XÁC ĐỊNH GÓC
GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG - ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG - HAI MẶT PHẲNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

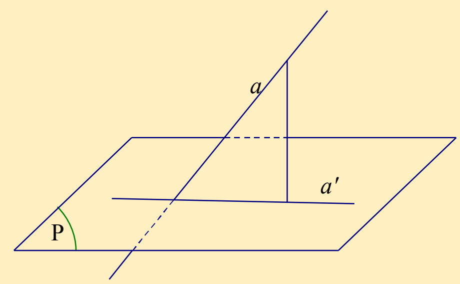
1) Góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp 1: Sử dụng định lý hàm số cosin hoặc tỉ số lượng giác.

Phương pháp 2: Sử dụng tích vô hướng: nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì góc φ của hai đường thẳng này được xác định bởi công thức

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}.$$

2) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:



Muốn xác định góc của đường thẳng a và (P) ta tìm hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).

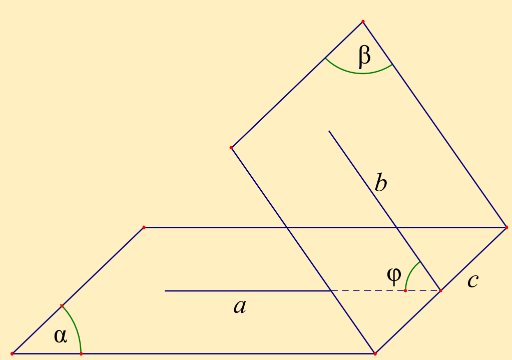
Khi đó, $\left(\widehat{a,(P)}\right) = \left(\widehat{a,a'}\right)$

3) Góc giữa hai mặt phẳng:

Phương pháp 1: Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β).

Khi đó, góc giữa (α) và (β) là $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$. Tính góc $\left(\widehat{a,b}\right)$.

Phương pháp 2:



❖ Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β).

❖ Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến c tại một điểm trên c. Khi đó: $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$.

Cách khác: Ta xác định mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với giao tuyến c mà $(\alpha)\cap(\gamma)=a$, $(\beta)\cap(\gamma)=b$. Suy ra $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$.

4) Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian:

Chọn hệ trục thích hợp và cụ thể hóa tọa độ các điểm.

a) Giả sử đường thẳng a và b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{a},\vec{b}$.

Khi đó: $\cos\left(\widehat{a,b}\right)=\dfrac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}\Rightarrow\left(\widehat{a,b}\right)$

b) Giả sử đường thẳng a có vectơ chỉ phương là $\vec{a}$ và (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

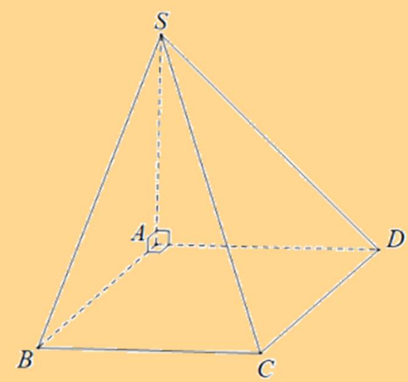
Khi đó: $\sin\left(\widehat{a,(P)}\right)=\dfrac{\left|\vec{a}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{n}\right|}\Rightarrow\left(\widehat{a,(P)}\right)$

c) Giả sử mặt phẳng (α) và (β) lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{a},\vec{b}$.

Khi đó: $\cos\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\dfrac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)$

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a\sqrt{2}$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

2. HƯỚNG GIẢI:

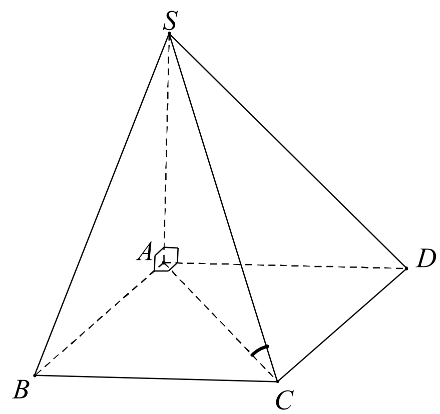
B1: Xác định hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

B2: Tính góc giữa SC và hình chiếu của nó.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC).

Do đó: $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA}.$

Xét hình vuông $ABCD$ ta có: $AC = a\sqrt{6}.$

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^{\circ}.$

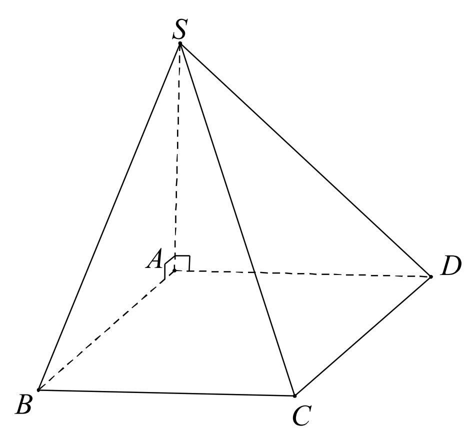
Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 17.1: Cho một hình thoi $ABCD$ cạnh a và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa hình thoi sao cho $SA = a$ và vuông góc với (ABC). Tính góc giữa SD và BC

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 30°.

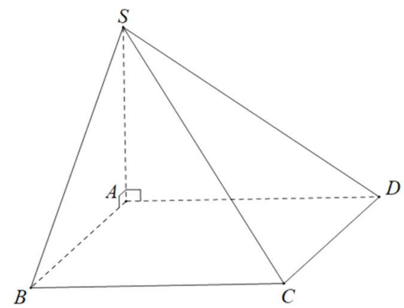
Lời giải

Chọn C



Ta có: $AD//BC \Rightarrow \widehat{(SD,BC)} = \widehat{(SD,AD)} = \widehat{ADS} = 45^{0}$.

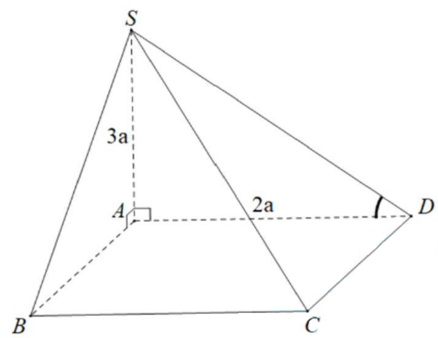
Câu 17.2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng SD và BC nằm trong khoảng nào?



A. $(20°;30°)$. **B.** $(30°;40°)$. **C.** $(40°;50°)$. **D.** $(50°;60°)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC//AD \Rightarrow \widehat{(SD,BC)} = \widehat{(SD,AD)} = \widehat{SDA}$ (Do ΔSAD vuông tại A nên $\widehat{SDA} < 90^o$)

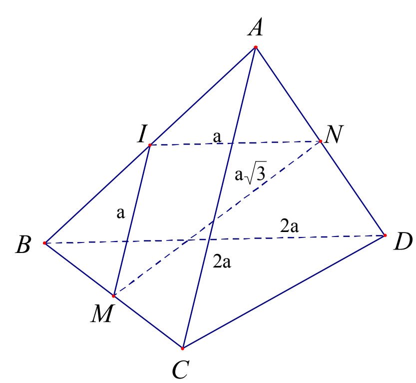
Xét ΔSAD vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{3a}{2a} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \widehat{SDA} = \arctan\dfrac{3}{2} \approx 56^o$.

Câu 17.3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc của AC và BD.

A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $IM = IN = a$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔIMN ta có:

$$\cos\widehat{MIN} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2.IM.IN} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2.a.a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^0.$$

Vì $IM//AC, IN//BD \Rightarrow (\widehat{AC,BD}) = (\widehat{IM,IN}) = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Câu 17.4: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Gọi M là trung điểm CD. Tính cosin góc của AC và BM.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\cos(\widehat{AC,BM}) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}\right)\right|}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

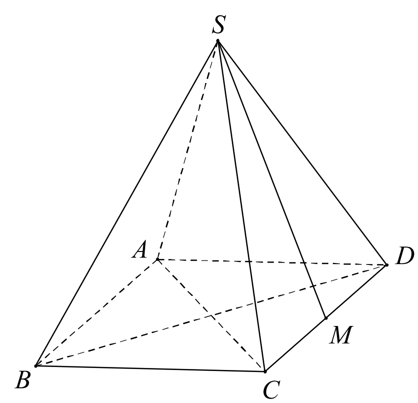
$$= \frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left|a.\frac{a}{2}\cos 120^0 - a.a.\cos 120^0\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left|-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 17.5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AB//CD$ nên $\left(\widehat{AB,SC}\right) = \left(\widehat{CD,SC}\right) = \widehat{SCD}$.

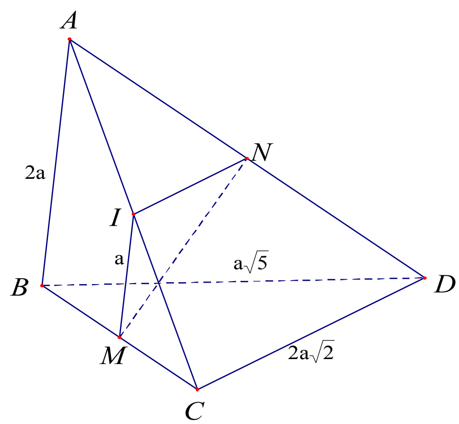
Gọi M là trung điểm của CD. Tam giác SCM vuông tại M và có $SC = a\sqrt{2}$, $CM = a$ nên là tam giác vuông cân tại M nên $\widehat{SCD} = 45°$. Vậy $\left(\widehat{AB,SC}\right) = 45°$.

Câu 17.6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BC, AD và AC. Cho $AB = 2a$, $CD = 2a\sqrt{2}$ và $MN = a\sqrt{5}$. Tính góc $\varphi = \left(\widehat{AB,CD}\right)$

A. 135°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn D

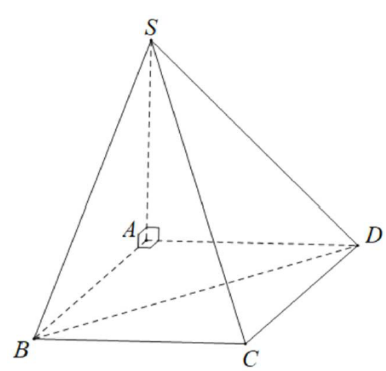


Theo tính chất đường trung bình trong tam giác: $\begin{cases} IN//CD; IN = \dfrac{1}{2}CD = a\sqrt{2} \\ IM//AB; IM = \dfrac{1}{2}AB = a \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi = \widehat{(AB, CD)} = \widehat{(IM, IN)}$. Áp dụng định lý cosin ta có:

$\cos\varphi = \left|\dfrac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2.IM.IN}\right| = \left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0$.

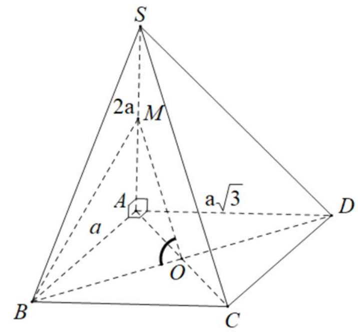
Câu 17.7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng SC và BD nằm trong khoảng nào?



A. $(30°;40°)$. **B.** $(40°;50°)$. **C.** $(50°;60°)$. **D.** $(60°;70°)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm SA.

Xét hình chữ nhật $ABCD$, ta có: $OB = OA = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = \dfrac{2a}{2} = a.$

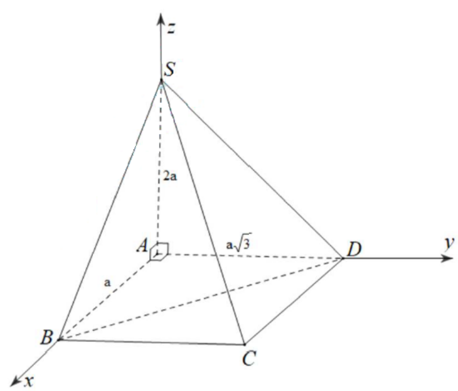
Xét ΔMAB vuông tại A, ta có: $MB = \sqrt{AB^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$

Xét ΔMAO vuông tại A, ta có: $MO = \sqrt{AO^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$

Xét ΔMBO, ta có: $\cos\widehat{MOB} = \dfrac{OB^2 + OM^2 - BM^2}{2.OB.OM} = \dfrac{a^2 + 2a^2 - 2a^2}{2.a.a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MOB} \approx 69^o.$

Ta có: $SC // MO \Rightarrow \widehat{(SC, BD)} = \widehat{(MO, BD)} = \widehat{MOB} \approx 69^o$ (Do $\widehat{MOB} < 90^o$).

Cách khác: *Sử dụng phương pháp tọa độ*



Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ với $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a; a\sqrt{3}; 0), D(0; a\sqrt{3}; 0)$ và $S(0;0;2a)$.

Ta có: $\overrightarrow{SC} = (a; a\sqrt{3}; -2a) \Rightarrow SC$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; \sqrt{3}; -2)$.

$\overrightarrow{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0) \Rightarrow BD$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (-1; \sqrt{3}; 0)$.

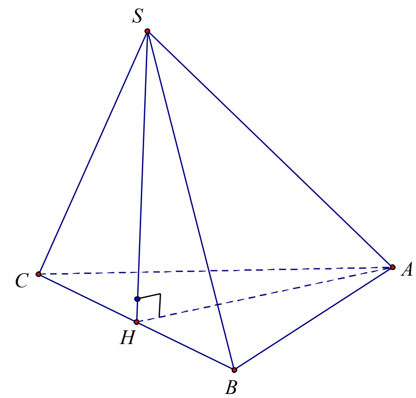
Suy ra: $\cos\widehat{(SC, BD)} = \dfrac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}.2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{(SC, BD)} \approx 69^o.$

Câu 17.8: Cho hình chóp $S.ABC$ có các ΔABC và ΔSBC là các tam giác đều và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. $45°$. **B.** $75°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết ta có $(ABC) \perp (SBC)$.

Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu của SA trên (ABC). Do đó, $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA, AH)} = \widehat{SAH}$.

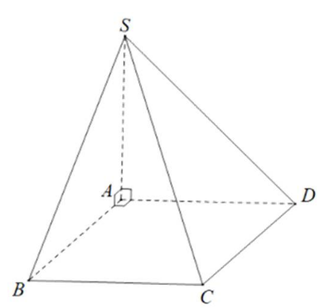
Giả sử $AB = a$.

Ta có: ΔSBC và ΔABC là tam giác đều nên H là trung điểm của BC và $AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông SHA ta có $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = 1 \Rightarrow \widehat{SAH} = 45°$.

Vậy $\widehat{(SA,(ABC))} = 45°$.

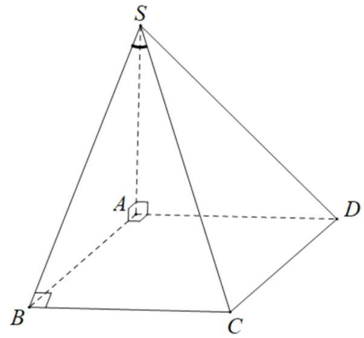
Câu 17.9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng:



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



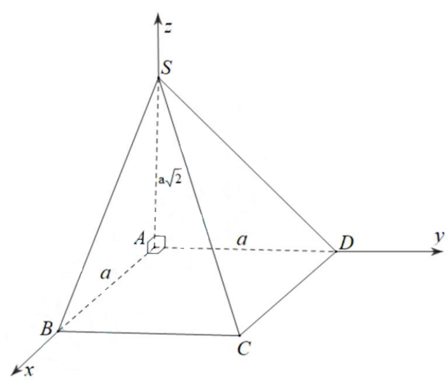
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ nên SB là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB).

Do đó: $\widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{BSC}$.

Xét ΔSAB vuông tại A, ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét ΔSBC vuông tại B, ta có: $\tan\widehat{BSC} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BSC} = 30^o$.

Cách khác: *Sử dụng phương pháp tọa độ*



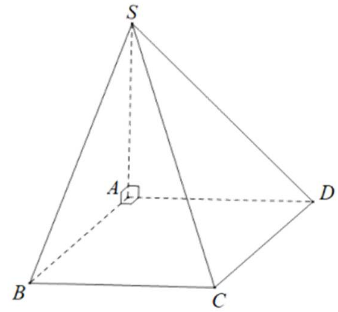
Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ với $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0)$ và $S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$.

Ta có: $(SAB): y = 0 \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của (SAB) là $\vec{j} = (0;1;0)$.

$\overrightarrow{SC} = \left(a;a;-a\sqrt{2}\right) \Rightarrow SC$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left(1;1;-\sqrt{2}\right)$.

Suy ra: $\sin\widehat{(SC,(SAB))} = \dfrac{\left|\vec{j}.\vec{u}\right|}{\left|\vec{j}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = 30^o$.

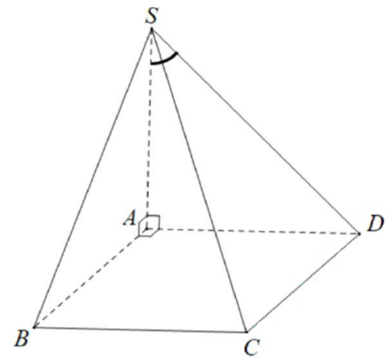
Câu 17.10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{3}$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng:



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A

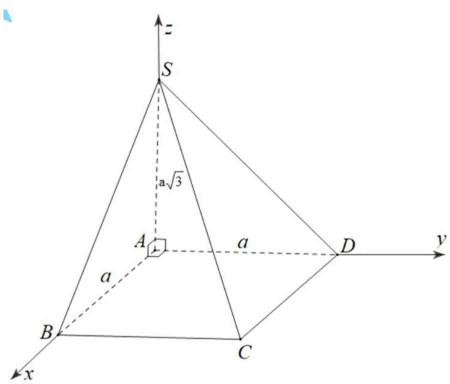


Ta có: $AD \perp (SAB)$ nên SA là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAB).

Do đó: $\widehat{(SD,(SAB))} = \widehat{(SD,SA)} = \widehat{ASD}$.

Xét ΔSAD vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30^o$.

Cách khác: *Sử dụng phương pháp tọa độ*



Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ với $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0)$ và $S(0;0;a\sqrt{3})$.

Ta có: $(SAB): y = 0 \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của (SAB) là $\vec{j} = (0;1;0)$.

$\overrightarrow{SD} = (0;a;-a\sqrt{3}) \Rightarrow SD$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0;1;-\sqrt{3})$.

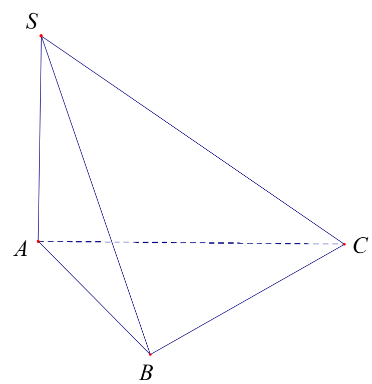
Suy ra: $\sin\widehat{(SD,(SAB))} = \dfrac{|\vec{j}.\vec{u}|}{|\vec{j}|.|\vec{u}|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(SD,(SAB))} = 30^o$.

Câu 17.11: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, ΔABC đều cạnh a. Tính góc giữa SB và (ABC)

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



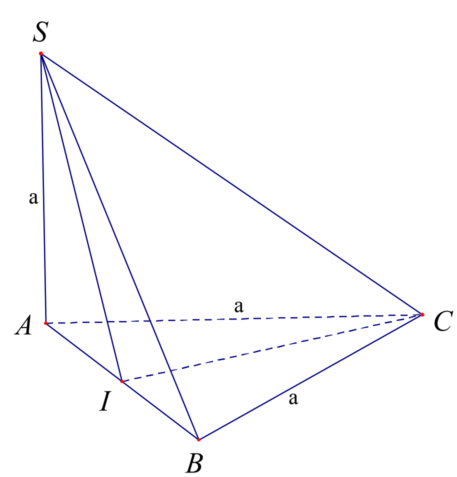
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \varphi = \widehat{ASB} = \widehat{(SD, AD)} = 45^{0}$.

Câu 17.12: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, ΔABC đều cạnh a. Gọi β là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB). Khi đó, $\tan \beta$ bằng

A. $\sqrt{\frac{3}{5}}$. **B.** $\sqrt{\frac{5}{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(SAB) \Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SI)} = \widehat{CSI} = \beta$

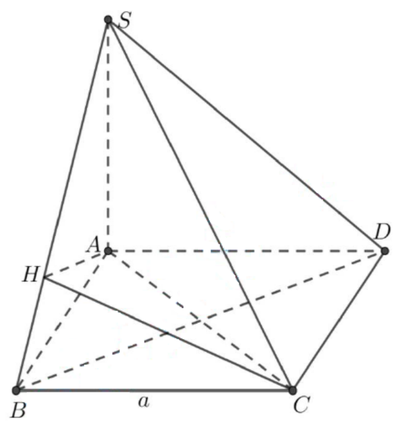
$$\Rightarrow \tan\beta = \tan\widehat{CSI} = \frac{CI}{SI} = \frac{CI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Câu 17.13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với $(ABCD)$ cà $SA = a\sqrt{6}$. Tính sin của góc tạo bởi AC và mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn D



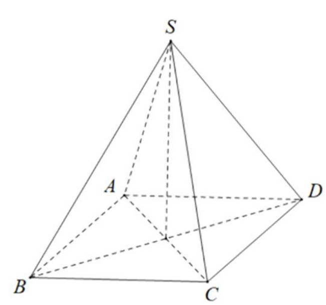
Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là hình chiếu của AC lên mặt phẳng $(SBC) \Rightarrow \widehat{(AC,(SBC))} = \widehat{(AC,HC)} = \widehat{ACH}$.

Tam giác SAB vuông $\Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{a\sqrt{6}.a}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

Vì ΔAHC vuông tại $H \Rightarrow \sin\widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

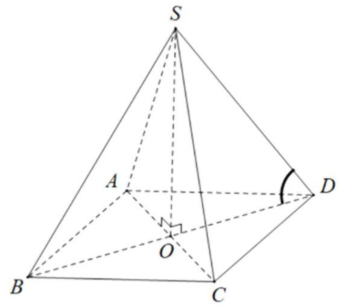
Câu 17.14: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đá $a\sqrt{2}$, cạnh bên $2a$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng:



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc giữa SD và $(ABCD)$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow OD$ là hình chiếu của SD trên $(ABCD)$.

Do đó: $\widehat{(SD,(ABCD))} = \widehat{(SD,OD)} = \widehat{SDO}$.

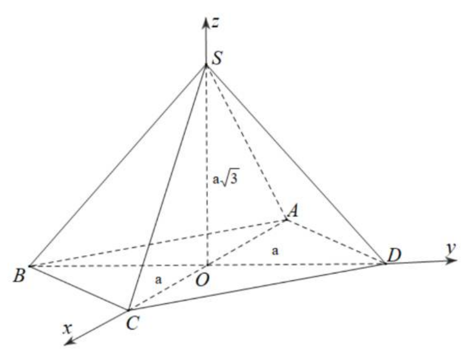
Xét hình vuông $ABCD$ ta có: $OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = a$.

Xét ΔSOD vuông tại O, ta có: $\cos\widehat{SDO} = \dfrac{OD}{SD} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SDO} = 60^o$.

Cách khác: *Sử dụng phương pháp tọa độ*

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $AC = BD = AB\sqrt{2} = 2a$ và $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.



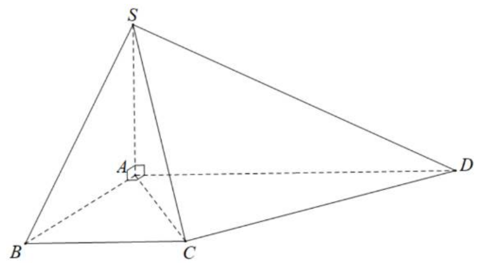
Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ với $O(0;0;0), C(a;0;0), D(0;a;0)$ và $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Ta có: $(ABCD): z = 0 \Rightarrow (ABCD)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

$\overrightarrow{SD} = \left(0;a;-a\sqrt{3}\right) \Rightarrow SD$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left(0;1;-\sqrt{3}\right)$.

Suy ra: $\sin\widehat{(SD,(ABCD))} = \dfrac{\left|\vec{k}.\vec{u}\right|}{\left|\vec{k}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{(SD,(ABCD))} = 60^o$.

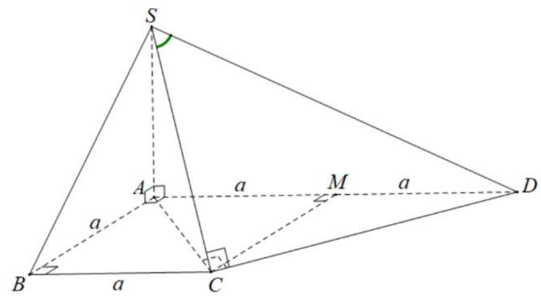
Câu 17.15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AD = 2AB = 2BC = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng:



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AD. Ta có: ΔACM và ΔDCM vuông cân tại M.

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ACM} + \widehat{DCM} = 45^o + 45^o = 90^o \Rightarrow CD \perp AC$ mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAC)$.

$\Rightarrow SC$ là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAC).

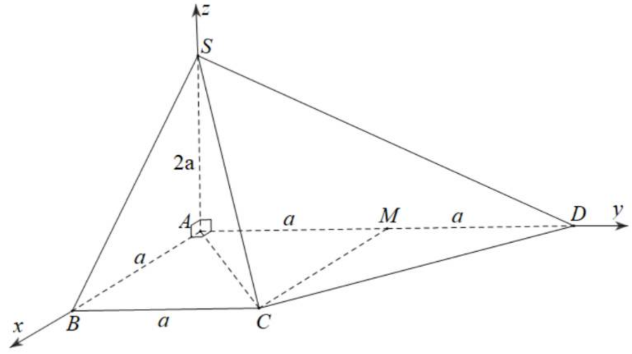
Do đó: $\widehat{(SD,(SAC))} = \widehat{(SD,SC)} = \widehat{CSD}$.

Xét ΔACD vuông cân tại C, ta có: $AC = CD = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}$.

Xét ΔSCD vuông tại C, ta có: $\tan \widehat{CSD} = \dfrac{CD}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSD} = 30^o$

Cách khác: *Sử dụng phương pháp tọa độ*



Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ với $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;2a;0)$ và $S(0;0;2a)$.

Ta có: $\overrightarrow{SD}=(0;2a;-2a)\Rightarrow SD$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;1;-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AS}=(0;0;2a)\\ \overrightarrow{AC}=(a;a;0)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=(-2a^2;2a^2;0)$$

$\Rightarrow(SAC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;1;0)$.

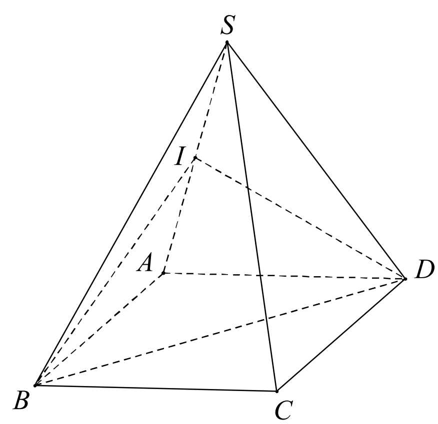
Suy ra: $\sin\left(\widehat{SD,(SAC)}\right)=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{SD,(SAC)}\right)=30^o$.

Câu 17.16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a và $SA=SB=SC=SD=a$. Khi đó, cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm SA.

Do tam giác SAD và SAB đều nên $\begin{cases}BI\perp SA\\ DI\perp SA\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=\left(\widehat{BI,DI}\right)$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác BID ta có:

$$\cos\widehat{BID}=\frac{IB^2+ID^2-BD^2}{2IB.ID}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}a}=-\frac{1}{3}.$$

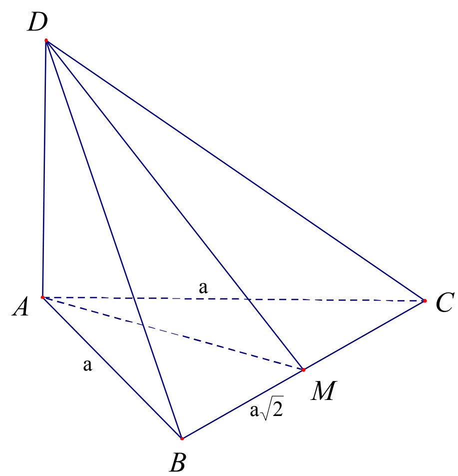
Vậy $\cos\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=\dfrac{1}{3}$.

Câu 17.17: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=a$, trên đường thẳng d vuông góc với (ABC) tại điểm A ta lấy một điểm D sao cho ΔDBC đều. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) nằm trong khoảng nào?

A. $\left(40^{\circ};50^{\circ}\right)$. **B.** $\left(50^{\circ};60^{\circ}\right)$. **C.** $\left(60^{\circ};70^{\circ}\right)$. **D.** $\left(70^{\circ};80^{\circ}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp DM \\ BC \perp DA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (DMA)$

Mặt khác: $\begin{cases} (ABD) \cap (DBC) = BC \\ (DMA) \perp BC \\ (DMA) \cap (ABC) = AM \\ (DMA) \cap (DBC) = DM \end{cases} \Rightarrow \widehat{((ABC),(DBC))} = \widehat{(AM,DM)} = \widehat{DMA}$

Ta có: $AM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $DM = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét ΔADM vuông tại A, ta có: $\cos\widehat{AMD} = \dfrac{AM}{DM} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{AMD} = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^{\circ}$.

Cách khác:

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

Theo công thức diện tích hình chiếu của đa giác.

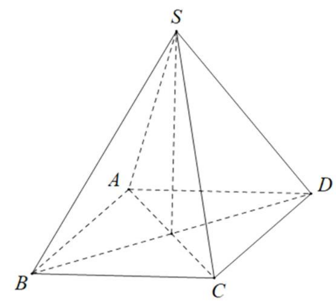
Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}.\cos\varphi$

Mà: $S_{\Delta DBC} = \dfrac{1}{2}DB.DC.\sin 60^{0} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^{2}\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}a^{2}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DBC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^{\circ}$.

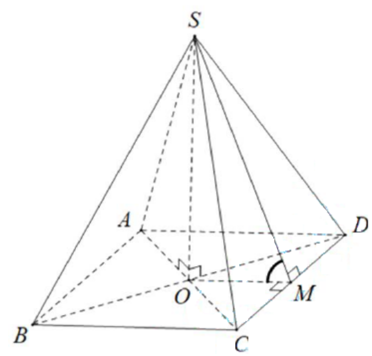
Câu 17.18: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $2a$, cạnh bên $a\sqrt{3}$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng:



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc giữa (SCD) và $(ABCD)$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm CD. Ta có: $\begin{cases} CD \perp SM \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM)$.

Do đó: $\begin{cases} CD \perp (SOM) \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SOM) \cap (SCD) = SM \\ (SOM) \cap (ABCD) = OM \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{(SM, OM)} = \widehat{SMO}$.

Xét hình vuông $ABCD$ ta có: $OM = a$ và $OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

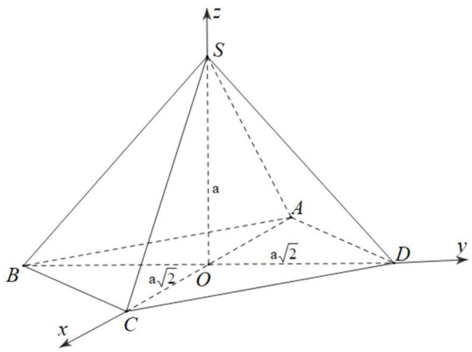
Xét ΔSOD vuông tại O, ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a$.

Xét ΔSOM vuông tại O, ta có: $\tan \widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMO} = 45^o$.

Cách khác: *Sử dụng phương pháp tọa độ*

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $AC = BD = AB\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$ và $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ với $O(0;0;0), C\left(a\sqrt{2};0;0\right), D\left(0;a\sqrt{2};0\right)$ và $S(0;0;a)$.

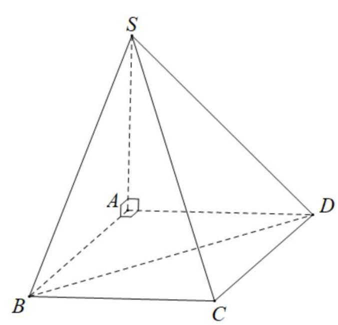
Ta có: $(ABCD): z=0 \Rightarrow (ABCD)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

$(SCD): \dfrac{x}{a\sqrt{2}}+\dfrac{y}{a\sqrt{2}}+\dfrac{z}{a}=1 \Leftrightarrow x+y+\sqrt{2}z-a\sqrt{2}=0$

$\Rightarrow (SCD)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(1;1;\sqrt{2}\right)$.

Suy ra: $\cos\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\dfrac{\left|\vec{k}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{k}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=45^o$.

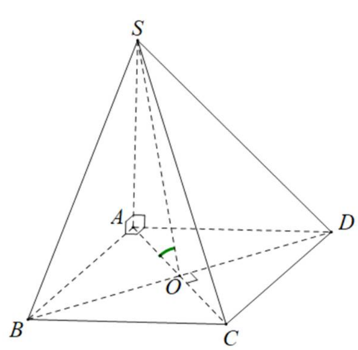
Câu 17.19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a\sqrt{3}$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng:



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



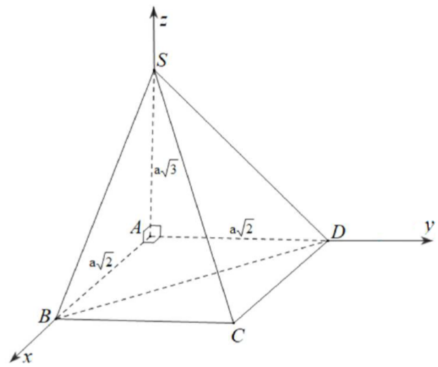
Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có: $\begin{cases} BD\perp SA \\ BD\perp AC \end{cases} \Rightarrow BD\perp (SAC)$.

Do đó: $\begin{cases} BD\perp(SAC) \\ (SBD)\cap(ABCD)=BD \\ (SAC)\cap(SBD)=SO \\ (SAC)\cap(ABCD)=AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBD),(ABCD))}=\widehat{(SO,AC)}=\widehat{SOA}.$

Xét hình vuông $ABCD$ ta có: $OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}=a.$

Xét ΔSAO vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SOA}=\dfrac{SA}{OA}=\dfrac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SOA}=60^o.$

Cách khác: *Sử dụng phương pháp tọa độ*



Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ với $A(0;0;0), B\left(a\sqrt{2};0;0\right), D\left(0;a\sqrt{2};0\right)$ và $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

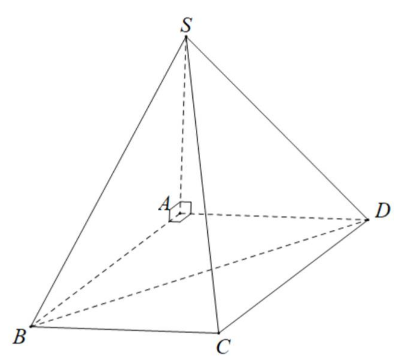
Ta có: $(ABCD): z=0\Rightarrow(ABCD)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

$(SBD):\dfrac{x}{a\sqrt{2}}+\dfrac{y}{a\sqrt{2}}+\dfrac{z}{a\sqrt{3}}=1\Leftrightarrow\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+\sqrt{2}z-a\sqrt{6}=0$

$\Rightarrow(SBD)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$.

Suy ra: $\cos\widehat{((SBD),(ABCD))}=\dfrac{\left|\vec{k}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{k}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{((SBD),(ABCD))}=60^o.$

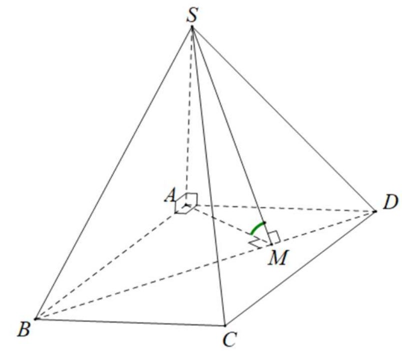
Câu 17.20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=2a, AD=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$ (minh họa như hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng:



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B



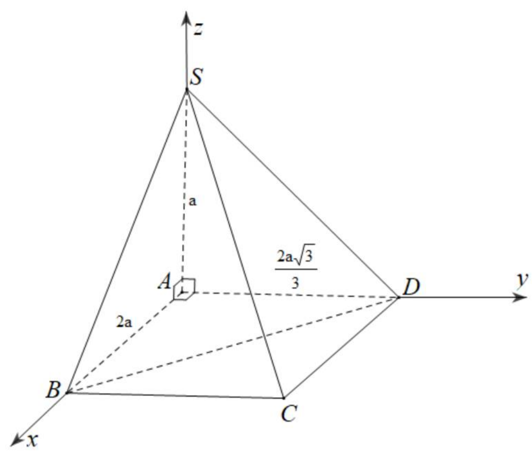
Vẽ $AM \perp BD$ tại M. Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AM \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAM)$.

Do đó: $\begin{cases} BD \perp (SAM) \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ (SAM) \cap (SBD) = SM \\ (SAM) \cap (ABCD) = AM \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBD),(ABCD))} = (SM, AM) = \widehat{SMA}.$

Xét ΔABD vuông tại A, ta có: $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{3}{4a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AM = a.$

Xét ΔSAM vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^o.$

Cách khác: *Sử dụng phương pháp tọa độ*



Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ với $A(0;0;0), B(2a;0;0), D\left(0;\dfrac{2a\sqrt{3}}{3};0\right)$ và $S(0;0;a)$.

Ta có: $(ABCD): z = 0 \Rightarrow (ABCD)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

$(SBD): \dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}} + \dfrac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + 2z - 2a = 0$

$\Rightarrow (SBD)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(1;\sqrt{3};2\right)$.

Suy ra: $\cos\widehat{\left(\left(SBD\right),\left(ABCD\right)\right)}=\dfrac{\left|\vec{k}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{k}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\widehat{\left(\left(SBD\right),\left(ABCD\right)\right)}=45^o.$