn, các số thuộc loại này có: $8.9=72$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{ab5}$ $(0\le a,b\le 9, a\ne 5, b\ne 5, a\ne 0)$: các số thuộc loại này có: $8.9=72$ (số).

Vậy số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là $81+72+72=225$ (số).

Bài 3: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

a) Chứa đúng một chữ số 4?

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Lời giải:

a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

- Dạng $\overline{4bc}$ $(0\le c,b\le 9, c\ne 4, b\ne 4)$ có $9.9=81$ (số).

- Dạng $\overline{a4c}$ $(0\le a,c\le 9, a\ne 4, c\ne 4, a\ne 0)$ có $8.9=72$ (số).

- Dạng $\overline{ab4}$ $(0\le a,b\le 9, a\ne 4, b\ne 4, a\ne 0)$ có $8.9=72$ (số).

Tất cả có: $81+72+72=225$ (số).

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng:

- Dạng $\overline{44c}$ $(0 \le c \le 9, c \ne 4)$ có 9 (số).

- Dạng $\overline{a44}$ $(0 \le a \le 9, a \ne 4, a \ne 0)$ có 8 (số).

- Dạng $\overline{4b4}$ $(0 \le b \le 9, b \ne 4)$ có 9 (số).

Tất cả có: $9+8+9=26$ (số).

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số, trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng $\overline{abc}$ $(0 \le a,b,c \le 9, a \ne 5, b \ne 5, c \ne 5, a \ne 0)$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8.9=72$ (số).

Vậy có $180-72=108$ (số) phải đếm.

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng $\overline{abc}$ $(0 \le a,b,c \le 9, a \ne 3, b \ne 3, c \ne 3, a \ne 0)$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a+b=3k$ thì $c=0;6;9$, nếu $a+b=3k+1$ thì $c=2;5;8$, nếu $a+b=3k+2$ thì $c=1;4;7$) có $8.9.3=216$ (số).

Bài 4: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5?

Phân tích: Những số có tận cùng bằng 5 luôn cách nhau 10 đơn vị, tuy nhiên bài toán đòi hỏi số tự nhiên có 4 chữ số và chia hết cho 3. Do đó ta cần xác định: Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5. Khoảng cách trong dãy này sẽ là 30. Từ đó vận dụng công thức "Số số hạng = (số cuối – số đầu): Khoảng cách + 1".

Lời giải:

Số lớn nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 9975

Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 1005

Ta có dãy số: 1005; 1035; 1065;....; 9975

Khoảng cách của dãy là 30

$\Rightarrow$ Số số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là: $(9975-1005):30+1=300$

Vậy có 300 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 5: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 100, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Lời giải:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

Các số chia hết cho 2 là: $2;4;6;...;100$

Số các số chia hết cho 2 là:

$\frac{(100-2)}{2}+1=50$ (số)

Các số chia hết cho 2 và 3: $6;12;18;24;....;96$

Số các số chia hết cho cả 2 và 3 là:

$\frac{(96-6)}{6}+1=16$ (số)

Vậy từ 1 đến 100 có $50-16=34$ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3.

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

Các số chia hết cho 3 là: $3;6;9;12;15;...;99$

Số các số chia hết cho 3 là:

$\frac{(99-3)}{3}+1=33$ (số)

Vậy các số chia cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 là:

$50+33-16=67$ (số)

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Số các số không chia hết cho 2 và cho 3 là:

$100-67=33$ (số).

Bài 6: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 1000, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5?

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Lời giải:

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5?

Gọi A,B,C,D,E,G,H là tập hợp các số từ 1 đến 1000 mà theo thứ tự chia hết cho 2, chia hết cho 3, chia hết cho 5, chia hết cho 2 và 3, chia hết cho 2 và 5, chia hết cho 3 và 5, chia hết cho cả 3 số. Số phần tử của các tập hợp đó theo thứ tự bằng $S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7$

Ta có: $S_1 = 1000:2 = 500; S_2 = [1000:3] = 333; S_3 = 1000:5 = 200; S_4 = [1000:6] = 166$

$S_5 = 1000:10 = 100; S_6 = [1000:15] = 66; S_7 = [1000:30] = 33$

Số các số phải tìm gồm: $S_1 + S_2 + S_3 - S_4 - S_5 - S_6 + S_7 = 734$ (số)

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Còn lại $1000 - 734 = 266$ (số).

Bài 7: Có bao nhiêu số $\overline{abcd}$ mà $\overline{ab} < \overline{cd}$?

Lời giải: Điều kiện: $1 \le a \le 9,\ 0 \le b \le 9$

Xét các trường hợp sau:

Nếu $\overline{ab} = 10$ thì $\overline{cd}$ $(0 \le c,d \le 9)$ có thể bằng: $11,\ 12,\ ...,\ 99$, có 89 số.

Nếu $\overline{ab} = 11$ thì $\overline{cd}$ $(0 \le c,d \le 9)$ có thể bằng: $12,\ ...,\ 99$, có 88 số.

....

Nếu $\overline{ab} = 98$ thì $\overline{cd}$ $(0 \le c,d \le 9)$ có thể bằng: $98,\ 99$, có 2 số.

Nếu ab = 98 thì $\overline{cd}$ $(0 \le c,d \le 9)$ bằng: 99, có 1 số.

Vậy có tất cả: $1 + 2 + 3 + ... + 89 = 4005$ (số).

Bài 8: Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$, trong đó $b - a = 1$; $d - c = 1$?

Lời giải:

Chữ số a $(0 \le a \le 9, a \ne 0)$ có 8 cách chọn $(1, 2,\ ..., 8)$.

Chữ số b $(0 \le b \le 9)$ có 1 cách chọn $(b = a + 1)$.

Chữ số c $(0 \le c \le 9)$ có 9 cách chọn $(0, 1, 2,\ ..., 8)$.

Chữ số d $(0 \le d \le 9)$ có 1 cách chọn $(d = c + 1)$.

Tất cả có: $8.1.9.1 = 72$ (số).

Bài 9: Có bao nhiêu số chứa ít nhất một chữ số 1 trong các số tự nhiên:

a) Có ba chữ số.

b) Từ 1 đến 999.

Lời giải:

a) Ta đếm các số tự nhiên có ba chữ số rồi bớt đi các số có ba chữ số không chứa chữ số 1.

Số có ba chữ số là: $100, 101, ..., 999$, có 900 số (1).

Trong các số trên, số không chứa chữ số 1 có dạng $\overline{abc}$ $(0 \le a, b, c \le 9, a \ne 0, a \ne 1, b \ne 1, c \ne 1)$ trong đó a có 8 cách chọn (từ 2 đến 9), b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 1), c có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 1), có: $8.9.9 = 648$ (số) (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow$ Số các số phải đếm là: $900 - 648 = 252$ (số).

b) Ta thêm chữ số 0 vào dãy $1, 2, ..., 999$ thành dãy mới $000, 001, ..., 999$ để đếm số được dễ dàng.

Trước hết, ta đếm các số không chứa chữ số 1 của dãy này: đó là các số có dạng $\overline{abc}$ $(0 \le a, b, c \le 9, a \ne 1, b \ne 1, c \ne 1)$ trong đó mỗi chữ số a, b, c đều có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 1), tất cả có: 9.9.9 = 729 (số). Vậy số lượng các số từ 1 đến 999 không chứa chữ số 1 có:

$729 - 1 = 728$ (số).

Số lượng các số từ 1 đến 999 có chứa chữ số 1 là:

$999 - 728 = 271$ (số).

Bài 10: Tìm số lượng các số tự nhiên có bốn chữ số mà:

a) Số tạo bởi hai chữ số đầu (theo thứ tự ấy) cộng với số tạo bởi hai chữ số cuối (theo thứ tự ấy) nhỏ hơn 100.

b) Số tạo bởi hai chữ số đầu (theo thứ tự ấy) lớn hơn số tạo bởi hai chữ số cuối (theo thứ tự ấy)?

Lời giải:

a) Các số cần tìm có dạng: $\overline{abcd}$ $(0 \le a, b, c, d \le 9, a \ne 0)$ trong đó: $\overline{ab} + \overline{cd} < 100$.

Ta có các số sau thỏa mãn đề bài:

+) 1000; 1001; 1002; ...; 1089 $\Rightarrow$ Gồm: $1090 - 1000 + 1 = 90$ (số).

+) 1100; 1101; 1102;...; 1188 $\Rightarrow$ Gồm: $1188 - 1100 + 1 = 89$ (số).

……………………………………

+) 9700; 9701; 9702 $\Rightarrow$ gồm: 3 (số).

+) 9800; 9801 $\Rightarrow$ gồm: 2 (số).

+) 9900 $\Rightarrow$ gồm: 1 (số).

Vậy có tất cả: $90 + 89 + ... + 3 + 2 + 1 = (90 + 1).90 : 2 = 4095$ (số).

b) Các số cần tìm có dạng: $\overline{abcd}$ $(0 \le a, b, c, d \le 9, a \ne 0)$ trong đó: $\overline{ab} > \overline{cd}$.

Ta có các số sau thỏa đề bài:

+) $1000;\ 1001;\ 1002...;\ 1009 \Rightarrow$ gồm: $1009-1000+1=10$ (số).

+) $1100;\ 1101;\ 1102;\ ...;\ 1110 \Rightarrow$ gồm: $1110-1100+1=11$ (số).

…………………………………

+) $9700;\ 9701;\ \ldots;\ 9796 \Rightarrow$ gồm: $9796-9700+1=97$ (số).

+) $9800;\ 9801;\ \ldots;\ 9897 \Rightarrow$ gồm: $9897-9800+1=98$ (số).

+) $9900;\ 9901;\ ...;\ 9998 \Rightarrow$ gồm $9998-9900+1=99$ (số).

Số các số thỏa đề bài là: $10+11+...+97+98+99$

Tổng trên gồm $99-10+1=90$ (số).

Vậy số các số thỏa đề bài là: $(99+10).90:2=4905$ (số).

Bài 11: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 252, xoá các số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5, rồi xoá các số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 2. Còn lại bao nhiêu số?

Lời giải:

Các số phải xóa có tận cùng $2;4;6;8;5$.Mỗi chục xóa 5 số, còn lại 5 số. Từ 1 đến 250 có 25 chục, còn lại: $5.25=125$ (số).
Xét các số $251;252,$ số 251 được giữ lại.

Vậy còn lại 126 số.

Bài 12: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà:

a) Các chữ số đều chẵn?

b) Chữ số hàng chục là chữ số lẻ?

Lời giải:

a) Các số phải đếm có dạng $\overline{abc}$ $(0 \le a,b,c \le 9, a \ne 0)$, trong đó:

Chữ số a có 4 cách chọn $(2,4,6,8)$.

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 5 cách chọn $(0,2,4,6,8)$.

Với mỗi cách chọn a,b chữ số c có 5 cách chọn $(0,\ 2,4,6,8)$.

Tất cả có: $4.5.5=100$ (số).

b) Các số phải đếm có dạng $\overline{abc}$ $(0 \le a,b,c,d \le 9, a \ne 0)$, trong đó:

Chữ số a có 9 cách chọn $(1,2,3,\ 4,5,\ 6,7,8,9)$.

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 5 cách chọn $\left(1,3,5,7,9\right)$.

Với mỗi cách chọn a,b chữ số c có 10 cách chọn $\left(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right)$.

Tất cả có: $9.5.10=450$ (số).

Bài 13: Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số trong đó:

a) Mỗi chữ số đều chẵn?

b) Tổng các chữ số là số chẵn?

Lời giải:

a) Các số phải đếm có dạng $\overline{abcd}$ $(0\le a,b,c,d\le 9,a\ne 0)$, trong đó:

Chữ số a có 4 cách chọn $\left(2,4,6,8\right)$.

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 5 cách chọn $\left(0,2,4,6,8\right)$.

Với mỗi cách chọn a,b chữ số c có 5 cách chọn $\left(0,2,4,6,8\right)$.

Với mỗi cách chọn a,b,c chữ số d có 5 cách chọn $\left(0,2,4,6,8\right)$.

Tất cả có: $4.5.5.5=500$ (số).

b) Các số phải đếm có dạng $\overline{abcd}$ $(0\le a,b,c,d\le 9,a\ne 0)$, trong đó:

Chữ số a có 9 cách chọn $\left(1,2,3,4,5,6,7,8,9\right)$.

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 10 cách chọn $\left(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right)$.

Với mỗi cách chọn a,b chữ số c có 10 cách chọn $\left(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right)$.

Với mỗi cách chọn a,b,c chữ số d có 5 cách chọn:

+ Nếu $a+b+c$ lẻ thì $d=1,3,5,7,9$.
+ Nếu $a+b+c$ chẵn thì $d=0,\ 2,4,6,8$.

Tất cả có: $9.10.10.5=4500$ (số).

Bài 14: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng cộng nó với số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì được một số chia hết cho 5?

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng $\overline{abc}$ $(0\le a,b,c\le 9,a\ne 0)$.

Theo đề bài, ta có : $\overline{abc}$ + $\overline{cba}$ $\vdots 5$.

Với mỗi cách chọn $\overline{ab}$ (từ 10 đến 99) thì c có 2 cách chọn phụ thuộc vào a :

Nếu a = 5k thì c bằng 0 hoặc 5
Nếu a = 5k + 1 thì c bằng 4 hoặc 9
Nếu a = 5k + 2 thì c bằng 3 hoặc 8
Nếu a = 5k + 3 thì c bằng 2 hoặc 7
Nếu a = 5k + 4 thì c bằng 1 hoặc 6

Vậy có: $90.2 = 180$ (số).

Bài 15: Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số, các chữ số khác nhau?

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng $\overline{abc}$ $(0 \le a,b,c \le 9, a \ne 0)$.

Nếu $c=0$ thì a có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), b có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác a).
Nếu $c=2,4,6,8$ thì a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác c), b có 8 cách chọn (từ 0 đến 9, khác a và c).

Vậy có: $9.8+8.8.4=328$ (số).

Bài 16: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có ít nhất hai chữ số như nhau?

Lời giải:

Ta đếm các số tự nhiên có ba chữ số rồi bớt đi các số ba chữ số khác nhau.

Số có ba chữ số là: $100, 101, ..., 999$, có 900 số. (1)

Trong các số trên, số có 3 chữ số khác nhau dạng $\overline{abc}$ $(0 \le a,b,c \le 9, a \ne 0)$, trong đó a có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác a), c có 8 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác a và b),có: $9.9.8 = 648$ (số) (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow$ Số lượng số phải đếm là: $900-648=252$ (số).

Bài 17: Trong các số tự nhiên có bốn chữ số, có bao nhiêu số trong đó có đúng ba chữ số như nhau?

Lời giải:

Các số phải đếm gồm bốn dạng:

Dạng $\overline{baaa}$ $(0 \le a,b \le 9, b \ne 0)$: Chữ số b có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), chữ số a có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác b). Có: $9.9=81$ (số).

Dạng $\overline{abaa}$ $(0 \le a,b \le 9, a \ne 0)$, dạng $\overline{aaba}$ $(0 \le a,b \le 9, a \ne 0)$, dạng $\overline{aaab}$ $(0 \le a,b \le 9, a \ne 0)$: ở mỗi dạng này, chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn (khác a). Mỗi dạng có: $9.9=81$ (số).

Tất cả có: $81.4 = 324$ (số).

Bài 18: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số chứa ít nhất một chữ số 4?

Lời giải:

Ta đếm các số tự nhiên có ba chữ số rồi bớt đi các số ba chữ số không chứa chữ số 4.

Số có ba chữ số là: $100, 101, \ ..., 999$, có 900 số. (1)

Trong các số trên, số có 3 chữ số không chứa chữ số 4 dạng $\overline{abc}$.

Trong đó $(0 \le a, b, c \le 9, a \ne 0, a \ne 4, b \ne 4, c \ne 4)$, trong đó a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9 nhưng khác 4), b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 4), c có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 4), có: $8.9.9 = 648$ (số). (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow$ Số lượng số phải đếm là: $900 - 648 = 252$ (số).

Bài 19: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 10000

a) Có bao nhiêu số chứa chữ số 0?

b) Số chứa chữ số 1 hay số không chứa chữ số 1 có nhiều hơn?

Lời giải:

a) Ta đếm các số tự nhiên từ 1 đến 10000 rồi bớt đi các số không chứa chữ số 0.

Các số tự nhiên từ 1 đến 10000 có 10000 số.

Ta đếm các số không chứa chữ số 0:

+ Từ 1 đến 9 có 9 (số).

+ Từ 10 đến 99 có $9.9 = 81$ (số).

+ Từ 100 đến 999 có $9.9.9 = 729$ (số).

+ Từ 1000 đến 9999 có $9.9.9.9 = 6561$ (số).

Vậy số lượng số phải đếm là: $10000 - (9 + 81 + 729 + 6561) = 2620$ (số) có chứa chữ số 0.

b) Các số tự nhiên từ 1 đến 10000 có 10000 số.

Ta đếm các số không chứa chữ số 1:

+ Từ 1 đến 9 có 8 số.

+ Từ 10 đến 99 có $8.9 = 72$ số.

+ Từ 100 đến 999 có $8.9.9 = 648$ số.

+ Từ 1000 đến 9999 có $8.9.9.9 = 5832$ số.

$\Rightarrow$Có tất cả: $8+72+648+5832 = 6560$ (số) không chứa chữ số 1.

Còn lại: $10000 - 6560 = 3440$ (số) có chứa chữ số 1.

Vậy số không chứa chữ số 1 có nhiều hơn số chứa c số 1.

Bài 20: Có bao nhiêu số tự nhiên từ 10 đến 24 chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

Lời giải: Trong các số tự nhiên từ 10 đến 24:

Các số tự nhiên chia hết cho 2 là: $10,12,14,...,24$, gồm: $(24-10):2+1=8$ (số).

Các số chia hết cho 3 là: $12,15,18,21,24$, gồm 5 số.

Có những số có mặt ở hai dãy trên, đó là các bội của 6 : $12,18,24$, gồm 3 số.

Vậy có: $8+5-3=10$ (số) chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3.

Bài 21: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, có bốn chữ số, có đúng một chữ số 5?

Lời giải:

Các số phải đếm có 4 dạng:

$\overline{5ab0}$ $(0\le a,b\le 9)$ có $9.9=81$ (số)

$\overline{a5b0}$ $(0\le a,b\le 9, a\ne 0)$ có $8.9=72$ (số)

$\overline{ab50}$ $(0\le a,b\le 9, a\ne 0)$ có $8.9=72$ (số)

$\overline{abc5}$ $(0\le a,b,c\le 9, a\ne 0)$ có $8.9.9=648$ (số)

Tất cả có: $81+72+72+648=873$ (số).

Bài 22: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 200, có bao nhiêu số:

a. Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

b. Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

c. Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Lời giải:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

Các số chia hết cho $2: 2;4;\ldots;200$

Số các số chia hết cho 2 là:

$$(200-2)+1=100 \text{ (số)}$$

Các số chia hết cho 2 và 3 là: $6;12;18;24;...;198$

Số các số chia hết cho cả 2 và 3 là:

$$(198-6):\ 6+1=\ 34 \text{ (số)}$$

Vậy từ 1 đến 200 có $100\ -34\ =\ 66$ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3.

b) Các số chia hết cho 3 là: $3;6;9;\ldots;198$

Số các số chia hết cho 3 là:

$(198-3):3+1=66$ (số)

Vậy các số chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 là:

$100+66-34=132$ (số)

c) Không chia hết cho 2 và cho 3 là:

$200-132=68$ (số)

Bài 23: Tuấn muốn đến nhà bạn, nhưng không nhớ số nhà, chỉ biết rằng số nhà của bạn là só chia hết cho 3 và có hai chữ số. Biết số nhà cuối của dãy phố đó là 135. Hỏi Tuấn phải gõ cửa nhiều nhất bao nhiêu số nhà? (các số nhà không đánh số $a,b,...$).

Lời giải:

Dãy số lẻ chia hết cho 3 và có hai chữ số là: $15,21,27,...,99$ gồm $(99-15):6+1=15$ (số).

Vậy Tuấn phải gõ cửa nhiều nhất 15 số nhà.

Bài 24: Có bao nhiêu biển số xe máy khác nhau, mỗi số xe lập bởi hai chữ cái đứng đầu và ba chữ số đứng sau? (bảng chữ cái có 25 chữ, không có biển số 000).

Lời giải:

Vì bảng chữ cái có 25 chữ số nên có $25.25=625$ cách lập kí hiệu đứng đầu gồm 2 chữ cái.

Ta có: 999 cách lập số từ 001 đến 999 $\Rightarrow$ có tất cả: $25.25.999=624375$ (biển số xe).

Dạng 3: Dạng khác

Bài 1: Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích học Toán, 60 học sinh thích Văn.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn Văn và Toán?

Lời giải:

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x$(0<x\le 75, x\in N)$, số học sinh thích Toán mà k thích Văn là $75-x$.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Ta có: $75-x+60+5=100$

$\Leftrightarrow x=40$

Vậy có 40 học sinh thích cả hai môn.

a) Vì trong 100 học sinh có 75 học sinh thích toán và 60 học sinh thích văn nên số học sinh nhiều nhất thích cả toán và văn không thể vượt 60 học sinh.
Vậy số học sinh thích cả 2 môn nhiều nhất là 60 học sinh.

b) Ta có: $75-x+60\leq 100$

$\Rightarrow x\geq 35$.

Có ít nhất 35 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài 2: Kết quả điều tra ở một lớp học cho thấy: có 20 học sinh thích bóng đá, 17 học sinh thích bơi, 36 học sinh thích bóng chuyền,14 học sinh thích bóng đá và bơi,13 học sinh thích bơi và bóng chuyền, 15 học sinh thích bóng đá và bóng chuyền,10 học sinh thích cả ba môn,12 học sinh không thích một môn nào. Tính xem lớp học đó có bao nhiêu học sinh?

Lời giải:

Số học sinh thích đúng 2môn bóng đá và bơi:

$14-10=4$ (học sinh)

Số học sinh thích đúng hai môn bơi và bóng chuyền:

$13-10=3$ (học sinh).

Số học sinh thích đúng hai môn bóng đá và bóng chuyền:

$15-10=5$ (học sinh)

Số học sinh chỉ thích bóng đá:

$20-(4+10+5)=1$ (học sinh)

Số học sinh chỉ thích bơi:

$17-(4+10+3)=0$ (học sinh)

Số học sinh chỉ thích bóng chuyền:

$36-(5+10+3)=18$ (học sinh)

Số học sinh của lớp là:

$1+\ 5+18+10+4+3+12=53$ (học sinh)

Vậy số học sinh của lớp học là 53 học sinh.

Bài 3: Tổng kết đợt thi đua "100 điểm 10 dâng tặng thầy cô", lớp 6A có 43 bạn được từ 1 điểm 10 trở lên, 39 bạn được từ 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10. Tính xem trong đợt thi đua đó, lớp 6A có bao nhiêu điểm 10?

Lời giải:

Số học sinh đạt 1 điểm 10 là: $43-39=4$ (học sinh).

Só học sinh đạt 2 điểm 10 là: $39-14=25$ (học sinh).

Số học sinh đạt 3 điểm 10 là: $14-5=9$ (học sinh).

Số điểm 10 của lớp 6A đạt được là:

$1.4+2.25+3.9+4.5=101$ (điểm 10).

Bài 4: Trong số 200 học sinh có 150 học sinh thích học Toán, 120 học sinh thích Văn.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Lời giải:

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là $x\left(0<x\le 150, x\in N\right)$, số học sinh thích Toán mà không thích Văn là $150-x$.

a) Ta có: $150-x+120+5=200$

$\Rightarrow x=75$

Vậy có 75 học sinh thích cả hai môn.

b) Có nhiều nhất 120 học sinh (nếu tất cả số thích văn đều thích toán)

c) Ta có: $150-x+120\le 200$

$\Rightarrow x\ge 70$

Có ít nhất 70 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

CHUYÊN ĐỀ SỐ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ3: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TỔNG CỦA DÃY SỐ TỰ NHIÊN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. DÃY SỐ TỰ NHIÊN

+ Cho dãy số tự nhiên : $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

- a_1 : số hạng thứ 1 .

- a_2 : số hạng thứ 2 .

- a_3 : số hạng thứ 3 .

- a_n : số hạng thứ n .

- S tổng dãy số tự nhiên có n số hạng.

2. DÃY SỐ TỰ NHIÊN CÁCH ĐỀU

+ Dãy số tự nhiên cách đều: Hiệu hai số hạng liên tiếp luôn luôn không đổi.

- $a_n - a_{n-1} = d$ (hằng số).

$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

$S = n\left(a_1 + a_n\right) : 2$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tổng các số hạng cách đều $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

I. Phương pháp giải

Cần tính tổng: $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. (1)

Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$ (các số hạng cách đều nhau một giá trị d)

Số số hạng của tổng là $n = \left(a_n - a_1\right) : d + 1$ *với* a_1 *là số hạng thứ nhất;* a_n *là số hạng thứ* n.

Tổng $S = n\left(a_1 + a_n\right) : 2$.

Số hạng thứ n của dãy là $a_n = a_1 + (n-1)d$.

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1+2+3+4+...+2019+2020$.

<u>Lời giải:</u>

Số số hạng của dãy là $(2020-1):1+1=2020$.

Tổng $S=(1+2020).2020:2=2041210$.

Bài toán tổng quát: Tính tổng $S=1+2+3+...+n$.

Số số hạng của dãy là $(n-1):1+1=n$.

Tổng $S=(n+1)n:2$.

Bài 2: Tính tổng $S=1+3+5+...+2019+2021$.

<u>Lời giải:</u>

Số số hạng của dãy là $(2021-1):2+1=1011$.

Tổng $S=(1+2021).1011:2=1022121$.

Bài 3: Tính tổng $S=5+10+15+...+2015+2020$.

<u>Lời giải:</u>

Số số hạng của dãy là $(2020-5):5+1=404$.

Tổng $S=(5+2020).404:2=409050$.

Bài 4: Tính tổng $S=1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+...+\frac{4039}{2}+2020$.

<u>Lời giải:</u>

Số số hạng của dãy là $(2020-1):\frac{1}{2}+1=4039$.

Tổng $S=(1+2020).4039:2=4081409,5$.

Bài 5: Tính tổng $S = 10,11 + 11,12 + 12,13 + \ldots + 98,99 + 100$.

<u>Lời giải:</u>

Số số hạng của dãy là $(100 - 10,11) : 1,01 + 1 = 90$.

Tổng $S = (10,11 + 100).90 : 2 = 4954,95$.

Bài 6: Tính tổng các số tự nhiên có hai chữ số? .

<u>Lời giải:</u>

Cách 1:

Các số tự nhiên có hai chữ số là $10;11;12;...;99$

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ số

Ta có: $A = 10 + 11 + 12 + ... + 99 \,(1)$

$A = 99 + 98 + ... + 11 + 10 \,(2)$

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + ... + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + ... + 109 + 109$

Nên $2A = 109.90 \Rightarrow A = 109.90 : 2 = 45.109 = 4905$

Cách 2:

Số số hạng của dãy: $\dfrac{(99 - 10)}{1} + 1 = 90$

(*khoảng cách 2 số hạng liên tiếp của dãy là 1, số hạng đầu của dãy là 10, số hạng cuối của dãy là 99*)

Tổng của dãy: $A = \dfrac{99 + 10}{2}.90 = 4905$

Bài 7: Tính tổng của 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên? .

Phân tích:

Để giải bài toán ta cần xác định được quy luật cách đều của các số lẻ liên tiếp. Tuy nhiên các số hạng trong tổng đã biết nên ta chỉ cần áp dụng công thức tính tổng như đã nêu trong phương pháp

<u>Lời giải</u>

Tổng 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: $S = 1 + 3 + 5 + ... + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$

Cách 1: Tính tổng theo công thức trong phương pháp

Các số hạng liên tiếp trong tổng cách đều nhau một giá trị $d=2$ và trong tổng có 21 số hạng nên: $S=1+3+5+...+33+35+37+39+41=\dfrac{(41+1).21}{2}=441$

Cách 2: Nhóm số hạng tạo thành những cặp số có tổng bằng nhau, ta thấy:

$1+41=42$ $\quad$ $3+39=42$ $\quad$ $5+37=42$ $\quad$ $7+35=42....$

$\Rightarrow$ Nếu ta sắp xếp các cặp số từ hai đầu dãy số vào, ta được các cặp số đều có tổng là 42

Số cặp số là: $20:2=10$ (cặp số) dư một số hạng ở chính giữa dãy số là số 21

Vậy tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: $42.10+21=441$

Bài 9: Tính tổng $S=\dfrac{1}{3}+1+\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{3}+3+...+\dfrac{101}{3}+\dfrac{103}{3}+35$.

Lời giải

Ta có $S=\dfrac{1}{3}+1+\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{3}+3+...+\dfrac{101}{3}+\dfrac{103}{3}+35=\dfrac{1+3+5+7+...+101+103+105}{3}$

Xét tổng $1+3+5+....+101+103+105$ là tổng các số tự nhiên lẻ liên tiếp từ 1 đến 105, các số tự nhiên lẻ liên tiếp cách đều nhau 2 đơn vị.

Tổng này có: $n=(105-1):2+1=53$ số hạng.

$1+3+5+....+101+103+105=\dfrac{(105+1).53}{2}=2809$

Ta có tổng $S=\dfrac{2809}{3}$

Dạng 2: Tổng có dạng $S=1+a+a^2+a^3+...+a^n\ (1)$

I. Phương pháp giải

TH 1: Nếu $a=1$ thì $S=1+n$.

TH 2: Nếu $a\neq 1$ để tính tổng S ta làm như sau

Bước 1: Nhân hai vế của (1) với số a ta được $aS=a+a^2+a^3+a^4+...+a^n \quad (2)$

Bước 2: Lấy (2) trừ (1) vế theo vế ta được $aS-S=a^{n+1}-1\Rightarrow S=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{20}$.

Lời giải:

Ta có $2S = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{21}$

Vậy $2S - S = S = 2^{21} - 2$.

Bài 2: Tính tổng $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{100}$.

Lời giải:

Ta có $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{101}$

Vậy $2S - S = S = 2^{101} - 1$.

Bài 3: Tính tổng $S = 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + ... + 6^{99}$.

Lời giải:

Ta có $6S = 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 ... + 6^{100}$.

Vậy $6S - S = 5S = 6^{100} - 6$.

Suy ra $S = \dfrac{6^{100} - 6}{5}$.

Bài 4: Tính tổng $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^{99}} + \dfrac{1}{2^{100}}$.

**) Phân tích:* Đặt $\dfrac{1}{2} = a$ bài toán trở về dạng đã cho.

Kể từ số hạng thứ nhất, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\dfrac{1}{2}$. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ $\dfrac{1}{2}$ đến $\dfrac{1}{2^{99}}$, giống như trong tổng S, khi đó nếu lấy tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\dfrac{1}{2}$ đến $\dfrac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và tính được tổng S.

Lời giải:

Ta có $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^{99}} + \dfrac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2S = 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^{99}}$

$\Rightarrow 2S - S = S = 2 - \dfrac{1}{2^{100}}$

Bài 5: Tính tổng $S=1+\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{5}{7^3}+...+\frac{5}{7^{55}}$.

**) Phân tích:* Nhận thấy các số hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{55}}$ đều có cùng tử số là 5, và kể từ số hạng $\frac{5}{7}$ thì các số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{7}$. Nếu nhân 7 vào tổng S thì ta được tổng 7S có các số hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{54}}$ giống như trong tổng S. Do đó nếu lấy tổng 7S trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{54}}$ bị triệt tiêu, từ đó tính được tổng S.

Lời giải:

Ta có $S=1+\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{5}{7^3}+...+\frac{5}{7^{55}} \Rightarrow 7S=7+7.\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{5}{7^3}+...+\frac{5}{7^{55}}\right)=7+5+\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{5}{7^3}+...+\frac{5}{7^{54}}$

$\Rightarrow 7S-S=6S=11-\frac{5}{7^{55}} \Rightarrow S=\frac{11}{6}-\frac{5}{6.7^{55}}$

Bài 6: Tính tổng $S=\frac{1}{18}+\frac{1}{18.9}+\frac{1}{162.9}+\frac{1}{1458.9}$.

**) Phân tích:* Nếu quy đồng phân số bài toán thì khá phức tạp. Nhận thấy các số 18, 162, 1458 đều chia hết cho 9, do đó ta sẽ phân tích các số này thành tích của 9 với một thừa số nào đó để xem có xuất hiện tổng theo quy luật $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+...$ hay không, từ đó có hướng tính S

Lời giải:

Ta có $S=\frac{1}{18}+\frac{1}{18.9}+\frac{1}{162.9}+\frac{1}{1458.9}=\frac{1}{2.9}+\frac{1}{2.9^2}+\frac{1}{2.9^3}+\frac{1}{2.9^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9^4}\right)$

Nhân 2 vào tổng S ta được: $2S=\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9^4}$

Nhân 9 vào tổng 2S ta được: $19S=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}$

Trừ tổng 18S cho tổng 2S ta được: $18S-2S=16S=1-\frac{1}{9^4} \Rightarrow 16S=\frac{9^4-1}{9^4} \Rightarrow S=\frac{9^4-1}{16.9^4}=\frac{410}{6561}$

Dạng 3: Tính tổng có dạng $A=1+a^2+a^4+a^6+.......+a^{2n}$ (1)

I. Phương pháp giải

Bước 1: Nhân hai vế của đẳng thức với a^2 ta được:

$a^2.A = a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + ... + a^{2n+2}$ (2)

Bước 2: Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được:

$$a^2.A - A = \left(a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + ... + a^{2n+2}\right) - \left(1 + a^2 + a^4 + a^6 + ... + a^{2n}\right)$$

$$\Rightarrow A\left(a^2 - 1\right) = a^{2n+2} - 1 \Rightarrow A = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng sau: $A = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ .....+ 2^{98} + 2^{100}$ (1)

<u>Lời giải:</u>

Nhân vào hai vế với 2^2 ta được: $2^2.A = 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \ ..... + 2^{100} + 2^{102}$ (2)

Lấy $(2)-(1)$ theo vế :

$$2^2.A - A = \left(2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \ ..... + 2^{100} + 2^{102}\right) - \left(1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ ..... + 2^{98} + 2^{100}\right)$$

$$3A = 2^{102} - 1 \Rightarrow A = \frac{2^{102} - 1}{3}$$

Bài 2: Tính tổng sau: $B = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + ... + \frac{1}{3^{2018}}$ (1)

<u>Lời giải:</u>

Đặt $C = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + ... + \frac{1}{3^{2018}} \Rightarrow B = \frac{1}{9} + C$

Ta có: $C = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^6} + ... + \frac{1}{3^{2018}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^2}.C = \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^8} + ... + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$\Rightarrow C - \frac{1}{3^2}.C = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^6} + ... + \frac{1}{3^{2018}}\right) - \left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^8} + ... + \frac{1}{3^{2020}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}.C = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^{2020}} \Rightarrow C = \frac{9}{8}.\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^{2020}}\right) = \frac{3^{2018} - 1}{8.3^{2018}}$$

Bài 3: Tìm giá trị của x biết: $1+5^2+5^4+.....+5^{2x}=\dfrac{25^6-1}{24}$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $A=1+5^2+5^4+.....+5^{2x}$ (1)

Nhân vào hai vế với 5^2 ta được: $5^2.A=5^2+5^4+5^6+5^8+\ .....+5^{2x+2}$ (2)

Lấy $(2)-(1)$ theo vế :

$$5^2.A-A=\left(5^2+5^4+5^6+5^8+\ .....+2^{2x+2}\right)-\left(1+5^2+5^4+.....5^{2x}\right)$$

$$24.A=5^{2x+2}-1\Rightarrow A=\frac{5^{2x+2}-1}{24}$$

Vì $1+5^2+5^4+.....5^{2x}=\dfrac{25^6-1}{24}=\dfrac{5^{12}-1}{24}\Rightarrow\dfrac{5^{2x+2}-1}{24}=\dfrac{5^{12}-1}{24}\Rightarrow x=5$.

Vậy $x=5$ là giá trị cần tìm.

Bài 4: Tìm giá trị của x biết: $1+(x-1)^2+(x-1)^4+.....+(x-1)^{2020}=\dfrac{17^{2022}-1}{\left[(x-1)^2-1\right]}$, với $x\neq 2$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $B=1+(x-1)^2+(x-1)^4+.....+(x-1)^{2020}$ (1).

Nhân cả hai vế của (1) với $(x-1)^2$ ta được: $B.(x-1)^2=(x-1)^2+(x-1)^4+(x-1)^6+.......+(x-1)^{2022}$ (2).

Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được:

$$B.(x-1)^2-B=\left[(x-1)^2+(x-1)^4+(x-1)^6+.......+(x-1)^{2022}\right]-\left[1+(x-1)^2+(x-1)^4+.....(x-1)^{2020}\right]$$

$$B.\left[(x-1)^2-1\right]=(x-1)^{2022}-1\Rightarrow B=\frac{(x-1)^{2022}-1}{(x-1)^2-1}$$

Theo bài cho: $B=\dfrac{17^{2022}-1}{\left[(x-1)^2-1\right]}\Rightarrow\dfrac{(x-1)^{2022}-1}{(x-1)^2-1}=\dfrac{17^{2022}-1}{\left[(x-1)^2-1\right]}$

$\Rightarrow x-1=17\Rightarrow x=18$ (thỏa mãn).

Vậy $x=18$.

Bài 5: Chứng minh rằng: $1+5^2+5^4+.....+5^{40}$ chia hết cho 26.

<u>Lời giải:</u>

Phân tích: Ta nhóm 2 thừa số liền kề để làm xuất hiện thừa số 26.

Ta có:

$$\begin{aligned}1+5^2+5^4+.....+5^{40}&=\left(1+5^2\right)+\left(5^4+5^6\right).....+\left(5^{38}+5^{40}\right)\\&=\left(1+5^2\right)+5^4.\left(1+5^2\right)+......5^{38}.\left(1+5^2\right)\\&=26+5^4.26+......5^{38}.26\end{aligned}$$

Vậy $1+5^2+5^4+.....5^{40}$ chia hết cho 26.

Bài 6: Chứng minh rằng: $1+2^2+2^4+.....+2^{100}$ chia hết cho 21.

<u>Lời giải:</u>

Phân tích: Ta nhóm 3 thừa số liền kề để làm xuất hiện thừa số 21.

Ta có:

$$\begin{aligned}1+2^2+2^4+.....+2^{100}&=\left(1+2^2+2^4\right)+\left(2^6+2^8+2^{10}\right).....+\left(2^{96}+2^{98}+2^{100}\right)\\&=\left(1+2^2+2^4\right)+2^6.\left(1+2^2+2^4\right)+....+2^{96}.\left(1+2^2+2^4\right)\\&=21+2^6.21+......+2^{96}.21\end{aligned}$$

Do đó: $1+2^2+2^4+.....+2^{100}$ chia hết cho 21

Bài 7: Chứng minh rằng: $1+3^2+3^4+.....+3^{100}$ chia hết cho 82.

<u>Lời giải:</u>

Phân tích: Ta nhóm hai thừa số cách đều để làm xuất hiện thừa số 82.

Ta có:

$$\begin{aligned}1+3^2+3^4+.....+3^{100}&=\left(1+3^4\right)+\left(3^2+3^6\right)+.....+\left(3^{90}+3^{94}\right)+\left(3^{96}+3^{100}\right)\\&=\left(1+3^4\right)+3^2.\left(1+3^4\right)+.......+3^{90}.\left(1+3^4\right)+3^{96}.\left(1+3^4\right)\\&=82+3^2.82+.....+3^{90}.82+3^{96}.82\end{aligned}$$

Vậy $1+3^2+3^4+.....+3^{100}$ chia hết cho 82.

Bài 8: So sánh: $1+5^2+5^4+.....+5^{40}$ với $\dfrac{5^{42}-2}{23}$.

Lời giải:

Đặt $A=1+5^2+5^4+.....+5^{40}$

$\Rightarrow 5^2.A=5^2+5^4+5^6+.....+5^{42}$

$\Rightarrow 5^2.A-A=\left(5^2+5^4+5^6+.....+5^{42}\right)-\left(1+5^2+5^4+.....+5^{40}\right)$

$\Rightarrow 24.A=5^{42}-1\Rightarrow A=\dfrac{5^{42}-1}{24}<\dfrac{5^{42}-2}{24}<\dfrac{5^{42}-2}{23}$

Vậy $1+5^2+5^4+.....+5^{40}<\dfrac{5^{42}-2}{23}$.

Ví dụ 9: So sánh: $1+7^2+7^4+.....+7^{100}$ với $\dfrac{7^{102}-2019}{2021}$.

Lời giải:

Đặt $A=1+7^2+7^4+.....+7^{100}$

$\Rightarrow 7^2.A=7^2+7^4+7^6+....+7^{102}$

$\Rightarrow 7^2.A-A=\left(7^2+7^4+7^6+....+7^{102}\right)-\left(1+7^2+7^4+.....+7^{100}\right)$

$\Rightarrow 48.A=7^{102}-1\Rightarrow A=\dfrac{7^{102}-1}{48}>\dfrac{7^{102}-2019}{48}>\dfrac{7^{102}-2019}{2021}$

Dạng 4: Tính tổng $S=a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}$, với $n\geq 1, n\in N; a\neq \pm 1$.

I. Phương pháp giải

$S=a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}\quad (1)$

Bước 1: Nhân cả 2 vế của (1) với a^2 ta được: $a^2S=a^3+a^5+...+a^{2n-1}+a^{2n+1}\quad (2)$

Bước 2: Lấy $(2)-(1)$ ta được: $\left(a^2-1\right)S=a^{2n+1}-a\Leftrightarrow S=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$

Vậy $a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S_1=2+2^3+2^5+...+2^{51}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$ với $n=26; a=2$ ta được:

$S_1=2+2^3+2^5+...+2^{51}=\dfrac{2^{52}-2}{2^2-1}=\dfrac{2^{52}-2}{3}$.

Bài 2: Tính tổng $S_2=\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^5+...+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{99}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$ với $n=50; a=\dfrac{1}{3}$ ta được :

$$S_2=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^5+...+\left(\frac{1}{3}\right)^{99}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{101}-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-1}=\frac{3^{100}-1}{8.3^{99}}.$$

Bài 3: Tính tổng $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{1}{2^7}+...+\dfrac{1}{2^{99}}+\dfrac{1}{2^{101}}$.

**) Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\dfrac{1}{2^2}$. Nếu ta nhân 2^2 vào tổng S, ta được tổng $2^2.S$ có các số hạng từ $\dfrac{1}{2}$ Đến $\dfrac{1}{2^{99}}$ giống như trong tổng S. Khi đó ta lấy tổng $2^2.S$ trừ cho tổng S thì các số hạng từ $\dfrac{1}{2}$ đến $\dfrac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S.

Lời giải

Ta có $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{1}{2^7}+...+\dfrac{1}{2^{99}}+\dfrac{1}{2^{101}}\Rightarrow 2^2S=2^2+2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{1}{2^7}+...+\dfrac{1}{2^{99}}$

$\Rightarrow 2^2S-S=3S=2^2+2-1-\dfrac{1}{2^{101}}\Rightarrow S=\dfrac{1}{3}\left(5-\dfrac{1}{2^{101}}\right)$

Bài 4: Tính tổng $S=6^3+6^5+6^7+...+6^{2021}$

Lời giải

Ta có $S=6^3+6^5+6^7+...+6^{2021}\Rightarrow 6^2S=6^5+6^7+...+6^{2021}+6^{2023}$

$\Rightarrow 6^2 S - S = 35S = 6^{2023} - 6^3 \Rightarrow S = \dfrac{6^{2023} - 6^3}{35}$

Bài 5: Tính tổng $S_3 = 9 + 999 + 99999 + ... + \underbrace{999...9}_{15 \text{ so } 9}$.

Phân tích:

+) Ta có: $9 = 10 - 1; 999 = 10^3 - 1; 99999 = 10^5 - 1; ....; \underbrace{999...9}_{15 \text{ so } 9} = 10^{15} - 1$.

+) Tổng trên có 8 số hạng.

<u>Lời giải:</u>

Ta có: $S_3 = 9 + 999 + 99999 + ... + \underbrace{999...9}_{15 \text{ so } 9} = \left(10 + 10^3 + 10^5 + ... + 10^{15}\right) - 8$

Áp dụng công thức $a + a^3 + a^5 + ... + a^{2n-1} = \dfrac{a^{2n+1} - a}{a^2 - 1}$ với $n = 8; a = 10$ ta được:

$10 + 10^3 + 10^5 + ... + 10^{15} = \dfrac{10^{17} - 10}{10^2 - 1} = \dfrac{10^{17} - 10}{99}$

Vậy $S_3 = \dfrac{10^{17} - 10}{99} - 8 = \dfrac{10^{17} - 802}{99}$.

Dạng 5: Tổng có dạng: $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1)$.

I. Phương pháp giải

Bài toán tổng quát: $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Bài toán tổng quát: $S = 1.(1+k) + (1+k)(1+2k) + ... + n(n+k) = \sum_{n=1}^{n} n(n+k)$, $n, k \in \mathbb{N}^*$.

(khoảng cách giữa các thừa số của mỗi số hạng là k)

* Nhân S với ba lần khoảng cách ta được: $3kS = \sum_{n=1}^{n} 3kn(n+k)$.

* Phân tích từng số hạng của tổng mới để xuất hiện các số hạng đối nhau:

$3kn(n+k) = n(n+k)(n+2k) - (n-k)n(n+k)$

Từ đó tính được tổng S.

II. Bài toán

Bài 1:Tính tổng: $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 98.99$.

Phân tích: Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 1.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của A với 3 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 3 này được viết dưới dạng $(3-0)$ ở số hạng thứ nhất, $(4-1)$ ở số hạng thứ hai, $(5-2)$ ở số hạng thứ ba, …, $(100-97)$ ở số hạng cuối cùng.

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$3A = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + ... + 98.99.3$

$3A = 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + 98.99.(100-97)$

$3A = 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + 98.99.(100-97)$

$3A = (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 97.98.99 + 98.99.100) - (0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 97.98.99)$

$3A = 98.99.100$.

Suy ra: $A = \dfrac{98.99.100}{3} = 323400$.

Bình luận: Ta thấy: $3A = 98.99.100$ là tích của ba thừa số, trong đó 98.99 là hai thừa số của số hạng lớn nhất trong tổng, còn thừa số 100 bằng $99+1$ (bằng thừa số lớn nhất của A cộng với khoảng cách giữa hai thừa số của mỗi số hạng trong A).

Bài 2: Tính tổng: $B = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 99.101$.

Phân tích: Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 2. Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của B với 6 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 6 này được viết dưới dạng $(5+1)$ ở số hạng thứ nhất, $(7-1)$ ở số hạng thứ hai, $(9-3)$ ở số hạng thứ ba, … $(103-97)$ ở số hạng cuối cùng.

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$6B = 1.3.6 + 3.5.6 + 5.7.6 + ... + 99.101.6$

$6B = 1.3.(5+1) + 3.5.(7-1) + 5.7.(9-3) + ... + 99.101.(103-97)$

$= (1.3.1 + 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ... + 97.99.101 + 99.101.103) - (1.3.5 + 3.5.7 + ... + 97.99.101)$

$= 3 + 99.101.103$

$= 1029900$.

Suy ra: $B = \dfrac{1029900}{6} = 171650$.

Bài 3: Tính tổng: $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + ... + 199.2 + 200.1$

Lời giải:

Ta có $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + ... + 199.2 + 200.1$

$= 1.200 + 2(200-1) + 3(200-2) + 4(200-3) + ... + 199(200-198) + 200(200-199)$

$S = (1+2+3+4+..+200).200 - (1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 198.199 + 199.200)$

$S = \dfrac{200.201}{2} - \dfrac{199.200.201}{3} = 1353400$

Bài 4: Chứng minh rằng $S \vdots 100$ với $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + 99.100 + 100.101$

Lời giải:

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + 99.100 + 100.101$

$\Rightarrow 3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + ... + 99.100.3 + 100.101.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + 99.100.(101-98) + 100.101.(102-99)$

$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - ..... - 98.99.100 + 99.100.101 - 100.101.99 + 100.101.102$

$= 100.101.102$

$\Rightarrow S = 100.101.102 : 3 = 34.100.101 = 343400$

Vậy $S \vdots 100$

Dạng 6: Tổng có dạng: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

I. Phương pháp giải

Bài toán tổng quát: Chứng minh rằng : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$

<u>Lời giải:</u>

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$

$S = 1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + \ldots + n.n$

$= 1(2-1) + 2.(3-1) + 3.(4-1) + \ldots + n\left[(n+1)-1\right]$

$= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) - (1+2+3+4+5+\ldots+n)$

Mà $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (Theo dạng bài trước)

$\Rightarrow S = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} - \dfrac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left(\dfrac{n+1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = n(n+1)\dfrac{2n+4-3}{6}$

Vậy $S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Do đó, ta có công thức tính dãy số: $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng sau: $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 49.50 + 50.51 = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \ldots + 49(49+1) + 50(50+1)$

$= \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 50^2\right) + (1+2+3+\ldots+50) = P + (1+2+3+\ldots+50) \Rightarrow P = S - (1+2+3+\ldots+50)$

Lại có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots 49.50 + 50.51 = \dfrac{50.51.52}{3} = 44200$

$(1+2+3+\ldots+50) = \dfrac{(50+1).50}{2} = 1275$

$\Rightarrow P = 44200 - 1275 = 42925$

Bài 2: Tính tổng sau: $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 51^2$

<u>Lời giải:</u>

Ta có tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 49.50 + 50.51 + 51.52 = 1.(1+1) + 2.(2+1) + 3.(3+1) + ... + 51.(51+1)$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 51^2) + (1 + 2 + 3 + ... + 51) = Q + (1 + 2 + 3 + ... + 51) \Rightarrow Q = S - (1 + 2 + 3 + ... + 51)$

Trong đó $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 49.50 + 50.51 + 51.52 = \dfrac{51.52.53}{3} = 46852$

$(1 + 2 + 3 + ... + 51) = \dfrac{(1+51).51}{2} = 1326$

Vậy $Q = 46852 - 1326 = 25526$

Bài 3: Tính tổng sau: $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 199.200 + 200.201 = 2(1+3) + 4(3+5) + ... + 200(199+201)$

$= 2.4 + 4.8 + ... + 200.400 = 2.2.2 + 4.2.2 + ... + 200.200.2 = 2(2^2 + 4^2 + ... + 200^2) = 2M$

$\Rightarrow M = \dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 thì ta có $A = \dfrac{200.201.202}{3} \Rightarrow M = \dfrac{200.201.202}{6} = 1353400$

$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2 = \dfrac{M}{2^2} = \dfrac{1353400}{4} = 338350$

Bài 4: Tính tổng sau: $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2 + 101^2$

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 201.202 + 202.203 = 2(1+3) + 4(3+5) + ... + 202(201+203)$

$= 2.4 + 4.8 + ... + 202.404 = 2.2.2 + 4.4.2 + ... + 202.202.2 = 2(2^2 + 4^2 + ... + 202^2) = 2M$

$\Rightarrow M = \dfrac{A}{2}$

$A = \dfrac{202.203.204}{3} \Rightarrow M = \dfrac{202.203.204}{6} = 1394204.$

$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 101^2 = \dfrac{M}{2^2} = \dfrac{1394204}{4} = 348551.$

Bài 5: Tính các tổng sau: $N = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + 99^2$

$A = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + ... + 10000$

<u>Lời giải:</u>

Tính N

Áp dụng bài toán tổng quát $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$

Ta thấy $n = 99$ nên $N = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{99.(99+1)(2.99+1)}{6} = 328350$

Tính A

Ta biến đổi A về dạng tương tự như biểu thức N ta có:

$A = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + ... + 10000 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + ... + 100^2$

$= \dfrac{100.(100+1)(2.100+1)}{6} = 338350$ (với $n = 100$)

Bài 6: Tính tổng sau: $B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - 19^2 + 20^2$.

<u>Lời giải:</u>

Ta biến đổi B về dạng quen thuộc như biểu thức N bằng cách thêm bớt tổng $2^2 + 4^2 + ... + 100^2$.

$B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - 19^2 + 20^2$

$B = -\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 20^2\right) + 2\left(2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 20^2\right)$

$B = -\dfrac{20.(20+1)(2.20+1)}{6} + 2.2^2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2\right)$

$B = -2870 + 8.\dfrac{10.(10+1)(2.10+1)}{6}$

$B = -2870 + 3080 = 210$

Dạng 7: Tính tổng có dạng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

I. Phương pháp giải

Cách 1: Ta sẽ tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ dựa vào tổng dạng $1.2+2.3+3.4+...+(n-1)n$.

Trước hết ta xét tổng $A=1.2+2.3+3.4+...+(2k-1).2k$

$\Rightarrow 3A=1.2.3+2.3.3+3.4.3+...+(2k-1).2k.3$

$\Rightarrow 3A=1.2.(3-0)+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+...+(2k-1).2k.\left[(2k+1)-(2k-2)\right]$.

$\Rightarrow 3A=1.2.3-0.1.2+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+...+(2k-1).2k.(2k+1)-(2k-2).(2k-1).2k$

$\Rightarrow 3A=(2k-1).2k.(2k+1)$

$\Rightarrow A=\dfrac{(2k-1).2k.(2k+1)}{3}$.

Mặt khác $A=0.1+1.2+2.3+3.4+...+(2k-1).2k$.

$\Rightarrow A=(0.1+1.2)+(2.3+3.4)+...+\left[(2k-2)(2k-1)+(2k-1).2k\right]$

$\Rightarrow A=1(0+2)+3.(2+4)+...+(2k-1).\left[(2k-2)+2k\right]$

$\Rightarrow A=1.2+3.6+...+(2k-1).(4k-2)$

$\Rightarrow A=1.1.2+3.3.2+...+(2k-1).(2k-1).2$

$\Rightarrow A=2.\left[1^2+3^2+...+(2k-1)^2\right]=2.S$.

Vậy $S=\dfrac{A}{2}=\dfrac{(2k-1).2k.(2k+1)}{6}$.

Cách 2: Ta sẽ tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ dựa vào tổng dạng $2.4+4.6+...+(2k-2).2k$ và công thức $n^2-1=(n-1).(n+1)$.

Ta chứng minh công thức như sau: $n^2-1=n^2-n+n-1=n(n-1)+(n-1)=(n-1).(n+1)$ (đpcm).

Nhận thấy tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ có $(2k-1-1):2+1=k$ số hạng, từ đó ta có:

$S-k=(1^2-1)+(3^2-1)+(5^2-1)+...+\left[(2k-1)^2-1\right]$.

$\Rightarrow S-k=2.4+4.6+...+(2k-2).2k$.

$\Rightarrow 6.(S-k)=2.4.6+4.6.6+...+(2k-2).2k.6$

$\Rightarrow 6.(S-k)=2.4.(6-0)+4.6.(8-2)+...+(2k-2).2k.\left[(2k+2)-(2k-4)\right]$

$\Rightarrow 6.(S-k)=2.4.6-0.2.4+4.6.8-2.4.6+...+(2k-2).2k.(2k+2)-(2k-4).(2k-2).2k$

$\Rightarrow 6.(S-k)=(2k-2).2k.(2k+2)$

$\Rightarrow S-k=\dfrac{(2k-2).2k.(2k+2)}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{(2k-2).2k.(2k+2)}{6}+k=\dfrac{(2k-2).2k.(2k+2)}{6}+\dfrac{6k}{6}=\dfrac{2k\left[(2k-2)(2k+2)+3\right]}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{2k\left[2k(2k+2)-2(2k+2)+3\right]}{6}=\dfrac{2k\left[4k^2+4k-4k-4+3\right]}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{2k(4k^2-1)}{6}=\dfrac{2k(4k^2-2k+2k-1)}{6}=\dfrac{2k\left[(4k^2-2k)+(2k-1)\right]}{6}=\dfrac{2k\left[2k(2k-1)+(2k-1)\right]}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{(2k-1).2k.(2k+1)}{6}$.

Cách 3: Ta sẽ tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ dựa vào tổng dạng $1.3+3.5+...+(2k-1).(2k+1)$ và tổng dạng $1+3+5+...+(2k-1)$.

Ta có $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$

$\Rightarrow S=1.(3-2)+3.(5-2)+5.(7-2)+...+(2k-1).\left[(2k+1)-2\right]$

$\Rightarrow S=\left[1.3+3.5+5.7+...+(2k-1).(2k+1)\right]-\left[1.2+3.2+5.2+...+(2k-1).2\right]$

$\Rightarrow S=\left[1.3+3.5+5.7+...+(2k-1).(2k+1)\right]-2.\left[1+3+5+...+(2k-1)\right]$.

Đặt $S_1=1.3+3.5+5.7+...+(2k-1).(2k+1)$ và $S_2=1+3+5+...+(2k-1)$.

Ta có: $S_1=1.3+3.5+5.7+...+(2k-1).(2k+1)$

$\Rightarrow 6S_1 = 1.3.6 + 3.5.6 + 5.7.6 + ... + (2k-1).(2k+1).6$

$\Rightarrow 6S_1 = 1.3.6 + 3.5.(7-1) + 5.7.(9-3) + ... + (2k-1).(2k+1).\left[(2k+3)-(2k-3)\right]$

$\Rightarrow 6S_1 = 1.3.6 + 3.5.7 - 1.3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 + ... + (2k-1).(2k+1).(2k+3) - (2k-3).(2k-1).(2k+1)$

$\Rightarrow 6S_1 = 1.3.6 + (2k-1).(2k+1).(2k+3) - 1.3.5$

$\Rightarrow S_1 = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)+3}{6}$.

Ta có: $S_2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1)$.

Số số hạng của tổng S_2 là: $(2k-1-1):2+1 = k$.

$\Rightarrow S_2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = (1+2k-1).k:2 = k^2$.

$\Rightarrow S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 = S_1 - 2S_2 = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)+3}{6} - 2k^2$.

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)+3-12k^2}{6} = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-(12k^2-3)}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-3(4k^2-1)}{6} = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-3\left[(4k^2-2k)+(2k-1)\right]}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-3\left[2k(2k-1)+(2k-1)\right]}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-3(2k-1)(2k+1)}{6} = \dfrac{(2k-1)(2k+1)\left[(2k+3)-3\right]}{6}$.

Vậy $S = \dfrac{(2k-1).2k.(2k+1)}{6}$.

Cách 4: Ta sẽ tính tổng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2$ dựa vào tổng dạng $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ và tổng dạng $1 + 2 + 3 + ... + n$.

Đặt $A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

$A_n = 1.(2-1) + 2.(3-1) + 3.(4-1) + ... + n.(n+1-1)$.

$A_n = \left[1.2+2.3+3.4+...+n.(n+1)\right]-(1+2+3+...+n)$.

Đặt $B_n = 1.2+2.3+3.4+...+n.(n+1)$

$\Rightarrow 3.B_n = 1.2.3+2.3.3+3.4.3+...+n.(n+1).3$

$\Rightarrow 3B_n = 1.2.(3-0)+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+...+n.(n+1).\left[(n+2)-(n-1)\right]$.

$\Rightarrow 3B_n = 1.2.3-0.1.2+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+...+n.(n+1).(n+2)-(n-1).n.(n+1)$

$\Rightarrow 3B_n = n.(n+1).(n+2)$

$\Rightarrow B_n = \dfrac{n.(n+1).(n+2)}{3}$.

Đặt $C_n = 1+2+3+...+n$.

Ta có C_n là tổng của n số nguyên dương đầu tiên nên $C_n = \dfrac{n.(n+1)}{2}$.

Suy ra $A_n = B_n - C_n = \dfrac{n.(n+1).(n+2)}{3} - \dfrac{n.(n+1)}{2} = \dfrac{n.(n+1).(2n+4)-3n.(n+1)}{6} = \dfrac{n.(n+1).(2n+4-3)}{6}$

Vậy $A_n = \dfrac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$.

Xét $A_k = 1^2+2^2+3^2+...+k^2$

$\Rightarrow 4A_k = 2^2+4^2+6^2+...+(2k)^2$

$\Rightarrow S+4A_k = 1^2+2^2+3^2+4^2+...+(2k-1)^2+(2k)^2 = A_{2k}$

$\Rightarrow S = A_{2k}-4A_k = \dfrac{2k.(2k+1).(4k+1)}{6} - 4.\dfrac{k.(k+1).(2k+1)}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k+1).\left[2k.(4k+1)-4.k(k+1)\right]}{6} = \dfrac{(2k+1).\left[8k^2+2k-4k^2-4k\right]}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k+1).(4k^2-2k)}{6} = \dfrac{(2k+1).2k.(2k-1)}{6}$

Vậy $S=\dfrac{(2k-1).2k.(2k+1)}{6}$.

II. Bài toán

Bài 1. Tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+49^2$.

Phân tích: Đây là bài toán cụ thể của dạng này với $k=25$.

Lời giải:

$S=1^2+3^2+5^2+...+49^2$.

Ta chứng minh công thức sau: $n^2-1=n^2-n+n-1=n(n-1)+(n-1)=(n-1)(n+1)$.

Ta có:

$S-25=(1^2-1)+(3^2-1)+(5^2-1)+...+(49^2-1)$.

$\Rightarrow S-25=2.4+4.6+...+48.50$.

$\Rightarrow 6.(S-25)=2.4.6+4.6.6+...+48.50.6$

$\Rightarrow 6.(S-25)=2.4.(6-0)+4.6.(8-2)+...+48.50.(52-46)$

$\Rightarrow 6.(S-25)=2.4.6-0.2.4+4.6.8-2.4.6+...+48.50.52-46.48.50$

$\Rightarrow 6.(S-25)=48.50.52$

$\Rightarrow S-25=\dfrac{48.50.52}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{48.50.52}{6}+25=20825$

Bài 2: Tính tổng $1^2+3^2+5^2+......+99^2$

Lời giải:

Áp dụng công thức ở trên với $k=50$ ta được: $1^2+3^2+5^2+......+99^2=\dfrac{50.99.101}{3}=166650$

Bài 3: Tính tổng $S=51^2+53^2+55^2+......+99^2$

Lời giải:

Ta tính 2 tổng $A=1^2+3^2+5^2+...+99^2$ và $B=1^2+3^2+5^2+...+49^2$

Theo công thức thu được

$A=1^2+3^2+5^2+......+99^2=\frac{50.99.101}{3}=166650$

và $B=1^2+3^2+5^2+......+49^2=\frac{25.49.51}{3}=20825$

Ta có $S=A-B=166650-20825=145825$

Bài 4: Tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+99^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+98.99+99.100$

Tổng này có 99 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 100 số hạng, và ghép được đủ 50 cặp.

Ta có $A=1.2+2.3+3.4+...+98.99+99.100$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+...+98.99+99.100$

$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+99(98+100)$

$=1.2+3.6+6.10+...+99.198=1.1.2+3.3.2+5.5.2+...+99.99.2$

$=2\left[1^2+3^2+5^2+...+99^2\right]=2.S$

$\Rightarrow S=\frac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có $A=\frac{99.100.101}{3}\Rightarrow S=\frac{99.100.101}{6}=166650.$

Bài 5: Tính tổng $P=5^2+7^2+9^2+...101^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+100.101+101.102$

Tổng này có 101 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 102 số hạng, và ghép được đủ 51 cặp

Ta có $A=1.2+2.3+3.4+...+100.101+101.102$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+...+100.101+101.102$

$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+101.(100+102)$

$=1.2+3.6+5.10+...+101.202$

$=1.1.2+.3.3.2+5.5.2+...+101.101.2$

$=2.\left(1^2+3^2+5^2+...+101^2\right)=2.P'\Rightarrow P'=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có:

$A=\dfrac{101.102.103}{3}\Rightarrow P'=\dfrac{101.102.103}{6}=176851$

$\Rightarrow P=P'-\left(1^2+3^2\right)=176851-10=176841$

Vậy $P=5^2+7^2+9^2+...+101^2=176841$

Bài 6: Tính tổng $S=11^2+13^2+15^2+...+2009^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+...+2008.2009+2009.2010$

Tổng này có 2009 số hạng, nên khi thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 2010 số hạng, và ghép được đủ 1005 cặp số

$A=0.1+1.2+2.3+3.4+...+2008.2009+2009.2010=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+2009(2008+2010)$

$=1.2+3.3.2+5.5.2+...+2009.2009.2=2.\left(1^2+3^2+5^2+...+2009^2\right)=2P\Rightarrow P=\dfrac{A}{2}$

Ta có $A=\dfrac{2009.2010.2011}{3}\Rightarrow P=\dfrac{2009.2010.2011}{6}=2009.335.2011$

$\Rightarrow S=P-\left(1^2+3^2+5^2+...+9^2\right)=2009.335.2011-165$

Bài 6: Tính tổng $N=6^2+8^2+10^2+...+102^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+...+101.102+102103=2(1+3)+4(3+5)+...+102(101+103)$

$=2.4+4.8+...+102.204=2.2.2+4.4.2+...+102.102.2=2\left(2^2+4^2+...+102^2\right)$

$=2.B\Rightarrow B=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có: $A=\dfrac{102.103.104}{3}$

$\Rightarrow B=\dfrac{102.103.104}{6}=182104\Rightarrow N=B-\left(2^2+4^2\right)=182104-20=182084$

Bài 7: Tính tổng $H=12^2+14^2+16^2+...+2010^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 2009.2010 + 2010.2011$

$= 2(1+3) + 4(3+5) + ... + 2010(2011+2013) + 2010(2009+2011)$

$= 2.4 + 4.8 + ... + 2010.4020 = 2.2.2 + 4.4.2 + ... + 2010.2010.2 = 2\left(2^2 + 4^2 + ... + 2010^2\right) = 2B$

$\Rightarrow B = \dfrac{A}{2}$, ta có: $A = \dfrac{2010.2011.2012}{3} \Rightarrow B = \dfrac{2010.2011.2012}{6}$

$\Rightarrow H = B - \left(2^2 + 4^2 + ... + 10^2\right) = \dfrac{2010.2011.2012}{6} - 220$

Dạng 8: Tổng có dạng: $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2$ (k lẻ và $k \in \mathbb{N}$)

I. Phương pháp giải

Bài toán tổng quát: Chứng minh rằng : $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2 = \dfrac{(k-1).k.(k+1)}{6}$

Ta có: $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + (k-2)(k-1) + (k-1).k$

$3A = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + ... + (k-2)(k-1).3 + (k-1).k.3$

$3A = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + (k-1).k.\left[(k+1)-(k-2)\right]$

$3A = (k-1).k.(k+1)$

Suy ra: $A = \dfrac{(k-1).k.(k+1)}{3}$

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + (k-2)(k-1) + (k-1).k$

$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + ... + (k-1).\left[(k-2)+k\right]$

$= 2.4 + 4.8 + 6.12 + ... + (k-1).(2k-2)$

$= 2.2.2 + 4.4.2 + 6.6.2 + ... + (k-1).2(k-1).2$

$= 2\left[2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2\right]$

=2.S

Suy ra: $S=\frac{A}{2}$ mà $A=\frac{(k-1)k.(k+1)}{3}$

Vậy $S=\frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$

Áp dụng tính: $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2$

Xét: $S=2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2$

Suy ra: $\frac{S}{2^2}=\frac{S}{4}=1^2+2^2+3^2+...+n^2$.

Nên: $P=\frac{S}{4}=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $B=2^2+4^2+6^2+...+100^2$

Phân tích: Tổng B có dạng $S=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2=\frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$ với $k=101$

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng công thức: $S=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2=\frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$ với $k=101$.

Ta được: $B=2^2+4^2+6^2+...+100^2=\frac{100.101.102}{6}=171700$.

Bài 2: Tính tổng $C=1^2+2^2+3^2+...+100^2$.

Phân tích: Tổng C có dạng $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ với $n=100$.

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng công thức: $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ với $n=100$.

Ta được: $C=1^2+2^2+3^2+...+100^2=\frac{100.101.201}{6}=338350$.

Bài 3: Biết $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385$ Tính tổng $2^2+4^2+6^2+...+20^2$.

Lời giải:

Ta có $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385 \Rightarrow 2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)=2^2.385$

$\Rightarrow 2^2+4^2+6^2+...+20^2=4.385 \Rightarrow 2^2+4^2+6^2+...+20^2=1540$

Bài 4: Tính tổng $K=-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...-19^2+20^2$.

Lời giải:

Ta có

$K=-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...-19^2+20^2=\left(2^2+4^2+6^2+...+20^2\right)-\left(1^2+3^2+...+19^2\right)$

Áp dụng tổng

$A=1.2+2.3+3.4+...+19.20+20.21=2.(1+3)+4(3+5)+...+20(19+21)$

$=2.4+4.8+...+20.40=2.2.2+4.4.2+...+20.20.2=2\left(2^2+4^2+...+20^2\right)$

$\Rightarrow 2^2+4^2+...+20^2=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{20.21.22}{3}$

$\Rightarrow 2^2+4^2+...+20^2=\dfrac{20.21.22}{6}=1540$

Áp dụng tổng

$B=1.2+2.3+3.4+...+19.20=0.1+1.2+2.3+3.4+...+19.20=1(0+2)+3(2+4)+...+19(18+20)$

$=1.2+3.6+...+19.38=1.1.2+3.3.2+...+19.19.2=2\left(1^2+3^2+...+19^2\right)$

$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+...+19^2=\dfrac{B}{2}$, ta có $A=\dfrac{19.20.21}{3} \Rightarrow 1^2+3^2+...+19^2=\dfrac{19.20.21}{6}=1330$

Khi đó $K=A-B=1540-1330=210$

Dạng 9: Tổng có dạng $S=a_1.a_2+\ a_2.a_3+\ a_3.a_4+\ a_4.a_5+\ ....+\ a_{n-1}.\,a_n$

I. Phương pháp giải

Phương pháp giải: Đặt $k=a_2-a_1=a_3-a_2=\ ....=a_n-a_{n-1}$

Nhân cả hai vế với $3k$, rồi tách $3k$ ở mỗi số hạng để tạo thành các số hạng mới tự triệt tiêu.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots.. + 99.101$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 2. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 6) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

<u>Lời giải:</u>

Cách 1: Ta có $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + 49.51 = 1(1+2) + 3(3+2) + \ldots + 97(97+2) + 99(99+2)$

$= \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 97^2 + 99^2\right) + 2(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 97 + 99)$

Đặt $A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 97^2 + 99^2$

Tổng B có dạng $A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (k-1)^2 = \dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Với $k = 100 \Rightarrow A = \dfrac{99.100.101}{6} = 166650$

$\Rightarrow S = 166650 + 2.(1+99).50 : 2 = 171650$

Cách 2:

$6S = 1.3.6 + 3.5.6 + 5.7.3 + \ldots.. + 99.101.6$

$= 1.3.(5+1) + 3.5.(7-1) + 5.7.(9-3) + \ldots + 99.101.(103-97)$

$= 1.3.1 + 1.3.5 + 3.5.7 - 1.3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 \ldots + 99.101.103 + 97.99.101$

$= 3 + 99.101.103$

$\Rightarrow S = \dfrac{3 + 99.101.103}{6} = 171650$

Vậy $S = 171650$.

Bài 2: Tính tổng $S = 1.4 + 4.7 + 7.10 + \ldots.. + 2017.2020$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 3. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 9) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$9S = 1.4.9 + 4.7.9 + 7.10.9 + \ldots.. + 2017.2020.9$

$= 1.4.(7+2) + 4.7.(10-1) + 7.10.(13-4)+...+2017.2020.(2023-2014)$

$=1.4.7 + 1.4.2 + 4.7.10 - 1.4.7 + 7.10.13 - 4.7.10. ... + 2017.2020.2023 - 2014.2017.2020$

$= 8 + 2017.2020.2023$

$\Rightarrow S = \dfrac{8+ 2017.2020.2023}{9} = 915821092$

Vậy $S = 915821092$.

Bài 3: Tính tổng $N = 2.4 + 4.6 + 6.8 + ... + 100.102$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 2. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 6) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải:

Cách 1:

$6N = 2.4.6 + 4.6.6 + 6.8.6 + ... + 100.102.6$

$= 2.4.6 + 4.6.(8-2) + 6.8.(10-4) + ... + 98.100.(102-96) + 100.102.(104-98)$

$= 2.4.6 + 4.6.8 - 4.6.2 + 6.8.10 - 6.8.4 + ... + 98.100.102 - 98.100.96 + 100.102.104 - 100.102.98$

$= 100.102.104$

$\Rightarrow N = \dfrac{100.102.104}{6} = 176800$

Cách 2:

Ta có $N = 2.4 + 4.6 + 6.8 + ... + 100.102 = 2(2+2) + 4(4+2) + 6(6+2) + ... + 98(98+2) + 100(100+2)$

$= (2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 100^2) + 2(2 + 4 + 6 + ... + 98 + 100)$

Ta có: $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 100^2 = \dfrac{100.101.102}{6} = 171700$

$2(2+4+6+...+98+100) = 2.\dfrac{(100+2)\left[(100-2):2+1\right]}{2} = (100+2)\left[(100-2):2+1\right] = 102.50 = 5100$

$\Rightarrow N = 171700 + 5100 = 176800$

Bài 4: Tính tổng $S = 2.6 + 6.10 + 10.14 + 14.18 + ... + 42.46 + 50.54$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 4. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 12) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

<u>Lời giải:</u>

$12S = 2.6.12 + 6.10.12 + 10.14.12 + 14.18.12 + ... + 42.46.12 + 50.54.12$

$= 2.6(10+2) + 6.10(14-2) + 10.14(18-6) + 14.18(22-10) + ... + 42.46(50-38) + 50.54.12$

$= 2.2.6 + 42.46.50 + 50.54.12 = 2350800 \Rightarrow S = 195900$

Dạng 10: Tổng có dạng $S = 1.a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n$

Trong đó $a_2 - 1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = k \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)k$.

I. Phương pháp giải

Nhân hai vế với $4k$, rồi tách $4k$ ở mỗi số hạng trong tổng để số hạng trước và số hạng sau tạo thành những số tự triệt tiêu nhau.

$S = 1.a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$4kS = 1.a_2a_3.4k + a_2a_3a_4(a_5 - 1) + a_3a_4a_5(a_6 - a_2) + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n(a_{n+1} - a_{n-3})$

$4kS = 4k.a_2a_3 + a_2a_3a_4a_5 - a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5a_6 - a_2a_3a_4a_5 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1} - a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$4kS = a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1} + 4k.a_2a_3 - a_2a_3a_4$

$S = \dfrac{a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1} + 4k.a_2a_3 - a_2a_3a_4}{4k} (*)$.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 98.99.100$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa các số trong một số hạng là 1 nên ta nhân 4 vào hai vế để tính S.

<u>Lời giải:</u>

$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 98.99.100$

$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + ... + 98.99.100.(101-97)$

$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + ... + 98.99.100.101 - 97.98.99.100$

$4S = 98.99.100.101$

$4S = 97990200$

$S = 24497550$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 17.18.19$.

Lời giải:

Ta có: $4S = 1.2.3(4-0) + 2.3.4(5-1) + 3.4.5(6-2) + ... + 17.18.19(20-16)$

$= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + ... + 17.18.19.20 - 16.17.18.19$

$= 17.18.19.20 = 116280$.

Do vậy $S = \frac{116280}{4} = 29070$.

Bài 3:Tính tổng $S = 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ... + 95.97.99$.

Lời giải:

Ta có:

$8S = 1.3.5(7+1) + 3.5.7(9-1) + 5.7.9(11-3) + ... + 95.97.99(101-93)$

$= 1.3.5.7 + 1.3.5 + 3.5.7.9 - 1.3.5.7 + 5.7.9.11 - 3.5.7.9 + ... + 95.97.99.101 - 93.95.97.99$

$= 1.3.5 + 95.97.99.101 = 92140800$.

Do vậy $S = \frac{92140800}{8} = 11517600$.

Bài 4: Tính tổng $S = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + ... + 19.20.21.22$.

Lời giải:

Ta có:

$5S = 1.2.3.4(5-0) + 2.3.4.5(6-1) + 3.4.5.6(7-2) + ... + 19.20.21.22(23-18)$

$= 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 - 1.2.3.4.5 + 3.4.5.6.7 - 2.3.4.5.6 + ... + 19.20.21.22.23 - 18.19.20.21.22$ Do vậy

$= 19.20.21.22.23 = 4037880$

$S = \frac{4037880}{5} = 807576$.

Bài 5:Tính tổng $S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + ... + \frac{1}{7.8.9.10}$.

Lời giải:

Ta có: $S=\dfrac{1}{1.2.3.4}+\dfrac{1}{2.3.4.5}+\dfrac{1}{3.4.5.6}+...+\dfrac{1}{7.8.9.10}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1.2.3}-\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{2.3.4}-\dfrac{1}{3.4.5}+...+\dfrac{1}{7.8.9}-\dfrac{1}{8.9.10}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1.2.3}-\dfrac{1}{8.9.10}\right)=\dfrac{119}{2160}$.

Dạng 11: Tổng có dạng $A=1+2^3+3^3+...+n^3\ (n\in\mathbb{N}^*)$

I. Phương pháp giải

Phân tích công thức của từng số hạng trong tổng thành $(n-1)n(n+1)$ để thành tổng quen thuộc:
$S=1.2.3+2.3.4+...+(n-1)n(n+1)$

Cụ thể:

$n^3=(n^3-n)+n=n(n^2-1)+n=n\left[n^2-n+n-1\right]+n=n\left[n(n-1)+n-1\right]+n=(n-1)n(n+1)+n$

Do đó $A=1+2^3+3^3+...+n^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+4)+...+(n-1)n(n+1)+n$

$=(1+2+3+...+n)+\left[1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+(n-1)n(n+1)\right]$

Đặt $B=1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$C=1.2.3+2.3.4+4.5.6+...+(n-1)n(n+1)$

Khi đó $4C=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)..+(n-1)n(n+1).\left[(n+2)-(n-2)\right]$

$4C=\left[1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+(n-1)n(n+1)(n+2)\right]$
$-\left[1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+(n-2).(n-1)n(n+1)\right]$

$=(n-1)n(n+1)(n+2)$

$C=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

$A=B+C=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Tổng quát: $A=1+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A=1+2^3+3^3+...+10^3$

Phân tích: Ta áp dụng dạng toán trên với $n=10$

Lời giải:

$n^3=(n^3-n)+n=n(n^2-1)+n=n[n^2-n+n-1]+n=n[n(n-1)+n-1]+n=(n-1)n(n+1)+n$ Do đó

$A=1+2^3+3^3+...+10^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+4)+...+(9.10.11+10)$

$=(1+2+3+...+10)+(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+9.10.11)$

Đặt $B=1+2+3+...+10=\frac{10.11}{2}=5.11=55$

$C=1.2.3+2.3.4+4.5.6+...+9.10.11$

Khi đó, $4C=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+9.10.11.(12-8)$

$4C=(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+9.10.11.12)-(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+8.9.10.11)$

$=9.10.11.12$

$C=\frac{9.10.11.12}{4}=2970$

$A=B+C=55+2970=3025$.

Bài 2:Tính tổng $A=1+2^3+3^3+...+100^3$

Phân tích: Ta áp dụng dạng toán trên với $n=100$

Lời giải:

$n^3=(n^3-n)+n=n(n^2-1)+n=n[n^2-n+n-1]+n=n[n(n-1)+n-1]+n=(n-1)n(n+1)+n$ Do đó

$A=1+2^3+3^3+...+100^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+4)+...+(99.100.101+100)$

$=(1+2+3+...+100)+(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+99.100.101)$

Đặt $B=1+2+3+...+100=\dfrac{100.101}{2}=50.101=5050$

$C=1.2.3+2.3.4+4.5.6+...+99.100.101$

$C=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+99.100.101$
$4C=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+99.100.101.(102-98)$

$4C=(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+99.100.101.102)-(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+98.99.100.101)$

$=99.100.101.102$

$C=\dfrac{99.100.101.102}{4}=99.25.101.102=25497450$

$A=B+C=5050+25497450=25502500$.

Bài 3: Tính tổng $A=2^3+4^3+6^3+...+200^3$

Phân tích: Phân tích $2^3=2^3.1^3$; $4^3=2^3.2^3$; $6^3=2^3.3^3$;...; $200^3=2^3.100^3$.

Khi đó $A=2^3.(1+2^3+3^3+...+100^3)$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $A=2^3+4^3+6^3+...+200^3=2^3.1^3+2^3.2^3+2^3.3^3+...+2^3.100^3=2^3.(1+2^3+3^3+...+100^3)$

Theo kết quả ví dụ 2 thì $A=2^3.25497450=203979600$.

Bài 4: Tìm số nguyên x, biết: $(2x-2)^2=1^3+2^3+3^3+...+6^3$

Phân tích: Tính giá trị vế phải rồi thay vào tìm x.

<u>Lời giải:</u>

Đặt $A=1^3+2^3+3^3+...+6^3$

$n^3=(n^3-n)+n=n(n^2-1)+n=n[n^2-n+n-1]+n=n[n(n-1)+n-1]+n=(n-1)n(n+1)+n$ Do đó
$A=1+2^3+3^3+...+11^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+3)+...+(10.11.12+11)$

$A=1+2^3+3^3+...+11^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+4)+(4.5.6+5)+(5.6.7+6)$

$=\left(1+2+3+...+11\right)+\left(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+10.11.12\right)$

$B=1+2+3+...+11=\dfrac{11.12}{2}=66$

$C=1.2.3+2.3.4+4.5.6+...+10.11.12$

$C=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+10.11.12$
$4C=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+10.11.12.(13-9)$

$4C=\left(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+10.11.12.13\right)-\left(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+9.10.11.12\right)$
$=10.11.12.13$

$C=\dfrac{10.11.12.13}{4}=4290$

$A=B+C=66+4290=4356$

Phân tích A ra thừa số nguyên tố ta có: $A=2^2.3^2.11^2$ nên $A=66^2$

Theo bài toán ta có: $\left(2x-2\right)^2=66^2\Rightarrow 2x-2=66$ hoặc $2x-2=-66$

$\Rightarrow x=34$ hoặc $x=-32$

Vậy $x=34; x=-32$

Bài 5: Không tính ra kết quả hãy so sánh $A=1^3+2^3+3^3+...+99^3$ và $B=1.2.3+2.3.4+...+98.99.100$

Phân tích: Biến đổi biểu thức A theo biểu thức B dựa vào cách làm trong hướng dẫn các ví dụ 1,2,3.

<u>Lời giải:</u>

$n^3=\left(n^3-n\right)+n=n\left(n^2-1\right)+n=n\left[n^2-n+n-1\right]+n=n\left[n\left(n-1\right)+n-1\right]+n=\left(n-1\right)n\left(n+1\right)+n$ Do đó
$A=1+2^3+3^3+...+99^3=1+\left(1.2.3+2\right)+\left(2.3.4+3\right)+\left(3.4.5+3\right)+...+\left(98.99.100+99\right)$

$=\left(1+2+3+...+99\right)+\left(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+98.99.100\right)>\left(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+98.99.100\right)$

$\Rightarrow A>B$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG

Bài 1: Tính tổng $S=1+2+3+4+...+2000$.

<u>Lời giải:</u>

Số số hạng của dãy là $(2000-1):1+1=2000$.

Tổng $S=(1+2000).2000:2=2001000$.

Bài 2: Tính tổng $S=2+4+6+...+2020+2022$.

Lời giải:

Số số hạng của dãy là $(2022-2):2+1=1011$.

Tổng $S=(2+2022).1011:2=1023132$.

Bài 3: Tính tổng $S=4+14+24+...+1004+1014$.

Lời giải:

Số số hạng của dãy là $(1014-4):10+1=102$.

Tổng $S=(4+1014).102:2=51918$.

Bài 4: Tính tổng $S=1+4+4^2+4^3+...+4^{1000}$.

Lời giải:

Ta có $4S=4+4^2+4^3+4^4+...+4^{1001}$.

Vậy $4S-S=3S=4^{1001}-1$.

Suy ra $S=\dfrac{4^{1001}-1}{3}$.

Bài 5: Chứng minh $S=3+3^2+3^3+...+3^{100}$ chia hết cho 40.

Lời giải:

Ta có $S=\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+...+\left(3^{97}+3^{98}+3^{99}+3^{101}\right)$.

$S=3\left(1+3+3^2+3^3\right)+...+3^{97}\left(1+3+3^2+3^3\right)=\left(1+3+3^2+3^3\right)\left(3+...+3^{97}\right)$

Suy ra S chia hết cho 40 vì $1+3+3^2+3^3=40$.

Bài 6: Chứng minh rằng: $7^4+7^6+.....7^{2n+2}=\dfrac{7^{2n+4}-7^4}{48}$

Lời giải:

Đặt $A = 7^4 + 7^6 + ...7^{2n+2}$ (1). Nhân cả hai vế của (1) với 7^2 ta được:

$7^2.A = 7^6 + 7^8 + ...7^{2n+4}$ (2).

Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được:

$$7^2.A - A = \left(7^6 + 7^8 + ...7^{2n+4}\right) - \left(7^4 + 7^6 + ...7^{2n+2}\right)$$
$$48.A = 7^{2n+4} - 7^4 \Rightarrow A = \frac{7^{2n+4} - 7^4}{48}$$

Bài 7: So sánh: $1 + 8^2 + 8^4 + ... + 8^{90}$ với $\dfrac{63^{40} - 1}{63}$.

Lời giải:

Đặt $D = 1 + 8^2 + 8^4 + ... + 8^{90}$

$$\Rightarrow 8^2.D = 8^2 + 8^4 + ...8^{92}$$
$$\Rightarrow 8^2.D - D = \left(8^2 + 8^4 + ...8^{92}\right) - \left(1 + 8^2 + 8^4 + ... + 8^{90}\right)$$
$$\Rightarrow 63.D = 8^{92} - 1 \Rightarrow D = \frac{8^{92} - 1}{63} = \frac{64^{46} - 1}{63} > \frac{63^{40} - 1}{63}$$

Vậy $1 + 8^2 + 8^4 + ... + 8^{90} > \dfrac{63^{40} - 1}{63}$.

Bài 8: Chứng minh rằng: $1 + 6^2 + 6^4 + ... + 6^{200}$ chia hết cho 37.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}1 + 6^2 + 6^4 + ... + 6^{200} &= \left(1 + 6^2\right) + \left(6^4 + 6^6\right) + ... + \left(6^{198} + 6^{200}\right)\\ &= \left(1 + 6^2\right) + 6^4.\left(1 + 6^2\right) + ... + 6^{198}.\left(1 + 6^2\right)\\ &= 37 + 6^4.37 + ... + 6^{198}.37\end{aligned}$$

Vậy $1 + 6^2 + 6^4 + ... + 6^{200}$ chia hết cho 37

Bài 9: Cho $A = 5 + 5^3 + 5^5 + ... + 5^{27}$

a) Tính giá trị của A

b) Chứng minh A chia hết cho 26.

Lời giải:

a) Áp dụng công thức $a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$ với $n=14; a=5$ ta được :

$$A=5+5^3+5^5+...+5^{27}=\frac{5^{29}-5}{5^2-1}=\frac{5^{29}-5}{24}$$

b) Ta có:

$$A=5+5^3+5^5+...+5^{27}=\left(5+5^3\right)+\left(5^5+5^7\right)+...+\left(5^{25}+5^{27}\right)=5\left(1+5^2\right)+5^5\left(1+5^2\right)+...+5^{25}\left(1+5^2\right)$$

$$A=\left(1+5^2\right)\left(5+5^5+5^9+...+5^{25}\right)=26\left(5+5^5+5^9+...+5^{25}\right)$$

Vậy A chia hết cho 26.

Bài 10: Tính giá trị củabiểu thức $C=1+111+11111+...+\underbrace{111...1}_{27\text{ so }1}$

Lời giải:

Ta có $9C=9+999+999+...+\underbrace{999...9}_{27\text{ so }9}=(10-1)+\left(10^3-1\right)+...+\left(10^{27}-1\right)=\left(10+10^3+...+10^{27}\right)-14$

$$9C=\frac{10^{29}-10}{10^2-1}-14=\frac{10^{29}-1396}{99}\Rightarrow C=\frac{10^{29}-1396}{891}$$

Bài 11: Cho $D=8+8^3+8^5+...+8^{2x+1}$, $x\geq 1, x\in N$. Tìm x để $63D+8=2^{51}$.

Lời giải:

Ta có: $D=8+8^3+8^5+...+8^{2x+1}=\dfrac{8^{2x+3}-8}{8^2-1}=\dfrac{8^{2x+3}-8}{63}$.

Do đó $63D+8=2^{51}\Leftrightarrow 8^{2x+3}-8=8^{17}-8\Leftrightarrow 8^{2x+3}=8^{17}\Leftrightarrow 2x+3=17\Leftrightarrow x=7$.

Bài 12: Cho $E=7+7^3+7^5+...+7^{101}$. Chứng minh $7^{103}-7$ chia hết cho 48 và E chia hết cho 19.

Lời giải:

+ Ta có $E=\dfrac{7^{103}-7}{7^2-1}=\dfrac{7^{103}-7}{48}\Rightarrow E.48=7^{103}-7$

Vậy $7^{103}-7$ chia hết cho 48

+ Ta có $E=7+7^3+7^5+...+7^{101}=7\left(1+7^2+7^4\right)+7^7\left(1+7^2+7^4\right)+...+7^{97}\left(1+7^2+7^4\right)$

$E=\left(1+7^2+7^4\right)\left(7+7^7+7^{13}+...+7^{97}\right)=2451\left(7+7^7+7^{13}+...+7^{97}\right)=3.19.43\left(7+7^7+7^{13}+...+7^{97}\right)$

Vậy A chia hết cho 19.

Bài 13: Tính tổng: $D=1.4+4.7+7.10+...+37.40+40.43$

Phân tích: Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 3.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của D với 9 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 9 này được viết dưới dạng $\left(7+2\right)$ ở số hạng thứ nhất, $\left(10-1\right)$ ở số hạng thứ hai, $\left(13-4\right)$ ở số hạng thứ ba, …, $\left(46-37\right)$ ở số hạng cuối cùng.

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$9D=1.4.\left(7+2\right)+4.7.\left(10-1\right)+7.10.\left(13-4\right)+...+37.40.\left(43-34\right)+40.43.\left(46-37\right)$

$=\left(1.4.2+1.4.7+4.7.10+7.10.13+...+37.40.43+40.43.46\right)-\left(1.4.7+4.7.10+...+37.40.43\right)$

$9D=8+40.43.46=79128$.

Suy ra: $D=\dfrac{79128}{9}=8792$.

Bài tập tương tự: Tính tổng: $T=1.5+5.9+9.13+...+201.205$.

Hướng dẫn: Nhân T với 12.

Đáp số: $T=717\,655$.

Bài 14: Tính tổng: $E=2.4+4.6+6.8+...+98.100$

Phân tích: Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 2.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của E với 6 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số).

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$6E = 2.4.(6-0) + 4.6.(8-2) + 6.8.(10-4) + ... + 98.100.(102-96)$

$= (2.4.6 + 4.6.8 + 6.8.10 + ... + 98.100.102) - (0.2.4 + 2.4.6 + 4.6.8 + ... + 96.98.100)$

$= 98.100.102$.

Suy ra: $E = \dfrac{98.100.102}{6} = 166\,600$.

Bài 15: Tính tổng: $F = 1.99 + 2.98 + 3.97 + ... + 98.2 + 99.1$

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$F = 1.99 + 2.(99-1) + 3.(99-2) + ... + 98.(99-97) + 99.(99-98)$

$= (1.99 + 2.99 + 3.99 + ... + 98.99 + 99.99) - (1.2 + 2.3 + ... + 97.98 + 98.99)$

$= 99(1 + 2 + 3 + ... + 99) - \dfrac{98.99.100}{3}$

$= 99.\dfrac{99.100}{2} - \dfrac{98.99.100}{3}$

$= 99.100.\left(\dfrac{99}{2} - \dfrac{98}{3}\right)$

$= \dfrac{99.100.101}{6}$.

Bình luận: Trong bài tập 3, thừa số trong số hạng đứng trước không được lặp lại trong số hàng đứng sau, nên ta không nhân F với ba lần khoảng cách giữa hai thừa số nữa mà tách một thừa số trong tích làm xuất hiện các tổng mà ta đã biết cách tính hoặc dễ dàng tính được.

Bài toán tổng quát: $1.n + 2(n-1) + 3(n-2) + ... + (n-1).2 + n.1 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Bài 16: Tính tổng: $G = 1.2 + 3..4 + 5.6 + ... + 99.100$.

<u>Lời giải:</u>

Cách 1: Ta có:

$G = 1.2 + (2+1).4 + (4+1).6 + ... + (98+1).100$

$=(2.4+4.6+...+98.100)+(2+4+6+...+100)=\frac{98.100.102}{6}+\frac{102.50}{2}=169150$.

Cách 2: Ta có:

$G=1.(3-1)+3.(5-1)+5.(7-1)+...+99.(101-1)$

$=(1.3+3.5+5.7+...+99.101)-(1+3+5+7+...+99)$

$=\frac{3+99.101.103}{6}-\frac{100.50}{2}=169150$.

Bài tập tương tự: Tính tổng: $G_1=1.4+2.5+3.6+...+99.102$;

Hướng dẫn:

$G_1=1.(2+2)+2.(3+2)+3.(4+2)+...+99.(100+2)$
$=(1.2+2.3+3.4+...+99.100)+2.(1+2+3+4+...+99)=343200$.

Bài 17: Tính $C=101^2+102^2+103^2+\,...\,+199^2+200^2$

<u>Lời giải:</u>

Đặt: $C_1=1^2+2^2+3^2+...+200^2$; $C_2=1^2+2^2+3^2+...+100^2$

Khi đó ta áp dụng công thức tổng quát để tính $C_1;C_2$

Từ đó: $C=C_1-C_2$

Ta có: $C_1=\frac{200.201.(2.200+1)}{6}=2686700$

$C_2=\frac{100.101.(2.100+1)}{6}=338350$

$\Rightarrow C=C_1-C_2=2686700-338350=2348350$

Bài 18: Tìm số tự nhiên n biết tổng các bình phương các số tự nhiên từ 1 đến n là 506.

<u>Lời giải:</u>

Vì tổng tổng các bình phương các số tự nhiên từ 1 đến n là 506 nên $1^2+2^2+...+n^2=506$

$\Rightarrow \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 506$

$\Rightarrow n(n+1)(2n+1) = 22.23.6$

$\Rightarrow n(n+1)(2n+1) = 11.2.23.6$

$\Rightarrow n(n+1)(2n+1) = 11.12.23$

$\Rightarrow n(n+1)(2n+1) = 11(11+1)(2.11+1)$

$\Rightarrow n = 11$

Bài 19: Tính tổng $A = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - ... - 2^{99} + 2^{100}$

<u>Lời giải:</u>

$A = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - ... - 2^{99} + 2^{100}$

$2A = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + 2^5 - 2^{100} + 2^{101}$

$\Rightarrow 2A + A = 2^{101} + 1 \Rightarrow A = \dfrac{2^{101}+1}{3}$

Bài 20: Tìm n nhỏ nhất sao cho tổng của n số chính phương lẻ đầu tiên chia hết cho 3

<u>Lời giải:</u>

Ta có $A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

Mà $(2n-1, 2n+1) = 2; (n, 2n-1) = 1; (n, 2n+1) = 1$ nên trong 3 số $n, 2n-1, 2n+1$ chỉ có 1 số chia hết cho 3, mà muốn A chia hết cho 3 thì 1 trong 3 số trên phải chia hết cho 9. Để n nhỏ nhất thì $2n+1 = 9$. Suy ra $n = 4$.

Vậy $n = 4$ là số cần tìm.

Bài 21: Tính tổng $A = 1.3 + 3.7 + 5.11 + ... + 99.199$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $(2n-1)(4n-1) = 2(2n-1)^2 + 2n - 1$

$\Rightarrow A = 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 99^2) + (1 + 3 + 5 + ... + 99)$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{50(100-1)(100+1)}{3} - 50^2 = 166650 - 2500 = 164150$

Bài 22: Tính tổng $A = 1.2 + 3.4 + ... + 2(2n+1)(n+1)$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $(2n+1)(2n+2) = 4n^2 + 6n + 2 = (2n+1)^2 + 2n + 1$

$\Rightarrow A = (1^2 + 3^2 + ... + (2n+1)^2) + (1 + 3 + ... + (2n+1))$

$A = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (n+1)^2$

$A = \dfrac{(n+1)(4n^2 + 8n + 3 + 3n + 3)}{3}$

$A = \dfrac{(n+1)(4n+3)(n+2)}{3}$

Bài 23: Tính tổng $D = 6^2 + 8^2 + 10^2 + ... + 102^2$

Phân tích: Sử dụng công thức $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2 = \dfrac{(k-1).k.(k+1)}{6}$ với $k = 103$

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng công thức: $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2 = \dfrac{(k-1).k.(k+1)}{6}$ với $k = 103$. Ta được:

$S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 102^2 = \dfrac{102.103.104}{6} = 182104$.

Mặt khác: $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + ... + 102^2 = 2^2 + 4^2 + D$

Suy ra: $D = S - 2^2 - 4^2 = 182104 - 2^2 - 4^2 = 182084$.

Bài 24: Tính tổng $E = 12^2 + 14^2 + ... + 2010^2$.

Phân tích: Sử dụng công thức $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2 = \dfrac{(k-1).k.(k+1)}{6}$.

Tính $E_1 = 2^2 + 4^2 + ... + (k-1)^2$ với $k = 11$.

Tính $E_2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \left(k-1\right)^2$ với $k = 2010$.

Khi đó: $E = E_2 - E_1$.

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng công thức: $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + \left(k-1\right)^2 = \dfrac{\left(k-1\right).k.\left(k+1\right)}{6}$.

Đặt $E_1 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 10^2 = \dfrac{10.11.12}{6}$.

Đặt $E_2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 2010^2 = \dfrac{2010.2011.2012}{6}$.

Khi đó: $E = E_2 - E_1 = \dfrac{2010.2011.2012}{6} - \dfrac{10.11.12}{6} = 1355454000$.

Bài 25: Tính tổng: $F = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 101^2$.

Phân tích: Tổng F có dạng $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n.\left(n+1\right).\left(2n+1\right)}{6}$ với $n = 101$.

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng công thức: $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n.\left(n+1\right).\left(2n+1\right)}{6}$ với $n = 101$.

Ta được: $F = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 101^2 = \dfrac{101.102.203}{6} = 348551$.

Bài 26: Tính tổng: $G = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + ... + 10000$.

Phân tích: Tổng $G = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + 100^2$.

Áp dụng dạng $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n.\left(n+1\right).\left(2n+1\right)}{6}$ với $n = 100$.

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng công thức: $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n.\left(n+1\right).\left(2n+1\right)}{6}$ với $n = 100$, ta được:

$1+2^2+3^2+4^2+5^2+...+100^2=\dfrac{100.101.201}{6}=338350$.

Suy ra: $1+4+9+16+25+...+10000=338350$.

Vậy $G=338350$.

Bài 27: Tính tổng $K=-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...-19^2+20^2$.

Phân tích: Tính $K_1=1^2+3^2+5^2+...+19^2$.

Tính $K_2=2^2+4^2+6^2+....+20^2$.

Tính $K=-K_1+K_2$.

Lời giải:

Đặt $K_1=1^2+3^2+5^2+...+19^2=\dfrac{19.20.21}{6}$.

Đặt $K_2=2^2+4^2+6^2+...+20^2=\dfrac{20.21.22}{6}$.

Khi đó: $K=-K_1+K_2=-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...-19^2+20^2=-\dfrac{19.20.21}{6}+\dfrac{20.21.22}{6}=210$.

Bài 28: Biết rằng $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385$. Tính tổng $M=2^2+4^2+6^2+...+20^2$.

Lời giải:

Ta có: $M=2^2+4^2+6^2+...+20^2$.

Suy ra: $\dfrac{M}{2^2}=1+2^2+3^2+...+10^2$.

Mà $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385$.

Nên $\dfrac{M}{2^2}=385$.

Vậy $M=2^2.385=1540$.

Bài 29: Tính tổng $S=1.2\ +\ 2.3\ +\ 3.4\ +\ .....+\ 99.100$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 1. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 3) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải:

Ta có:

$3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \ldots.. + 99.100.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4 - 1) + 3.4.(5 - 2) + \ldots + 99.100(101 - 98)$

$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \ldots - 98.99.100 + 99.100.101$

$\Rightarrow S = \dfrac{99.100.101}{3} = 33.100.101 = 333300.$

Vậy $S = 333300.$

Bài toán tổng quát: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots.. + (n-1).n$

Ta có: $3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \ldots.. + (n-1)n.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4 - 1) + 3.4.(5 - 2) + \ldots + (n-1)n.\left[(n+1) - (n-2)\right]$

$= 1.2(n-1).n.(n+1).3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \ldots - (n-2).(n-1).n + (n-1).n.(n+1)$
$= (n-1).n.(n+1)$

$\Rightarrow S = \dfrac{(n - 1).n.(n + 1)}{3}$

Vậy: $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots.. + (n-1).n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Bài 30: Tính tổng $S = 2.6 + 6.10 + 10.14 + \ldots.. + 46.50$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 4. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 12) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải:

Ta có:

$12S = 2.6.12 + 6.10.12 + 10.14.12 + \ldots.. + 46.50.12$

$= 2.6.(10+2) + 6.10.(14 - 2) + 10.14.(18 - 6) + \ldots + 46.50.(54 - 42)$

$= 2.6.10 + 2.6.2 + 6.10.14 - 2.6.10 + 10.14.18 - 6.10.14 + \ldots. + 46.50.54 - 42.46.50$

$= 24 + 46.50.54$

$\Rightarrow S = \dfrac{24 + 46.50.54}{12} = 10352$

Vậy $S = 10352$.

Bài 31: Tính tổng $S = 4.9 + 9.14 + ... + 44.49$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 5. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 15) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải:

Ta có:

$15S = 4.9.15 + 9.14.15 + ... + 44.49.15$

$= 4.9.(14+1) + 9.14.(19-4) + ... + 44.49.(54-39)$

$= 4.9.14 + 4.9.1 + 9.14.19 - 4.9.14 + ... + 44.49.54 - 39.44.49$

$= 36 + 44.49.54$

$\Rightarrow S = \dfrac{36 + 44.49.54}{15} = 7764$

Vậy $S = 7764$.

Bài 32: Tính tổng $S = 2.4 + 4.6 + ... + 48.50$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 2. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 6) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải:

Ta có:

$6S = 2.4.6 + 4.6.6 + ... + 48.50.6$

$= 2.4.6 + 4.6.(8-2) + ... + 48.50.(52-46)$

$= 2.4.6 + 4.6.8 - 4.6.2 + ... + 48.50.52 - 46.48.50$

$= 48.50.52$

$\Rightarrow S = \dfrac{48.50.52}{6} = 20800.$

Vậy $S = 20800.$

Bài 33: Tính tổng $S = 1.5 + 5.9 + ... + 97.101$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 4. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 12) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$12S = 1.5.12 + 5.9.12 + ... + 97.101.12$

$= 1.5.(9+3) + 5.9.(13-1) + ... + 97.101.105 - 93.97.101$

$= 1.5.9 + 1.5.3 + 5.9.13 - 1.5.9 + ... + 97.101.105 - 93.97.101$

$= 97.101.105 + 1.5.3$

$= 1028700$

$\Rightarrow S = \dfrac{1028700}{12} = 85725.$

Vậy $S = 85725.$

Bài 34: Tính tổng $M = 1.3.5 + 3.5.7 + 7.9.11 + ... + 99.101.103$

Phân tích: Ta áp dụng dạng toán trên với $a_2 = 3, k = 2$

<u>Lời giải:</u>

$M = 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ... + 99.101.103$

$8M = 1.3.5.8 + 3.5.7.(9-1) + 5.7.9.(11-3) + ... + 99.101.103.(105-97)$

$8M = 1.3.5.8 + 3.5.7.9 - 3.5.7 + 5.7.9.11 - 3.5.7.9 + ... + 99.101.103.105 - 97.99.101.103$

$8M = 1.3.5.8 - 3.5.7 + 99.101.103.105$

$8M = 108139200$

$M = 13517400$

Bài 35: Tính tổng $N = 1.4.7 + 4.7.10 + 7.10.13 + ... + 100.103.106$

Phân tích

Ta áp dụng dạng toán trên với $a_2 = 4, k = 3$

Khi đó: $a_n = 106$

$106 = 1 + (n-1)k$

$105 = (n-1).3$

$35 = n - 1$

$n = 36$

Lời giải:

$N = 1.4.7 + 4.7.10 + 7.10.13 + ... + 100.103.106$

$12N = 1.4.7.12 + 4.7.10.(13-1) + 7.10.13.(16-4) + ... + 100.103.106.(109-97)$

$12N = 1.4.7.12 + 4.7.10.13 - 4.7.10 + 7.10.13.16 - 4.7.10.13 + ... + 100.103.106.109 - 97.100.103.106$
$12N = 100.103.106.109 + 1.4.7.12 - 4.7.10$

$12N = 119006256$

$N = 9917188$

Bài 36: Tính tổng $P = 50.51.52 + 51.52.53 + 52.53.54 + ... + 98.99.100$

Phân tích

Ta có

$$P = 50.51.52 + 52.53.54 + ... + 98.99.100$$
$$= (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100) - (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 49.50.51)$$

Ta tính hai tổng sau

$A = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100$

$B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 49.50.51$

Lời giải:

+) Tính tổng

$A = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100$.

Áp dụng ví dụ, ta tính được $A = 24497550$

$B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 49.50.51$

Tương tự áp dụng công thức (*) với $k = 1, a_k = k, n = 51$ ta có

$$B = \frac{49.50.51.52 + 4.1.2.3 - 2.3.4}{4.1} = 1624350$$

+) Tính

$P = 50.51.52 + 52.53.54 + ... + 98.99.100$

$= (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100) - (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 49.50.51)$

$= A - B = 24497550 - 1624350 = 22873200$

Bài 37: Tính tổng $A = 1.2.3 + 3.4.5 + 5.6.7 + ... + 99.100.101$

Phân tích: Trong bài toán này, ta không nhân A với một số mà tách ngay một thừa số trong mỗi số hạng làm xuất hiện dãy số mà ta biết cách tính hoặc dễ dàng tính được.

<u>Lời giải:</u>

$A = 1.2.3 + 3.4.5 + 5.6.7 + ... + 99.100.101$

$A = 1.3.(5-3) + 3.5.(7-3) + 5.7.(9-3) + ... + 99.101.(103-3)$

$A = 1.3.5 - 1.3.3 + 3.5.7 - 3.5.5 + 5.7.9 - 5.7.3 + ... + 99.101.103 - 99.101.3$

$A = (1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ... + 99.101.103) - 3.(1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 99.101)$

Từ đó ta có,

$M = 1.3.5 + 3.5.7 + 7.9.11 + ... + 99.101.103$

$N = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 99.101$

Áp dụng bài 1, ta tính được $M = 13517400$

Ta chỉ cần đi tính

$N = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 99.101$

$6N = 1.3.6 + 3.5.(7-1) + 5.7.(9-3) + ... + 99.101.(103-97)$

$6N = 1.3.6 + 3.5.7 - 3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 + ... + 99.101.103 - 97.99.101$

$6N = 1.3.6 - 3.5 + 99.101.103$

$6N = 1029900$

$N = 171650$

Do đó

$A = M - 3.N$

$A = 13517400 - 3.171650$

$A = 13002450$

Bình luận: Ta nhận thấy rằng cách tính M là nhân M với $4k$ ở đó k là khoảng cách giữa 2 số liên tiếp vì mỗi số hạng của M có 3 thừa số, còn cách tính N cũng tương tự. Tuy nhiên để tính N ta nhân N với 3 lần khoảng cách giữa 2 số liên tiếp vì mỗi số hạng của N có 2 thừa số.

Bài toán tổng quát: $A = 1.2.3 + 3.4.5 + ... + (2n-1).2n.(2n+1)$ $(n \in N^*, n \geq 2)$.

Bài tập tương tự

Tính

$A = 1.2.3 + 3.4.5 + ... + 49.51.53$

$B = 27.28.29 + 28.29.30 + ... + 59.60.61$.

Bài 38: Tính tổng $K = 1.2^2 + 2.3^2 + ... + 99.100^2$

Phân tích: Trong bài toán này, tương tự **bài 4** ta không nhân K với một số mà tách ngay một thừa số trong mỗi số hạng làm xuất hiện dãy số mà ta biết cách tính hoặc dễ dàng tính được. Ở bài này ta tách $n^2 = n.\left[(n+1)-1\right]$ với mỗi bình phương.

<u>Lời giải:</u>

$K = 1.2^2 + 2.3^2 + ... + 98.99^2$

$K = 1.2.(3-1) + 2.3.(4-1) + ... + 98.99.(100-1)$

$K = 1.2.3 - 1.2 + 2.3.4 - 2.3 + ... + 98.99.100 - 98.99$

$K = (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100) - (1.2 + 2.3 + ... + 98.99)$

Từ đó ta tính

$A=1.2.3+2.3.4+...+98.99.100$
$B=1.2+2.3+...+98.99$

+) Tính tổng

$A=1.2.3+2.3.4+....+98.99.100$

Áp dụng **ví dụ** , ta tính được $A=24497550$.

+) Tính tổng $B=1.2+2.3+...+98.99$.

Áp dụng Lý thuyết với

Áp dụng **Lý thuyết,** với $k=1,n=99 \Rightarrow a_k=k$ (với mọi $1 \le k \le n$), ta tính được

$$B=\frac{98.99.100+3.1.2-2.3}{3}=\frac{98.99.100}{3}=323400$$

Vậy $K=A-B=24497550-323400=24174150$

Bài toán tổng quát: $A=1.2^2+2.3^2+...+(n-1).n^2 (n\in N^*, n\ge 2)$

Bài tập tương tự: Tính $A=1.2^2+2.3^2+.....+49.50^2$

Bài 39: Tính tổng $A=1^3+2^3+3^3+...+(2n)^3$

<u>Lời giải:</u>

$$A=1^3+2^3+3^3+...+(2n)^3$$

$$A=(1^3+(2n)^3)+(2^3+(2n-1)^3)+...+(n^3+(n+1)^3)$$

$$A=(2n+1)(1^2-2n+(2n)^2)+(2n+1)(2^2-2.(2n-1)+(2n-1)^2)+...+(2n+1)(n^2-n(2n-(n-1))+(n+1)^2)$$
$$A=(2n+1)(1^2+2^2+3^2+...+(2n)^2-[2n(1+2+3+...+n)-(1.2+2.3+...+(n-1)n)]$$

$$A=(2n+1)\left[\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-n^2(n+1)+\frac{n(n-1)(n+1)}{3}\right]$$

$$A=n(2n+1).\frac{8n^2+6n+1-3n^2-3n+n^2-1}{3}$$

$$A=n(2n+1)\left(\frac{6n^2+3n}{3}\right)=(n(2n+1))^2.$$

CHUYÊN ĐỀ SỐ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 4. DÃY SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT: DÃY CỘNG VÀ CÁC DÃY KHÁC

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Dãy cộng là dãy số có mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ hai) đều lớn hơn số hạng liền trước nó cùng một số đơn vị.

- Dãy cộng là dãy số cách đều

- Một số phương pháp giải:

Phương pháp 1:

+ Tính số các số hạng trong tổng theo công thức :

$$Số\ số\ hạng = \left(Số\ hạng\ cuối - Số\ hạng\ đầu\right) : Khoảng\ cách + 1$$

+ Nhóm hai số hạng thành một cặp sao cho giá trị trong mỗi cặp bằng nhau. (Lưu ý có thể nhóm vừa hết các số hạng thành các cặp nếu số số hạng là số chẵn hoặc còn thừa một số hạng nếu số số hạng là số lẻ). Cách tính số hạng thứ n trong dãy là:

$$Số\ hạng\ thứ\ n = \left(Số\ số\ hạng\ -1\right).Khoảng\ cách + Số\ hạng\ đầu$$

+ Tính tổng dựa vào giá trị của một cặp và số cặp vừa nhóm. Lưu ý khi tìm số cặp mà còn dư một số hạng thì khi tìm tổng ta phải cộng số hạng dư đó vào.

Phương pháp 2:

+ Dựa vào công thức:

$$Số\ số\ hạng = \left(Số\ hạng\ cuối - Số\ hạng\ đầu\right) : Khoảng\ cách + 1$$

$$Tổng = \left(Số\ hạng\ đầu + Số\ hạng\ cuối\right).Số\ số\ hạng : 2$$

Phương pháp 3:

+ Dựa vào bài toán Gau-xơ :

Viết tổng A theo thứ tự ngược lại và tính $A + A$. Từ đó tính được tổng A.

Phương pháp 4:

+ Phương pháp khử liên tiếp: Tách một số hạng thành một hiệu trong đó số trừ của hiệu trước bằng số bị trừ của hiệu sau: $a_1 = b_1 - b_2$, $a_2 = b_2 - b_3$, ..., $a_n = b_n - b_{n+1}$.

Khi đó ta có ngay $A_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + ... + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$

Phương pháp 5: Phương pháp dự đoán và quy nạp.

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1:Tính tổng các số hạng cách đều

I.Phương pháp giải

Muốn tính tổng của một dãy số có quy luật cách đều chúng ta thường hướng dẫn học sinh tính theo các bước như sau:

Bước 1: Tính số số hạng có trong dãy: $Số\ số\ hạng = \dfrac{|Số\ hạng\ cuối - Số\ hạng\ đầu|}{Khoảng\ cách\ 2\ số\ hạng\ liên\ tiếp} + 1$

Bước 2: Tính tổng của dãy: $Tổng\ của\ dãy = \left(\dfrac{Số\ hạng\ cuối + Số\ hạng\ đầu}{2}\right).Số\ số\ hạng$

(quy tắc dân gian: dĩ đầu, cộng vĩ, chiết bán, nhân chi)

Với dãy số tăng dần ta có:

$$Số\ hạng\ cuối = Số\ hạng\ lớn\ nhất$$

$$Số\ hạng\ đầu = Số\ hạng\ nhỏ\ nhất$$

Ở các bài tập dưới đây, dãy cộng với số tự nhiên đa phần ta gặp đó là dãy tăng dần.

***) Chú ý:** Tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n là: $S = 1+2+3+...+n = \dfrac{(n+1).n}{2}$ với n $\in$ N;n>3

II.Bài toán

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số? Tính tổng của chúng.

Lời giải:

Cách 1:

Các số tự nhiên có hai chữ số là $10;11;12;...;99$

Số các số này là: $99-10+1=90$ (số)

Ta có: $A = 10+11+12+...+99\ (1)$

$A = 99+98+...+11+10\ (2)$

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$A + A = (10+99)+(11+98)+...+(98+11)+(99+10) = 109+109+...+109+109$

Nên $2A = 109.90 \Rightarrow A = 109.90:2 = 45.109 = 4905$

Cách 2:

Số số hạng của dãy: $\dfrac{(99-10)}{1}+1 = 90$ (số hạng)

(*khoảng cách 2 số hạng liên tiếp của dãy là 1, số hạng đầu của dãy là 10, số hạng cuối của dãy là 99*)

Tổng của dãy: $A = \dfrac{99+10}{2}.90 = 4905$

Bài 1: Tính giá trị của A biết $A = 1+2+3+4+....+2014$.

Lời giải:

Dãy số trên có số số hạng là $(2014\ -\ 1):1\ +1 = 2014$ (số hạng)

Giá trị của A là $(2014+1).\ 2014:2\ = 2029105$

Đáp số: 2029105

Bài 3: Cho dãy số: $2,4,6,8,10,12,$............. Tìm số hạng thứ 2014 của dãy số trên?

*) *Phân tích: Từ công thức* $\text{Số số hạng} = \dfrac{|\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|}{\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}} + 1$

Ta có: $(\text{Số số hạng} - 1)(\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}) = |\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|$

$[(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})] + \text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối}$

$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối} - [(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})]$

Lời giải:

Số hạng thứ 2014 của dãy số trên là $(2014-1).\ 2+2 = 4028$

Đáp số: 4028

Bài 4: Tính tổng 50 số lẻ liên tiếp biết số lẻ lớn nhất trong dãy đó là 2019?

*) *Phân tích: Với dãy số tăng dần ta có:*

$\text{Số hạng cuối} = \text{Số hạng lớn nhất}$

$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng nhỏ nhất}$

$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối} - [(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})]$

Lời giải:

Số hạng bé nhất trong dãy số đó là: $2019\ -\ (50\ -\ 1).2\ =\ 1921$

Tổng của 50 số lẻ cần tìm là $(2019\ +\ 1921).\ 50:2 = 98500$

Đáp số: 98500

Bài 5: Một dãy phố có 15 nhà. Số nhà của 15 nhà đó được đánh là các số lẻ liên tiếp, biết tổng của 15 số nhà của dãy phố đó bằng 915. Hãy cho biết số nhà đầu tiên của dãy phố đó là số nào?

*) *Phân tích: Dựa vào công thức với dãy số có quy luật tăng dần:*

Bước 1: $\text{Số số hạng} = \dfrac{\left|\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}\right|}{\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}} + 1$

Suy ra: $\left(\text{Số số hạng} - 1\right)\left(\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}\right) = \text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}$

Bước 2: $\text{Tổng của dãy} = \left(\dfrac{\text{Số hạng cuối} + \text{Số hạng đầu}}{2}\right).\text{Số số hạng}$

Suy ra: $\left(2.\text{Tổng của dãy}\right):\left(\text{Số số hạng}\right) = \text{Số hạng cuối} + \text{Số hạng đầu}$

Bài toán cho chúng ta biết số số hạng là 15, khoảng cách của 2 số hạng liên tiếp trong dãy là 2 và tổng của dãy số trên là 915. Từ bước 1 và 2 học sinh sẽ tính được hiệu và tổng của số nhà đầu và số nhà cuối. Từ đó ta hướng dẫn học sinh chuyển bài toán về dạng tìm số bé biết tổng và hiêu của hai số đó.

Lời giải:

Hiệu giữa số nhà cuối và số nhà đầu là $\left(15-1\right)\ .\ 2\ =\ 28$

Tổng của số nhà cuối và số nhà đầu là $915\ .\ 2:15 = 122$

Số nhà đầu tiên trong dãy phố đó là $\left(122\ -\ 28\right):2 = 47$ *(bài toán tổng hiệu quen thuộc)*

Đáp số: 47

Bài 6: Tính tổng của 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên.

*) *Phân tích:*

Để giải bài toán ta cần xác định được quy luật cách đều của các số lẻ liên tiếp. Tuy nhiên các số hạng trong tổng đã biết nên ta chỉ cần áp dụng công thức tính tổng như đã nêu trong phương pháp

Lời giải:

Tổng 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: $S = 1+3+5+...+33+35+37+39+41$

Cách 1: Tính tổng theo công thức trong phương pháp

Các số hạng liên tiếp trong tổng cách đều nhau một giá trị $d = 2$ và trong tổng có 21 số hạng nên:

$$S = 1+3+5+...+33+35+37+39+41 = \frac{(41+1).21}{2} = 441$$

Cách 2: Nhóm số hạng tạo thành những cặp số có tổng bằng nhau, ta thấy:

$1+41=42$ $\qquad$ $3+39=42$ $\qquad$ $5+37=42$ $\qquad$ $7+35=42....$

$\Rightarrow$ Nếu ta sắp xếp các cặp số từ hai đầu dãy số vào, ta được các cặp số đều có tổng là 42

Số cặp số là: $20:2=10$ (cặp số) dư một số hạng ở chính giữa dãy số là số 21

Vậy tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: $42.10+21=441$

Bài 7: Tính tổng của $A=1+2+3+4+...+2021$.

**) Phân tích:*

Nhận thấy dãy số $1,2,3,4,...,2019$ là dãy số tự nhiên cách đều. Khoảng cách giữa hai số hạng liền kề là 1.

Để tính tổng A ta vận dụng cả bốn phương pháp đầu đã nêu đều được cụ thể ta có các cách giải sau:

Lời giải:

Cách 1: Tổng A có số số hạng là: $\left(2021-1\right):1+1=2021$ (số hạng)

Do đó ta có thể chia A thành 1010 cặp và dư 1 số hạng chẳng hạn số 2021

$$A=1+2+3+4+\ldots+2020+2021$$

$$A=\left(1+2+3+4+\ldots+2020\right)\ +\ 2021$$

$$A=\left(1+2020\right)+\left(\ 2+2019\right)+\ \ ....\ +\left(1010+1011\right)+\ 2021\ A=2021\ .1010\ \ +2021$$

$$A=2021.\ 1011$$

$$A=2043231$$

Cách 2:

Tổng A có số số hạng là: $\left(2021-1\right):1+1=2021$

Tính tổng: $A=(2021+1).2021:2=2043231$

Cách 3: Tính $A+A$

$$\begin{array}{rll} & A=1+2+3+4+\ldots+2020+2021 & \text{(có 2021 số hạng)} \\ + & A=2021+2020+2019+2018\ldots+2+1 & \\ \hline \text{Do đó:} & 2A=2022+2022+2022+...+2022+2022 & \text{(có 2021 số hạng)} \end{array}$$

$$\Rightarrow 2A=2022.2021$$

$$\Rightarrow A=2022.\ 2021:2=2043231$$

Cách 4: Trước hết ta tách số hạng đầu tiên của A (là số 1) thành một hiệu trong đó có một số hạng là tích của hai số hạng liên tiếp trong tổng A (một thừa số là số hạng đầu tiên 1):

$$1=\frac{1}{2}(1.2-0.1)$$

Từ đó ta có thể tách các số hạng còn lại của tổng A thành các hạng tử mà khi tính tổng A các hạng tử có thể triệt tiêu hàng loạt:

$2 = \frac{1}{2}(2.3 - 1.2);\quad 3 = \frac{1}{2}(3.4 - 2.3);...;2021 = \frac{1}{2}(2021.2022 - 2020.2021)$

Do đó:

$$A = \frac{1}{2}(1.2 - 0.1 + 2.3 - 1.2 + 3.4 - 2.3 + ... - 2019.2020 + 2021.\ 2022 - 2020.2021)$$

$$A = \frac{1}{2}.2021.2022 = 2043231$$

Cách 5: Từ cách phân tích để có lời giải cách 4 trên chúng ta cũng có thể nghĩ đến trình bày bài toán theo cách sau gọn hơn:

$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2020 + 2021$

$2A = 2\left(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2021\right)$

$2A = 1.2 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + ... + 2.\ 2021$

$2A = 1.\left(2 - 0\right) + 2.\left(3 - 1\right) + 3.\left(4 - 2\right) + ... + 2021.\ \left(2022\ -\ 2020\right)$

$2A = 1.2 + 2.3 - 1.2 + 3.4 -\ 2.3\ +\ ... +\ 2022.\ 2021 - 2020.\ 2021$

$2A = 2022.\ 2021$

$A =\ 2022.\ 2021 : 2 = 2043231$

***Nhận xét*:** Ở cách 5 dùng phương pháp khử liên tiếp. Mỗi số hạng của A (chỉ có một thừa số) và khoảng cách giữa hai số hạng là 1 ta đã nhân A với 2 lần khoảng cách

Bài 8: Tính tổng $A = 1 + 2 + 3 + ... + 100$.

Lời giải:

Cách 1:

Ta có: $A = \frac{(1 + 100).100}{2} = 5050 \Rightarrow TQ: A = 1 + 2 + ... + n = \frac{n.(n + 1)}{2}$

Cách 2: $A = 1 + 2 + 3 + ... + 100;\ A = 100 + 99 + 98 + ... + 1$

$\Rightarrow 2A = \left(1 + 100\right) + \left(2 + 98\right) + ... + \left(100 + 1\right) = 101.101 = 5050$

Cách 3:

$1 = \frac{1}{2}(1.2 - 0.1);$

$2 = \frac{1}{2}(2.3 - 1.2);$

$3 = \frac{1}{2}(3.4 - 2.3);$

....

$100=\frac{1}{2}(100.101-99.100)$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}.100.101=5050$

Bài 9: Tính tổng $A=2+4+6+...+100$.

Lời giải:

Tổng A có: $\left(100-2\right):2+1=50$ (số hạng)

$$A=\frac{(100+2).50}{2}=2550\Rightarrow TQ:A=2+4+..+2n(\forall n\in N^{*})\Rightarrow A=\frac{(2+2n).n}{2}=n(n+1)$$

Bài 10: Tính tổng $A=1+3+5+...+49$.

Lời giải:

Tổng A có: $\left(49-1\right):2+1=25$ (số hạng)

$$A=\frac{(1+49).25}{2}=\frac{50.25}{2}=625$$

$$TQ:A=1+3+..+(2n-1)(\forall n\in N^{*})\Rightarrow A=\frac{(1+2n-1).n}{2}=n.n=n^{2}$$

Bài 11: Tính tổng $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+....+9+\frac{19}{2}$.

**) Phân tích:*

Đây là ví dụ mà các số hạng trong tổng vừa là số nguyên, vừa là phân số. Để tìm ra quy luật của các số hạng trong tổng ta cần viết các số nguyên trong tổng dưới dạng phân số có mẫu số là 2. Khi đó ta có tổng các phân số có cùng mẫu số, và tổng các tử số chính là tổng các số tự nhiên liên tiếp

Lời giải:

Ta có: $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+....+9+\frac{19}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+....+\frac{19}{2}=\frac{1+2+....+19}{2}$

Xét tổng $1+2+...+18+19$ là tổng của 19 số tự nhiên liên tiếp

$1+2+...+18+19=\frac{\left(19+1\right).19}{2}=190$

Ta có tổng $S=\frac{190}{2}=95$.

Bài 12: Tính tổng $S=2+5+8+11+...+47+50$.

Lời giải:

Các số hạng cách đều nhau một giá trị $d=3$

Tổng này có $(50-2):3+1=17$ số hạng $\Rightarrow S=17.(50+2):2=442$

Bài 13: Tính tổng $S=5+10+15+...+100$.

Lời giải:

Các số hạng cách đều nhau một giá trị $d=5$

Tổng này có $(100-5):5+1=20$ số hạng

$\Rightarrow S=20.(100+5):2=1050$

Bài 14: Tính tổng $A=98+93+88+...+13+8+3$.

Lời giải:

Tổng A có $(98-3):5+1=20$ (số hạng)$\Rightarrow A=\dfrac{(98+3).20}{2}=1010$

Bài 15: Cho $S\ =7+9+11\ +...+97+99$.

a) Tính tổng S trên.

b) Tìm số hạng thứ 33 của tổng trên.

Lời giải:

+ Số hạng đầu là: 7 và số hạng cuối là: 99.

+ Khoảng cách giữa hai số hạng là: 2

+ S có số số hạng được tính bằng cách $(99-7\ ):\ 2\ +\ 1=47$

Tổng của dãy: $S\ =\ (99\ +\ 7).47\ :\ 2\ =\ 2491$

b) Số hạng thứ 33 của tổng trên là : $(\ 33-1).2\ +7=71$

Bài 16: Cho dãy số $2;7;12;....;22;....$

a) Nêu quy luật của dãy số trên.

b) Viết tập hợp B gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.

c) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải:

Xét dãy số $2;7;12;...22...$

a) Quy luật: Dãy số cách đều với khoảng cách 5

b) $B=\{22;27;32;37;42\}$

c) Gọi số hạng thứ 100 của dãy là x, ta có: $(x-2):5+1=100$

$\Rightarrow x=497$. Do vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy là:

$(2+497)\cdot 100:2=24950$

Bài 17: Người ta viết liền nhau các số tự nhiên 123456....

a) Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53; 328; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?

b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?

Lời giải:

Viết liền nhau các số tự nhiên 123456...

a) 9 chữ số đầu tiên: $1,2,...,9$.

44 số có hai chữ số tiếp theo: $10,11,...,53$.

$\Rightarrow$ Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số: $9+44.2=97$

Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số $9+90.2+229.3=876$;

chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số $9+90.2+900.3+588.4=5241$.

b) Ta có: $427=9+90.2+79.3 dư 1$

Khi đó số thứ 81 có 3 chữ số là: 179.

Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1.

Bài 18: Tính tổng $S=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+3+...+\frac{101}{3}+\frac{103}{3}+35$.

Lời giải:

Ta có $S=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+3+...+\frac{101}{3}+\frac{103}{3}+35=\frac{1+3+5+7+...+101+103+105}{3}$

Xét tổng $1+3+5+....+101+103+105$ là tổng các số tự nhiên lẻ liên tiếp từ 1 đến 105, các số tự nhiên lẻ liên tiếp cách đều nhau 2 đơn vị

Tổng này có: $n=(105-1):2+1=53$ số hạng

$$1+3+5+....+101+103+105=\frac{(105+1).53}{2}=2809$$

Ta có tổng $S=\frac{2809}{3}$

Bài 19: Tính tổng $B=1+4+7+10+\ldots+70+73$.

Lời giải:

$B = 1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 70 + 73$

$\Rightarrow 6B = 1.6 + 4.6 + 7.6 + 10.6 + \ldots + 70.6 + 73.6$

$\Rightarrow 6B = 1.(4+2) + 4.(7-1) + 7(10-4) + \ldots + 73(76-70)$

$\Rightarrow 6B = 1.4 + 1.2 + 4.7 - 1.4 + 7.10 - 7.4 + \ldots + 73.76 - 73.70$

$\Rightarrow 6B = 2 + 73.76$

$\Rightarrow 6B = 5550$

$\Rightarrow B = 925$

**) Nhận xét*: Như vậy tùy từng dạng bài và mức độ tiếp thu kiến thức của mỗi học sinh, thầy cô có thể vận dụng linh hoạt các phương pháp giải sao cho học trò dễ nhớ, phù hợp.

**) Mở rộng:* Viết công thức tổng quát tính tổng dãy số tự nhiên liên tiếp cách đều sau: $A_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$

Lời giải:

Bằng các cách tính tổng tương tự như bài toán 1 ta có:

$A_n = n(n+1):2 \ \ (n \in N^*) \quad (1)$

Tuy nhiên có thể hướng dẫn học sinh chứng minh bằng phương pháp qui nạp:

- Khi $n = 1$ ta có: $A_1 = 1(1+1):2 = 1$ đúng.
- Giả sử bài toán đúng với $n = k > 1 \ (k \in N)$, nghĩa là: $A_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + k = k(k+1):2$
- Ta xét:

$A_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + k + (k+1)$

$= A_k + (k+1)$

$= k(k+1):2 + (k+1)$

$= \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

Tức là bài toán đúng với $n = k+1$.

Vậy với mọi số tự nhiên n khác 0, ta có: $A_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = n(n+1):2$

Nhận xét: Ta có thể chứng minh (1) bằng phương pháp qui nạp sau đó áp dụng để tính các tổng có dạng đó.

Dạng 2: Tổng có dạng $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n \ (1)$

hoặc $S = 1 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^3} + \ldots + \dfrac{1}{a^n} (2)$ với $a \in \mathrm{N}^*; a > 1$

I.Phương pháp giải

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số a ta được:

$S=1+a+a^2+a^3+...+a^n\ (1)$ hoặc $S=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+...+\frac{1}{a^n}\ (2)$ với $a\in\mathbb{N}^*; a>1$

$a.S=a+a^2+a^3+...+a^{n+1}\ (3)$

Hoặc $a.S=a+1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+...+\frac{1}{a^{n-1}}\ (4)$

Bước 2: Lấy $(3)-(2)$ vế với vế ta được: $a.S-S=a^{n+1}-1\Rightarrow S=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Lấy $(4)-(2)$ vế với vế ta được: $a.S-S=a-\frac{1}{a^n}\Rightarrow S=\frac{a^{n+1}-1}{a^n(a-1)}$

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S=1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100}$.

**) Phân tích:* Kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ 2 đến 2^{100} giống như trong tổng S, khi đó nếu lấy số tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ 2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và tính được tổng S.

Lời giải:

Ta có: $S=1+2+2^2+2^3+...+2^{100}$

Nhân 2 vào tổng S ta được $2S=2+2^2+2^3+...+2^{101}$

$\Rightarrow 2S-S=S=2^{101}-1$

Bài 2: Tính tổng $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}$.

**) Phân tích:* Kể từ số hạng thứ nhất, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{2}$.

Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$, giống như trong tổng S

, khi đó nếu lấy tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và tính được tổng S.

Lời giải:

Ta có $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}\Rightarrow 2S=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{99}}$

$\Rightarrow 2S - S = S = 2 - \dfrac{1}{2^{100}}$

Bài 2: Tính tổng $S = 1 + \dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{7^2} + \dfrac{5}{7^3} + ... + \dfrac{5}{7^{55}}$.

**) Phân tích:* Nhận thấy các số hạng từ $\dfrac{5}{7}$ đến $\dfrac{5}{7^{55}}$ đều có cùng tử số là 5, và kể từ số hạng $\dfrac{5}{7}$ thì các số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\dfrac{1}{7}$. Nếu nhân 7 vào tổng S thì ta được tổng $7S$ có các số hạng từ $\dfrac{5}{7}$ đến $\dfrac{5}{7^{54}}$ giống như trong tổng S. Do đó nếu lấy tổng $7S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\dfrac{5}{7}$ đến $\dfrac{5}{7^{54}}$ bị triệt tiêu, từ đó tính được tổng S.

Lời giải:

Ta có $S = 1 + \dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{7^2} + \dfrac{5}{7^3} + ... + \dfrac{5}{7^{55}} \Rightarrow 7S = 7 + 7.\left(\dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{7^2} + \dfrac{5}{7^3} + ... + \dfrac{5}{7^{55}}\right) = 7 + 5 + \dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{7^2} + \dfrac{5}{7^3} + ... + \dfrac{5}{7^{54}}$

$\Rightarrow 7S - S = 6S = 11 - \dfrac{5}{7^{55}} \Rightarrow S = \dfrac{11}{6} - \dfrac{5}{6.7^{55}}$

Bài 3: Tính tổng $S = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{18.9} + \dfrac{1}{162.9} + \dfrac{1}{1458.9}$.

**) Phân tích:* Nếu quy đồng phân số bài toán thì khá phức tạp. Nhận thấy các số $18,\ 162,\ 1458,$ đều chia hết cho 9, do đó ta sẽ phân tích các số này thành tích của 9 với một thừa số nào đó để xem có xuất hiện tổng theo quy luật $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^3} + ...$ hay không, từ đó có hướng tính S.

Lời giải:

Ta có $S = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{18.9} + \dfrac{1}{162.9} + \dfrac{1}{1458.9} = \dfrac{1}{2.9} + \dfrac{1}{2.9^2} + \dfrac{1}{2.9^3} + \dfrac{1}{2.9^4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9^2} + \dfrac{1}{9^3} + \dfrac{1}{9^4}\right)$

Nhân 2 vào tổng S ta được: $2S = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9^2} + \dfrac{1}{9^3} + \dfrac{1}{9^4}$

Nhân 18 vào tổng S ta được: $18S = 1 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9^2} + \dfrac{1}{9^3}$

Trừ tổng $18S$ cho tổng $2S$ ta được: $18S - 2S = 16S = 1 - \dfrac{1}{9^4} \Rightarrow 16S = \dfrac{9^4 - 1}{9^4} \Rightarrow S = \dfrac{9^4 - 1}{16.9^4} = \dfrac{410}{6561}$

Bài 4: Tính tổng $S = 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + ... + 6^{99}$.

Ta có $S=6+6^2+6^3+6^4+...+6^{99}\Rightarrow 6S=6^2+6^3+6^4+...+6^{99}+6^{100}$

$6S-S=5S=6^{100}-6\Rightarrow S=\left(6^{100}-6\right):5$

Bài 5: Tính tổng $S=1+4+4^2+4^3+...+4^{1000}$.

Lời giải:

Ta có $S=1+4+4^2+4^3+...+4^{1000}\Rightarrow 4S=4+4^2+4^3+...+4^{1000}+4^{1001}$

$\Rightarrow 4S-S=3S=4^{1001}-1\Rightarrow S=\left(4^{1001}-1\right):3$

Bài 6: Tính tổng $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{99}}+\frac{1}{3^{100}}$.

Lời giải:

Ta có $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{99}}+\frac{1}{3^{100}}\Rightarrow 3S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{99}}$

$3S-S=2S=1-\frac{1}{3^{100}}\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{100}}\right)$

Bài 7: Tính tổng $S=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{20}$.

Lời giải:

Ta có $S=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{20}\Rightarrow 2S=2^2+2^3+2^4+...+2^{20}+2^{21}$

$\Rightarrow 2S-S=S=2^{21}-2$

Bài 8: Tính tổng $S=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+...$.

Lời giải:

Ta có $S=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+...=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n}\left(n\in N,N>3\right)$

$\Rightarrow 5S=5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{n-1}}$

$\Rightarrow 5S-S=5-\frac{1}{5^n}\Rightarrow S=\frac{1}{4}\left(5-\frac{1}{5^n}\right)$

Bài 9: Tính tổng $B=1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{18}$.

*) Phân tích: B là tổng của một dãy số mà các số hạng không cách đều. Nhận thấy mỗi số hạng đứng sau (kể từ số hạng thứ hai) trong tổng B đều bằng số hạng đứng trước nhân với 2. Ta tính $2.B-B$, từ đó tìm được B.

Lời giải:

$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{18}$

$2B = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{18} + 2^{19}$

$\Rightarrow 2B - B = B = 2^{19} - 1$

*) Mở rộng: Viết công thức tổng quát tính

$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n \quad (a \in N, a > 1, n \in N)$

*) Hướng dẫn giải:

Ta có: $a.S - S = a^{n+1} - 1 (a-1).S = a^{n+1} - 1$

Ta có công thức tổng quát: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

**) Khai thác các bài toán liên quan:*

a) Viết công thức tính $a^{n+1} - 1 \quad (n \in N, a \geq 2)$.

b) Chứng minh rằng: $2015^{2015} - 1$ chia hết cho 2014.

Lời giải:

a) Từ kết quả bài toán mở rộng: $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (n \in N, a \geq 2)$

Từ đó ta có công thức: $\left(a^{n+1} - 1\right) = (a-1).\left(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n\right)$.

b) Nhận thấy $2015 - 1 = 2014$. Với công thức đã tìm được ở câu a, hơn nữa ta thấy $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n$ có giá trị là số nguyên nên $\left(a^{n+1} - 1\right) \vdots (a-1)$.

$A = 1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \ldots + 2015^{2014}$

$\Rightarrow 2015.A = 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \ldots + 2015^{2015}$

$\Rightarrow 2015.A - A = 2015^{2015} - 1 \; 2014.A = 2015^{2015} - 1$

$\Rightarrow 2015^{2015} - 1 = 2014.(1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \ldots + 2015^{2014})$

Vậy $(2015^{2015} - 1) \vdots 2014$.

Bài 10: Tính tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{48} + 3^{49}$. Tìm chữ số tận cùng của S.

* *Phân tích:* Với nhận xét trên ta nghĩ đến tìm ra hướng giải cho bài toán 5 như sau:

Lời giải:

+ Hướng giải 1: Nhận thấy S có 50 số hạng

$$S = \underbrace{\left(1 + 3 + 3^2 + 3^3\right) + \left(3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7\right) + \ldots + \left(3^{44} + 3^{45} + 3^{46} + 3^{47}\right) + \left(3^{48} + 3^{49}\right)}_{Có\ 12\ nhóm}$$

$S = 40 + 3^4.40 + \ldots + 3^{44}.40 + \left(3^{48} + 3^{49}\right)$

Ta có $\left(40+3^4.40+...+3^{44}.40\right)\vdots 10 \quad (1)$

Mà $3^{48}+3^{49}=3^{4.12}+3^{4.12}.3=81^{12}+81^{12}.3$ có chữ số tận cùng là 4 (Vì 81^{12} có chữ số tận cùng là 1) (2)

Từ (1) và (2) suy ra S có chữ số tận cùng là 4.

+ Hướng giải 2: Ta có:

$S=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+...+3^{48}+3^{49}$

$3.S= \ 3+3^2+3^3+3^4+3^5+... \ +3^{49}+3^{50}$

$3.S-S=3^{50}-1\Rightarrow S=\dfrac{3^{50}-1}{2}$

Ta thấy $3^{50}-1=3^{4.12}.3^2-1=81^{12}.9-1$ có chữ số tận cùng là 8

$\Rightarrow \ S=\dfrac{3^{50}-1}{2}$ có chữ số tận cùng là 4 hoặc 9.

Mà S có 50 số hạng, mỗi số của S là một số lẻ nên S là số chẵn. Do đó S có chữ số tận cùng là 4.

Dạng 3: Tổng có dạng $S=1+a^2+a^4+a^6+...+a^{2n}\,(1)$

hoặc $S=1+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}+...+\dfrac{1}{a^{2n}}(2)$ với $a\in N$; $a\geq 2$

I.Phương pháp giải

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số a^2 ta được: $a^2.S=a^2+a^4+a^6+...+a^{2n+2}\,(3)$

Hoặc $a^2.S=a^2+1+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}+...+\dfrac{1}{a^{2n-1}}\left(a\in N^*;n\in N\right)(4)$

Bước 2: Lấy a^2S-S theo vế ta được $a^2S-S=a^{2n+2}-1\Rightarrow S=\dfrac{a^{2n+2}-1}{a^2-1}$ (theo 1 và 3)

$a^2S-S=a^2-\dfrac{1}{a^{2n}}\Rightarrow S=\dfrac{a^{2n+2}-1}{a^{2n+2}-a^{2n}}$ (theo 2 và 4)

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S=1+2^2+2^4+2^6+...+2^{100}$.

**) Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2^2. Nếu ta nhân 2^2 vào tổng S, ta được tổng $2^2.S$ có các số hạng từ 2^2 đến 2^{100} trừ cho tổng S thì các số hạng từ 2^2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S

Lời giải:

Ta có $S=1+2^2+2^4+2^6+...+2^{100}$

Nhân 2^2 vào tổng S ta được: $2^2.S = 2^2 + 2^4 + 2^6 + ... + 2^{100} + 2^{102}$

$$2^2S - S = 3S = 2^{102} - 1 \Rightarrow S = \frac{2^{102}-1}{3}$$

Bài 2: Tính tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + ... + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}}$.

**) Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{3^2}$. Nếu ta nhân 3^2 vào tổng S, ta được tổng $3^2.S$ có các số hạng từ $\frac{1}{3^2}$ đến $\frac{1}{3^{98}}$ giống như trong tổng S. Khi đó ta lấy tổng $3^2.S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{3^2}$ đến $\frac{1}{3^{98}}$ bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S

Lời giải:

Ta có:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + ... + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 3^2S = 3^2.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + ... + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}}\right)$$

$$= 3 + 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + ... + \frac{1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow 3^2S - S = 3 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow 8S = \frac{11}{3} - \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow S = \left(\frac{11}{3} - \frac{1}{3^{100}}\right):8$$

Bài 3: Tính tổng $S = 6^2 + 6^4 + 6^6 + ... + 6^{98} + 6^{100}$.

Lời giải:

Ta có $S = 6^2 + 6^4 + 6^6 + ... + 6^{98} + 6^{100} \Rightarrow 6^2S = 6^4 + 6^6 + ... + 6^{98} + 6^{100} + 6^{102}$

$$6^2S - S = 35S = 6^{102} - 6^2 \Rightarrow S = \frac{6^{102} - 6^2}{35}$$

Bài 4: Tính tổng $S = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{102}$.

Lời giải:

Ta có $S = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{102} \Rightarrow 3^2S = 3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{102} + 3^{104}$

$$\Rightarrow 3^2S - S = 8S = 3^{104} - 1 \Rightarrow S = \left(3^{104} - 1\right):8$$

Bài 5: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ... + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{100}}$.

Lời giải:

Ta có:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2^2S=2^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{100}}\right)$$

$$=2^2+2+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{98}}$$

$$\Rightarrow 2^2S-S=2^2+2+1-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{100}}=\frac{11}{2}-\frac{1}{2^{100}}\Rightarrow 3S=\frac{11}{2}-\frac{1}{2^{100}}\Rightarrow S=\left(\frac{11}{2}-\frac{1}{2^{100}}\right):3$$

Dạng 4: Tổng có dạng $S=a+a^3+a^5+a^7+...+a^{2n+1}\ (1)$ **hoặc**

$$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^5}+...+\frac{1}{a^{2n+1}}\left(n\in N;a\in N^*\right)(2)$$

I.Phương pháp giải

Bước 1: Nhân a^2 vào tổng S ta được: $a^2S=a^3+a^5+a^7+...+a^{2n+3}\ (3)$

$$a^2S=\frac{1}{a+a}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^5}+...+\frac{1}{a^{2n-1}}\left(a\in N^*;n\in N^*\right)\quad (4)$$

Bước 2: Lấy a^2S trừ đi tổng S vế theo vế ta được:

$$a^2S-S=a^{2n+3}-a\Rightarrow S=\frac{a^{2n+3}-a}{a^2-1}\text{ (theo 1 và 3)}$$

$$a^2S-S=a-\frac{1}{a^{2n+1}}\Rightarrow S=\frac{a^{2n+2}-1}{a^{2n+3}-a^{2n+1}}\text{ (theo 2 và 4)}$$

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S=1+3^3+3^5+3^7+...+3^{103}$.

**) Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 3^2. Nếu ta nhân 3^2 vào tổng S, ta được tổng $3^2.S$ có các số hạng từ 3^5. Đến 3^{103} giống như trong tổng S. Khi đó ta lấy tổng $3^2.S$ trừ cho tổng S thì các số hạng từ 3^5 đến 3^{103} bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S.

Lời giải:

Ta có $S=1+3^3+3^5+3^7+...+3^{103}$

$$\Rightarrow 3^2S=9+3^5+3^7+...+3^{103}+3^{105}\Rightarrow 3^2S-S=8S=3^{105}+9-27-1=3^{105}-19$$

$\Rightarrow S=\dfrac{3^{105}-19}{8}$

Bài 2: Tính tổng $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+...+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{101}}$.

**) Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{2^2}$. Nếu ta nhân 2^2 vào tổng S, ta được tổng $2^2.S$ có các số hạng từ $\frac{1}{2}$ Đến $\frac{1}{2^{99}}$ giống như trong tổng S. Khi đó ta lấy tổng $2^2.S$ trừ cho tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S.

Lời giải:

Ta có $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+...+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{101}}\Rightarrow 2^2S=2^2+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+...+\frac{1}{2^{99}}$

$\Rightarrow 2^2S-S=3S=2^2+2-1-\frac{1}{2^{101}}\Rightarrow S=\frac{1}{3}\left(5-\frac{1}{2^{101}}\right)$

Bài 3: Tính tổng $S=1+2+2^3+2^5+...+2^{99}+2^{101}$.

Lời giải:

Ta có $S=1+2+2^3+2^5+...+2^{99}+2^{101}\Rightarrow 2^2S=2^{2+}2^3+2^5+...+2^{99}+2^{101}+2^{103}$

$\Rightarrow 2^2S-S=3S=2^2+2^{103}-1-2=2^{103}+1\Rightarrow S=\dfrac{2^{103}+1}{3}$

Vậy $S=\dfrac{2^{103}+1}{3}$

Bài 4: Tính tổng $S=6^3+6^5+6^7+...+6^{101}$.

Lời giải:

Ta có $S=6^3+6^5+6^7+...+6^{101}\Rightarrow 6^2S=6^5+6^7+...+6^{101}+6^{103}$

$\Rightarrow 6^2S-S=35S=6^{103}-6^3\Rightarrow S=\dfrac{6^{103}-6^3}{35}$

Bài 5: Tính tổng $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{99}}+\frac{1}{3^{101}}$.

Lời giải:

Ta có $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{99}}+\frac{1}{3^{101}}\Rightarrow 3^2S=3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{99}}$

$\Rightarrow 3^2 S - S = 8S = 3 - \frac{1}{3^{101}} = \frac{3^{102}-1}{3^{101}} \Rightarrow S = \frac{3^{102}-1}{8.3^{101}}$

Vậy $S = \frac{3^{102}-1}{8.3^{101}}$

Dạng 5: Tổng có dạng $S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + (n-1).n (1)$

hoặc $S = 1.n + 2.(n-1) + 3(n-2) + ... + (n-1).2 + n.1 (2)$ với $n \in N^*$.

I. Phương pháp giải

- Xét tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + (n-1).n$, vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 1

$\Rightarrow$ Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 3) ta được:

$3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + ... + (n-2)(n-1).3 + (n-1).n.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + (n-2)(n-1).[n-(n-3)] + (n-1)n[(n+1)-(n-2)] = (n-1).n.(n+1)$

$\Rightarrow S = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

- Xét tổng $S = 1.n + 2.(n-1) + 3(n-2) + ... + (n-1).2 + n.1 (2)$

$\Rightarrow S = 1.n + 2.(n-1) + 3(n-2) + ... + (n-1).[n-(n-2)] + n.[n-(n-1)]$

$\Rightarrow S = 1.n + 2.n - 2.1 + 3.n - 3.2 + 4.n - 4.3 + ... + (n-1).n - (n-1)(n-2) + n.n - n(n-1)$

$= (1+2+3+...+n).n - [1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + (n-1).n]$

$S = S_1.n - S_2$

Với $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$ là tổng các số tự nhiên liên tiếp

$S_2 = 1.2 + 23 + 3.4 + .. + (n-1).n$ (đã tính ở trên)

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12$.

Lời giải:

Cách 1: Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} A &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12 \\ &= 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 + 90 + 110 + 132 = 572 \end{aligned}$$

Cách 2: Áp dụng phương pháp khử liên tiếp.

$1.2=\frac{1}{3}(1.2.3-0.1.2);2.3=\frac{1}{3}(2.3.4-1.2.3);...;11.12=\frac{1}{3}(11.12.13-10.11.12)$

Vậy $A=\frac{1}{3}11.12.13=572$.

Cách 3:

$3A=3.(1.2+2.3+3.4+4.5+5.6+6.7+7.8+8.9+9.10+10.11+11.12)$
$=1.2.(3-0)+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+4.5.(6-3)+....+11.12(13-10)$
$=1.2.3-1.2.3+2.3.4-2.3.4+3.4.5-\ldots-10.11.12+11.12.13$
$=11.12.13$

$\Rightarrow A=\frac{1}{3}.11.12.13=572.$ *Cách 4:*

$A=1.2+2.3+3.4+4.5+5.6+6.7+7.8+8.9+9.10+10.11+11.12$

$A=0.1+1.2+2.3+3.4+4.5+5.6+6.7+7.8+8.9+9.10+10.11+11.12$

$A=1.(0+2)+3.(2+4)+5.(4+6)+7.(6+8)+9.(8+10)+11.(10+12)$

$A=1.1.2+3.3.2+5.5.2+7.7.2+9.9.2+11.11.2$

$A=(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2).2$

$A=(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2).2=572$

Khai thác: Từ việc tính được tổng A theo cách 2 hoặc 3 kết hợp với việc tính theo cách 4, ta sẽ tính được tổng các bình phương của dãy số lẻ liên tiếp. Ví dụ:

$1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2=\frac{1}{6}.11.12.13$

Qua đây chúng ta sẽ có hướng nghiên cứu dạng toán tính tổng các bình phương của dãy số lẻ cách đều.

Nhận xét: Qua cách giải bằng phương pháp khử liên tiếp ở bài toán 1 đã nhân hai vế của biểu thức với 1 số xác định là:

(Số các thừa số của tích $S+1$) . Khoảng cách giữa hai thừa số

Mở rộng: Viết công thức tổng quát tính:

$A_n=1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n+1)\quad (n\in N^*)$

Hướng giải: Dự đoán $A_n=1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\quad (n\in N^*)$

Chứng minh: Dùng phương pháp quy nạp

+ Với $n=1$. Vế trái: $1.2=2$. Vế phải $1.(1+1)(1+2):3=2$

Suy ra vế trái bằng vế phải. Vậy bài toán đúng với $n=1$.

+ Giả sử bài toán đúng với $n=k$ $(k\in N,k>1)$ tức là ta đã có:

$$A_k = 1.2 + 2.3 + \ldots. + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

+ Ta phải chứng minh bài toán đúng với $n = \; k+1$. Thật vậy:

$$A_{k+1} = \; A_k + (k+1)(k+2) \;\; = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$\Rightarrow A_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Vậy $A_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (n \in N^*)$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots + 99.100 + 100.101$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots + 99.100 + 100.101$

$\Rightarrow 3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + \ldots + 99.100.3 + 100.101.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \ldots + 99.100.(101-98) + 100.101.(102-99)$

$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \ldots.. - 98.99.100 + 99.100.101 - 100.101.99 + 100.101.102$
$= 100.101.102$

$\Rightarrow S = 100.101.102 : 3 = 34.100.101 = 343400$

Bài 3: Tính tổng $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + \ldots + 199.2 + 200.1$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + \ldots + 199.2 + 200.1$

$= 1.200 + 2(200-1) + 3(200-2) + 4(200-3) + \ldots + 199(200-198) + 200(200-199)$

$= (1 + 2 + 3 + 4 + .. + 200).200 - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 198.199 + 199.200)$

$= \dfrac{200.201}{2} - \dfrac{199.200.201}{3} = 1353400$

Dạng 6: Tổng có dạng $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \;\; với \; n \in N, N > 3$

I. Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots + (n-1).n$

Ta có $S = 1.(1+1) + 2(1+2) + 3(1+3) + \ldots + n(n+1) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \ldots. + n)$

$= P + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

Với: $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$

$\Rightarrow P = S - (1+2+3+....+n)$

Trong đó tổng S đã tính trong dạng 5 và tổng $1+2+3+...+n$ tính trong dạng 1

$$\Rightarrow P = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2 + 10^2 + 11^2$.

Lời giải:

Cách 1: $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2 + 10^2 + 11^2$

$A = 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121 = 506$

Cách 2:

$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2 + 10^2 + 11^2$

$A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \ldots + 9(10-1) + 10(11-1) + 11.(12-1)$

$A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \ldots + 9(10-1) + 10(11-1) + 11.(12-1)$

$A = 1.2 - 1 + 2.3 - 2 + 3.4 - 3 + \ldots + 9.10 - 9 + 10.11 - 10 + 11.12 - 11$

$A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 9.10 + 10.11 + 11.12) - (1+2+3+4+\ldots+9+10+11)$

Ta thấy:

$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 9.10 + 10.11 + 11.12 = 11.12.13:3 = 572$

$1+2+3+...+10+11 = (11+1).11:2 = 66$

Do đó $A = 572 - 66 = 506$.

Nhận xét: Theo cách 2 ta có $A = \frac{11.12.13}{3} - \frac{11.12}{2} = \frac{11.12.(11.2+1)}{6} = 506$

Mở rộng: Viết công thức tổng quát tính với mọi $n \in N^*$

a) $A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

b) $A_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2$

Ta có công thức:

a) $A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (n \in N^*)$

b) $A_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \frac{(2n+1).(2n+2).(2n+3)}{6} \quad (n \in N^*)$

Bài 2: Tính tổng $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 50^2$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 49.50 + 50.51 = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + ... + 49(49+1) + 50(50+1)$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + ...50^2) + (1 + 2 + 3 + ... + 50) = P + (1 + 2 + 3 + ... + 50) \Rightarrow P = S - (1 + 2 + 3 + ... + 50)$

Lại có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ...49.50 + 50.51 = \dfrac{50.51.52}{3} = 44200$

$(1 + 2 + 3 + ... + 50) = \dfrac{(50+1).50}{2} = 1275$

$\Rightarrow S = 44200 - 1275 = 42925$

Bài 3: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 51^2$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 49.50 + 50.51 + 51.52 = 1.(1+1) + 2.(2+1) + 3.(3+1) + ... + 51.(51+1)$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 51^2) + (1 + 2 + 3 + ... + 51) = Q + (1 + 2 + 3 + ... + 51) \Rightarrow Q = S - (1 + 2 + 3 + ... + 51)$

Trong đó $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 49.50 + 50.51 + 51.52 = \dfrac{51.52.53}{3} = 46852$

$(1 + 2 + 3 + ... + 51) = \dfrac{(1+51).51}{2} = 1326$

Vậy $Q = 46852 - 1326 = 45526$

Bài 4: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$.

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 199.200 + 200.201 = 2(1+3) + 4(3+5) + ... + 200(199+201)$

$= 2.4 + 4.8 + ... + 200.400 = 2.2.2 + 4.4.2 + ... + 200.200.2 = 2(2^2 + 4^2 + ... + 200^2) = 2M$

$\Rightarrow M = \dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 thì ta có $A = \dfrac{200.201.202}{3} \Rightarrow M = \dfrac{200.201.202}{6} = 1353400$

$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2 = \dfrac{M}{2^2} = \dfrac{1353400}{4} = 338350$

Bài 5: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2 + 101^2$.

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 201.202 + 202.203$

$= 2(1+3) + 4(3+5) + ... + 202(201+203)$

$= 2.4 + 4.8 + ... + 202.404 = 2.2.2 + 4.4.2 + ... + 202.202.2$

$=2\left(2^2+4^2+...+202^2\right)=2M$

$\Rightarrow M=\dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 thì ta có $A=\dfrac{202.203.204}{3}\Rightarrow M=\dfrac{202.203.204}{6}=1394204.$

$Q=1^2+2^2+3^2+...+101^2=\dfrac{M}{2^2}=\dfrac{1394204}{4}=348551$.

Dạng 7: Tổng có dạng $S=1^2+3^2+5^2+...+\left(k-1\right)^2$ (k chẵn và k là số tự nhiên)

I.Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là

$A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+\left(k-2\right)\left(k-1\right)+\left(k-1\right).k$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+4.5+...+\left(k-2\right)\left(k-1\right)+\left(k-1\right).k$

$=1\left(0+2\right)+3\left(2+4\right)+5\left(4+6\right)+...+\left(k-1\right)\left[\left(k-2\right)+k\right]$

$=1.2+3.6+5.10+...+\left(k-1\right)\left(2k-2\right)$

$=1.1.2+3.3.2+5.5.2+...+\left(k-1\right)\left(k-1\right).2=2\left[1^2+3^2+5^2+...+\left(k-1\right)^2\right]$

$=2S$

*) Chú ý: Tính từ số hạng 0.1 đến số hạng $\left(k-1\right)k$ mà số số hạng là chẵn (tức là số số hạng của tổng A là số lẻ) thì ta có thể ghép đủ cặp như trên, còn số số hạng là lẻ (tức là số số hạng của tổng A là số chẵn) thì khi ghép cặp số ta còn thừa ra số hạng $\left(k-1\right)k$.

$\Rightarrow S=\dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 thì tổng $A=\dfrac{\left(k-1\right)k\left(k+1\right)}{3}\Rightarrow S=\dfrac{\left(k-1\right)k\left(k+1\right)}{6}$

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+19^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+18.19+19.20$

Tổng này có 19 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 20 số hạng và ghép được đủ 10 cặp số

Ta có $A=1.2+2.3+3.4+...+18.19+19.20$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+...+18.19+19.20$

$=1\left(0+2\right)+3\left(2+4\right)+5\left(4+6\right)+...+19\left(18+20\right)$

$=1.2+3.6+5.10+...+19.38=1.1.2+3.3.2+5.5.2+...+19.19.2$

$=2\left(1^2+3^2+5^2+...+19^2\right)=2.S$

$\Rightarrow S=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{19.20.21}{3}\Rightarrow S=\dfrac{19.20.21}{6}=1330$

Vậy $S=1^2+3^2+5^2+...+19^2=1330$

Bài 2: Tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+49^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+48.49+49.50$

Tổng này có 49 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 50 số hạng và ghép được đủ 25 cặp số

Ta có $A=1.2+2.3+3.4+...+48.49+49.50$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+...+48.49+49.50$

$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+49(48+50)$

$=1.2+3.6+5.10+...+49.98=1.1.2+3.3.2+5.5.2+...+49.49.2$

$=2\left(1^2+3^2+5^2+...+49^2\right)=2.S$

$\Rightarrow S=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{49.50.51}{3}\Rightarrow S=\dfrac{49.50.51}{6}=20825.$

Vậy $S=1^2+3^2+5^2+...+49^2=20825$

Bài 3: Tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+99^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+98.99+99.100$

Tổng này có 99 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 100 số hạng và ghép được đủ 50 cặp số

Ta có $A=1.2+2.3+3.4+...+98.99+99.100$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+...+98.99+99.100$

$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+99(98+100)$

$=1.2+3.6+5.10+...+99.198=1.1.2+3.3.2+5.5.2+...+99.99.2$

$=2\left(1^2+3^2+5^2+...+99^2\right)=2.S$

$\Rightarrow S=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{99.100.101}{3}\Rightarrow S=\dfrac{99.100.101}{6}=166650.$

Vậy $S=1^2+3^2+5^2+...+99^2=166650$

Bài 4: Tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+23^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+22.23+23.24$

Tổng này có 23 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 24 số hạng và ghép được đủ 12 cặp số

Ta có $A=1.2+2.3+3.4+...+22.23+23.24$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+...+22.23+23.24$

$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+23(22+24)$

$=1.2+3.6+5.10+...+23.46=1.1.2+3.3.2+5.5.2+...+23.23.2$

$=2(1^2+3^2+5^2+...+23^2)=2.S$

$\Rightarrow S=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{23.24.25}{3}\Rightarrow S=\dfrac{23.24.25}{6}=2300$

Vậy $S=1^2+3^2+5^2+...+23^2=2300$

Bài 5: Tính tổng $P=3^2+5^2+7^2+9^2+...+57^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+56.57+57.58$

Tổng này có 57 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 58 số hạng, và ghép được đủ 29 cặp số

Ta có $A=1.2+2.3+3.4+...+56.57+57.58$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+...+56.57+57.58$

$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+57.(56+58)$

$=1.2+3.6+5.10+...+57.114$

$=1.1.2+.3.3.2+5.5.2+...+57.57.2$

$=2.(1^2+3^2+5^2+...+57^2)=2.P'\Rightarrow P'=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có:

$A=\dfrac{57.58.59}{3}\Rightarrow P'=\dfrac{57.58.59}{6}=32509$

$\Rightarrow P=P'-1^2=32509-1=32508$

Vậy $P=3^2+5^2+7^2+9^2+...+57^2=32508$

Bài 6: Tính tổng $P=5^2+7^2+9^2+...+41^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+40.41+41.42$

Tổng này có 41 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 42 số hạng, và ghép được đủ 21 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 40.41 + 41.42$

$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 40.41 + 41.42$

$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + ... + 41.(40+42)$

$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + ... + 41.82$

$= 1.1.2 + .3.3.2 + 5.5.2 + ... + 41.41.2$

$= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 41^2) = 2.P' \Rightarrow P' = \frac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có:

$A = \frac{41.42.43}{3} \Rightarrow P' = \frac{41.42.43}{6} = 12341$

$\Rightarrow P = P' - (1^2 + 3^2) = 12341 - 10 = 12331$

Vậy $P = 5^2 + 7^2 + 9^2 + ... + 41^2 = 12331$

Bài 7: Tính tổng $P = 5^2 + 7^2 + 9^2 + ... + 101^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + 100.101 + 101.102$

Tổng này có 101 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 102 số hạng, và ghép được đủ 51 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 100.101 + 101.102$

$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 100.101 + 101.102$

$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + ... + 101.(100+102)$

$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + ... + 101.202$

$= 1.1.2 + .3.3.2 + 5.5.2 + ... + 101.101.2$

$= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 101^2) = 2.P' \Rightarrow P' = \frac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có:

$A = \frac{101.102.103}{3} \Rightarrow P' = \frac{101.102.103}{6} = 176851$

$\Rightarrow P = P' - (1^2 + 3^2) = 176851 - 10 = 176841$

Vậy $P = 5^2 + 7^2 + 9^2 + ... + 101^2 = 176841$

Bài 8: Tính tổng $P = 7^2 + 9^2 + ... + 41^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + 40.41 + 41.42$

Tổng này có 41 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 42 số hạng, và ghép được đủ 21 cặp số

Ta có $A=1.2+2.3+3.4+...+40.41+41.42$

$=0.1+1.2+2.3+3.4+...+40.41+41.42$

$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+41.(40+42)$

$=1.2+3.6+5.10+...+41.82$

$=1.1.2+.3.3.2+5.5.2+...+41.41.2$

$=2.\left(1^2+3^2+5^2+...+41^2\right)=2.P'\Rightarrow P'=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có:

$A=\dfrac{41.42.43}{3}\Rightarrow P'=\dfrac{41.42.43}{6}=12341$

$\Rightarrow P=P'-\left(1^2+3^2+5^2\right)=12341-35=12306$

Vậy $P=7^2+9^2+...+41^2=12306$

Bài 9: Tính tổng $S=11^2+13^2+15^2+...+99^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+...+98.99+99.100$

Tổng này có 99 số hạng, nên khi thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 100 số hạng, và ghép được đủ 50 cặp số

$A=0.1+1.2+2.3+3.4+...+98.99+99.100$

$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+99(98+100)$

$=1.2+3.3.2+5.5.2+...+99.99.2$

$=2.\left(1^2+3^2+5^2+...+99^2\right)=2P\Rightarrow P=\dfrac{A}{2}$

Theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{99.100.101}{3}\Rightarrow P=\dfrac{99.100.101}{6}=166650$

$\Rightarrow S=P-\left(1^2+3^2+5^2+...+9^2\right)=166650-165=166485$

Vậy $S=11^2+13^2+15^2+...+99^2=166485$

Bài 10: Tính tổng $S=11^2+13^2+15^2+...+2009^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A=1.2+2.3+3.4+...+2008.2009+2009.2010$

Tổng này có 2009 số hạng, nên khi thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 2010 số hạng, và ghép được đủ 1005 cặp số

$A = 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 2008.2009 + 2009.2010$
$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + ... + 2009(2008+2010)$

$= 1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + ... + 2009.2009.2$

$= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 2009^2) = 2P \Rightarrow P = \dfrac{A}{2}$

Theo dạng 5 ta có $A = \dfrac{2009.2010.2011}{3} \Rightarrow P = \dfrac{2009.2010.2011}{6} = 1353433165$

$\Rightarrow S = P - (1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 9^2) = 1353433165 - 165 = 1353433000$

Vậy $S = 1353433000$

Dạng 8: Tổng có dạng $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2$ (k là số tự nhiên lẻ)

I.Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là

$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + (k-2)(k-1) + (k-1).k$

$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + ... + (k-1)[(k-2)+k]$

$= 2.4 + 4.8 + 6.12 + ... + (k-1)(2k-2)$

$= 2.2.2 + 4.4.2 + 6.6.2 + ... + (k-1).(k-1).2$

$= 2\left[2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2\right] = 2S$

$\Rightarrow S = \dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có $A = \dfrac{(k-1)k(k+1)}{3} \Rightarrow S = \dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Áp dụng tính: $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, xét $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$

$\Rightarrow \dfrac{S}{2^2} = \dfrac{S}{4} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \Rightarrow P = \dfrac{S}{4}$

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 30^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 29.30 + 30.31$

$=2(1+3)+4(3+5)+6(5+7)+...+30(29+31)$

$=2.4+4.8+...+30.60$

$=2.2.2+4.4.2+...+30.30.2$

$=2\left(2^2+4^2+...+30^2\right)=2M \Rightarrow M=\dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{30.31.32}{3}$

$\Rightarrow M=\dfrac{30.31.32}{6}=4960$

Vậy $M=4960$

Bài 2: Tính tổng $M=2^2+4^2+6^2+...+50^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A=1.2+2.3+3.4+...+49.50+50.51$

$=2(1+3)+4(3+5)+6(5+7)+...+50(49+51)$

$=2.4+4.8+...+50.100=2.2.2+4.4.2+...+50.50.2$

$=2\left(2^2+4^2+...+50^2\right)=2M \Rightarrow M=\dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{50.51.52}{3}$

$\Rightarrow M=\dfrac{50.51.52}{6}=22100$

Vậy $M=22100$

Bài 3: Tính tổng $M=2^2+4^2+6^2+...+24^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A=1.2+2.3+3.4+...+23.24+24.25$

$=2(1+3)+4(3+5)+6(5+7)+...+24(23+25)$

$=2.4+4.8+...+24.48=2.2.2+4.4.2+...+24.24.2$

$=2\left(2^2+4^2+...+24^2\right)=2M \Rightarrow M=\dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{24.25.26}{3}$

$\Rightarrow M=\dfrac{24.25.26}{6}=2600$

Vậy $M=2600$

Bài 4: Tính tổng $M=2^2+4^2+6^2+...+56^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 55.56 + 56.57$

$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + ... + 56(55+57)$

$= 2.4 + 4.8 + ... + 56.112 = 2.2.2 + 4.4.2 + ... + 56.56.2$

$= 2(2^2 + 4^2 + ... + 56^2) = 2M \Rightarrow M = \dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 ta có $A = \dfrac{56.57.58}{3}$

$\Rightarrow M = \dfrac{56.57.58}{6} = 30856$

Vậy $M = 30856$

Bài 5: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 100^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 99.100 + 100.101$

$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + ... + 100(99+101)$

$= 2.4 + 4.8 + ... + 100.200$

$= 2.2.2 + 4.4.2 + ... + 100.100.2$

$= 2(2^2 + 4^2 + ... + 100^2) = 2M \Rightarrow M = \dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 ta có $A = \dfrac{100.101.102}{3}$

$\Rightarrow M = \dfrac{100.101.102}{6} = 171700$

Vậy $M = 171700$

Bài 6: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 2020^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 2019.2020 + 2020.2021$

$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + ... + 2020(2019+2021)$

$= 2.4 + 4.8 + ... + 2020.4040 = 2.2.2 + 4.4.2 + ... + 2020.2020.2$

$= 2(2^2 + 4^2 + ... + 2020^2) = 2M \Rightarrow M = \dfrac{A}{2}$, mà theo dạng 5 ta có $A = \dfrac{2020.2021.2022}{3}$

$\Rightarrow M=\dfrac{2020.2021.2022}{6}=1375775540$

Vậy $M=1375775540$

Bài 7: Tính tổng $N=6^2+8^2+10^2+...+102^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A=1.2+2.3+3.4+...+101.102+102.103=2(1+3)+4(3+5)+...+102(101+103)$

$=2.4+4.8+...+102.204=2.2.2+4.4.2+...+102.102.2=2\left(2^2+4^2+...+102^2\right)$

$=2.B\Rightarrow B=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có: $A=\dfrac{102.103.104}{3}$

$\Rightarrow B=\dfrac{102.103.104}{6}=182104\Rightarrow N=B-\left(2^2+4^2\right)=182104-20=182084$

Vậy $H=182084$

Bài 8: Tính tổng $H=12^2+14^2+16^2+...+2010^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$A=1.2+2.3+3.4+...+2009.2010+2010.2011$

$=2(1+3)+4(3+5)+...+2010(2009+2011)$

$=2.4+4.8+...+2010.4020$

$=2.2.2+4.4.2+...+2010.2010.2=2\left(2^2+4^2+...+2010^2\right)=2B$

$\Rightarrow B=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có: $A=\dfrac{2010.2011.2012}{3}\Rightarrow B=\dfrac{2010.2011.2012}{6}$

$\Rightarrow H=B-\left(2^2+4^2+...+10^2\right)=\dfrac{2010.2011.2012}{6}-220=1355454000$

Vậy $H=1355454000$

Bài 9: Tính tổng $K=-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...-19^2+20^2$

Lời giải:

Ta có

$K=-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...-19^2+20^2=\left(2^2+4^2+6^2+...+20^2\right)-\left(1^2+3^2+...+19^2\right)$

Áp dụng tổng

$A=1.2+2.3+3.4+...+19.20+20.21=2.(1+3)+4(3+5)+...+20(19+21)$

$=2.4+4.8+...+20.40=2.2.2+4.4.2+...+20.20.2=2\left(2^2+4^2+...+20^2\right)$

$\Rightarrow 2^2+4^2+...+20^2=\dfrac{A}{2}$, theo dạng 5 ta có $A=\dfrac{20.21.22}{3}$

$\Rightarrow 2^2+4^2+...+20^2=\dfrac{20.21.22}{6}=1540$

Áp dụng tổng

$B=1.2+2.3+3.4+...+19.20=0.1+1.2+2.3+3.4+...+19.20=1(0+2)+3(2+4)+...+19(18+20)$

$=1.2+3.6+...+19.38=1.1.2+3.3.2+...+19.19.2=2\left(1^2+3^2+...+19^2\right)$

$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+...+19^2=\dfrac{B}{2}$

Theo dạng 5 ta có $B=\dfrac{19.20.21}{3}\Rightarrow 1^2+3^2+...+19^2=\dfrac{19.20.21}{6}=1330$

Khi đó $K=1540-1330=210$

Vậy $K=210$

Bài 10: Biết $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385$ .Tính tổng $2^2+4^2+6^2+...+20^2$

Lời giải:

Ta có $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385\Rightarrow 2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)=2^2.385$

$\Rightarrow 2^2+4^2+6^2+...+20^2=4.385\Rightarrow 2^2+4^2+6^2+...+20^2=1540$

Dạng 9: Tổng có dạng $S=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+...+a_{n-1}a_n\,(1)$ Với $a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_n-a_{n-1}=2$ và $a\in N^*;n\in N^*$

I. Phương pháp giải

- Với $a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_n-a_{n-1}=2$

$S=a_1(a_1+2)+a_2(a_2+2)+a_3(a_3+2)+a_4(a_4+2)+...+a_{n-1}(a_{n-1}+2)$

$=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^3+..+a_{n-1}^2\right)+2\left(a_1+a_2+..+a_{n-1}\right)=S_1+2.S_2$

Tổng $S_1=a_1^2+a_2^2+a_3^3+..+a_{n-1}^2$, tính theo dạng 6 và 7

$S_2=a_1+a_2+..+a_{n-1}$, tính theo dạng 1

- Với $a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_n-a_{n-1}=k>2$

Nhân cả 2 vế với $3k$ rồi tách $3k$ ở mỗi số hạng để tạo thành các số hạng mới tự triệt tiêu.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 19.21$

Lời giải:

Ta có: $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 17.19 + 19.21 = 1(1+2) + 3(3+2) + 5(5+2) + ... + 17(17+2) + 19(19+2)$

$= \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + .. + 17^2 + 19^2\right) + 2(1 + 3 + 5 + 7 + ... + 17 + 19)$

Đặt $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + .. + 17^2 + 19^2$

Ta có tổng B có dạng $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (k-1)^2 = \dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Với $k = 20$, ta có $B = \dfrac{19.20.21}{6} = 1330$

$\Rightarrow S = 1330 + 2(1+19).10:2 \Rightarrow S = 1530$

Vậy $S = 1530$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 47.49 + 49.51$

Lời giải:

Ta có: $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 47.49 + 49.51 = 1(1+2) + 3(3+2) + 5(5+2) + ... + 47(47+2) + 49(49+2)$

$= \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + .. + 47^2 + 49^2\right) + 2(1 + 3 + 5 + 7 + ... + 47 + 49)$

Đặt $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + .. + 47^2 + 49^2$

Ta có tổng B có dạng $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (k-1)^2 = \dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Với $k = 50$, ta có $B = \dfrac{49.50.51}{6} = 20825$

$\Rightarrow S = 20825 + 2(1+49).25:2 \Rightarrow S = 20825 + 1250 = 22075$

Vậy $S = 22075$

Bài 3: Tính tổng $A = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 97.99 + 99.101$

Lời giải:

Ta có: $A = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 97.99 + 99.101 = 1(1+2) + 3(3+2) + 5(5+2) + ... + 97(97+2) + 99(99+2)$

$= \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + .. + 97^2 + 99^2\right) + 2(1 + 3 + 5 + 7 + ... + 97 + 99)$

Đặt $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + .. + 97^2 + 99^2$

Ta có tổng B có dạng $B=1^2+3^2+5^2+...+(k-1)^2=\dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Với $k=100$, ta có $B=\dfrac{99.100.101}{6}=166650$

$\Rightarrow A=166650+2(1+99).50:2 \Rightarrow A=166650+5000=171650$

Vậy $A=171650$

Bài 4: Tính tổng $P=1.4+4.7+7.10+...+49.52$

Lời giải:

Vì khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng bằng 3, nhân cả 2 vế với 9 ta được:

$$9P=1.4.9+4.7.9+7.10.9+...+49.52.9$$
$$=1.4(7+2)+4.7.(10-1)+7.10.(13-4)+...+46.49.(52-43)+49.52(55-46)$$
$$=1.4.7+1.4.2+4.7.10-1.4.7+7.10.13-4.7.10+...+46.49.52-43.46.49+49.52.55-46.49.52$$
$$=1.4.2+49.52.55=140148 \Rightarrow P=15572$$

Vậy $P=15572$

Bài 5: Tính tổng $P=1.4+4.7+7.10+...+97.100$

Lời giải:

Vì khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng bằng 3, nhân cả 2 vế với 9 ta được:

$$9P=1.4.9+4.7.9+7.10.9+...+97.100.9$$
$$=1.4(7+2)+4.7.(10-1)+7.10.(13-4)+...+94.97.(100-91)+97.100(103-94)$$
$$=1.4.7+1.4.2+4.7.10-1.4.7+7.10.13-4.7.10+...+94.97.100-94.97.91+97.100.103-97.100.94$$
$$=1.4.2+97.100.103=999108 \Rightarrow P=999108$$

Vậy $P=999108$

Bài 6: Tính tổng $M=1.3+3.5+5.7+...+39.41$

Lời giải:

Ta có $M=1.3+3.5+5.7+...+49.51=1(1+2)+3(3+2)+...+37(37+2)+39(39+2)$

$=(1^2+3^2+5^2+...+37^2+39^2)+2(1+3+5+7+...+39)$

Đặt $B=1^2+3^2+5^2+...+37^2+39^2$

Tổng B có dạng $B=1^2+3^2+5^2+...+(k-1)^2=\dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Với $k=40 \Rightarrow B=\dfrac{39.40.41}{6}=10660$

$\Rightarrow M=10660+2.(1+39).20:2 \Rightarrow M=10660+800=11460$

Vậy $M=11460$

Bài 7: Tính tổng $N=2.4+4.6+6.8+...+48.50$

Lời giải:

Ta có

$N=2.4+4.6+6.8+...+48.50=2(2+2)+4(4+2)+6(6+2)+...+46(46+2)+48(48+2)$

$=\left(2^2+4^2+6^2+...+48^2\right)+2(2+4+6+...+48)$

Đặt $B=2^2+4^2+6^2+...+48^2$

Tổng B có dạng $B=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2=\dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Với $k=49 \Rightarrow B=\dfrac{48.49.50}{6}=19600$

$\Rightarrow N=19600+2(2+48).25:2 \Rightarrow N=19600+1250=20850$

Vậy $N=20850$

Bài 8: Tính tổng $N=2.4+4.6+6.8+...+100.102$

Lời giải:

Ta có

$N=2.4+4.6+6.8+...+100.102=2(2+2)+4(4+2)+6(6+2)+...+98(98+2)+100(100+2)$

$=\left(2^2+4^2+6^2+...+100^2\right)+2(2+4+6+...+98+100)$

Đặt $B=2^2+4^2+6^2+...+100^2$

Tổng B có dạng $B=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2=\dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Với $k=101 \Rightarrow B=\dfrac{100.101.102}{6}$

$\Rightarrow N=\dfrac{100.101.102}{6}+2.\dfrac{(2+100)50}{2} \Rightarrow N=176800$

Vậy $N=176800$

Bài 9: Tính tổng $S=2.6+6.10+10.14+14.18+...+42.46+50.54$

Lời giải:

Vì khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng bằng 4 (trừ ra số hạng cuối cùng)

Nhân cả 2 vế với 12 ta được

$12S = 2.6.12 + 6.10.12 + 10.14.12 + 14.18.12 + ... + 42.46.12 + 50.54.12$

$= 2.6(10+2) + 6.10(14-2) + 10.14(18-6) + 14.18(22-10) + ... + 42.46(50-38) + 50.54.12$

$= 2.2.6 + 42.46.50 + 50.54.12 = 129024 \Rightarrow S = 10752$

Vậy $S = 10752$

Dạng 10: Tính tổng có dạng $S = 1.a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n$

I.Phương pháp giải

Nhân cả hai vê với $4k$, rồi tách $4k$ ở mỗi số hạng trong tổng để số hạng trước và số hạng sau tạo thành những số tự triệt tiêu nhau

$4k.S = 1.a_2a_3.4k + a_2a_3a_4.4k + a_3a_4a_5.4k + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n.4k = a_{n-2}a_{n-1}a_n\left(a_n + k\right)$

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 16.17.18 + 17.18.19$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 1, nên nhân cả 2 vế với 4 ta được:

$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + ... + 16.17.18.4 + 17.18.19.4$

$= 1.2.3.4 + 2.3.4(5-1) + 3.4.5.(6-2) + ... + 16.17.18.(19-5) + 17.18.19(20-16) = 17.18.19.20 = 116280$

$\Rightarrow S = 116280 : 4 = 29070$

Vậy $S = 29070$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 26.27.28 + 27.28.29$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 1, nên nhân cả 2 vế với 4 ta được:

$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + ... + 26.27.28.4 + 27.28.29.4$

$= 1.2.3.4 + 2.3.4(5-1) + 3.4.5.(6-2) + ... + 26.27.28.(29-25) + 27.28.29(30-26) = 27.28.29.30 = 657720$

$\Rightarrow S = 657720 : 4 = 164430$

Vậy $S = 164430$

Bài 3: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 46.47.48 + 47.48.49$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 1, nên nhân cả 2 vế với 4 ta được:

$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + ... + 46.47.48.4 + 47.48.49.4$

$=1.2.3.4+2.3.4(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+46.47.48.(49-45)+47.48.49(50-46)$
$=47.48.49.50=5527200$

$\Rightarrow S=5527200:4=1381800$

Vậy $S=1381800$

Bài 4: Tính tổng $S=1.3.5+3.5.7+5.7.9+...+55.57.59$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 2, nên nhân cả 2 vế với 8 ta được:

$8S=1.3.5.8+3.5.7.8+5.7.9.8+...+55.57.59.8$

$=1.3.5.(7+1)+3.5.7(9-1)+5.7.9(11-3)+...+53.55.57(59-51)+55.57.59(61-53)$

$8S=1.3.5+1.3.5.7-1.3.5.7+3.5.7.9-3.5.7.9+...-51.53.55.57+53.55.57.59+55.57.59.61-53.55.57.59$

$8S=1.3.5+55.57.59.61$

Chia cả 2 vế cho 8 ta được: $S=(1.3.5+55.57.59.61):8=1410360$

Vậy $S=1410360$

Bài 5: Tính tổng $S=1.3.5+3.5.7+5.7.9+...+95.97.99$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 2, nên nhân cả 2 vế với 8 ta được:

$8S=1.3.5.8+3.5.7.8+5.7.9.8+...+95.97.99.8$

$=1.3.5.(7+1)+3.5.7(9-1)+5.7.9(11-3)+...+93.95.97(99-91)+95.97.99(101-93)$

$8S=1.3.5+95.97.99.101$

$8S=1.3.5+1.3.5.7-1.3.5.7+3.5.7.9-3.5.7.9+...-91.93.95.97+93.95.97.99+95.97.99.101-93.95.97.99$
Chia cả 2 vế cho 8 ta được: $S=(1.3.5+95.97.99.101):8=11517600$

Vậy $S=11517600$

Bài 6: Tính tổng $A=1.2.3.4+2.3.4.5+...+18.19.20.21+19.20.21.22$

Lời giải:

Nhân hai vế với 5 ta được $5A=1.2.3.4.5+2.3.4.5.5+...+18.19.20.21.5+19.20.21.22.5$

$5A=1.2.3.4.5+2.3.4.5.(6-1)+...+18.19.20.21.(22-17)+19.20.21.22.(23-18)$

$=1.2.3.4.5-1.2.3.4.5+2.3.4.5.6-...-17.18.19.20.21+18.19.20.21.22-18.19.20.21.22+19.20.21.22.23$

$=19.20.21.22.23\Rightarrow A=\dfrac{19.20.21.22.23}{5}=807576$

Vậy $A=807576$

Dạng 11: Tính tổng có dạng $S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}$ $Với\, a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_n-a_{n-1}=k$

I.Phương pháp giải

- Với $a_2-a_1=a_3-a_2=....=a_n-a_{n-1}=1$ thì

$$S=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}$$

- Với $a_2-a_1=a_3-a_2=....=a_n-a_{n-1}=k>1$ thì $S=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)$

- Với dạng toán phức tạp hơn như:

1) Nếu số hạng có dạng $\frac{2m}{b(b+m)(b+2m)}$, thì ta dùng công thức

$\frac{2m}{b(b+m)(b+2m)}=\frac{1}{b(b+m)}-\frac{1}{(b+m)(b+2m)}$ để viết mỗi số hạng thành hiệu của hai phân số

2) Nếu số hạng có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$, thì ta dùng công thức

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$, sau đó áp dụng tiếp công thức trong phần 1.

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{49.50}$

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{49.50}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$$

$$=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$$

Vậy $A=\frac{49}{50}$

Bài 2: Tính tổng $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}$

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

Vậy $A=\frac{99}{100}$

Bài 3: Tính tổng $B=\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\frac{2}{6.8}+...+\frac{2}{48.50}$

Lời giải:

Ta có:

$$B=\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\frac{2}{6.8}+...+\frac{2}{48.50}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{48}-\frac{1}{50}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{50}=\frac{25}{50}-\frac{1}{50}=\frac{24}{50}=\frac{12}{25}$$

Vậy $B=\frac{12}{25}$

Bài 4: Tính tổng $A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{97.99}$

Lời giải:

Ta có: $A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{97.99}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{99}\right)=\frac{1}{2}.\frac{98}{99}=\frac{49}{99}$$

Vậy $A=\frac{49}{99}$

Bài 5: Tính tổng $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+...+\frac{1}{45}$

Lời giải:

Ta có $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+...+\frac{1}{45}=\frac{2}{6}+\frac{2}{12}+\frac{2}{20}+\frac{2}{30}+...+\frac{2}{90}$

$=2\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{9.10}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=2.\frac{4}{10}=\frac{4}{5}$

Vậy $A=\frac{4}{5}$.

Bài 6: Tính tổng $B=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{18.19.20}$

Lời giải:

Xét $2B=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{18.19.20}$

$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{18.19}-\frac{1}{19.20}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{19.20}$

$\Rightarrow B=\frac{1}{2}.\frac{19.10-1}{19.20}=\frac{189}{760}$

Vậy $B=\frac{189}{760}$.

Bài 7: Tính tổng $A=1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{6}+1-\frac{1}{12}+1-\frac{1}{20}+1-\frac{1}{30}+1-\frac{1}{42}+1-\frac{1}{56}+1-\frac{1}{72}+1-\frac{1}{89}$

Lời giải:

Ta có $A=9-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{89}\right)$

$A=9-\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{89}\right)$

$A=9-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{89}\right)=9-\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{89}\right)=9-1+\frac{1}{9}-\frac{1}{89}=\frac{73}{9}-\frac{1}{89}=8\frac{80}{801}$

Vậy $A=8\frac{80}{801}$

Bài 8: Tính tổng $B=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{247}+\frac{1}{475}+\frac{1}{777}+\frac{1}{1147}$

Lời giải:

Ta có $B=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{247}+\frac{1}{475}+\frac{1}{777}+\frac{1}{1147}=\frac{1}{1.7}+\frac{1}{7.13}+\frac{1}{13.19}+\frac{1}{19.25}+\frac{1}{21.37}+\frac{1}{37.31}$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{25}\right)+\frac{1}{21.37}+\frac{1}{37.31}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{25}\right)+\frac{31+21}{21.31.37}$$

$$=\frac{4}{25}+\frac{52}{24087}=\frac{97648}{602175}$$

Vậy $B=\dfrac{97648}{602175}$

Bài 9: Tính tổng $A=\dfrac{-1}{20}+\dfrac{-1}{30}+\dfrac{-1}{42}+\dfrac{-1}{56}+\dfrac{-1}{72}+\dfrac{-1}{90}$

Lời giải:

Ta có $A=\dfrac{-1}{20}+\dfrac{-1}{30}+\dfrac{-1}{42}+\dfrac{-1}{56}+\dfrac{-1}{72}+\dfrac{-1}{90}=-\left(\dfrac{1}{4.5}+\dfrac{1}{5.6}+\dfrac{1}{6.7}+...+\dfrac{1}{9.10}\right)$

$$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=\frac{-3}{20}$$

Vậy $A=\dfrac{-3}{20}$

Bài 10: Tính tổng $B=\dfrac{5}{2.1}+\dfrac{4}{1.11}+\dfrac{3}{11.2}+\dfrac{1}{2.15}+\dfrac{13}{15.4}$

Lời giải:

Ta có $B=\dfrac{5}{2.1}+\dfrac{4}{1.11}+\dfrac{3}{11.2}+\dfrac{1}{2.15}+\dfrac{13}{15.4}=7\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{14}-\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{28}\right)$

$$=7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{28}\right)=\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$$

Vậy $B=3\dfrac{1}{4}$

Bài 11: Tính tổng $A=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{21}+...+\dfrac{1}{120}$

Lời giải:

Ta có $A=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{21}+...+\dfrac{1}{120}=\dfrac{1}{5.2}+\dfrac{1}{5.3}+\dfrac{1}{7.3}+\dfrac{1}{7.4}+...+\dfrac{1}{15.7}+\dfrac{1}{15.8}$

$$=\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\right)+\left(\frac{1}{7.3}+\frac{1}{7.4}\right)+...+\left(\frac{1}{15.7}+\frac{1}{15.8}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+...+\frac{1}{15}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{56}=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{7.8}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

Vậy $A=\frac{3}{8}$

Bài 12: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A=\frac{4}{7.31}+\frac{6}{7.41}+\frac{9}{10.41}+\frac{7}{10.57}$

$$B=\frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}$$

Lời giải:

Ta có

$$\frac{1}{5}A=\frac{4}{35.31}+\frac{6}{35.41}+\frac{9}{50.41}+\frac{7}{50.57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{57}$$

$$\frac{1}{2}B=\frac{7}{38.31}+\frac{5}{38.43}+\frac{3}{46.43}+\frac{11}{46.57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}A=\frac{1}{2}B\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{5}{2}$$

Vậy $\frac{A}{B}=\frac{5}{2}$

Bài 13: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A=\frac{34}{7.31}+\frac{51}{13.22}+\frac{85}{22.37}+\frac{68}{37.49}$

$$B=\frac{39}{7.16}+\frac{65}{16.31}+\frac{52}{31.43}+\frac{26}{43.49}$$

Lời giải:

Ta có

$$A=\frac{34}{7.31}+\frac{51}{13.22}+\frac{85}{22.37}+\frac{68}{37.49}=\frac{34}{6}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\frac{51}{9}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{22}\right)+\frac{85}{15}\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{37}\right)+\frac{68}{12}\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{49}\right)$$

$$=\frac{17}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\frac{17}{3}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{22}\right)+\frac{17}{3}\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{37}\right)+\frac{17}{3}\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{49}\right)=\frac{17}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{49}\right)$$

$$B=\frac{39}{7.16}+\frac{65}{16.31}+\frac{52}{31.43}+\frac{26}{43.49}=\frac{39}{9}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{16}\right)+...+\frac{26}{6}\left(\frac{1}{43}-\frac{1}{49}\right)=\frac{13}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{49}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{17}{3}:\frac{13}{3}=\frac{17}{13}.$$

Vậy $\frac{A}{B}=\frac{17}{13}$

Bài 14: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{19.20}$

$$B=\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+...+\frac{1}{38.40}$$

Lời giải:

Ta có

$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{19.20}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}$

$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

$B=\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+...+\frac{1}{38.40}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{38}-\frac{1}{40}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{40}\right)=\frac{1}{2}.\frac{19}{40}=\frac{19}{80}$

$\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{19}{20}:\frac{19}{80}=4$.

Vậy $\frac{A}{B}=4$

Bài 15: Tính tổng $A=\frac{1}{31}\left[\frac{31}{5}\left(9-\frac{1}{2}\right)-\frac{17}{2}\left(4+\frac{1}{5}\right)\right]+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{930}$

Lời giải:

Ta có $A=\frac{1}{31}\left[\frac{31}{5}\left(9-\frac{1}{2}\right)-\frac{17}{2}\left(4+\frac{1}{5}\right)\right]+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{930}$

Xét $M=\frac{1}{31}\left[\frac{31}{5}\left(9-\frac{1}{2}\right)-\frac{17}{2}\left(4+\frac{1}{5}\right)\right]=\frac{1}{31}\left(\frac{31}{5}.\frac{17}{2}-\frac{17}{2}.\frac{21}{5}\right)=\frac{17}{31}\left(\frac{31-21}{10}\right)=\frac{17}{31}$

$N=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{930}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{30.31}=1-\frac{1}{31}=\frac{30}{31}$

Khi đó $A=M+N=\frac{17}{31}+\frac{30}{31}=\frac{47}{31}$.

Vậy $A=\frac{47}{31}$

Dạng 12: Tính tổng có dạng $S=1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3$ ***Với*** $n\in N^*$

I.Phương pháp giải

Áp dụng tổng $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + ... + (n-1)n(n+1)$

Trong mỗi số hạng, tách thừa số đầu và thừa số sau theo tổng và hiệu của thừa số giữa với 1.

Áp dụng công thức $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ để nhân các số sau khi tách

Ta có: $B = (2-1).2.(2+1) + (3-1).3.(3+1) + ... + (n-1).n.(n+1)$

$= (2^3 - 2) + (3^3 - 3) + ... + (n^3 - n) = (2^3 + 3^3 + ... + n^3) - (2 + 3 + ... + n)$

$= (1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) - (1 + 2 + 3 + ... + n) \Rightarrow S = B + (1 + 2 + 3 + ... + n)$

Theo dạng 10 ta tính được

$$B = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$

Theo dạng 1 ta tính được $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Vậy $S = \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} + \dfrac{n(n+1)}{2} = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

II.Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3$

Lời giải:

Ta có $B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 9.10.11 = (2-1).2.(2+1) + (3-1).3.(3+1) + ... + (10-1).10.(10+1)$

$= (2^3 - 2) + (3^3 - 3) + ... + (10^3 - 10)$

$= (2^3 + 3^3 + ... + 10^3) - (2 + 3 + ... + 10) = (1 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3) - (1 + 2 + 3 + ... + 10)$

$\Rightarrow S = B + (1 + 2 + 3 + ... + 10)$

Theo dạng 10 ta tính được $B = \dfrac{9.10.11.12}{4} = 2970$

Khi đó $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 10^3 = 2970 + \dfrac{10.11}{2} = 3025$

Vậy $S = 3035$

Bài 2: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 51^3$

Lời giải:

Ta có $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 51^3 = \left[\frac{51(51+1)}{2}\right]^2 = 1758276.$

Vậy $S = 1758276$

Bài 3: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 20^3$

Lời giải:

Ta có $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 20^3 = \left[\frac{20(20+1)}{2}\right]^2 = 44100$

Vậy $S = 44100$

Bài 4: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 100^3$

Lời giải:

Ta có :

$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 100^3 = \left[\frac{100(100+1)}{2}\right]^2 = 25502500.$

Vậy $S = 25502500$

Bài 5: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 55^3$

Lời giải:

Ta có :

$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 55^3 = \left[\frac{55(55+1)}{2}\right]^2 = 2371600$

Vậy $S = 2371600$

Bài 6: Tính tổng $B = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 42^3$

Lời giải:

Ta có :

$B = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 42^3 = \left[\frac{42(42+1)}{2}\right]^2 = 815409$

Vậy $S = 815409$

PHẦN III.BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tính $C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 98.99$

(Đề khảo sát HSG toán 6 huyện Yên Mô năm học 2020 - 2021)

Lời giải:

Ta có

$3C = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + ... + 97.98.3 + 98.99.3$

$3C = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + 97.98.(99-96) + 98.99.(100-97)$

$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + ... + 97.98.99 - 96.97.98 + 98.99.100 - 97.98.99$

$= 98.99.100$

$\Rightarrow C = \dfrac{98.99.100}{3} = 323400$

Vậy $C = 323400$

Bài 2: Tính $A = 1 + 2 + 3 + ... + 59 + 60$

Lời giải:

Từ 1 đến 50 có số số hạng là $60 - 1 + 1 = 60$ (số hạng)

$\Rightarrow A = 1 + 2 + 3 + ... + 59 + 60 = \dfrac{(1+60)60}{2} = 1830$

Vậy $A = 1830$

Bài 3: Tính $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + ... + \dfrac{1}{2352} + \dfrac{1}{2450}$

(Đề khảo sát HSG toán 6 Quận Hà Đông năm học 2020 - 2021)

Lời giải:

Ta có:

$S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + ... + \dfrac{1}{2352} + \dfrac{1}{2450}$

$= \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{4.5} + ... + \dfrac{1}{48.49} + \dfrac{1}{49.50}$

$= 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{48} - \dfrac{1}{49} + \dfrac{1}{49} - \dfrac{1}{50}$

$= 1 - \dfrac{1}{50} = \dfrac{49}{50}$

Vậy $S = \dfrac{49}{50}$

Bài 4: Tính $A = \dfrac{1}{2.4} + \dfrac{1}{4.6} + \dfrac{1}{6.8} + ... + \dfrac{1}{2020.2022}$

(Đề khảo sát HSG toán 6 Nam Trực năm học 2020 - 2021)

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+...+\frac{1}{2020.2022}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2022}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2022}\right)=\frac{1}{2}.\frac{1010}{2022}=\frac{505}{2022}$$

Vậy $A=\frac{505}{2022}$

Bài 5: Tính $A=1.2+2.3+3.4+...+2013.2014$

(Đề khảo sát HSG toán 6 Yên Định năm học 2020 - 2021)

Lời giải:

Ta có

$3A=1.2.3+2.3.3+3.4.3+...+2012.2013.3+2013.2014.3$

$3A=1.2.3+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+...+2012.2013.(2014-2011)+2013.2014.(2015-2012)$

$=1.2.3+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+...+2013.2014.2015-2012.2013.2014$

$=2013.2014.2015$

$\Rightarrow A=\frac{2013.2014.2015}{3}=2723058910$

Vậy $A=2723058910$