SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

ĐỀ THI KHẢO SÁT VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2025 – 2026
(*Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán*)
Thời gian làm bài: 150 phút.

(ĐỀ THI GỒM CÓ 01 TRANG)

Câu 1 (1,5 điểm). Cho biểu thức $S=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3}\right):\left(2+\frac{3}{\sqrt{x}-1}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức S.

b) Tìm tất cả các số thực x thoả mãn $\left(\sqrt{x}+3\right)\sqrt{x-1}.S+\sqrt{2x+5}=2x.$

Câu 2 (1,5 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 3x^3-y^3=\frac{4}{x+y} \end{cases}$.

b) Từ một tấm bìa hình tam giác vuông cân có cạnh bên bằng 10 dm, bác An cắt một hình chữ nhật có hai đỉnh thuộc cạnh đáy và mỗi cạnh bên chứa một đỉnh còn lại để làm biển quảng cáo. Hỏi bác An có thể cắt được hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Câu 3 (1,0 điểm). Bạn Ân thực hiện một thí nghiệm: Gieo một con xúc sắc có sáu mặt cân đối, đồng chất hai lần liên tiếp.

a) Tính số phần tử của không gian mẫu Ω.

b) Tính xác suất của biến cố A: "Tổng hai lần gieo là một số nguyên tố".

Câu 4 (1,0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên n để biểu thức $A=n^4+2n^3+4n^2+2n+3$ là số chính phương.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5 và $n=\frac{4^{2p}-1}{3}$. Chứng minh rằng $4^{n-5}-1$ chia hết cho $3n$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho tập hợp $S=\{1;2;...;4048\}$. Chứng minh rằng khi chọn 2025 số bất kì trong tập S ta luôn chọn được 2 số trong 2025 số đó mà số này là bội của số kia.

Câu 7 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A ngoại tiếp đường tròn (I). Một tiếp tuyến bất kì của đường tròn (I) tại điểm P cắt hai đoạn thẳng AB, AC lần lượt tại F, E (E khác A và C, F khác A và B). Hạ EK, FL cùng vuông góc với $BC(K, L\in BC)$. Gọi FK cắt LE tại điểm J. Hạ JH vuông góc với BC $(H\in BC)$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{EHJ}=\widehat{FHJ}$.

b) Chứng minh rằng $BF^2.S_{CEJK}=CE^2.S_{BFJL}$.

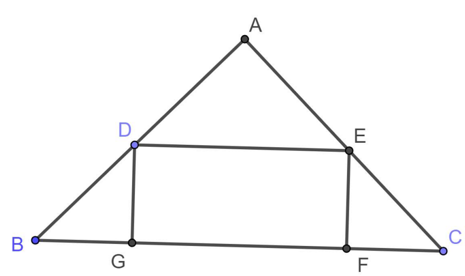
c) Gọi M là giao điểm của PJ và EK. Chứng minh rằng $\frac{MK}{ME}=\frac{PF.CE}{PE.BF}$.

------------------------------ **HẾT**---------------------------------

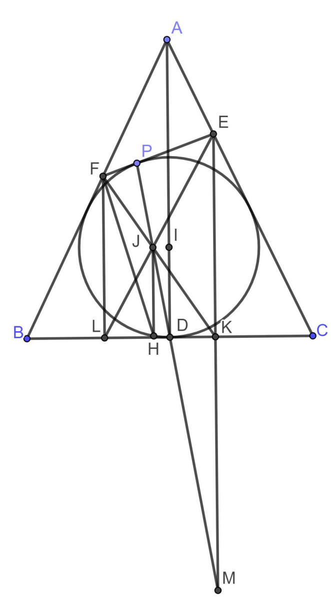
Họ tên thí sinh ……………………………………………Số báo danh ……………….

HƯỚNG DẪN CHẤM THI KHẢO SÁT VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2025 – 2026
(*Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán*)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	Cho biểu thức $S=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3}\right):\left(2+\frac{3}{\sqrt{x}-1}\right)$ a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức S. b) Tìm tất cả các số thực x thoả mãn $\left(\sqrt{x}+3\right)\sqrt{x-1}.S+\sqrt{2x+5}=2x$	**1,5 đ**
	a) ĐKXĐ $\begin{cases}x\ge 0\\ \sqrt{x}\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$	0.25
	Ta có: $S=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3}\right):\left(2+\frac{3}{\sqrt{x}-1}\right)$ $S=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}:\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)+3}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$S=\frac{x+3\sqrt{x}-x+1-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}:\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$S=\frac{2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}.\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+3}$	0,25
	b) Ta có $\left(\sqrt{x}+3\right)\sqrt{x-1}.\frac{1}{\sqrt{x}+3}+\sqrt{2x+5}=2x$ $\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{2x+5}-3\right)-\left(2x-4\right)=0\ \left(x>1\right)$	0,25
	$\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2\left(x-2\right)}{\sqrt{2x+5}+3}-2\left(x-2\right)=0$ $\left(x-2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}-2\right)=0$ Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}-2\le 1+\frac{2}{3}-2<0$ suy ra $x=2\left(\text{TM}\right)$	0,25
Câu 2	a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ 3x^3-y^3=\frac{4}{x+y}\end{cases}$. b) Từ một tấm bìa hình tam giác vuông cân có cạnh bên bằng 10 dm, bác An cắt một hình chữ nhật có hai đỉnh thuộc cạnh đáy và mỗi cạnh bên chứa một đỉnh còn lại để làm biển quảng cáo. Hỏi bác An có thể cắt được hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?	**1,5 đ**

	a) Ta có $3x^3 - y^3 = \dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x+y}\ \left(x \neq -y\right)$ $3x^4 - xy^3 + 3x^3y - y^4 - x^4 - y^4 - 2x^2y^2 = 0$ $2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0\ (*)$ Nhận xét: Nếu $y = 0$ suy ra $x = 0$ (Vô lý) Vậy $y \neq 0$. Chia cả hai vế phương trình (*) cho y^4 và đặt $t = \dfrac{x}{y}\ \left(t \neq -1\right)$ ta được phương trình: $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - t - 2 = 0$ suy ra $t = 1$ hoặc $t = -2$ (TM) Với $t = 1$ suy ra $x = y$. Ta có $2x^2 = 2$ suy ra $x = y = \pm 1$ Với $t = -2$ suy ra $x = -2y$. Ta có $5y^2 = 2$ suy ra $y = \dfrac{\sqrt{10}}{5}; x = \dfrac{-2\sqrt{10}}{5}$ hoặc $y = \dfrac{-\sqrt{10}}{5}; x = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $\left(1;1\right), \left(-1;-1\right), \left(\dfrac{-2\sqrt{10}}{5}; \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}; \dfrac{-\sqrt{10}}{5}\right)$	0,25 0,25 0,25
	b)  Xét tam giác vuông cân ABC có cạnh bên AB = AC = 10 dm. Bác An cắt hình chữ nhật DEFG như hình vẽ. Ta có $BC = 10\sqrt{2}$ Đặt $DE = FG = x\ \left(0 < x < 10\sqrt{2}\right)$. Khi đó ta có $\Delta BGD, \Delta CFE$ vuông cân tại G và F. Suy ra $BG = GD = EF = FC = \dfrac{10\sqrt{2} - x}{2}$. Khi đó ta có $S_{DEFG} = \dfrac{1}{2}x\left(10\sqrt{2} - x\right) \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x + 10\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 = 25$ Suy ra $\max S_{DEFG} = 25\,dm^2$ khi $x = 5\sqrt{2}$. Vậy diện tích của tấm bìa hình chữ nhật mà bác An có thể cắt lớn nhất là $25\,dm^2$.	0,25 0,25 0,25

Câu 3	Bạn Ân thực hiện một thí nghiệm: Gieo một con xúc sắc có sáu mặt cân đối, đồng chất hai lần liên tiếp. a) Tính số phần tử của không gian mẫu Ω. b) Tính xác suất của biến cố A: "Tổng hai lần gieo là một số nguyên tố"	**1,0 đ**
	a) Ta có $\Omega = \{(a;b) \mid a, b \in \mathbb{N}^*; 1 \le a, b \le 6\}$ Với a là kết quả lần gieo thứ nhất: có 6 cách chọn b là kết quả lần gieo thứ hai: có 6 cách chọn. Suy ra $n(\Omega) = 6.6 = 36$	0,25 0,25
	b) Xét với $a+b=2$ ta có bộ $(1;1)$ Với $a+b=3$ ta có bộ $(1;2), (2;1)$ $a+b=5$ ta có bộ $(1;4),(4;1),(2;3),(3;2)$ $a+b=7$ ta có bộ $(1;6),(6;1),(2;5),(5;2),(3;4),(4;3)$ $a+b=11$ ta có bộ $(5;6),(6;5)$. Suy ra $n(A)=1+2+4+6+2=15$ Vậy $P(A)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$	0,25 0,25
Câu 4	Tìm tất cả các số nguyên n để biểu thức $A = n^4 + 2n^3 + 4n^2 + 2n + 3$ là số chính phương.	**1,0 đ**
	Ta chứng minh +) $A > (n^2+n+1)^2$ +) $A < (n^2+n+3)^2$ Để A là số chính phương thì $A = (n^2+n+2)^2$ $n^4+2n^3+4n^2+2n+3 = n^4+2n^3+5n^2+4n+4$ $n^2+2n+1=0$ $(n+1)^2=0$ $n=-1$ Vậy với $n=-1$ thì A là số chính phương.	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 5	Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5 và $n = \dfrac{4^{2p}-1}{3}$. Chứng minh rằng $4^{n-5}-1$ chia hết cho $3n$.	**1,0 đ**
	Ta có: $n = \dfrac{4^{2p}-1}{3}$ suy ra $16^p - 1 = 3n$. Khi đó $16(16^{p-1}-1) = 3(n-5)$ Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên $(16;p)=1$. Áp dụng định lý Fermat ta có: $(16^{p-1}-1) \vdots p$ suy ra $16(16^{p-1}-1) = 3(n-5) \vdots 16p$ Mà $(3;16p)=1$ suy ra $(n-5) \vdots 16p$ hay $(n-5) \vdots 2p$. Khi đó $(4^{n-5}-1) : (4^{2p}-1) = 3n$. Ta có điều phải chứng minh.	0,25 0,25 0,25 0,25

Câu 6	Cho tập hợp $S=\{1,2,...,4048\}$. Chứng minh rằng khi chọn 2025 số bất kì trong tập S ta luôn chọn được 2 số trong 2025 số đó mà số này là bội của số kia.	**1,0 đ**
	Gọi 2025 số chọn ra bất kì từ tập S là: $a_1;a_2;...;a_{2025}$ với $1\le a_i\le 4048\ (i=1,2,...,2025)$ Phân tích các số trên theo lũy thừa của 2. Tức $a_i=2^{k_i}.b_i$ với b_i lẻ.	0,25
	Xét dãy phụ $b_1;b_2;...;b_{2025}$ gồm 2025 số lẻ và $1\le b_i\le 4047$ Mặt khác từ 1 đến 4048 có 2024 số lẻ	0,25
	Nhận xét: 2025 số lẻ $b_1;b_2;...;b_{2025}$ nhận 2024 giá trị 1; 3; 5;…; 4047 nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau. Giả sử $b_i=b_j=m$	0,25
	Xét hai số $a_i=2^{k_i}.m,\ a_j=2^{k_j}.m$. Ko mất tổng quát giả sử $k_i\ge k_j$ suy ra $a_i \vdots a_j$. Bài toán được chứng minh.	0,25
Câu 7	Cho tam giác ABC cân tại A ngoại tiếp đường tròn (I). Một tiếp tuyến bất kì của đường tròn (I) tại điểm P cắt hai đoạn thẳng AB,AC lần lượt tại F,E (E khác A và C, F khác A và B). Hạ EK,FL cùng vuông góc với $BC(K,L\in BC)$. Gọi FK cắt LE tại điểm J. Hạ JH vuông góc với $BC\ (H\in BC)$. a) Chứng minh rằng $\widehat{EHJ}=\widehat{FHJ}$. b) Chứng minh rằng $BF^2.S_{CEJK}=CE^2.S_{BFJL}$. c) Gọi M là giao điểm của PJ và EK. Chứng minh rằng $\dfrac{MK}{ME}=\dfrac{PF.CE}{PE.BF}$.	**3,0 đ**
	 a) Xét tam giác LKE có HJ // KE suy ra: $\dfrac{LH}{HK}=\dfrac{LJ}{JE}$ (1)	0,25

	Mặt khác ta có *FL* // *EK* suy ra: $\frac{FL}{EK}=\frac{LJ}{JE}\left(2\right)$ Từ (1) và (2) suy ra $\frac{FL}{EK}=\frac{HL}{HK}$ Xét hai tam giác *FLH* và *EKH* có $\begin{cases}\widehat{L}=\widehat{K}=90^0\\ \frac{FL}{EK}=\frac{HL}{HK}\end{cases}$ suy ra $\Delta FLH \backsim \Delta EKH$ Khi đó ta có $\widehat{LFH}=\widehat{KEH}$. Mặt khác ta có $\widehat{LFH}=\widehat{FHJ}$ và $\widehat{KEH}=\widehat{EHJ}$ suy ra $\widehat{EHJ}=\widehat{FHJ}$.	0,25 0,25 0,25
	b) Do *HJ* // *FL* nên $S_{FJL}=S_{FLH}$ suy ra $S_{BFJL}=S_{BFL}+S_{FLJ}=S_{BFL}+S_{FLH}=S_{BFH}\ \left(3\right)$ CMTT ta có $S_{CEJK}=S_{CEH}\ \left(4\right)$ Mặt khác ta có $\Delta FLH \backsim \Delta EKH$ suy ra $\widehat{FHB}=\widehat{EHC}$ Xét hai tam giác *FHB* và *EHC* có $\widehat{FBH}=\widehat{ECH}, \widehat{FHB}=\widehat{EHC}$ Suy ra $\Delta FHB \backsim \Delta EHC$. Do đó ta có $\frac{S_{FHB}}{S_{EHC}}=\frac{BF^2}{CE^2}$ suy ra $BF^2.S_{EHC}=CE^2.S_{FHB}\ \left(5\right)$ Từ (3), (4), (5) suy ra $BF^2.S_{CEJK}=CE^2.S_{BFJL}$.	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) Áp dụng định lý Menelauyt cho tam giác *KFE* với cát tuyến *MJP* ta có: $\frac{MK}{ME}.\frac{PE}{PF}.\frac{JF}{JK}=1\ (*)$ Mặt khác ta có hai tam giác *BFH* và *CEH* đồng dạng với nhau có hai đường cao tương ứng *FL* và *EK* nên ta có: $\frac{JF}{JK}=\frac{FL}{EK}=\frac{BF}{CE}\ (**)$ Từ (*) và (**) suy ra $\frac{MK}{ME}.\frac{PE}{PF}.\frac{BF}{CE}=1$ hay ta có $\frac{MK}{ME}=\frac{PF.CE}{PE.BF}$.	0,5 0,25 0,25

-----------**HẾT**-----------