BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH**	**KỲ THI TUYỂN SINH** **VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN** **NĂM HỌC 2025 - 2026**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC *(Đề thi gồm có 01 trang)*	**Môn thi: TOÁN (Vòng 2)** ***Dành cho các thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin*** Thời gian: **150 phút** (*không kể thời gian phát đề*)

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + xy + y = 14 \\ x^3 + 3x^2 + 3x - y = 1. \end{cases}$

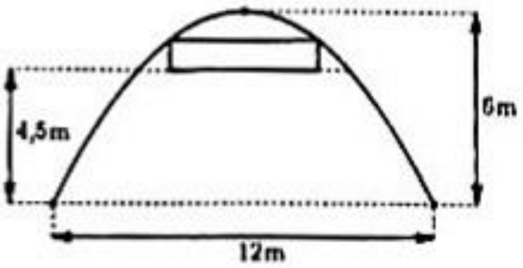
b) Giải phương trình $3\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-4}\right) + 8 = \sqrt{x+2} + 5x.$

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Có bao nhiêu số nguyên dương n bé hơn 2026 sao cho $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5?

b) Giả sử x, y là các số tự nhiên thỏa mãn $2x^2 + x = 3y^2 + y$. Chứng minh rằng $2x + 2y + 1$ là số chính phương.

Câu 3 (1,5 điểm). Cổng một ngôi trường có dạng hình parabol cao 6 m, khoảng cách giữa hai chân cổng là 12 m. Nhà trường đang thiết kế để treo một màn hình led hình chữ nhật có 2 đỉnh nằm trên đường parabol ở độ cao bằng nhau, mép dưới màn hình led cách mặt đất 4,5 m. Hỏi diện tích của màn hình led lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Câu 4 (1,5 điểm). Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $0 \le x \le y \le z \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{yz+1} + \dfrac{y}{zx+1} + \dfrac{z}{xy+1}.$

Câu 5 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H (E thuộc AC, F thuộc AB). Đường thẳng AH cắt (O) tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh rằng BC là đường trung trực của đoạn thẳng HK.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK cắt AC tại điểm thứ hai là I, đường tròn ngoại tiếp tam giác BHK cắt AB tại điểm thứ hai là J. Chứng minh rằng $IJ // EF$.

c) Gọi M là trung điểm AI. Chứng minh rằng các điểm C, M, F, K cùng thuộc một đường tròn.

Câu 6 (2,0 điểm). Chọn tùy ý m số trong các số nguyên lẻ từ 1 đến 1001. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để đảm bảo rằng có ít nhất một cặp số trong m số được chọn mà một trong hai số đó chia hết cho số còn lại.

------------ **HẾT** ------------

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN
ĐẠI HỌC VINH 2025

Câu 1.

a. Ta có: $\begin{cases} 2x+xy+y=14 & (1) \\ x^3+3x^2+3x-y=1 & (2) \end{cases}$.

Từ (2) thì $y=x^3+3x^2+3x-1$. Thay vào (1) ta có:

$$\begin{aligned} &14=2x+y(x+1)=2x+(x^3+3x^2+3x-1)(x+1)=2x+\left((x+1)^3-2\right)(x+1) \\ &\Leftrightarrow (x+1)^4=16 \Leftrightarrow (x+1-2)(x+1+2)\left((x+1)^2+4\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+3)\left((x+1)^2+4\right)=0. \end{aligned}$$

Ta thấy $(x+1)^2+4>0$. Với $x = 1$ thì $y = 6$ và với $x = -3$ thì $y = -10$.

Vậy hệ phương trình các nghiệm (x, y) là $(1,6),(-3,-10)$.

b. Điều kiện xác định: $x \ge 2$. Đặt $t=3\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}$. Ta có:

$$t^2=9(x-2)+x+2-6\sqrt{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{t^2}{2}=5x-8-3\sqrt{x^2-4}.$$

Khi đó phương trình ban đầu trở thành: $3\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=5x-8-3\sqrt{x^2-4} \Leftrightarrow t=\frac{t^2}{2}$.

Trường hợp 1: $t=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}$. (*)

Ta bình phương hai vế của phương trình (*) có: $9(x-2)=x+2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Thử lại $x=\frac{5}{2}$, ta thấy thoả mãn phương trình ban đầu.

Trường hợp 2: $t=2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+2$. (**)

Ta bình phương hai vế của phương trình (**) có:

$$9(x-2)=x+6+4\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 8x-24=4\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 2x-6=\sqrt{x+2}. \ (***)$$

Với $x \ge 3$. Ta tiếp tục bình phương hai vế của phương trình (***) có:

$$4x^2-24x+36=x+2 \Leftrightarrow 4x^2-25x+34=0 \Leftrightarrow (2x-17)(x-2)=0.$$

Đối chiếu điều kiện thử lại, ta thấy $x=\frac{17}{2}$ thoả mãn phương trình ban đầu.

Vậy tập nghiệm của phương trình ban đầu là $\left\{\frac{17}{2};\frac{5}{2}\right\}$.

Câu 2.

a. Ta thấy với *n* nguyên dương lẻ thì

$$1^n+4^n=(1+4)(4^{n-1}-4^{n-2}+...-4+1)=5(4^{n-1}-4^{n-2}+...-4+1)\vdots 5.$$

$$2^n+3^n=(2+3)(2^{n-1}-2^{n-2}.3+...-2.3^{n-2}+3^{n-1})=5(2^{n-1}-2^{n-2}.3+...-2.3^{n-2}+3^{n-1})\vdots 5.$$

Như vậy với *n* lẻ thì $1^n+2^n+3^n+4^n$ chia hết cho 5.

- Ta xét *n* chia cho 4 dư 2, đặt $n=4k+2,(k\geq 0).$ Ta có:

$$1^n+2^n=1^{2k+1}+4^{2k+1}=(1+4)(4^{2k}-4^{2k-1}+...-4+1)=5(4^{2k}-4^{2k-1}+...-4+1)\vdots 5.$$

$$\text{và } 3^n+4^n=9^{2k+1}+16^{2k+1}=25.(9^{2k}-9^{2k-1}.16+...-9.16^{2k-1}+16^{2k})\vdots 5.$$

Như vậy với *n* chia cho 4 dư 2 thì $1^n+2^n+3^n+4^n$ chia hết cho 5.

- Ta xét *n* chia hết cho 4, đặt $n=4k,(k\geq 0).$ Ta có: $1^4\equiv 2^4\equiv 3^4\equiv 4^4\equiv 1(\text{mod } 5).$

Suy ra $1^{4k}\equiv 2^{4k}\equiv 3^{4k}\equiv 4^{4k}\equiv 1(\text{mod } 5)\Leftrightarrow 1^n\equiv 2^n\equiv 3^n\equiv 4^n\equiv 1(\text{mod } 5).$

Khi đó $1^n+2^n+3^n+4^n$ chia cho 5 dư 4. Hay $1^n+2^n+3^n+4^n$ không chia hết cho 5.

Do đó với *n* lẻ hoặc *n* chia cho 4 dư 2 thì $1^n+2^n+3^n+4^n$ chia hết cho 5.

Từ 1 đến 2025 có 1013 số lẻ và 506 số chia cho 4 dư 2.

Vậy có tất cả 1519 số nguyên dương *n* từ 1 đến 2025 sao cho $1^n+2^n+3^n+4^n$ chia hết cho 5.

b. Với $x=y=0$ thì $2x+2y+1$ là số chính phương. Xét *x, y* không đồng thời bằng 0.

Ta có: $2x^2+x=3y^2+y\Leftrightarrow 2(x^2-y^2)+(x-y)=y^2\Leftrightarrow (x-y)(2x+2y+1)=y^2.$

Đặt $d=(x-y,2x+2y+1).$

Giả sử $d>1$ và gọi *p* là một ước nguyên tố bất kì của *d*.

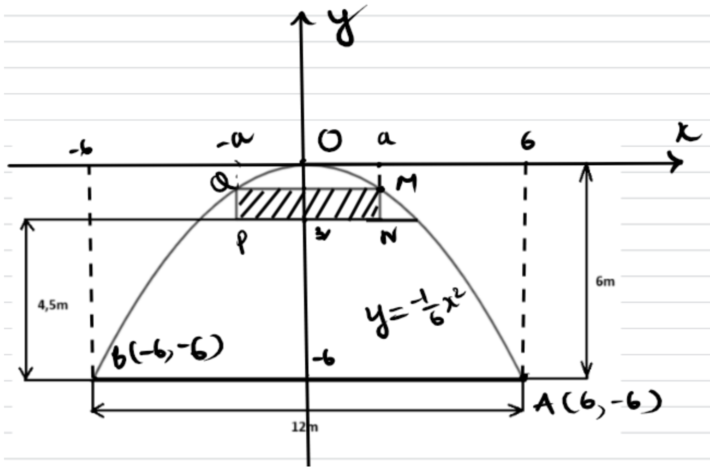
Khi đó: $\begin{cases} p \mid x-y, p \mid y^2 \\ p \mid 2x+2y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \mid x-y, p \mid y \\ p \mid 2x+2y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \mid x, p \mid y \\ p \mid 2x+2y+1 \end{cases} \Rightarrow p \mid 1$. Dẫn đến vô lý.

Như vậy $d = 1$. Hay $x-y, 2x+2y+1$ nguyên tố cùng nhau.

Do đó $x-y, 2x+2y+1$ đều là các số chính phương.

Vậy $2x+2y+1$ là số chính phương.

Câu 3.



Xem 1m tương ứng với 1 đơn vị độ dài.

Ta gán góc toạ độ *O* tại đỉnh của cổng Parabol, và hai trục toạ độ *Ox, Oy* như hình vẽ.

Vì ta gán hai điểm *A* và *B* tại hai chân cổng như hình vẽ và có toạ độ là *A*(6,-6), *B*(-6,-6).

Giả sử Parabol có công thức hàm số là (*P*): $y = ax^2$.

Do đồ thị (*P*) đi qua điểm *A* thì $-6 = a.6^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$. Như vậy $(P): y = -\frac{1}{6}x^2$.

Xét các điểm *M, N, P, Q* và *M, Q* nằm trên (*P*) tạo thành hình chữ nhật như hình.

Do mép dưới của màn hình cách mặt đất 4,5 m nên đỉnh của cổng Pababol cách *NP* 1,5m

Giả sử *M, Q* có hoành độ lần lượt là *a, - a,*trong đó *a* > 0. Khi đó:

$$M\left(a, -\frac{a^2}{6}\right), P\left(-a, -\frac{a^2}{6}\right), N\left(a, -\frac{3}{2}\right), Q\left(-a, -\frac{3}{2}\right).$$

Ta có: $MQ = 2a, NP = \frac{3}{2} - \frac{a^2}{6}$. Ta thấy $y_M > y_N \Leftrightarrow -\frac{a^2}{6} > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 < a < 3$.

Khi đó diện tích hình chữ nhật *MNPQ* là

$$S=2a\left(\frac{3}{2}-\frac{a^2}{6}\right)=3a-\frac{a^3}{3}.$$

Ta chứng minh $S\le 2\sqrt{3}$. Thật vậy $3a-\frac{a^3}{3}\le 2\sqrt{3}\Leftrightarrow (a-\sqrt{3})^2(a+2\sqrt{3})\ge 0.$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $(a-\sqrt{3})^2\ge 0, a+2\sqrt{3}>0$.

Vậy diện tích lớn nhất có thể của mạnh hình là $S=2\sqrt{3}(m^2)$.

Câu 4.

Vì $0\le x\le y\le z\le 1$ nên $xyz+1\le xy+1\le xz+1\le yz+1$.

Khi đó: $P\le \frac{x+y+z}{xyz+1}$.

Ta có: $(y-1)(z-1)\ge 0\Leftrightarrow yz\ge y+z-1$. Và từ

$$(x-1)(yz-1)\ge 0\Leftrightarrow xyz\ge yz+x-1\ge x+y+z-2.$$

Suy ra $2xyz+2\ge x+y+z$. Như vậy $P\le \frac{x+y+z}{xyz+1}\le \frac{2xyz+2}{xyz+1}=2$.

Vậy $\max P=2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 1 số bằng 0 và 2 số còn lại bằng 1.

Câu 5.

Lưu ý: *Các kiến thức về sử dụng góc nội tiếp để chứng minh tứ giác nội tiếp, yêu cầu học sinh tự chứng minh, xem như bài tập.*

a. Ta kẻ đường cao *AD* của tam giác *ABC,* và có *H* là trực tâm của tam giác *ABC.*

Kẻ đường kính *AA'* của đường tròn (O). Ta có: $\angle AKA'=90^\circ=\angle ADC$.

Suy ra *BC* song song với *A'K*. Gọi *N* là trung điểm của *HA'*.

Ta chứng minh được tứ giác *BHCA'* là hình bình hành.

Khi đó *BC* đi qua trung điểm *N* của *HA'* suy ra *BC* đi qua *D* là trung điểm của *HK.*

Như vậy *BC* là đường trung trực của *HK.*

b. Ta có tứ giác $ABKC$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\angle ABK + \angle ACK = 180^\circ$.

Mặt khác tứ giác $BKHJ$ và tứ giác $CKHI$ nội tiếp, khi đó: $\begin{cases} \angle ABK + \angle KHJ = 180^\circ \\ \angle ACK + \angle KHI = 180^\circ \end{cases}$.

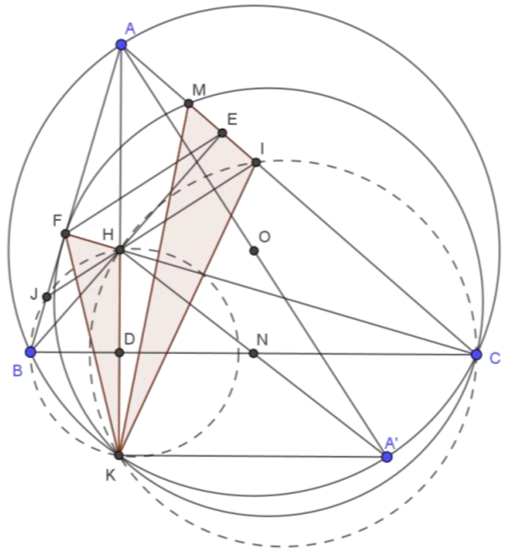
Từ đó suy ra $\angle KHJ + \angle KHI = 180^\circ - \angle ABK + 180^\circ - \angle ACK = 180^\circ$.

Như vậy I, H, J thẳng hàng.

Ta chứng minh được $\Delta AEF \sim \Delta ABC(c.g.c) \Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$.

Ta có biến đổi góc sau: $\angle AIJ = 180^\circ - \angle CIJ = \angle AKC = \dfrac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC = \angle AEF$.

Như vậy IJ song song với EF.



c. Theo câu a ta có D là trung điểm của HK. Ta có: $\angle AFH = \angle HDC = 90^\circ$.

Suy ra tứ giác $AFDC$ nội tiếp.

Khi đó $\angle DFH = \angle HAC$ và $\angle FDH = \angle HCA = \angle AKI$, (do tứ giác $HICK$ nội tiếp).

Như vậy $\Delta DFH \sim \Delta KAI(g.g) \Rightarrow \dfrac{FH}{AI} = \dfrac{DH}{KI} \Leftrightarrow \dfrac{FH}{2MI} = \dfrac{HK}{2KI} \Leftrightarrow \dfrac{FH}{HK} = \dfrac{MI}{KI}$.

Kết hợp $\Delta DFH \sim \Delta KAI(g.g) \Rightarrow \angle FHK = \angle AIK$.

Do đó $\Delta KFH \sim \Delta KMI(c.g.c)$ dẫn tới $\angle KFC = \angle KMC$.

Như vậy tứ giác $FMCK$ nội tiếp. Vậy 4 điểm F, K, C, M thuộc một đường tròn.

Câu 6.

Ta giả sử tập gồm các số nguyên dương lẻ từ 1 đến 1001 là $X = \{1;3;5;...;1001\}$.

Tập X có 501 số lẻ, trong đó số các số chia hết cho 3 là: $\frac{999-3}{6}+1=167$.

Viết các số đã cho dưới dạng $3^s.t$ trong đó t lẻ và t không chia hết cho 3.

Vậy số các giá trị khác nhau có thể của t là $501 - 167 = 334$.

Ta xét tập $A = \{335;336;...;1001\}$ có 334 phần tử, và ta thấy với $a < b$ bất kì thuộc A thì $3a \geq 3.335 > 1001 \geq b$. Suy ra $3a > b > a$, tức là b không thể là bội của a.

Do đó các phần tử trong A đôi một không chia hết cho nhau.

Như vậy $m \geq 335$. Ta chứng minh $m = 335$ thoả mãn.

Thật vậy, nếu lấy 335 số thì theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại 2 số *x, y* sao cho biểu diễn dưới dạng $3^s.t$ thì hai số cùng nhận cùng giá trị *t,* tức là $x = 3^{s_1}t, y = 3^{s_2}t, (s_1 > s_2)$.

Hai số này thỏa mãn đề bài.

Vậy m nhỏ nhất là 335.