

Câu 1. (2,5 điểm)

- a) Tìm số tự nhiên n để $A = n^3 - n^2 - 7n + 10$ là số nguyên tố.
b) Cho a, b, c là ba số nguyên. Biết $S = a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.
Chứng minh rằng: $P = a + b + c + 2025$ chia hết cho 3.
c) Cho hai số tự nhiên $a; b$ thỏa mãn $2025a^2 + a = 2026b^2 + b$.
Chứng minh rằng: $2025(a + b) + 1$ là số chính phương.

Câu 2. (6,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $(5x + 2025)^3 - (2x + 2026)^3 = (3x - 1)^3$
b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy + 1 = 0 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm)

Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tour 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour là bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt là lớn nhất.

Câu 4. (2,0 điểm)

Trong túi đựng 48 viên bi cùng kích thước và khối lượng với hai màu đỏ và xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi. Biết rằng xác suất lấy được viên bi đỏ bằng 92% xác suất lấy được viên bi màu xanh. Hỏi trong túi có bao nhiêu viên bi màu đỏ, bao nhiêu viên bi màu xanh?

Câu 5. (7,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ và đường cao AH . Gọi E, F là chân các đường vuông góc hạ từ H lên AC, AB . Gọi I là giao điểm của AH và EF , BI cắt AC tại điểm P . Đường thẳng qua A song song với BI cắt BC tại Q .

- a) Chứng minh B là trung điểm QH .
b) CI cắt AB tại L . Chứng minh: $\frac{AP}{PC} = \frac{BA^2}{BC^2}$ và $\frac{AP}{PC} + \frac{AL}{LB} = 1$.
c) Gọi M là giao điểm của FE và CB . Kẻ HT vuông góc với AM .
Chứng minh rằng $\widehat{BTC} = 90^\circ$.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho một đa giác đều 2025 cạnh. Ta sơn các đỉnh của đa giác này bởi 2 màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành 1 tam giác cân.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh..... SBD.....

Lưu ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

KỶ THI HỌC SINH GIỎI XÃ LỚP 9 NĂM HỌC 2025 – 2026

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Câu		Đáp án	Điểm
Câu 1. (2,5 điểm)			
a) Tìm số tự nhiên n để $A = n^3 - n^2 - 7n + 10$ là số nguyên tố.			
b) Cho a, b, c là ba số nguyên. Biết $S = a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3. Chứng minh rằng: $P = a + b + c + 2025$ chia hết cho 3.			
c) Cho hai số tự nhiên $a; b$ thỏa mãn $2025a^2 + a = 2026b^2 + b$. Chứng minh rằng: $2025(a + b) + 1$ là số chính phương.			
1 (2,5)	a (1đ)	Ta có: $A = (n - 2)(n^2 + n - 5)$ A là số nguyên tố nên $(n - 2)$ hoặc $(n^2 + n - 5)$ là ước của 1	0,5
		Nếu $n - 2 = 1$ thì $n = 3$ khi đó $A = 7$ (chọn)	0,5
		Nếu $n - 2 = -1$ thì $n = 1$ khi đó $A = 3$ (chọn)	
		Nếu $n^2 + n - 5 = 1$ thì $(n + 3)(n - 2) = 0$	
		Với n là số tự nhiên nên $n = 2$ khi đó $B = 0$ (loại) Vậy $n = 3$ và $n = 1$ thì A là số nguyên tố. (Nếu HS thiếu trường hợp $n - 2 = -1 \Rightarrow n = 1$ thì trừ 0,25đ)	
	b (1đ)	Ta chứng minh $n^3 - n : 3$ với mọi n nguyên. Nên: $a^3 - a : 3; b^3 - b : 3; c^3 - c : 3$	0,5
		$S - P = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) - 2025 : 3$ Vì $S : 3 \Rightarrow P : 3$	0,5
	c (0,5đ)	$2025a^2 + a = 2026b^2 + b \Leftrightarrow 2025a^2 - 2025b^2 + a - b = b^2$ $\Leftrightarrow (a - b)(2025a + 2025b + 1) = b^2$ (1).	0,25
		+ GT suy ra Với $a > b \Rightarrow a - b > 0$ Gọi $(a - b; 2025a + 2025b + 1) = d$ $\Rightarrow \begin{cases} a - b : d \\ 2025a + 2025b + 1 : d \end{cases} \Rightarrow b^2 : d^2 \Rightarrow b : d \Rightarrow a : d.$	
$\Rightarrow 2025a + 2025b : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1.$ $\Rightarrow (a - b; 2025a + 2025b + 1) = 1$ hay $a - b$ và $2025a + 2025b + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Mặt khác $(a - b)(2025a + 2025b + 1) = b^2$ là số chính phương nên suy ra $2025(a + b) + 1$ là số chính phương (đpcm).		0,25	
Câu 2. (6 điểm)			
a) Giải phương trình: $(5x + 2025)^3 - (2x + 2026)^3 = (3x - 1)^3$			

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy + 1 = 0 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases}$			
2 (6đ)	a (3đ)	Đặt $5x + 2025 = a$; $2x + 2026 = b$ thì $3x - 1 = a - b$	0,5
		Ta được phương trình $a^3 - b^3 = (a - b)^3$	0,5
		$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \\ 3ab(a - b) &= 0 \\ \text{hay } a &= 0 \text{ hoặc } b = 0 \text{ hoặc } a - b = 0 \end{aligned}$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2025 = 0 \\ 2x + 2026 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -405 \\ x = -1013 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$	1,0	
	Vậy $x \in \left\{ -405; -1013; \frac{1}{3} \right\}$	0,5	
b (3đ)	$\begin{cases} x + y + xy + 1 = 0 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 0 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases}$	0,5	
	$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} y + 1 = 0 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases}$	0,5	
	TH1: $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -12,5 \end{cases}$	0,5	
	TH2: $\begin{cases} y + 1 = 0 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{20}{3} \end{cases}$	0,5	
	Vậy $(x; y) = \dots\dots$	0,5	
Câu 3. (1,5 điểm) Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tour 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour là bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt là lớn nhất.			
3 (1,5 đ)	Gọi số lần giảm giá 100 000 đồng thì thu được doanh thu lớn nhất là x (lần)		
	\Rightarrow Sau x lần giảm thì giá của tour là: $2\,000\,000 - 100\,000 \cdot x$ (đồng).		0,25
	Vì cứ sau 1 lần giảm thì có thêm 20 người tham gia nên sau x lần giảm thì có thêm $20 \cdot x$ (người tham gia) nên tổng số người tham gia sau x lần giảm giá là: $150 + 20 \cdot x$ (người)		0,25
Tổng doanh thu sau x lần giảm giá là: $S = (2\,000\,000 - 100\,000 \cdot x) \cdot (150 + 20 \cdot x)$ (đồng) $S = 100\,000 \cdot 10 \cdot (20 - x) \cdot (15 + 2x)$ (đồng) $S = 1\,000\,000 \cdot (-2x^2 + 25x + 300)$ (đồng)		0,25	

		$\text{Xét } (-2x^2 + 25x + 300) = -2\left(x^2 - \frac{25}{2}x - 150\right)$ $= -2\left[\left(x^2 - 2 \cdot \frac{25}{4}x + \left(\frac{25}{4}\right)^2\right) - \left(\frac{25}{4}\right)^2 - 150\right]$ $= -2\left[\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 - \frac{3025}{16}\right]$	0,25
		$\text{Vi: } -2\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3025}{16} \leq \frac{3025}{8}$ $\Rightarrow 1\,000\,000 \cdot -2\left[\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 - \frac{3025}{16}\right] \leq 1\,000\,000 \cdot \frac{3025}{8}$ $\Rightarrow 1\,000\,000 \cdot -\left[\left(x - \frac{15}{4}\right)^2 - \frac{3025}{16}\right] \leq 378\,125\,000$ $\Rightarrow S \leq 378\,125\,000$ $\Rightarrow S_{\max} = 378\,125\,000$	0,25
		$\text{Khi đó } x = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ (lần)}$	0,25
		Vậy: Giá tour khi đó: $2\,000\,000 - 100\,000 \cdot 6,25 = 1\,375\,000$ (đồng).	

Câu 4. (2,0 điểm)

Trong túi đựng 48 viên bi cùng kích thước và khối lượng với hai màu đỏ và xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi. Biết rằng xác suất lấy được viên bi đỏ bằng 92% xác suất lấy được viên bi màu xanh. Hỏi trong túi có bao nhiêu viên bi màu đỏ, bao nhiêu viên bi màu xanh?

4 (2đ)	(2,0đ)	Gọi số viên bi màu đỏ là x. Số viên bi màu xanh 48 - x (ĐK: $0 < x < 48$)	0,5
		Xác suất lấy được viên bi màu đỏ là $\frac{x}{48}$, màu xanh là $\frac{48-x}{48}$	0,5
		Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{x}{48} = 0,92 \cdot \frac{48-x}{48}$	0,5
		$\Rightarrow x = 23$. Vậy số viên bi màu đỏ có trong túi là 23. Màu xanh là 25.	0,5

Câu 5. (7 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ và đường cao AH . Gọi E, F là chân các đường vuông góc hạ từ H lên AC, AB . Gọi I là giao điểm của AH và EF , BI cắt AC tại điểm P . Đường thẳng qua A song song với BI cắt BC tại Q .

a) Chứng minh B là trung điểm QH .

b) CI cắt AB tại L . Chứng minh: $\frac{AP}{PC} = \frac{BA^2}{BC^2}$ và $\frac{AP}{PC} + \frac{AL}{LB} = 1$.

c) Gọi M là giao điểm của FE và CB . Kẻ HT vuông góc với AM .

Chứng minh rằng $\widehat{BTC} = 90^\circ$.

5 (7d)	a(2,0đ)	Do $AQ \parallel BP$ theo định lý Thales ta có: $\frac{BH}{BQ} = \frac{IH}{IA}$	1,0
		mà I là trung điểm AH nên $IA = IH$ dẫn đến $\frac{BH}{BQ} = 1$ hay B là trung điểm QH .	1,0
	b(3,0đ)	Ta có $\frac{AP}{PC} = \frac{QB}{BC} = \frac{BH}{BC} = \frac{BH \cdot BC}{BC^2}$	1,0
		Ta dễ dàng CM được: $BH \cdot BC = BA^2$.	0,5
		Từ đó suy ra $\frac{AP}{PC} = \frac{QB}{BC} = \frac{BH}{BC} = \frac{BA^2}{BC^2}$.	0,5
		Chứng minh tương tự ta có: $\frac{AL}{LB} = \frac{AC^2}{BC^2}$.	0,5
		Suy ra $\frac{AP}{PC} + \frac{AL}{LB} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1$.	0,5
		Cách khác: Theo định lý Thales ta có: $\frac{PA}{PC} = \frac{QB}{BC} = \frac{BH}{BC}$, tương tự ta cũng có: $\frac{QA}{QB} = \frac{CH}{CB}$ dẫn đến $\frac{PA}{PC} + \frac{QA}{QB} = \frac{BH + CH}{BC} = 1$.	
	c(2,0đ)	Sử dụng hệ thức trong các tam giác vuông AHB, AHC với $HE \perp AC, HF \perp AB$. Ta có $AF \cdot AB = AH^2 = AE \cdot AC$ Từ đó suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ dẫn đến $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.	0,5
		Gọi O là trung điểm của BC thì $OA = OB = OC$ nên tam giác AOC cân tại O , suy ra $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$. Từ đó suy ra $\widehat{AEF} + \widehat{OAC} = \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ nên $OA \perp EF$ nên I là trực tâm của tam giác AOM dẫn đến $OI \perp AM$ hay $OI \perp AT$ (*).	0,5
Tam giác ATH vuông tại T , có $AI = TI = IH$ hay $IA = IT$ (**).		0,5	
Từ (*),(**) suy ra OI là trung trực của AT dẫn đến $OT = OA = OB = OC$ nên tam giác BTC vuông tại T .		0,5	
Câu 6. (1,0 điểm) Cho một đa giác đều 2025 cạnh. Ta sơn các đỉnh của đa giác này bởi 2 màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành 1 tam giác cân.			
6 (1đ)	(1, 0 đ)	Đa giác đều có 2025 cạnh Suy ra có 2025 đỉnh, là số lẻ	0,25
		Suy ra tồn tại 2 đỉnh kề nhau A,B sơn cùng 1 màu	0,25
		Giả sử 2 đỉnh đó là màu đỏ	

	<p>Do số đỉnh lẻ nên tồn tại 1 điểm thuộc đường trung trực của AB, gọi đó là điểm C.</p> <p>- Nếu C màu đỏ suy ra tam giác ABC cân và sơn màu đỏ</p> <p>- Nếu C màu xanh:</p> <p>Gọi D, E là các đỉnh khác nhau của đa giác kề A, B</p> <p>+) D, E cùng màu xanh thì tam giác CDE thỏa mãn.</p> <p>+) D, E có 1 xanh, 1 đỏ thì tam giác DAB, EAB đỏ.</p>	0,25
		0,25

(HS có cách giải khác đúng và phù hợp thì cho điểm tối đa)

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 9
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-9>