Sở Giáo Dục & Đào Tạo Hưng Yên

Trường THPT Phù Cừ

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM
ĐỀ TÀI

BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN

Họ và Tên : Quách Đăng Thăng

Tổ : Toán - Tin

Chức Vụ : Giáo viên

LỜI MỞ ĐẦU

Thực tế giảng dạy cho thấy môn Toán học trong trường phổ thông là một trong những môn học khó, phần lớn các em học môn Toán rất yếu đặc biệt là hình học không gian, nếu không có những bài giảng và phương pháp dạy môn Hình học phù hợp đối với thế hệ học sinh thì dễ làm cho học sinh thụ động trong việc tiếp thu, cảm nhận. Đã có hiện tượng một số bộ phận học sinh không muốn học Hình học, ngày càng xa rời với giá trị thực tiễn của Hình học. Nhiều giáo viên chưa quan tâm đúng mức đối tượng giáo dục, chưa đặt ra cho mình nhiệm vụ và trách nhiệm nghiên cứu, hiện tượng dùng đồng loạt cùng một cách dạy, một bài giảng cho nhiều lớp, nhiều thế hệ học trò vẫn còn nhiều. Do đó phương pháp ít có tiến bộ mà người giáo viên đã trở thành người cảm nhận, truyền thụ tri thức một chiều, còn học sinh không chủ động trong quá trình lĩnh hội tri thức - kiến thức Hình học làm cho học sinh không thích học môn Hình học.

Tuy nhiên với việc đại số hóa hình học thì các bài toán hình học không gian trở lên đơn giản và dễ nhìn hơn. Gần đây trong các đề thi Đại học hàng năm đã bắt đầu xuất hiện các bài toán cực trị hình học trong không gian mà đôi khi việc giải các bài toán này một cách trực tiếp bằng kiến thức hình học không gian thuần tuy là vô cùng khó khăn. Chính vì lý do đó tôi chọn đề tài ***“Bài toán cực trị hình học trong không gian”***.

Trong phạm vi bài viết này, với mong muốn giúp các e có thêm một tài liệu ôn thi Đại học – Cao đẳng và đồng thời để các e hiểu được rằng bài toán cực trị nói chung và bài toán cực trị trong hình học không gian không phải là quá khó không thể giải quyết được.

Đối tượng áp dụng chủ yếu cho tài liệu này về cơ bản là trên lớp 12A2, ngoài ra tôi cũng đan xen trong các tiết học của các lớp 12A6 và 12A8.

Đối tượng nghiên cứu là các tài liệu sách giáo khoa Hình học 12, sách bài tập Hình học 12 cơ bản và nâng cao, các bài giảng trên mạng Internet, các tài liệu và forum trên các diễn đàn Toán học trên mạng Internet cùng một số tài liệu tham khảo khác.

Phù Cừ, ngày 30 tháng 4 năm 2013
Người viết

Quách Đăng Thăng

NỘI DUNG

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Muốn tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của một đại lượng hình học biến thiên f ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

1. Vận dụng các kết quả hình học cơ bản để so sánh trực tiếp f với một đại lượng không đổi cho trước. Sau đây là một vài kết quả cơ bản:

a. $\forall$A, B,C, AB + BC $\geq$ CA. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó.

b. Nếu $\triangle$ABC vuông tại A thì: AB < BC và AC < BC.

c. Trong một tam giác, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn và ngược lại.

d. Trong tất cả các đoạn thẳng vẽ từ một điểm M đến mặt phẳng (α) (hoặc đường thẳng d) không chứa điểm M thì đoạn vuông góc là đoạn thẳng ngắn nhất.

e. Đoạn thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn thẳng ngắn nhất nối liền hai điểm lần lượt thuộc hai đường thẳng đó.

2. Nếu *f* được biểu thị thành một biểu thức của nhiều đại lượng biến thiên và các đại lượng này lại được ràng buộc với nhau bởi một hệ thức liên hệ thì ta sử dụng các bất đẳng thức đại số để tìm giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của *f*. Các bất đẳng thức thường dùng là:

a. Bất đẳng thức Cô si:

$$\forall\ a_1, a_2 \dots, a_n \geq 0, \frac{a_1 + a_1 \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_1 \dots = a_n$

b. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki:

$\forall\ a_1, a_2 \dots, a_n,\ x_1, x_2 \dots, x_n,$

$$(a_1x_1 + a_2x_2 \dots + a_nx_n)^2 \leq (a_1{}^2 + x_1{}^2)(a_2{}^2 + x_2{}^2)(a_n{}^2 + x_n{}^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow$ $\exists$ k $\in$R, $x_1 = ka_1, x_2 = ka_2, \dots, x_n = ka_n$

3. Nếu *f* được biểu thị bằng một hàm số của một biến số x thì ta sử dụng phương pháp khảo sát hàm số để tìm giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số đó trên miền xác định của nó, từ đó suy ra giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của *f*.

4. Phương pháp tọa độ trong không gian

a. Trong không gian oxyz: Xét hệ toạ độ Đề các vuông góc giả sử A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2) thì

$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_2, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

và

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

b. Cho 2 vectơ: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

* $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z^2_{\ 1}}$; $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z^2_{\ 2}}$

* $\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều hoặc 1 trong 2 vectơ bằng $\vec{0}$).

* Điều kiện để hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$ cùng phương là $\exists t \in R$ để $\vec{a}$ =t$\vec{b}$

* Điều kiện để ba véc tơ $\vec{a}; \vec{c}$ và $\vec{b}$ không đồng phẵng là $\left[\vec{a}; \vec{b}\right].\vec{c} \neq 0$

* Điều kiện để ba véc tơ $\vec{a}; \vec{c}$ và $\vec{b}$ đồng phẵng là $\left[\vec{a}; \vec{b}\right].\vec{c} = 0$

* $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

***** Cho $\triangle ABC$ Thì AB+BC $\geq BC$ và $\left|AB - BC\right| \le AC$ dấu đẳng thức sãy ra khi ba điểm A;B;C thẳng hàng

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

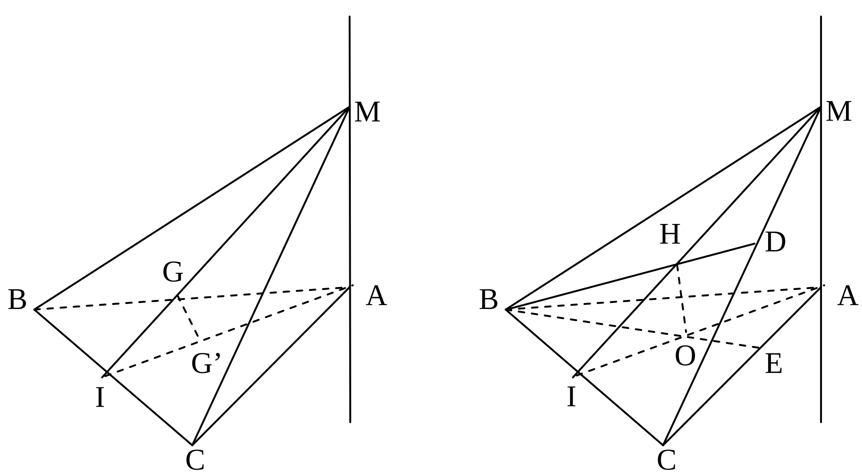
<u>Bài toán 1:</u> Cho tam giác cân ABC, AB=AC. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A (M không trùng với điểm A)

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác MBC

b) Gọi O là trực tâm của tam giác ABC, hãy xác định vị trí của M để thể tích tứ diện OHBC đạt giá trị lớn nhất.

(Đại học Quốc gia Hà Nội - 1997)

<u>Hướng dẫn giải</u>



a) Gọi I là trung điểm của BC, trọng tâm ΔMBC là G, trọng tâm của ABC là G'.

Trong Δ MIA ta có : $\frac{IG}{IM} = \frac{IG'}{IA} = \frac{1}{3}$ suy ra GG' // MA

Do đó G nằm trên đường vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại G', đó là đường thẳng chứa GG'.

Với MI và BD là đường cao với H là trực tâm Δ ABC. Vì BE $\perp$CA và MA nên BE $\perp$(MAC) $\Rightarrow$ BE $\perp$MC (1)

BD là đường cao ΔMBC nên BD $\perp$MC (2)

Từ (1) và (2) suy ra MC $\perp$(BDE) $\Rightarrow$ OH $\perp$MC (3)

Vì BC $\perp$MI và MA nên BC $\perp$(MAI) $\Rightarrow$ BC $\perp$OH (4)

Từ (3) và (4) suy ra OH $\perp$(MBC) $\Rightarrow$ HI $\perp$OH.

Vậy H nhìn đoạn cố định OI dưới một góc vuông

$\Leftrightarrow$Quỹ tích H là đường tròn nằm trong mặt phẳng (MAI) có đường kính OI (trừ hai điểm O và I)

b) Tứ diện OHBC có đáy OBC cố định nên thể tích lớn nhất khi H ở vị trí "cao nhất" so với đáy OBC.

Xét ΔOHI vuông khi góc $\widehat{ABC} = 45^0$.

Hay ΔOHI vuông cân $\Rightarrow \Delta MAI$ cân $\Rightarrow$ AM =AI

Vậy khi AM =AI thì thể tích tứ diện OHBC lớn nhất.

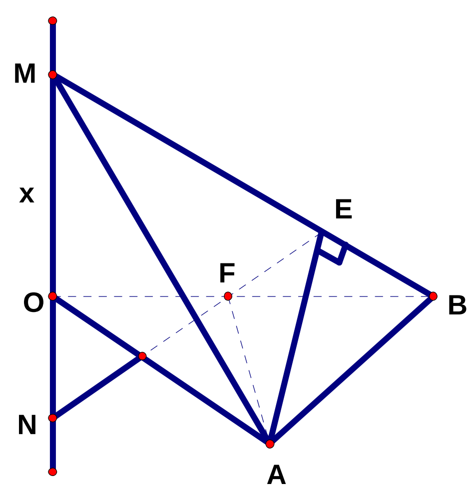
Bài toán 2: Cho tam giác đều OAB có cạnh bằng a > 0. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mp (OAB) lấy điểm M với OM = x. Gọi E, F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB, OB. Trên đoạn thẳng EF cắt d tại N.

a)Chứng minh $AN \perp BM$

b)Xác định x để thể tích tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

(Đại học Tổng hợp TP.HCM-1995)

Hướng dẫn giải



a)Ta có $AF \perp OB$ và $AF \perp OM$ nên $AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB$ (1)

Theo giả thiết $AE \perp MB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MB \perp (AEF)$ nên $MB \perp AN$

b) ΔNOF $\sim \Delta BOM$ (là Δ vuông cân có $\widehat{N} = \widehat{B}$)

Ta có: $\dfrac{NO}{BO} = \dfrac{\text{OF}}{OM} \Leftrightarrow OM.NO = \text{OF}.BO = \dfrac{a}{2}a = \dfrac{a^2}{2}$

Thể tích của tứ diện ABMN là: $V_{ABMN} = \dfrac{1}{3}S_{OAB}.MN = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}(OM + ON)$.

V_{ABMN} nhỏ nhất khi OM+ON nhỏ nhất

Biết $OM + ON \geq 2\sqrt{OM.ON} = 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$ (Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương)

Khi đó: $OM = ON = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

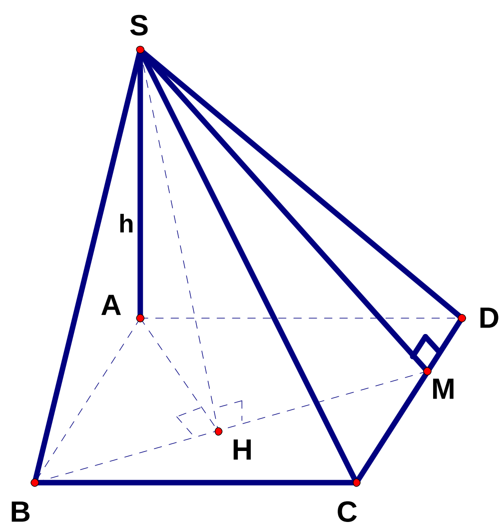
<u>Bài toán 3:</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA=h và $SA \perp (ABCD)$. M là điểm thay đổi trên cạnh CD. Đặt CM=x.

a) Hạ $SH \perp BM$ .Tính SH theo a, h và x

b) Xác định vị trí của M để thể tích tứ diện SABH đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất ấy.

(Đại học kỹ thuật TP.HCM-1998)

<u>Hướng dẫn giải</u>



a) Ta có: $BM \perp SH, BM \perp SA \Rightarrow MB \perp (SHA)$ biết $\widehat{HBA} = \widehat{CMB}$ (so le trong)

$$\sin\widehat{HBA} = \sin\widehat{CMB} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{BC}{BM} \Rightarrow AH = \frac{AB.BC}{CM} = \frac{a.a}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Trong tam giác vuông SHA ta có:

$$SH^2 = SA^2 + AH^2 = h^2 + \frac{a^4}{a^2+x^2} \Rightarrow SH = \sqrt{h^2 + \frac{a^4}{a^2+x^2}}$$

b) Trong tam giác vuông ABH ta có:

$$BH = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{a^2+x^2}} = \frac{\text{ax}}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$V_{SABH} = \frac{1}{3}S_{ABH}.SA = \frac{1}{6}\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.\frac{\text{ax}}{\sqrt{a^2+x^2}}h = \frac{1}{6}\frac{a^3hx}{a^2+x^2}$$

Xét hàm số V=f(x) trên [0;a], ta thấy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi x=a$\Leftrightarrow$M trùng với D.

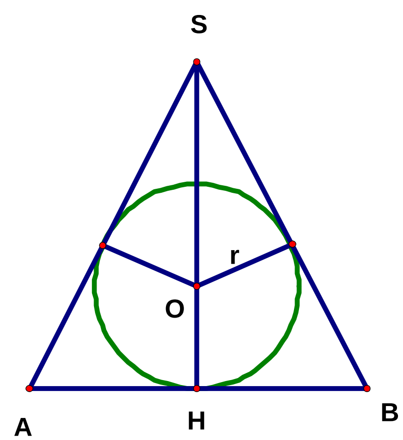
Vậy Max $V_{SABH} = \frac{1}{6}\frac{a^3hx}{2a^2} = \frac{1}{12}a^2h$

<u>Bài toán 4:</u> Cho một hình cầu K có thể tích $\frac{4}{3}\pi(dm^3)$.Người ta muốn đặt hình cầu này nội tiếp một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy R

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa h và R

b) Xác định h và R để thể tích hình nón có giá trị nhỏ nhất

<u>Hướng dẫn giải</u>



a) Gọi r là bán kính của hình cầu, theo giả thiết ta có: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow r = 1$

Cắt tổ hợp gồm mặt cầu và hình nón đã cho bởi mặt phẳng (P) qua trục SH của hình nón ta được một đường tròn (O;r) nội tiếp tam giác cân SAB như hình vẽ. Ta có: r = OH, h = SH và R = HA.

Áp dụng công thức $S_{SAB} = pr$ trong đó:

$$p = \frac{AB + SA + SB}{2} = \frac{2R + 2\sqrt{h^2 + R^2}}{2} = R + \sqrt{h^2 + R^2}.$$

Ta có: $S_{SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = SH.AH = Rh$

Do đó $S_{SAB} = pr \Leftrightarrow Rh = \left(R + \sqrt{h^2 + R^2}\right).1$

$$\Leftrightarrow R\left(h - 1\right) = \sqrt{h^2 + R^2}$$
$$\Leftrightarrow R^2\left(h^2 - 2h + 1\right) = h^2 + R^2$$
$$\Leftrightarrow R^2\left(h - 2\right) = h \Leftrightarrow R^2 = \frac{h}{h - 2} \quad \left(*\right)$$

(*) là hệ thức liên hệ giữa R và h cần tìm.

b) Thể tích hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3}.\frac{h^2}{(h-2)}$ (ĐK h>2)

Hàm số: $V = \frac{1}{3}\pi\left(h + 2 + \frac{4}{h - 2}\right)$ với biến số h xác định trên $(2;+\infty)$

Ta có: $V' = \frac{1}{3}\pi\left(1 - \frac{4}{(h-2)^2}\right) = \frac{\pi(h^2 - 4h)}{3(h-2)^2}; V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 0 \\ h = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:(ta chỉ xét biến $h \in (2;+\infty)$

h	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
V'		+	0	-	||	-	0	+	
V		↗		↘	||	↘	$\frac{8\pi}{3}$	↗	

Từ bảng biến thiê suy ra $V_{Min} = \frac{8\pi}{3}\left(dm^3\right)$ khi và chỉ khi $h = 4$ và $R = \sqrt{2}$.

<u>Bài toán 5:</u> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;4;2), B(-1;2;4) và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$

a) Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB vuông góc với mặt phẳng OAB.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

(Đại học khối D – 2007)

Hướng dẫn giải

a) Viết phương trình đường thẳng d qua G, vuông góc mp(OAB)

G là trọng tâm ΔOAB nên G thỏa $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_O + x_A + x_B}{3} = 0 \\ y_G = \dfrac{y_O + y_A + y_B}{3} = 2 \\ x_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(0;2;2)$

$mp(OAB)$ có cặp VTCP là $\overrightarrow{OA} = (1;4;2), \overrightarrow{OB} = (-1;2;4)$

$\Rightarrow \vec{n} = (12;-6;6) / / \overrightarrow{n_1} = (2;-1;1)$

$d \perp mp(P)$ nên $\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{n_1} = (2;-1;1)$ mà d qua G nên pt đt $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$

b) Tìm M∈Δ để MA² + MB² nhỏ nhất

Gọi E là trung điểm của AB thì $MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Vậy $MA^2 + MB^2$ min ⇔ ME min ⇔ $M \equiv H - hình$ chiếu của E lên đt Δ

E là trung điểm AB nên $E(0;3;3)$;

Gọi (P) là mp qua E và vuông góc đt Δ thì $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{a_\Delta} = (-1;1;2)$

⇒ pt mp (P) : $-x + y + 2z + m = 0.$

(P) qua E nên $3 + 6 + m = 0 \Leftrightarrow m = -9 \Rightarrow$ pt mp (P) : $-x + y + 2z - 9 = 0$

Vậy H thỏa $\begin{cases} -x + y + 2z - 9 = 0 \\ \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow M(-1;0;4)$

Bài toán 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho Δ: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ và A=(-1,2,1); B =(1,-2,-1). Tìm trên Δ điểm M sao cho MA+MB nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Nhận xét đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{v_\Delta} = (-1, 2, 1)$

Và $\overrightarrow{AB} = (2, -4, -2) / / \overrightarrow{v_\Delta}$ Thay toạ độ A vào phương trình Δ được:

$\dfrac{-2}{-1} \neq \dfrac{2}{2} \neq \dfrac{3}{1}$

Vậy điểm A không thuộc Δ nên AB // Δ

Ta có phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \quad\quad (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$

Gọi I là trung điểm của AB thì I=(0,0,0). Gọi M là hình chiếu của I trên Δ thì M=(1-t , 2t , t-1) (1)

Vậy: $\overrightarrow{IM} = (1 - t, 2t, t - 1)$. Ta có: $\overrightarrow{v_\Delta}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + 4t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Thay $t = \frac{1}{3}$ vào (1) ta được $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ vì AB // Δ nên A',M, B thẳng hàng và MA'=MB. Lấy điểm M' tuỳ ý thuộc Δ.

Ta có: M'A +M'B=M'A'+M'B$\geq$ A'B= MA'+ MB = MA+ MB

Cách 2:

Nhận xét đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{v_\Delta} = (-1, 2, 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (2, -4, -2) // \overrightarrow{v_\Delta}$.

Thay toạ độ A vào phương trình Δ được: $\frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{3}{1}$. Vậy điểm A không thuộc Δ nên AB // Δ. Ta có phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \quad\quad (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của A trên Δ thì H=(1-t,2t,-1+t) (1)

Vậy $\overrightarrow{AH} = (-t + 2, 2t - 2, t - 2)$

Ta có $\overrightarrow{v_\Delta}.\overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow t - 2 + 4t - 4 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow 6t = 8 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$

Thay $t = \frac{4}{3}$ vào (1) được toạ độ điểm $H = \left(\frac{-1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Gọi $A' = (x_1, y_1, z_1)$ là điểm đối xứng với A qua Δ

Ta có: $\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{2}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{-2}{3}\right) // \vec{v} = (1, -8, -1)$

Vậy phương trình đường thẳng A'B là: $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{-8} = \frac{z + 1}{-1}$

Vậy phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \qquad (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$

Gọi M=(x,y,z) là giao điểm của A'B và Δ thì toạ độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 1 + s = 1 - t \\ -2 - 8s = 2t \\ -1 - s = -1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ s = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{-2}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

Nhận xét M là điểm cần tìm. Thật vậy, lấy điểm M tuỳ ý trên Δ
Ta có: M'A+M'B=M'A'+M'B$\geq$ A'B=MA'+MB=MA+MB.

<u>Bài toán 7:</u> Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, choΔ: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ và A=(-1,2,1); B =(1,-2,-1). Tìm trên Δ điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

<u>Hướng dẫn giải</u>

<u>Cách 1:</u>

Nhận xét đường thẳng Δcó vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{v_\Delta} = (-1, 2, 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (2, -4, -2) // \overrightarrow{v_\Delta}$.

Thay toạ độ A vào phương trình Δ được: $\frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{3}{1}$.

\Vậy điểm A không thuộc Δnên AB// Δ

Ta có phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \qquad (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$

Gọi I là trung điểm của AB thì I=(0,0,0) Gọi M là hình chiếu của I trên Δthì M=(1-t , 2t , t-1) (1)

Vậy:$\overrightarrow{IM} = (1 - t, 2t, t - 1)$

Ta có: $\overrightarrow{v_\Delta}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + 4t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Thay $t = \frac{1}{3}$ vào (1) ta được $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

Ta chứng minh điểm M cần tìm:

Thật vậy. Gọi M' là điểm tuỳ ý thuộc Δ

Ta có: $\left|\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{M'B}\right| = 2\left|\overrightarrow{M'I}\right| = 2M'I \geq 2MI = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$

Cách 2:

Ta có phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \qquad (t \in R) \\ z = -1+t \end{cases}$

Lấy điểm M $(1-t\,;2t\,;-1+t)$

Ta có $\overrightarrow{AM}$ = (2-t;2t-2;t-2) và $\overrightarrow{BM} = (-t;2t+2;t)$

Nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$ =(2-2t;4t;2t-2)

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(2\text{-}2t)^2+16t^2+(2t\text{-}2)^2} = \sqrt{24t^2-16t+8}$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi t = $\frac{1}{3}$, tức $M = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

Bài toán 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, choΔ: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ và A=(-1,2,1); B=(1,-2,-1) Tìm trên Δ điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \qquad (t \in R) \\ z = -1+t \end{cases}$

Gọi M là điểm tuỳ ý thuộc Δ điểm M=(1-t , 2t , t-1) (*)

Ta có

$\overrightarrow{MA} = (t-2, 2-2t, 2-t)$

$\overrightarrow{MB} = (t,-2-2t,-t) \Rightarrow -3\overrightarrow{MB} = (-3t, 6t+6, 3t)$

Vậy

$P = \overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB} = (-2t-2, 4t+8, 2t+2)$

$$P = \left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{4t^2+8t+4+16t^2+64t+64+4t^2+8t+4}$$
$$= \sqrt{24t^2+80t+72}$$

P nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = \frac{-5}{3}$

Khi $t = \frac{-5}{3}$ vào (*) ta được $M = \left(\frac{8}{3}, \frac{-10}{3}, \frac{-8}{3}\right)$

<u>Bài toán 9:</u> Trong không gian Oxyz cho đường thẳng: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z}{-3}$ (d) và 2 điểm $M_1(2 ; 1; 5)$; $M_2(4 ; 3 ; 9)$. Tìm điểm $I \in (d)$ sao cho $IM_1 + IM_2$ nhỏ nhất.

<u>Hướng dẫn giải</u>

Ta có (d) có véc tơ chỉ phương là $\vec{a} = (1, -5, -3)$ và đi qua điểm A(2 ; -5 ; 0).

Phương trình tham số của (d) : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 - 5t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3t \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (2, 2, 4)$ nên phương trình tham số đường thẳng M_1M_2 là:

$\begin{cases} x = 2 + m \\ y = 1 + m \quad (m \in \mathbb{R}) \\ z = 5 + 2m \end{cases}$

Toạ độ giao điểm nếu có của (d) và đường thẳng M_1M_2 là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} 2 + t = 2 + m \\ -5 - 5t = 1 + m \\ -3t = 5 + 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = m \\ m = -1 \\ t = -1 \end{cases}$.

Giao điểm E (1, 0, 3). Ta có $\overrightarrow{EM_1} = (1; 1; 2), \overrightarrow{EM_2} = (3; 3; 6)$.

Vậy $\overrightarrow{EM_2} = 3\overrightarrow{EM_1}$ nên M_1 và M_2 ở về cùng 1 phía đối với đường thẳng (d).

Gọi (P) là mặt phẳng qua M_1 và (P) (d) nên phương trình mặt phẳng (P) là:

$$1(x - 2) - 5(y - 1) - 3(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 5y - 3z + 18 = 0$$

Giao điểm H của (d) với mặt phẳng (P):

$$\begin{cases} x - 5y - 3z + 18 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = -5 - 5t \\ z = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{9}{7} \\ x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{10}{7} \\ z = \frac{27}{7} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{7}; \frac{10}{7}; \frac{27}{7}\right)$$

Gọi M' là điểm đối xứng của M_1 qua (d) nên H là trung điểm M_1M', do đó:

$$\begin{cases} x' = 2x_H - x_1 = -\dfrac{4}{7} \\ y' = 2y_H - y_1 = \dfrac{13}{7} \\ z' = 2z_H - z_1 = \dfrac{19}{7} \end{cases} \Rightarrow M'\left(-\dfrac{4}{7};\dfrac{13}{7};\dfrac{19}{7}\right)$$

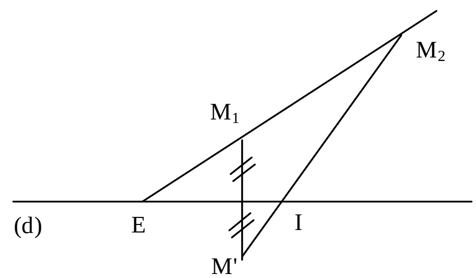
Khi đó mọi điểm trên (d) cách đều 2 điểm M_1 và M'.

Nên : $FM_1 + FM_2 = FM' + FM_2$, $F \in (d)$

Tổng này nhỏ nhất khi và chỉ khi F là giao điểm của (d) với đường thẳng M_2M' (vì M_2 và M' ở hai bên đường thẳng (d)). Ta có : $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(\dfrac{32}{7};\dfrac{8}{7};\dfrac{44}{7}\right)$

Phương trình đường thẳng qua M' M_2 là: $\begin{cases} x = 4 + 8t' \\ y = 3 + 2t' \\ z = 9 + 11t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

Giao điểm của (d) với $M'M_2$ là nghiệm hệ phương trình:



$$\begin{cases} 2 + t = 4 + 8t' \\ -5 - 5t = 3 + 2t' \\ -3t = 9 + 11t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -\dfrac{3}{7} \\ t = -\dfrac{10}{7} \end{cases}$$

Toạ độ điểm I cần tìm là : $I(\dfrac{4}{7};\dfrac{15}{7};\dfrac{30}{7})$

<u>Bài toán 10:</u> Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ với điểm A=(-1;-1;0) và điểm B=(5;2;-3). Tìm M thuộc Δ sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

<u>Hướng dẫn giải</u>

Cách 1:

Phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in R)$

Do $M \in \Delta \Rightarrow M = (1 - t, 2t, t - 1)$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (2-t, 2t+1, t-1)$

$\overrightarrow{BM} = (-4-t, 2t-2, t+2)$

Đặt

$$P = \left|MA - MB\right| = \left|\sqrt{(2-t)^2 + (2t+1)^2 + (t-1)^2} - \sqrt{(t+4)^2 + (2t-2)^2 + (t+2)^2}\right|$$

$$= \left|\sqrt{6t^2 - 2t + 6} - \sqrt{6t^2 + 4t + 24}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sqrt{6}} = = \left|\sqrt{\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{36}} - \sqrt{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{35}{9}}\right|$$

Chọn M'=(t, 0); $A' = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right); B' = \left(\frac{-1}{3}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sqrt{6}} = \left|MA' - MB'\right| \le A'B'$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi 3 điểm M',A',B' thẳng hàng hay $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MB'} \quad (k \in R)$.

Vậy $\overrightarrow{MA'} = \left(\frac{1}{6} - t, \frac{\sqrt{35}}{6}\right)$; $\overrightarrow{MB'} = \left(\frac{-1}{3} - t, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$

Mà $\overrightarrow{MA'} // \overrightarrow{MB'} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{6} - t}{\frac{-1}{3} - t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} - 2t = \frac{-1}{3} - t \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$

Vậy $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2:

Đường thẳng Δ đi qua điểm C=(1, 0, -1) và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{v_\Delta} = (-1, 2, 1)$. Suy ra: $\overrightarrow{AB} = (6, 3, -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (2, 1, -1)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_\Delta}\right] = \left(\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = (9, -3, 15)$

và $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_\Delta}\right].\overrightarrow{AC} = 18 - 3 - 15 = 0$

Vậy 2 đường thẳng AB và Δ đồng phẳng

Ta có phương trình AB:

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-3}\Leftrightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=2y+2\\y+z=-1\end{cases}$$

Phương trình $\Delta:\begin{cases}2x-2=-y\\x-1=-z-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=2\\x+z=0\end{cases}$

Gọi D là giao điểm của AB và Δ. Toạ độ D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}2x+y=2\\x+z=0\\y+z=-1\\x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow D=(1,0,-1)$$

Ta có : $x_A<x_D<x_B$. Vậy A và B nằm khác phía so với đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của của B trên đường thẳng Δ. Toạ độ H=(1-t, 2t, t-1) là 1 điểm thuộc Δ.

Tacó: $\overrightarrow{HB}=(t+4,2-2t,-2-t)$

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{v_\Delta}=0\Leftrightarrow-(t+4)+2(2-2t)-2-t=0$$

$$\Leftrightarrow-t-4+4-4t-2-t=0\Leftrightarrow-6t=2\Leftrightarrow t=\frac{-1}{3}$$

Vậy $H=\left(\frac{4}{3},\frac{-2}{3},\frac{-4}{3}\right)$

Gọi B là điểm đối xứng với B qua đường thẳng Δ thì H là trung điểm của BB'.

Nên toạ độ $B'=\left(\frac{-7}{3},\frac{-10}{3},\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB'}=\left(\frac{-4}{3},\frac{-7}{3},\frac{1}{3}\right)//\overrightarrow{v_{AB'}}=(4,7,-1)$

Vậy phương trình đường thẳng AB' là:

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{-1}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+7=4y+4\\-x-1=4z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x-4y=-3\\x+4z=-1\end{cases}$$

Gọi M' là điểm bất kỳ trên đường thẳng Δ thì:

$$\left|M'A-M'B\right|=\left|M'A-M'B'\right|\le AB'=\left|MA-MB'\right|=\left|MA-MB\right|$$

Vậy toạ độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}7x-4y=-3\\x+4z=-1\\2x+y=2\\x+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{4}{3}\\z=\frac{-1}{3}\end{cases}\Rightarrow H=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}\right)$$

Bài toán 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \text{ vaø } \Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 v song song với đường thẳng Δ_2.

b) Cho điểm M(2;1;4). Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH cĩ độ di nhỏ nhất.

(Đại học khối A – 2002)

Hướng dẫn giải

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 v song song với đường thẳng Δ_2.

Δ_1 có cặp VTPT là $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (1;-2;1) \\ \overrightarrow{n_2} = (1;2;-2) \end{cases} \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\overrightarrow{a_1} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (2;3;4)$

Trong Δ_1 cho $z = 0$, ta được $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1$ qua $A(0;-2;0)$

$\left.\begin{array}{l} \text{Vì mp (P) chứa } \Delta_1 \text{ nên } \overrightarrow{a_1} = (2;3;4) \text{ là 1 VTCP của (P)} \\ \text{mp (P) // } \Delta_2 \text{ nên } \overrightarrow{a_2} = (1;1;2) \text{ là 1 VTCP của (P)} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow (P)$ có VTPT là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] = (2;0;-1)$

$\Rightarrow$ *pt* mp (P) dạng : $2x - z + m = 0$. (P) qua $A(0;-2;0)$ nên $m = 0$.

Vậy pt mp (P) là : $2x - z = 0$

b) Tìm H $\in \Delta_2$ để MH nhỏ nhất.

Kẻ $ME \perp \Delta_2$. Ta có $ME \le MH$.

Vậy MH min $\Leftrightarrow MH = ME \Leftrightarrow H \equiv E -$ hình chiếu của M xuống Δ_2

Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với Δ_2 thì (Q) có VTPT là $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{a_2} = (1;1;2)$

$\Rightarrow$ *pt* mp (Q) dạng : $x + y + 2z + m = 0$. Vì (Q) qua $M(1;2;4)$ nên $m = -11$

Vậy pt mp (Q) : $x + y + 2z - 11 = 0$

H thỏa : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \\ x + y + 2z - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \Rightarrow H(2;3;3) \\ z = 3 \end{cases}$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho đường tròn tâm O bán kính R. Xét hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ (S, A cố định), SA=h cho trước, đáy ABCD là tứ giác tùy ý nội tiếp một đường tròn đã cho mà các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.

a) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp (đi qua 5 đỉnh của hình chóp).

b) Hỏi đáy ABCD là hình gì để thể tích hình chóp đạt giá trị lớn nhất.

(Đại học Quốc gia Hà Nội-1998)

Bài 2: Cho đường tròn (C) tâm O, đường kính AB=2R. Điểm M di động trên (C) và AM=x. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa (C) tại điểm A, lấy một điểm cố định S và AS=h

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAM) và (SBM) vuông góc với nhau

b) Tính thể tích tứ diện SABM theo R, h, x. Tìm những vị trí của M trên (C) để thể tích tứ diện này đạt giá trị lớn nhất.

(Đại học sư phạm Quy Nhơn-1998)

Bài 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) : x – y + z + 3 = 0 và hai điểm A(-1;-3;-2) ; B(-5;7;12).

a) Tìm tọa độ điểm A’ là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

b) Giả sử M l một điểm chạy trn mặt phẳng (P), tìm gi trị nhỏ nhất của biểu thức: MA + MB

(Dự bị 2 – Đại học khối A – 2002)

Bài 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các điểm A(-1;2;3), B(0;3;1), C(2;2;-1) và D(4;-2;1). Tìm M∈AB, N∈CD sao cho độ dài đoạn MN nhỏ nhất.

KẾT LUẬN

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu sách hiện nay để vừa viết, vừa mang đi giảng dạy ngay cho các em học sinh của mình từ đó kiểm nghiệm và bổ sung thiếu sót, cùng với việc tiếp thu có chọn lọc ý kiến của các bạn đồng nghiệp để dần hòan thiện bộ tài liệu này, nhưng khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những đóng góp quý báu của quý thầy giáo, cô giáo, các bạn đồng nghiệp và các bạn đọc gần xa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa, sách bài tập Hình học 12 (Chuẩn và Nâng cao)
2. Đề thi ĐH của các năm và Bộ đề năm 1996.
3. Tài liệu khai thác trên mạng.
4. Website tải tài liệu môn Toán: www.toanmath.com