

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức $P = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} : \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2 - x}{x - \sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Chứng minh $P = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P = \frac{9}{2}$.

Câu 2 (2 điểm). Công ty viễn thông A có hai gói cước gọi điện thoại hàng tháng được tính như sau:

+) Gói cước 1: 1 800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên và 1 500 đồng/phút cho thời gian còn lại.

+) Gói cước 2: 2 000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên, 1 800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo và 1 200 đồng/phút cho thời gian còn lại.

Sau khi cân nhắc thời gian gọi trung bình mỗi tháng, bác Minh chọn gói cước 2 vì so với gói cước 1 thì bác Minh sẽ tiết kiệm được 66 000 đồng. Hỏi một tháng trung bình bác Minh gọi điện thoại bao nhiêu phút?

Câu 3 (2 điểm). Spring Cup là giải bóng đá thường niên dành cho học sinh nam của trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội do câu lạc bộ thể thao CSF – CSP Sporting Federation (Liên minh Thể thao Chuyên Sư Phạm) tổ chức.

Ở mùa giải Spring Cup 2024, một bảng đấu gồm có 5 đội A, B, C, D, E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?

b) Khi kết thúc bảng đấu, các đội A, B, C, D, E lần lượt có điểm số là 10, 9, 6, 4, 0. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

Câu 4 (3 điểm). Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của BC với OA ; I là giao điểm của đoạn thẳng OA với (O) .

a) Chứng minh BI là tia phân giác của góc ABH .

b) Kẻ đường kính BD của (O) . Tiếp tuyến với (O) tại D cắt đường thẳng BC tại điểm E . Chứng minh AD vuông góc với OE .

c) Trong trường hợp góc BDC bằng 60° , hãy tính theo R diện tích phần hình phẳng nằm phía trong tam giác ABC và nằm phía ngoài (O) .

Câu 5 (1 điểm). Xét bốn số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có giá trị tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{2}$ và tổng của ba số bất kỳ trong bốn số đó là một số nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số đó.

.....**Hết**.....

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2025 – LẦN 1
BÀI THI MÔN 2: Môn Toán chung

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a		1,0
		$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right)$	0,25
		$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} : \frac{x-1+\sqrt{x}+2-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$	0,25
		$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$	0,25
		$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	b		1,0
		Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ thì $P = \frac{9}{2}$ dẫn đến $2x - 9\sqrt{x} + 9 = 0$	0,25
		$(\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}-3) = 0$	0,25
		$\sqrt{x} = 3$ hoặc $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$	0,25
		$x = 9$ hoặc $x = \frac{9}{4}$ Đổi chiếu với điều kiện, ta có các giá trị cần tìm của x là $x = 9$ và $x = \frac{9}{4}$	0,25
2			2,0
		Gọi t (phút) là thời gian trung bình mà bác Minh gọi điện thoại mỗi tháng và $H(t)$ (đồng) là số tiền chênh lệch giữa gói cước 1 và gói cước 2 khi bác Minh gọi t (phút).	0,25
		Nếu $0 < t \leq 30$ thì $H(t) = 1\,800t - 2\,000t = -200t$ (loại)	0,5

		Nếu $30 < t \leq 60$ thì $H(t) = 1\,800t - [2\,000.30 + (t - 30).1\,800] = -6\,000 \quad (\text{loại})$	0,5
		Nếu $t > 60$ thì $H(t) = 1\,800.60 + (t - 60).1\,500 - [2\,000.30 + 1\,800.30 + (t - 60).1\,200]$ $H(t) = 300t - 24\,000$	0,5
		Theo giả thiết $H(t) = 66\,000$ Từ đó ta tìm được $t = 300$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy trung bình mỗi tháng bác Minh gọi điện thoại 300 phút.	0,25
3			2,0
	a	Tất cả có $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ trận.	0,5
	b		1,5
		Gọi x là số trận có thắng, thua và y là số trận hòa (x, y là các số tự nhiên; $x, y \leq 10$).	0,25
		Theo câu a), ta có $x + y = 10$. (1)	0,25
		Vì mỗi trận thắng – thua có tổng số điểm là 3 và mỗi trận hòa có tổng số điểm là 2 nên $3x + 2y = 10 + 9 + 6 + 4 + 0 = 29$. (2)	0,25
		Giải hệ phương trình (1) và (2), ta được $(x, y) = (9, 1)$.	0,25
		Suy ra chỉ có một trận hòa.	
		Vì chỉ có một trận hòa (hai đội này mỗi đội được 1 điểm), mỗi trận thắng – thua (mỗi đội được 3 điểm hoặc 0 điểm) nên chỉ có hai đội hòa có số điểm chia 3 dư 1.	0,25
		Vậy đó là trận hòa giữa hai đội A và D .	0,25
4			
	a		1,0

		Kết hợp với $OD = OB$, ta có $OH.OA = OD^2$ hay $\frac{OH}{OD} = \frac{OD}{OA}$.	
		Điều này dẫn đến $\triangle OHD \sim \triangle ODA$ (c.g.c) và $\widehat{ODH} = \widehat{OAD}$ (*)	0,25
		Vì tứ giác $OHED$ nội tiếp đường tròn đường kính OE nên $\widehat{ODH} = \widehat{OEH}$ (**)	0,25
		Từ (*) và (**) ta có $\widehat{OAD} = \widehat{OEH}$ Gọi M là giao điểm của AD và OE . Ta có $\triangle OAM \sim \triangle OEH$ (g.g) và dẫn đến $\widehat{OMA} = \widehat{OHE} = 90^\circ$. Vậy EO vuông góc với AD .	0,25
	c		1,0
		Tam giác BCD vuông tại C và góc BDC bằng 60° nên $BC = R\sqrt{3}$. Tam giác ABC cân tại A , góc ABC bằng 60° nên tam giác ABC đều có cạnh bằng $R\sqrt{3}$.	0,25
		$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BA = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}R^2}{2}.$ $S_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}R^2}{2}.$ $S_{OBAC} = S_{OAB} + S_{OAC} = \sqrt{3}R^2.$	0,25
		Do $\widehat{BIC} = 120^\circ$ nên diện tích hình quạt tròn BOC giới hạn bởi hai bán kính OB, OC và cung BIC là $\frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$	0,25
		Vậy diện tích cần tìm là $\sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{3} = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$.	0, 25
5			1,0
		Cách 1. Gọi a, b, c, d là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện đã nêu trong đề bài. Đặt $x = a + b + c, y = a + b + d, z = a + c + d, t = b + c + d$, và $s = a + b + c + d$. Khi đó, theo giả thiết của bài ra, ta có: $ a \leq \frac{1}{2}, b \leq \frac{1}{2}, c \leq \frac{1}{2}, d \leq \frac{1}{2}$ và x, y, z, t là các số nguyên. Khi đó $x + y + z + t = 3(a + b + c + d) = 3a + 3(b + c + d) = 3a + 3t$ là số nguyên nên $3a$ là số nguyên. Tương tự $3b, 3c, 3d$ là số nguyên.	0,25
		Đặt $A = 3a, B = 3b, C = 3c, D = 3d$. Khi đó A, B, C, D là các số nguyên và $ A \leq \frac{3}{2}, B \leq \frac{3}{2}, C \leq \frac{3}{2}, D \leq \frac{3}{2}$	0,25

	Từ đó suy ra $A, B, C, D \in \{-1; 0; 1\}$.	
	Vì $A + B + C = 3x, A + B + D = 3y, A + C + D = 3z, B + C + D = 3t$ là các số chia hết cho 3 nên A, B, C, D có cùng số dư khi chia cho 3. Đến đến $A = B = C = D = -1; A = B = C = D = 0; A = B = C = D = 1$.	0,25
	Từ đó suy ra $a = b = c = d = \frac{-1}{3}; a = b = c = d = 0; a = b = c = d = \frac{1}{3}$. Vậy $s \in \left\{-\frac{4}{3}; 0; \frac{4}{3}\right\}$	0,25
	Cách 2. Gọi a, b, c, d là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện đã nêu trong đề bài. Đặt $x = a + b + c, y = a + b + d, z = a + c + d, t = b + c + d$, và $s = a + b + c + d$. Khi đó, theo giả thiết của bài ra, ta có: $ a \leq \frac{1}{2}, b \leq \frac{1}{2}, c \leq \frac{1}{2}, d \leq \frac{1}{2} \quad (1)$ và x, y, z, t là các số nguyên. (2) Xét cặp số x, y. Do (2) nên $x - y$ là một số nguyên; hơn nữa $ x - y = c - d \leq c + d \leq 1 \text{ (do (1))} \quad (3)$ Vì thế, $x - y \in \{0; 1\}$ (4)	0,25
	Nếu $x - y = 1$ thì theo (3), phải có: $c - d = c + d = 1$. Điều vừa nêu trên tương đương với: $cd \leq 0$ và $c = d = \frac{1}{2}$ (do (1)) (5) Suy ra, $c + d = 0$. Do đó $z = a$ và $t = b$. Vì thế, $a, b \in \mathbb{Z}$ (do (2)). Từ đây và (1), suy ra $a = b = 0$. Vì vậy, $x = c$. Do đó, $c \in \mathbb{Z}$. Từ đây và (1), suy ra $c = 0$, mâu thuẫn với (5). Mâu thuẫn nhận được ở trên cho thấy $x - y \neq 1$. Do đó, từ (4) ta được $x = y$. Xét các cặp số x, z và x, t, bằng cách hoàn toàn tương tự, ta sẽ được $x = z$ và $x = t$. Vì vậy, $x = y = z = t$.	0,25
	Suy ra $3s = x + y + z + t = 4x$; Do đó, $s = \frac{4}{3}x$. (6) Tiếp theo, ta có: $x \leq a + b + c \leq \frac{3}{2}$ (do (1)); Mà $x \in \mathbb{Z}$ (theo (2)), nên $x \in \{0; 1\}$. (7) Từ (6) và (7), suy ra $s \in \left\{-\frac{4}{3}; 0; \frac{4}{3}\right\}$.	0,25

		Ngược lại, dễ thấy: $a = b = c = d = -\frac{1}{3}$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng $-\frac{4}{3}$; $a = b = c = d = 0$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng 0; $a = b = c = d = \frac{1}{3}$ là bốn số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và có tổng bằng $\frac{4}{3}$. Vậy, tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số thỏa mãn các điều kiện của đề bài là $-\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}$.	0,25
--	--	---	-------------