# BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT CHỨA THAM SỐ

**Bài toán. Tìm $m$ để bất phương trình $f(x,m)\ge 0$ hoặc $f(x,m)\le 0$ có nghiệm trên $\mathscr{D}$ ?**

**PHƯƠNG PHÁP**

**Bước 1.** Tách tham số $m$ ra khỏi $x$ và đưa BPT về dạng $A(m)\le f(x)$ hoặc $A(m)\ge f(x)$.

**Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên và dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình có nghiệm.

**Lưu ý:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathscr{D}$.

Trong trường hợp tồn tại $\max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$ và $\min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$ thì ta có:

- Bất phương trình $A(m)\le f(x)$ có nghiệm trên $\mathscr{D} \Leftrightarrow A(m)\le \max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.
- Bất phương trình $A(m)\ge f(x)$ có nghiệm trên $\mathscr{D} \Leftrightarrow A(m)\ge \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.
- Bất phương trình $A(m)\le f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathscr{D} \Leftrightarrow A(m)\le \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.
- Bất phương trình $A(m)\ge f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathscr{D} \Leftrightarrow A(m)\ge \max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.

Nếu $f(x)=ax^2+bx+c\ \left(a\ne 0\right)$ thì

$$f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}.$$

$$f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}.$$

**Câu 1.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2(7x^2+7)\ge\log_2(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi giá trị thực của $x$?

**A.** $7$. **B.** $3$. **C.** Vô số. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn $\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ 7x^2+7\ge mx^2+4x+m,\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right)=mx^2+4x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R} & (*) \\ g\left(x\right)=\left(7-m\right)x^2-4x+7-m\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} & (**) \end{cases}.$$

Ta thấy $m=0$; $m=7$ không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Với $m\ne 0$ và $m\ne 7$. Khi đó ta có:

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta'=4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m>2.\ (1)$$

$$\left(**\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 7-m>0 \\ \Delta'=4-\left(7-m\right)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ -m^2+14m-45\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 5 \\ m\ge 9 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\le 5.\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2<m\le 5$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{3;4;5\right\}$.

**Câu 2.** Tìm $m$ để bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$ có nghiệm $x\in(\sqrt{2};+\infty)$.

**A.** $m\in(0;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **C.** $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0$. $(*)$

Đặt $t=\log_2 x$. Do $x\in(\sqrt{2};+\infty)\Rightarrow t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Khi đó $(*)$ trở thành $(1+t)^2-2(m+1)t-2<0$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+t)^2-2}{2t}-1<m \Leftrightarrow f(t)=\frac{t^2-1}{2t}<m \ (1).$$

Xét hàm $f(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}>0,\forall t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$.

Khi đó (1) đúng với mọi $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ khi $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)<m \Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

**Câu 3.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-100;100]$ của tham số $m$ để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m$ nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc khoảng $(-\infty;0)$?

**A.** 99. **B.** 98. **C.** 100. **D.** 101.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases}\log_2\left(3^x+1\right)>0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>0$.

Ta có $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2\left(3^x+1\right)<m$.

Xét hàm số $f(x)=\log_2\left(3^x+1\right)$. Ta có $f'(x)=\frac{3^x.\ln 3}{\left(3^x+1\right).\ln 2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc $(-\infty;0)$ khi $m\geq 1$.

Do $m$ nguyên và thuộc đoạn $[-100;100]$ nên $m\in\{1;2;3;4;.....;100\}$.

**Câu 4.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 2x-4}>m\left(\log_8 x^3-1\right)$ có nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc $\left(16;+\infty\right)$?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ \log_2^2 2x-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2^2 x+2\log_2 x-3\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x\ge 1 \\ \log_2 x\le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\le \dfrac{1}{8} \\ x\ge 2 \end{array}\right.$.

Ta có : $\sqrt{\log_2^2 2x-4}>m\left(\log_8 x^3-1\right) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x+2\log_2 x-3}>m\left(\log_2 x-1\right)$ $(*)$.

Do $x\in\left(16;+\infty\right)$ nên $\log_2 x>4 \Rightarrow \log_2 x-1>0$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x+2\log_2 x-3}}{\log_2 x-1}>m$.

Đặt $t=\log_2 x$. Do $x\in\left(16;+\infty\right)$ nên $t\in\left(4;+\infty\right)$.

Bất phương trình $(*)$ trở thành $\dfrac{\sqrt{t^2+2t-3}}{t-1}>m\ \forall t\in\left(4;+\infty\right)$.

Xét hàm $f\left(t\right)=\dfrac{\sqrt{t^2+2t-3}}{t-1}$ với $t\in\left(4;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{2-2t}{\sqrt{t^2+2t-3}.\left(t-1\right)^2}<0, \forall t\in\left(4;+\infty\right)$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(4;+\infty\right)$.

Bảng biến thiên của hàm $f\left(t\right)$ như sau:

| $t$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ $\searrow$ | $1$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc $\left(16;+\infty\right)$ khi $m\le 1$. Do $m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m=1$.

**Câu 5.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $\left(-10;10\right)$ của tham số $m$ để bất phương trình $3\sqrt{x}+\sqrt{x+4}<2m\log_{4-\sqrt{4-x}} 2$ có nghiệm?

**A.** $8$. **B.** $5$. **C.** $6$. **D.** $7$.

**Chọn A**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 4 \\ 4-\sqrt{4-x} \neq 1 \\ 4-\sqrt{4-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$.

Ta thấy $0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 4-x \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq 4-\sqrt{4-x} \leq 4$. Suy ra $\log_{4-\sqrt{4-x}} 2 > 0$.

Khi đó bất phương trình

$3\sqrt{x}+\sqrt{x+4} < 2m\log_{4-\sqrt{4-x}} 2 \Leftrightarrow m > \dfrac{3\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}{2.\log_{4-\sqrt{4-x}} 2}$

$\Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{x}+\sqrt{x+4}\right).\log_2\left(4-\sqrt{4-x}\right)$.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{x}+\sqrt{x+4}\right).\log_2\left(4-\sqrt{4-x}\right)$ liên tục trên $[0;4]$.

Ta có

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}\right).\log_2\left(4-\sqrt{4-x}\right)+\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{x}+\sqrt{x+4}\right).\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}.\left(4-\sqrt{4-x}\right).\ln 2} > 0\ \forall x \in (0;4)$.

Suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[0;4]$.

| $x$ | $0$ | $4$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ ↗ | $6+2\sqrt{2}$ |

Để bất phương trình đã cho có nghiệm thì $m > 1$.

Do $m$ nguyên và thuộc khoảng $(-10;10)$ nên $m \in \{2;3;...;9\}$.

Vậy có 8 giá trị $m$ nguyên cần tìm là : $m \in \{2;3;...;9\}$.

**Câu 6.** Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1 > \log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

**A.** $35$. **B.** $33$. **C.** $33$. **D.** $36$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$Bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5+m > 0 \\ \log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right] > \log_7\left(x^2+6x+5+m\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2-6x-5 \\ 6x^2+8x+9 > m \end{cases}$.

Xét hàm $f(x) = -x^2-6x-5$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f'(x) = -2x-6 < 0, \forall x \in (1;3) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[1;3]$

$\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x) = f(1) = -12$.

Xét hàm $g(x) = 6x^2+8x+9$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $g'(x)=12x+8>0,\forall x\in(1;3)$ $\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên khoảng $[1;3]$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} g(x)=g(1)=23$.

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $\begin{cases} m>-x^2-6x-5 \\ 6x^2+8x+9>m \end{cases}$ với mọi $x\in(1;3)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \max\limits_{[1;3]} f(x) \\ m\le \min\limits_{[1;3]} g(x) \end{cases}$.

Khi đó ta có $-12\le m\le 23$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-12;-11;-10;...;22;23\}$.

Vậy có tất cả $36$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $4\log_2^2\sqrt{x}-2\log_{\frac{1}{4}}x+m\ge 0$ có nghiệm với mọi $x$ thuộc khoảng $(0;1)$.

**A.** $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$. **C.** $m\in(-\infty;0]$. **D.** $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $4\log_2^2\sqrt{x}-2\log_{\frac{1}{4}}x+m\ge 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2+\log_2 x+m\ge 0$.

Đặt $t=\log_2 x$, do $x\in(0;1)\Rightarrow t\in(-\infty;0)$.

Bất phương trình trở thành $t^2+t+m\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -t^2-t$.

Xét hàm $f(t)=-t^2-t$ với $t\in(-\infty;0)$.

Ta có $f'(t)=-2t-1$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm $f(t)=-t^2-t$ như sau:

| $t$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy ycbt được thỏa mãn $\Leftrightarrow m\ge \frac{1}{4}$.

**Câu 8.** Có bao nhiêu số nguyên $m$ sao cho bất phương trình $\ln 5+\ln(x^2+1)\ge \ln(mx^2+4x+m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta thấy $x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $\ln 5+\ln(x^2+1)\ge \ln(mx^2+4x+m)\Leftrightarrow \ln(5x^2+5)\ge \ln(mx^2+4x+m)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5 \ge mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5-4x \ge m\left(x^2+1\right) \\ m\left(x^2+1\right)>-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}=f(x) \\ m>-\dfrac{4x}{x^2+1}=g(x) \end{cases}$.

Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $5$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $5$ |

Hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ |

Từ bảng biến thiên suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $2<m\le 3$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 9.** Số giá trị nguyên của $m$ để bất phương trình $1+\log_3\left(x^2+1\right)\ge \log_3\left(mx^2+2x+m\right)$ có nghiệm đúng với mọi số thực $x$ là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định: $mx^2+2x+m>0$.

Ta có: $1+\log_3\left(x^2+1\right)\ge \log_3\left(mx^2+2x+m\right) \Leftrightarrow \log_3 3\left(x^2+1\right)\ge \log_3\left(mx^2+2x+m\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+1\right)\ge mx^2+2x+m \Leftrightarrow (3-m)x^2-2x+3-m\ge 0$.

Ta thấy $m=0$; $m=3$ không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Với $m\ne 0$ và $m\ne 3$. Khi đó:

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} mx^2+2x+m>0\ \forall x\in\mathbb{R} \\ (3-m)x^2-2x+3-m\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 3-m>0 \\ 1-m^2<0 \\ 1-(3-m)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m<3 \\ m<-1; m>1 \\ m\le 2; m\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 2$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=2$.

**Câu 10.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2021;2021)$ sao cho bất phương trình $1+\log_3\left(x^3+x^2-3x+m\right)\ge \log_3\left(3x^2+1\right)$ nghiệm đúng với mọi $x$ trên đoạn $[0;3]$. Tính số phần tử của tập hợp $S$.

**A.** 2020. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 4040.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta thấy $3x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $1+\log_3\left(x^3+x^2-3x+m\right)\ge\log_3\left(3x^2+1\right);\ \forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow\log_3\left(3x^3+3x^2-9x+3m\right)\ge\log_3\left(3x^2+1\right);\ \forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow 3x^3+3x^2-9x+3m\ge 3x^2+1;\ \forall x\in[0;3]\Leftrightarrow 3m\ge -3x^3+9x+1;\ \forall x\in[0;3]$.

Xét hàm số: $f(x)=-3x^3+9x+1$ trên $[0;3]$.

Ta có: $f'(x)=-9x^2+9$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;3)\\x=-1\notin(0;3)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $7$ | ↘ | |

Từ bảng biến thiên ta có: $3m\ge 7\Leftrightarrow m\ge\dfrac{7}{3}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-2021;2021)$ nên $m\in\{3;4;\ldots;2020\}$.

**Câu 11.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2021;2021)$ sao cho bất phương trình $3\log_2^2 2x-12\log_2 x-1-m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x$ trên khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. Tính số phần tử của tập hợp $S$.

**A.** 2018. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 4040.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $3\log_2^2 2x-12\log_2 x-1-m\ge 0\Leftrightarrow 3\left(\log_2^2 x+2\log_2 x+1\right)-12\log_2 x-1-m\ge 0$

$\Leftrightarrow 3\log_2^2 x-6\log_2 x+2-m\ge 0\ \ (*)$.

Đặt: $\log_2 x=t$, với $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)\Rightarrow t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Khi đó bất phương trình (*) trở thành $3t^2-6t+2-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 3t^2-6t+2$.

Xét hàm số $f(t)=3t^2-6t+2,\forall t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(t)=6t-6;\ f'(t)=0\Leftrightarrow 6t-6=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $+\infty$ | | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy $m\le -1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-2021;2021)$ nên $m \in \{-2020;-2019;...;-1\}$.

**Câu 12.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2) \geq m$ có nghiệm $x \geq 1$.

**A.** $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m > 6$. **C.** $m \geq 6$. **D.** $m < 6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với $x \geq 1$ thì $5^x - 1 > 0$; $2.5^x - 2 > 0$.

Ta có $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2) \geq m$

$\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2) \geq \mathrm{m}$

$\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\left[1+\log_2(5^x-1)\right] \geq \mathrm{m}$.

Đặt $t = \log_2\left(5^x-1\right)$ do $x \geq 1 \Rightarrow t \in [2;+\infty)$.

BPT trở thành: $t(1+t) \geq m \Leftrightarrow t^2 + t \geq m$.

Đặt $f(t) = t^2 + t$ ta có $f'(t) = 2t+1 > 0$ với $\forall t \in (2;+\infty)$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến và liên tục trên $[2;+\infty)$. Suy ra $f(t) \in [6;+\infty)$ khi $t \in [2;+\infty)$.

Do đó để để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2) \geq \mathrm{m}$ có nghiệm thỏa mãn $x \geq 1$ thì $m \in \mathbb{R}$

**Câu 13.** Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right) > \log_5\left(x^2+4x+m\right) - 1$ là

**A.** $-13$. **B.** $-12$. **C.** $12$. **D.** $13$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 > \dfrac{x^2+4x+m}{5} \\ x^2+4x+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2-4x = f(x) \\ m < 4x^2-4x+5 = g(x) \end{cases}$.

Hệ trên thỏa mãn $\forall x \in (2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \underset{[2;3]}{Max}\, f(x) = -12 \\ m \leq \underset{[2;3]}{Min}\, g(x) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 13$.

**Câu 14 .** Có bao nhiêu số nguyên dương $m$ trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$ đúng với mọi $x \in (1;100)$?

**A.** 2022. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2018.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x} \Leftrightarrow \left(m + \dfrac{\log x}{10}\right)(\log x + 1) \geq \dfrac{11}{10}\log x$

$\Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11\log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10\log x \geq 0$.

Vì $x \in (1;100)$ nên $\log x \in (0;2)$.

Do đó $10m(\log x+1)+\log^2 x-10\log x\ge 0\Leftrightarrow 10m\ge\dfrac{10\log x-\log^2 x}{\log x+1}$.

Đặt $t=\log x$, $t\in(0;2)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{10t-t^2}{t+1}$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{10-2t-t^2}{(t+1)^2}>0,\ \forall t\in(0;2)\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;2]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(t)=f(2)=\dfrac{16}{3}$.

Để bất phương trình $10m\ge\dfrac{10\log x-\log^2 x}{\log x+1}$ đúng với mọi $x\in(1;100)$ thì $10m\ge\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{8}{15}$.

Do đó $m\in\left[\dfrac{8}{15};2018\right]$ hay có $2018$ số thỏa mãn.

**Câu 15 .** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(x^3+x-m)$ có nghiệm.

**A.** $m\le 2$.
**B.** $m\in\mathbb{R}$.
**C.** $m<2$.
**D.** Không tồn tại $m$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $\begin{cases}x>1\\x^3+x-m>0\end{cases}$.

Bất Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(x^3+x-m)\Leftrightarrow x-1<x^3+x-m\Leftrightarrow x^3+1>m$.

Đặt $f(x)=x^3+1$, ta có $f'(x)=3x^2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\notin(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $2$ $\nearrow$ $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn $\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

**Câu 16.** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2(x^2+mx+m+2)\ge\log_2(x^2+2)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta thấy $x^2+2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình

$\log_2(x^2+mx+m+2)\ge\log_2(x^2+2)\Leftrightarrow x^2+mx+m+2\ge x^2+2\Leftrightarrow mx+m\ge 0$.

Bất phương trình $\log_2(x^2+mx+m+2)\ge\log_2(x^2+2)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $mx+m\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m=0$.

**Câu 16.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2021;2022]$ để bất phương trình $\log_3^2 3x+\sqrt{\log_3^2 x+1}+2\log_{\frac{1}{3}} x-2m-2\le 0$ có nghiệm với mọi $x$ thuộc đoạn $\left[1;\,3^{\sqrt{3}}\right]$?

**A.** $2021$. **B.** $2022$. **C.** $4043$. **D.** $4042$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x>0$. Ta có $\log_3^2 3x+\sqrt{\log_3^2 x+1}+2\log_{\frac{1}{3}} x-2m-2\le 0$

$\Leftrightarrow (1+\log_3 x)^2+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2\log_3 x-2m-2\le 0$

$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1\le 0$.

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\ge 1$, ta được bất phương trình $t^2+t-2m-2\le 0\Leftrightarrow t^2+t\le 2m+2\ (*)$.

Ta có $x\in\left[1;\,3^{\sqrt{3}}\right]\Leftrightarrow 0\le\log_3 x\le\sqrt{3}\ \Rightarrow 1\le t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\le 2\Rightarrow t\in[1;2]$.

Xét hàm $f(t)=t^2+t$, với $t\in[1;\,2]$. Ta có $f'(t)=2t+1>0,\ \forall t\in(1;2)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục trên đoạn $[1;\,2]$.

Ta thấy $f(1)=2$ và $f(2)=6$.

Bất phương trình $f(t)\le 2m+2$ có nghiệm với $\forall t\in[1;\,2]$

$\Leftrightarrow f(2)\le 2m+2\Leftrightarrow 6\le 2m+2\Leftrightarrow m\ge 2$.

Do $m\in\mathbb{Z},\ m\in[-2021;2022]$ nên $m\in\{2,...,2022\}$. Vậy có 2021 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 18.** Cho hàm số $f(x)=\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x}-\left(7+4\sqrt{3}\right)^{x}+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. Tìm các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $f(3-2|x-m|)+f\left(x^2-2x-2\right)\le 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m\ge\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}\le m\le\frac{3}{2}$. **C.** $m\le\frac{1}{2}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\sqrt{x^2+1}>x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0$ nên tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Với $\forall x\in R$, ta có $f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2x}-\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\Rightarrow f(-x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x}-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2x}+\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$=-\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2x}-\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=-f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

Lại có $f'(x)=-2.\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2x}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-2.\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(3-2|x-m|)+f\left(x^2-2x-2\right)\le 0\Leftrightarrow f\left(x^2-2x-2\right)\le f(2|x-m|-3)$

$\Leftrightarrow x^2-2x-2\ge 2|x-m|-3 \Leftrightarrow 2|x-m|\le x^2-2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m\ge -x^2+4x-1 \\ 2m\le x^2+1 \end{cases}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do $\max\limits_{\mathbb{R}}(-x^2+4x-1)=3,\ \min\limits_{\mathbb{R}}(x^2+1)=1$ nên ta có $\begin{cases} m\ge \dfrac{3}{2} \\ m\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy không có giá trị nào của tham số $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 19.** Biết rằng $a$ là số thực dương sao cho bất phương trình $\log_{2+\sqrt{5}}\left(3^x+a^x\right)+\log_{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{6^x+9^x}\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $a\in(12;14]$. **B.** $a\in(10;12]$. **C.** $a\in(14;16]$. **D.** $a\in(16;18]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_{2+\sqrt{5}}\left(3^x+a^x\right)+\log_{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{6^x+9^x}\ge 0 \Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{5}}\left(3^x+a^x\right)\ge \log_{2+\sqrt{5}}\left(6^x+9^x\right)$

$\Leftrightarrow 3^x+a^x\ge 6^x+9^x \Leftrightarrow a^x-18^x\ge 6^x+9^x-3^x-18^x$

$\Leftrightarrow a^x-18^x\ge 3^x\left(2^x-1\right)-9^x\left(2^x-1\right) \Leftrightarrow a^x-18^x\ge -3^x\left(2^x-1\right)\left(3^x-1\right)\ (*)$.

Ta thấy $\left(2^x-1\right)\left(3^x-1\right)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow -3^x\left(2^x-1\right)\left(3^x-1\right)\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, $(*)$ đúng với mọi mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow a^x-18^x\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{18}\right)^x\ge 1, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{18}=1 \Leftrightarrow a=18\in(16;18]$.

**Câu 20.** Cho hàm số $f(x)=\log\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $[-10;10]$ để bất phương trình $f\left(2|x-m|\right)+f\left(-x^2+4x-6\right)>0$ nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc $(-1;1)$?

**A.** $8$. **B.** $4$. **C.** $11$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $x-1+\sqrt{x^2-2x+2}=x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}>x-1+|x-1|\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Hàm số $f(x)=\log\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2-x)=\log\left(1-x+\sqrt{(1-x)^2+1}\right)=\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}+x-1}\right)=-f(x)$

$f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}}{\left(x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\right)\ln 10}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{(x-1)^2+1}\right)\ln 10}>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f\left(2|x-m|\right)+f\left(-x^2+4x-6\right)>0 \Leftrightarrow f\left(2|x-m|\right)>-f\left(-x^2+4x-6\right)$

$\Leftrightarrow f\left(2\left|x-m\right|\right) > f\left(x^2-4x+8\right) \Leftrightarrow 2\left|x-m\right| > x^2-4x+8$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2m > x^2-4x+8 \\ 2x-2m < -x^2+4x-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m < -x^2+6x-8 \\ 2m > x^2-2x+8 \end{array}\right.$

Xét các hàm số $u(x)=-x^2+6x-8$ và $v(x)=x^2-2x+8$ trên $(-1;1)$ ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $u(x)$ | $-15$ | $\nearrow$ | $-3$ |
| $v(x)$ | $11$ | $\searrow$ | $7$ |

Dựa vào BBT ta thấy để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc $(-1;1)$ thì $\left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{15}{2} \\ m \ge \dfrac{11}{2} \end{array}\right.$. Do $m$ nguyên và $m \in [-10;10]$ nên có $8$ giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 21.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $2^{f^2(x)-4f(x)}+\log_5\left[f(x)+\dfrac{4}{f(x)}\right] \ge m$ có nghiệm $x \in (0;+\infty)$.

**A.** $m \le \dfrac{9}{8}$. **B.** $m < \dfrac{1}{2}$. **C.** $m < \dfrac{9}{8}$. **D.** $m \le \dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \notin (0;+\infty) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\dfrac{3}{2}$ | $\searrow$ | $1$ |

Dựa vào BBT ta thấy $1 < f(x) \le \dfrac{3}{2}, \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x)=2^{f^2(x)-4f(x)}+\log_5\left(f(x)+\dfrac{4}{f(x)}\right)$ trên $(0;+\infty)$

Do $f(x)>1$ nên hàm số $g(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=f'(x).\left[2f(x)-4\right].2^{f^2(x)-4f(x)}.\ln 2+f'(x)\left[\dfrac{1-\dfrac{4}{f^2(x)}}{\left(f(x)+\dfrac{4}{f(x)}\right)\ln 5}\right]$

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)\left[f(x)-2\right]\left[2.2^{f^2(x)-4f(x)}.\ln 2+\dfrac{f(x)+2}{\left(f^3(x)+4f(x)\right)\ln 5}\right]$.

Do $1<f(x)\le\dfrac{3}{2}$ nên $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\dfrac{9}{8}$ | $\searrow$ | $2^{-\frac{15}{4}}+\log_5\dfrac{13}{6}$ | $\nearrow$ | $\dfrac{9}{8}$ |

Dựa vào BBT ta thấy để bất phương trình đã cho có nghiệm $x\in(0;+\infty)$ thì $m<\dfrac{9}{8}$.

**Câu 22.** Cho các bất phương trình $\log_2\sqrt{x^2-4x+m}+2\sqrt{\log_4\left(x^2-4x+m\right)}\le 8$ $(1)$ và $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}\ge 0$ $(2)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn mọi nghiệm của bất phương trình $(2)$ đều là nghiệm của bất phương trình $(1)$.

**A.** $254$. **B.** $255$. **C.** $256$. **D.** $257$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Bất phương trình $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0\\x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $(2)$ là: $S=[1;3]$.

Do đó mọi nghiệm của bất phương trình $(2)$ đều là nghiệm của bất phương trình $(1)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(1)$ có nghiệm đúng với mọi $x\in[1;3]$.

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-4x+m>0\\\log_4\left(x^2-4x+m\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-4x+m\ge 1\Leftrightarrow m\ge -x^2+4x+1$ thỏa mãn $\forall x\in[1;3]$.

Khi đó $m\ge\max\limits_{[1;3]}f(x)$ với $f(x)=-x^2+4x+1$.

Xét hàm số $f(x)=-x^2+4x+1$ trên đoạn $[1;3]$

$f'(x)=-2x+4=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | + | 0 | − | | |
| $f(x)$ | | 4 | $\nearrow$ | 5 | $\searrow$ | 4 | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \ge \max\limits_{[1;3]} f(x) \Leftrightarrow m \ge 5$. (3)

Ta có $\log_2 \sqrt{x^2-4x+m} + 2\sqrt{\log_4(x^2-4x+m)} \le 8$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(x^2-4x+m) + 2\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_2(x^2-4x+m)} \le 8$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{1}{2}\log_2(x^2-4x+m)}$, $t \ge 0$.

Bất phương trình trở thành: $t^2+2t-8 \le 0 \Leftrightarrow t \in [-4;2] \Rightarrow t \in [0;2]$.

Với $t \le 2$ ta có $\dfrac{1}{2}\log_2(x^2-4x+m) \le 4 \Leftrightarrow m \le -x^2+4x+256$ với mọi $x \in [1;3]$.

$\Rightarrow m \le \min\limits_{[1;3]} g(x)$ với $g(x) = -x^2+4x+256$.

Xét hàm số $g(x) = -x^2+4x+256$ với $x \in [1;3]$.

$g'(x) = -2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | + | 0 | − | | |
| $g(x)$ | | 259 | $\nearrow$ | 260 | $\searrow$ | 259 | |

Dựa vào bảng biến thiên: $m \le \min\limits_{[1;3]} g(x) \Leftrightarrow m \le 259$. (4)

Từ $(3)$, $(4)$ ta có $m \in [5;259]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có tất cả $255$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn mọi nghiệm của bất phương trình $(2)$ đều là nghiệm của bất phương trình $(1)$.

**Câu 23.** Cho bất phương trình $2^{(x+2)^2}.\log_2(x^2+4x+6) \ge 4^{|x-m|}\log_2(2|x-m|+2)$ với $m$ là tham số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in [0;2]$ là đoạn $[a;b]$. Khi đó $a^2+b^2$ bằng:

**A.** $4$. **B.** $8$. **C.** $16$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $2^{(x+2)^2}.\log_2(x^2+4x+6) \ge 4^{|x-m|}\log_2(2|x-m|+2)$

$\Leftrightarrow 2^{(x+2)^2}.\log_2\left[(x+2)^2+2\right] \ge 2^{2|x-m|}\log_2(2|x-m|+2)$ (1)

Xét hàm số $y = 2^t.\log_2(t+2)$ với $t \ge 0$.

Hàm số $y=2^t.\log_2(t+2)$ xác định và liên tục trên $[0;+\infty)$.

Ta có $y'=2^t.\log_2(t+2).\ln 2+\dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2}>0,\ \forall t\ge 0$.

Vậy hàm số $y=2^t.\log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f\left((x+2)^2\right)\ge f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow (x+2)^2\ge 2|x-m|$

$\Leftrightarrow -(x+2)^2\le 2(x-m)\le (x+2)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2m\le x^2+6x+4\\ 2m\ge -x^2-2x-4\end{cases},\forall x\in[0;2]\Leftrightarrow \begin{cases}2m\le \min\limits_{[0;2]}\left(x^2+6x+4\right)\\ 2m\ge \max\limits_{[0;2]}\left(-x^2-2x-4\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2m\le 4\\ 2m\ge -4\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Vậy tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in[0;2]$ là đoạn $[-2;2]\Rightarrow a=-2;b=2\Rightarrow a^2+b^2=8$.

**Câu 24.** Cho $a,b$ là các số nguyên dương nhỏ hơn $2022$. Biết rằng với mỗi giá trị của $b$ luôn có ít nhất $1000$ giá trị của $a$ thỏa mãn $\left(2^{a+b+2}-2^{b-a}\right).\log_{a+1}\sqrt{b}>4^b-1$. Số giá trị $b$ là

**A.** $1021$. **B.** $1022$. **C.** $1020$. **D.** $1023$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $c=a+1,c\ge 2$, khi đó $\left(2^{a+b+2}-2^{b-a}\right).\log_{a+1}\sqrt{b}>4^b-1\Leftrightarrow\left(2^c-2^{-c}\right).\log_c b>2^b-2^{-b},(1)$.

+) $b=1$, không thỏa mãn $(1)$.

+) $b=2\Rightarrow \dfrac{2^c-2^{-c}}{\log_2 c}>\dfrac{15}{4},(2)$.

•) $c=2$, không thỏa mãn $(2)$.

•) $\forall c\ge 3$, hàm $f(c)=\dfrac{2^c-2^{-c}}{\log_2 c},f'(c)=\dfrac{2^c(c.\ln 2.\ln c-1)+c.2^{-c}.\ln 2.\ln c+2^{-c}}{c.\ln 2(\log_c c)^2}>0$.

Suy ra $f(c)\ge f(3)>\dfrac{15}{4},\forall c\ge 3\Rightarrow 2\le a\le 2021$. Do đó $b=2$ thỏa mãn.

+) $b\ge 3$, $(1)\Leftrightarrow \dfrac{2^c-2^{-c}}{\ln c}>\dfrac{2^b-2^{-b}}{\ln b},(3)$.

Hàm số $f(t)=\dfrac{2^t-2^{-t}}{\log_2 t}$ đồng biến với mọi $t\ge 3$ và $c=2$ không thỏa mãn $(3)$ nên $c\ge 3$.

Do đó $(3)\Leftrightarrow c>b,(b\ge 3)\Rightarrow 3\le b\le a\le 2021\Rightarrow\begin{cases}b\ge 3\\ 2021-b+1\ge 1000\end{cases}\Rightarrow 3\le b\le 1022$.

Vậy $2\le b\le 1022$.

**Câu 25.** Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2022;2022]$ sao cho thỏa mãn bất phương trình $\dfrac{\ln x}{x+1}+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{m}{x},\forall x>0,x\ne 1$?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn C**

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{-2x\ln x}{x^2-1} > m-1,\ \forall x>0, x\neq 1$. (1)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-2x\ln x}{x^2-1}$, $x>0, x\neq 1$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2[(x^2+1)\ln x - x^2+1]}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2\left(\ln x-\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{(x^2+1)(x^2-1)^2}$.

Xét hàm số $g(x)=\ln x-\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x>0$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}>0$, $\forall x>0$, $x\neq 1$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Suy ra $g(x)<g(1)=0$ khi $x<1$ và $g(x)>g(1)=0$ khi $x>1$.

Do đó ta có bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ \|\| $-1$ | $\nearrow$ | $0$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $(1) \Leftrightarrow m-1\leq -1 \Leftrightarrow m\leq 0$.

Vậy có vô số giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn.

**Câu 26.** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $x^2+2e^x-mx-\ln\left(x^2+e\right)-1\geq 0$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$f\left(x\right)=x^2+2e^x-mx-\ln\left(x^2+e\right)-1\geq 0$. Nhận thấy nhanh rằng: $f\left(0\right)=0$

Suy ra hàm số trên thỏa mãn $\begin{cases} f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0 \quad \forall x\in R \\ f\left(0\right)=0\end{cases} \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

Xét $f'\left(x\right)=2x+2e^x-m-\dfrac{2x}{x^2+e}$ có $f'\left(0\right)=2-m=0\Leftrightarrow m=2$

Thử lại với $m=2$ thì $f\left(x\right)=x^2+2e^x-2x-\ln\left(x^2+e\right)-1$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=2x+2e^x-2-\dfrac{2x}{x^2+e}=2x\left(1+\dfrac{1}{x^2+e}\right)+2\left(e^x-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Đến đây ta nhận thấy $f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0$ nên suy ra $m=2$ thỏa nên có đúng 1 giá trị $m$

**Câu 27.** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\left(m^2-4m+4\right)\log_2\left(x^2-2mx+m^2+1\right)+m^2\log_3\left(x^2+1\right)\leq 0$ có nghiệm thực $x$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn B**

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow \underbrace{(m-2)^2}_{\geq 0}\log_2\underbrace{\left((x-m)^2+1\right)}_{\geq 0}+m^2\underbrace{\log_3\left(x^2+1\right)}_{\geq 0}\leq 0$$

Ta nhận thấy: $(m-2)^2\log_2\left((x-m)^2+1\right)+m^2\log_3\left(x^2+1\right)\geq 0$ nên suy ra bất phương trình trên chỉ có nghiệm khi xảy ra dấu bằng, tức là:

$$(m-2)^2\log_2\left((x-m)^2+1\right)+m^2\log_3\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)^2\log_2\left((x-m)^2+1\right)=0\\ m^2\log_3\left(x^2+1\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(m-2)^2=0\\ \log_2\left((x-m)^2+1\right)=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m^2=0\\ \log_3\left(x^2+1\right)=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(m-2)^2=0\\ (x-m)^2=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m^2=0\\ x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=2\\ x=m\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m=0\\ x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=2\\ x=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m=0\\ x=0\end{array}\right.\end{cases}$$

Suy ra có 2 giá trị thực $m$ thỏa mãn bài toán

**Câu 28.** Gọi $S$ là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $\ln\left|x^2-4x+3\right|\leq\log m$ có đúng 3 nghiệm nguyên, vậy tổng phần tử của $S$ là

**A.** $108$. **B.** $5$. **C.** Vô số **D.** $89$.

**Lời giải**

**Chọn B**

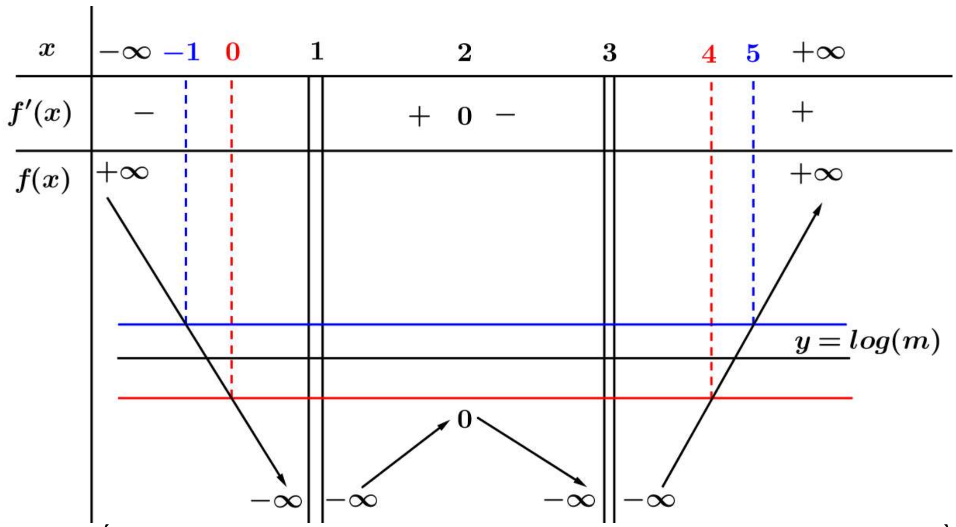
Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\ln\left|x^2-4x+3\right|\leq\log m\Leftrightarrow f(x)=\ln\left|x^2-4x+3\right|\leq\log m$$

Xét hàm số $f(x)=\ln\left|x^2-4x+3\right|$ ; $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.$

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln\left|x^2-4x+3\right|\right)=\ln(0)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\ln\left|x^2-4x+3\right|\right)=\ln(0)=+\infty\\ f'(x)=\dfrac{\left|x^2-4x+3\right|'}{\left|x^2-4x+3\right|}=\dfrac{(2x-4)\left(x^2-4x+3\right)}{\left|x^2-4x+3\right|^2}=0\Leftrightarrow x=2\end{cases}$

Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:




Nhận thấy ngay 3 nghiệm nguyên thỏa mãn bài toán đó là: $x = 0;2;4$. Lưu ý rằng hai nghiệm nguyên $x = 1; x = 3$ bị vi phạm điều kiện nên không được tính

Suy ra $f(4) \le \log m < f(5) \Leftrightarrow \ln 3 \le \log m < \ln 8 \xrightarrow{m \in Z} 13 \le m \le 120$

Như vậy có tất cả $120 - 13 + 1 = 108$ giá trị nguyên $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 29.** Có tất cả bao nhiêu bộ số nguyên $(a;b;c;d)$ với $a,b,c,d \in [-3;3]$ thỏa mãn điều kiện bất phương trình $\ln(x+1) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \le ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ nghiệm đúng với $\forall x \in (-1;+\infty)$?

**A.** 43 **B.** 71 **C.** 37 **D.** 47

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta để ý rằng 2 đồ thị $f(x) = \ln(x+1) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ và $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ cùng đi qua gốc tọa độ. Do đó ta xét tiếp tuyến tại gốc tọa độ của $y = f(x)$. Ta có $f'(0) = 1; f(0) = 0$ nên tiếp
tuyến là $y = x$.

**TABLE** ta có $\ln(x+1) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x \le 0 \quad \forall x \in (-1;+\infty)$.

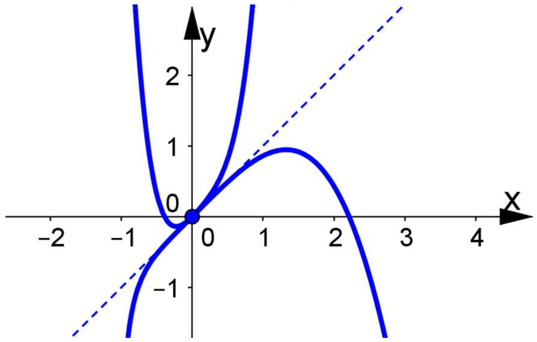
Do vậy đồ thị $f(x) = \ln(x+1) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ luôn đứng dưới đường thẳng $y = x$ và tiếp xúc nhau tại $O$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^4 + bx^3 + cx^2 + (d-1)x = 0$ có nghiệm kép $x = 0$ nên $\boxed{d = 1}$.

Đồ thị $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ luôn đứng trên đường thẳng $y = x$ và tiếp xúc nhau tại $O$ thì điều kiện cần và đủ là $ax^2 + bx + c \ge 0 \quad \forall x \in (-1;+\infty)$ do đó $a \ge 0$.

**Trường hợp 1:** $\begin{cases} a = 0 \\ bx + c \ge 0 \forall x \in (-1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \\ -b + c \ge 0 \end{cases}$. Có 10 bộ:

| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,1,2,3 | 0 | 2 | 2,3 |
| 0 | 1 | 1,2,3 | 0 | 3 | 3 |

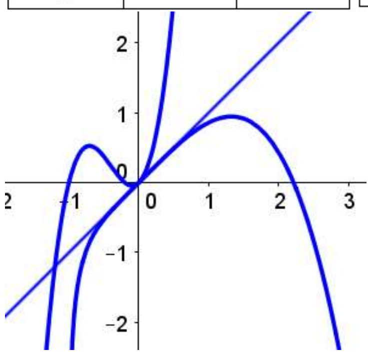



**Trường hợp 2:** $\begin{cases} a>0 \\ b^2 \le 4ac \end{cases}$. Có tất cả 60 bộ:

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,1,2,3 |
| 1 | ±1 | 1,2,3 |
| 1 | ±2 | 1,2,3 |
| 1 | ±3 | 3 |

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 2 | 0 | 0,1,2,3 |
| 2 | ±1 | 1,2,3 |
| 2 | ±2 | 1,2,3 |
| 2 | ±3 | 2,3 |

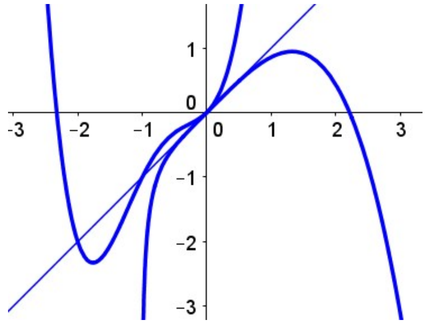
| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 3 | 0 | 0,1,2,3 |
| 3 | ±1 | 1,2,3 |
| 3 | ±2 | 1,2,3 |
| 3 | ±3 | 1,2,3 |




**Trường hợp 3:** $\begin{cases} a>0 \\ b^2 > 4ac \end{cases}$ khi đó $a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right) \ge 0 \forall x \in \left(-1;+\infty\right)$ khi $x_1 < x_2 \le -1$.

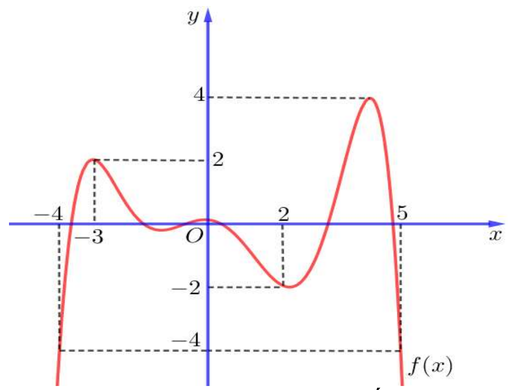
Do đó $\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} < -2 \\ \left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 2a \\ \dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a} + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 2a \\ a+c \ge b \end{cases}$.

Có duy nhất 1 bộ thỏa mãn $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=2 \end{cases}$.




**Kết luận:** Có tất cả 71 bộ số cần tìm.

**Câu 30.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.




Với điều kiện nào của tham số $m$ thì bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2020^{5f(x)-2m}}-1\right).\log_{2019}\left(f\left(x\right)-\dfrac{x^2}{125}+\dfrac{28}{5}\right)<0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[-4;5\right)$?

**A.** $m<-10$. **B.** $m\le -10$. **C.** $m>10$. **D.** $m\ge 10$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\begin{cases} -4\le f\left(x\right)\le 4, \forall x\in\left[-4;5\right) \\ \dfrac{27}{5}<-\dfrac{x^2}{125}+\dfrac{28}{5}\le\dfrac{28}{5}, \forall x\in\left[-4;5\right) \end{cases} \Rightarrow f\left(x\right)+\left(-\dfrac{x^2}{125}+\dfrac{28}{5}\right)>\dfrac{7}{5}, \forall x\in\left[-4;5\right)$.

$\Rightarrow \log_{2019}\left(f\left(x\right)-\dfrac{x^2}{125}+\dfrac{28}{5}\right)>0, \forall x\in\left[-4;5\right)$ (*).

Từ (*) ta có: $\left(\dfrac{1}{2020^{5f(x)-2m}}-1\right).\log_{2019}\left(f\left(x\right)-\dfrac{x^2}{125}+\dfrac{28}{5}\right)<0, \forall x\in\left[-4;5\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2020^{5f(x)-2m}}-1<0, \forall x\in\left[-4;5\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2020^{5f(x)-2m}}<1, \forall x\in\left[-4;5\right)$

$\Leftrightarrow 5f\left(x\right)-2m>0, \forall x\in\left[-4;5\right) \Leftrightarrow f\left(x\right)>\dfrac{2m}{5}, \forall x\in\left[-4;5\right) \Leftrightarrow \dfrac{2}{5}m<-4 \Leftrightarrow m<-10$.

**TOANMATH.com**