UBND TỈNH HÀ GIANG **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** **ĐỀ CHÍNH THỨC**	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN** **NĂM HỌC 2025-2026** **Môn: TOÁN (Đề chuyên tin)** *Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề*

Câu I. ***(1,5 điểm)*** Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{x-7\sqrt{x}-8}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+10\sqrt{x}+12}{x-\sqrt{x}-6}$ với $x\ge 0, x\ne 9.$

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\dfrac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Câu II. ***(1,0 điểm)*** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=ax^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=bx-1$ (với a,b là các tham số). Tìm các số hữu tỉ a,b để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt sao cho hoành độ một điểm là $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Câu III. ***(1,5 điểm)***

1. Giải phương trình $\sqrt{x^3+1}+x^2-3x-1=0.$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{y}=4\\ 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8\end{cases}$.

Câu IV. ***(1,0 điểm)*** Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.

Câu V. ***(4,0 điểm)*** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1. Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF.

2. Chứng minh $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}=1.$

3. Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O). Gọi P,Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME. Chứng minh $AM\perp PQ.$

4. Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\dfrac{(AB+BC+CA)^2}{AD^2+BE^2+CF^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu VI. ***(1,0 điểm)*** Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2+1+bc}+\dfrac{1}{b^2+1+ac}+\dfrac{1}{ab(c^3+1)+1}$.

--- HẾT---

Thí sinh được sử dụng máy tính bỏ túi không có chức năng soạn thảo văn bản và không có thẻ nhớ.

Họ và tên thí sinh:..Số báo danh:..

Cán bộ coi thi số 1...Cán bộ coi thi số 2..

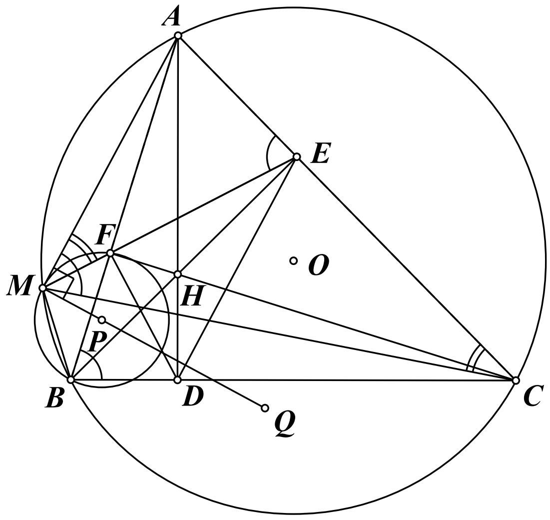
UBND TỈNH HÀ GIANG **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN** **NĂM HỌC 2025-2026**

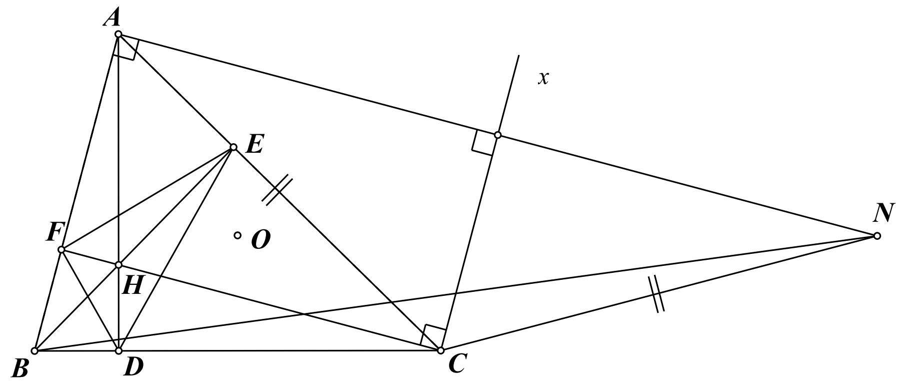
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (ĐỀ CHUYÊN TIN)
(Hướng dẫn chấm gồm có 04 trang)

Lưu ý:
- Thí sinh có thể làm bài theo cách khác so với đáp án nhưng đảm bảo đúng kiến thức, vẫn cho điểm tối đa.
- Không làm tròn điểm.

Nội dung	Điểm
Câu I ***(1,5 điểm)***	
Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{x-7\sqrt{x}-8}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+10\sqrt{x}+12}{x-\sqrt{x}-6}$ với $x\ge 0, x\ne 9$. **1.*(1,0 điểm)*** Rút gọn biểu thức A.	
$A=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+6)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-8\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$	**0,25**
$=\dfrac{x-\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}-3}$	**0,25**
$=\dfrac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1}$	**0,25**
$=\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{x+8}{\sqrt{x}+1}$.	**0,25**
2.*(0,5 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.	
Theo BĐT Côsi, ta có $A=\sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}-2\ge 2\sqrt{9}-2=4$	**0,25**
Để $\dfrac{4}{A}\in\mathbb{Z}$ thì $A=4\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn). Vậy $x=4$.	**0,25**
Câu II ***(1,0 điểm)***	
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=ax^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=bx-1$ (với a,b là các tham số). Tìm các số hữu tỉ a,b để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt sao cho hoành độ một điểm là $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.	
$x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=4-\sqrt{15}$	**0,25**
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2-bx+1=0$ (*) Điều kiện để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt: $\begin{cases}a\ne 0\\ b^2-4a>0\end{cases}$	**0,25**
(*) có nghiệm $x=4-\sqrt{15}$ nên $a\left(4-\sqrt{15}\right)^2-b\left(4-\sqrt{15}\right)+1=0\Leftrightarrow\sqrt{15}(-8a+b)+31a-4b+1=0$ Vì $a,b\in Q$ nên $(-8a+b), (31a-4b+1)\in Q$	**0,25**

Nếu $8a-b\neq 0$ thì $\sqrt{15}=\dfrac{31a-4b+1}{8a-b}\in Q$ (vô lí)	
Suy ra $\begin{cases}8a-b=0\\31a-4b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=8\end{cases}$ (thỏa mãn)	**0,25**
Câu III ***(1,5 điểm)***	
1. ***(0,75 điểm)*** Giải phương trình $\sqrt{x^3+1}+x^2-3x-1=0$	
Điều kiện: $x^3+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$. $\sqrt{x^3+1}+x^2-3x-1=0\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}+\left(x^2-x+1\right)-2(x+1)=0$ Đặt $u=\sqrt{x+1};\ v=\sqrt{x^2-x+1};\ u\geq 0,\ v>0$	**0,25**
Phương trình đã cho trở thành: $uv+v^2-2u^2=0\Leftrightarrow(u-v)(2u+v)=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u-v=0\\2u+v=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\2u=-v\end{array}\right.$	**0,25**
Với $u=v$ ta được $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$(thỏa mãn phương trình) Với $2u=-v$ ta được $2\sqrt{x+1}=-\sqrt{x^2-x+1}$ (vô nghiệm). Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0$ và $x=2$.	**0,25**
2. ***(0,75 điểm)*** Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{y}=4 & (1)\\2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8 & (2)\end{cases}$	
Điều kiện: $\begin{cases}x\geq -1\\y\geq 0\end{cases}$ Từ (1): $\sqrt{y}-2=2-\sqrt{x+1}-\sqrt{y^2+4}$ Từ (2): $2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8\Leftrightarrow 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-\left(\sqrt{y}-2\right)^2=4$	**0,25**
Thế (1) vào (2) ta được: $\Leftrightarrow 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-\left(2-\sqrt{x+1}-\sqrt{y^2+4}\right)^2=4$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)\left(y^2+4\right)}-\left(4-4\sqrt{x+1}-4\sqrt{y^2+4}+2\sqrt{(x+1)\left(y^2+4\right)}+(x+1)+(y^2+4)\right)=4$ $\Leftrightarrow(x+1)-4\sqrt{x+1}+4+(y^2+4)-4\sqrt{y^2+4}+4=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2+\left(\sqrt{y^2+4}-2\right)^2=0$	**0,25**
$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}-2=0\\\sqrt{y^2+4}-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;0)$.	**0,25**
Câu III. ***(1,0 điểm)*** Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.	
Vì $6n-13$ là số nguyên tố và $n\in\mathbb{N}$ nên $n\geq 3$. Ta có $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương nên $2n-1=a^2$; $3n+1=b^2$ với $a;b\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow 2b^2-3a^2=5$ (3)	**0,25**
Ta có $6n-13=3(2n-1)-10=3a^2-2(2b^2-3a^2)=9a^2-4b^2=(3a-2b)(3a+2b)$ (4)	**0,25**
Vì $6n-13$ là số nguyên tố, mà $3a-2b\leq 3a+2b$ nên từ (4) ta có $3a-2b=1\Leftrightarrow b=\dfrac{3a-1}{2}$ Thay $b=\dfrac{3a-1}{2}$ vào (3) ta được $2\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)^2-3a^2=5\Leftrightarrow 3a^2-6a-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=3\end{array}\right.$	**0,25**
$a=-1$ (loại)	**0,25**

$a=3$ thì $b=4, n=5$ và $6n-13 = 17$ (thỏa mãn). Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.	
Câu IV. ***(4 điểm)*** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.	
	
1. ***(1,0 điểm)*** Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF.	
$\widehat{BFH}=\widehat{BDH}=90^0 \Rightarrow \widehat{BFH}+\widehat{BDH}=180^0$ nên $BFHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDF}=\widehat{HBF}$	**0,25**
Tương tự, $CEHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDE}=\widehat{HCE}$	**0,25**
$BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HBF}=\widehat{HCE}$	**0,25**
Suy ra $\widehat{HDE}=\widehat{HDF}$ nên DA là tia phân giác của góc EDF..	**0,25**
2. ***(1,0 điểm)*** Chứng minh $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}=1$.	
Ta có: $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}=\dfrac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC}+\dfrac{\frac{1}{2}HE.AC}{\frac{1}{2}BE.AC}+\dfrac{\frac{1}{2}HF.AB}{\frac{1}{2}CF.AB}$	**0,25**
$=\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$	**0,25**
$=\dfrac{S_{HBC}+S_{HAC}+S_{HAB}}{S_{ABC}}$	**0,25**
$=\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$	**0,25**
3. ***(1,0 điểm)*** Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn $\left(O\right)$. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME. Chứng minh $AM \perp PQ$.	
Ta có : $\widehat{AEM}=\widehat{ABC}$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp) $\widehat{ABC}=\widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$ của đường tròn $\left(O\right)$) $\Rightarrow \widehat{AEM}=\widehat{AMC}$	**0,25**
$\Rightarrow \Delta AEM \backsim \Delta AMC\left(g.g\right) \Rightarrow \widehat{AME}=\widehat{ECM}=\dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{ME}$ của đường tròn $\left(Q\right)$ nên AM là tiếp tuyến của $\left(Q\right) \Rightarrow AM \perp QM$	**0,25**
Theo trên $\widehat{AMF}=\widehat{ACM}$, mà $\widehat{ABM}=\widehat{ACM}=\dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{MA}$ của đường tròn $\left(O\right)$ $\Rightarrow \widehat{AMF}=\widehat{FBM}=\dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{MF}$ của đường tròn $\left(P\right)$ nên AM là tiếp tuyến của $\left(P\right)$	**0,25**

Vì $AM \perp PM$ và $AM \perp QM$ nên ba điểm P,Q,M thẳng hàng. Suy ra $AM \perp PQ$.	**0,25**
4.*(1,0 điểm)* Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\dfrac{\left(AB+BC+CA\right)^2}{AD^2+BE^2+CF^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.	
 	
Vẽ $Cx \perp CF$. Gọi N là điểm đối xứng của A qua Cx Vì $AN // CF \Rightarrow \widehat{BAN} = 90°, CN = AC, AN = 2CF$. Ta luôn có $BN \leq BC + CN$	**0,25**
ΔABN vuông tại A nên: $AB^2 + AN^2 = BN^2 \Rightarrow AB^2 + 4CF^2 \leq (BC+CN)^2$ $\Rightarrow 4CF^2 \leq (BC+AC)^2 - AB^2$ (5)	**0,25**
Tương tự: $4AD^2 \leq (AB+AC)^2 - BC^2$ và $4BE^2 \leq (AB+BC)^2 - AC^2$ Suy ra $4\left(AD^2+BE^2+CF^2\right) \leq (AB+BC+AC)^2$ hay $\dfrac{(AB+BC+CA)^2}{AD^2+BE^2+CF^2} \geq 4$	**0,25**
Đẳng thức (5) xảy ra khi B,C,N thẳng hàng $AC = \dfrac{1}{2}BN \Rightarrow BC = AC$. Vì vậy biểu thức đã cho đạt giá trị nhỏ nhất khi $AB = AC = BC$ hay ABC là tam giác đều.	**0,25**
Câu V. *(1,0 điểm)* Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a^2+1+bc} + \dfrac{1}{b^2+1+ac} + \dfrac{1}{ab(c^3+1)+1}$.	
$P = \dfrac{a}{a^3+a+abc} + \dfrac{b}{b^3+b+abc} + \dfrac{c}{abc(c^3+1)+c} \leq \dfrac{a}{a^3+a+1} + \dfrac{b}{b^3+b+1} + \dfrac{c}{c^3+c+1}$	**0,25**
$\forall x > 0$, ta luôn có $(x-1)^2(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow x^3 + x + 1 \geq x^2 + 2x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^3+x+1} \leq \dfrac{1}{x+2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Suy ra $\dfrac{a}{a^3+a+1} + \dfrac{b}{b^3+b+1} + \dfrac{c}{c^3+c+1} \leq \dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2} + \dfrac{1}{c+2}$	**0,25**
Ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2} + \dfrac{1}{c+2} \leq 1$ (6) Thật vậy, (6) $\Leftrightarrow (a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (a+2)(c+2) \leq (a+2)(b+2)(c+2)$ $\Leftrightarrow ab + bc + ca + abc \geq 4$	**0,25**
Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{ab.bc.ca} = 3$ Mặt khác $abc \geq 1 \Rightarrow ab + bc + ca + abc \geq 4$ nên (6) đúng, suy ra $P \leq 1$. Vậy $\max P = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a = b = c = 1$.	**0,25**

---HẾT---