# TỔNG HỢP CÁC BÀI TẬP THỰC TẾ ĐÚNG SAI VÀ TRẢ LỜI NGẮN (TỰ LUẬN) KINH ĐIỂN CHỦ ĐỀ MAX MIN HÀM SỐ 12

## PHẦN I. Trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \dfrac{1}{2}q$.

**a)** Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

**b)** Hàm doanh thu theo biến $p$ là $R(p) = 30 - 2p$.

**c)** Nếu của hàng bán giá mỗi kilogam sản phẩm là 7,5 nghìn thì lợi nhuận cửa hàng cao nhất.

**d)** Lợi nhuận cao nhất của cửa hàng là 112,5 nghìn đồng.

**Đáp án: Đ-S-Đ-Đ**

**Lời giải**

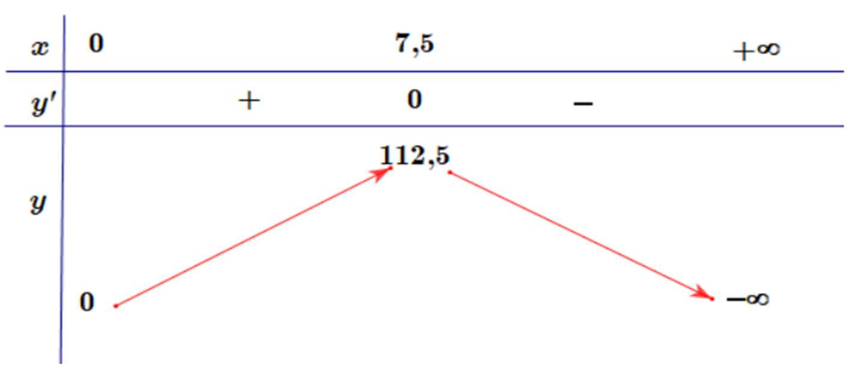
**a)** Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

**b)** Ta có $p = 15 - \dfrac{1}{2}q \Rightarrow q = 2(15 - p) = 30 - 2p$.

Khi đó $R = pq = p(30 - 2p) = 30p - 2p^2$ với $p > 0$.

**c)** Ta có $R'(p) = 30 - 4p; R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 7,5$.

Bảng biến thiên




Dựa vào BBT, ta có $\max\limits_{(0;+\infty)} R = R(7,5) = 112,5$.

Vậy nếu giá bán mỗi kilôgam sản phẩm là 7,5 nghìn đồng/kg thì sẽ đạt được doanh thu cao nhất là 112,5 nghìn đồng.

**Câu 2.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-t^3+9t^2+21t+9$ với $t$ tính bằng giây (s) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S$ tính bằng mét (m) là quãng đường vật đi trong thời gian đó.

a) Vận tốc của chất điểm chuyển động tại thời điểm $t$ (giây) là $v(t)=-3t^2+18t+21$.

b) Vận tốc của chất điểm tại giây thứ 2 là $45\text{ m/s}$.

c) Quãng đường chất điểm đi được từ lúc bắt đầu đến lúc dừng hẳn là $255(\text{ m})$.

d) Vận tốc chuyển động của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t=3(\text{ s})$.

**Câu 3.** Một cửa hàng bán cam canh Cao Phong với giá là 40000 đồng/ 1 kg . Giá nhập vào là 24000 đồng/ 1 kg . Với giá bán này cửa hàng bán được 100 kg / ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/ 1 kg thì số cam canh Cao Phong bán được sẽ tăng thêm là 10 kg .

a) Nếu giữ nguyên giá bán đầu, lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1500000 đồng.

b) Nếu giá bán là 35000 đồng/ 1 kg , khi đó cửa hàng bán được $150\text{ kg}/1$ ngày.

c) Nếu giá bán là 30000 đồng/ 1 kg , khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1300000 đồng.

d) Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 1690000 đồng.

**Đáp án: S-Đ-S-Đ**

**Lời giải**

a) Sai

Nếu giữ nguyên giá bán 40000 đồng/ 1 kg thì doanh thu theo ngày của cửa hàng là: $40000.100=4000000$ đồng.

Chi phí nhập $100\text{ kg}/1$ ngày là: $24000\cdot 100=2400000$ (đồng).

Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là: $4000000-2400000=1600000$ (đồng).

b) Đúng

Gọi $x$ (nghìn đồng) là giá mà cửa hàng định bán ( $24\le x\le 40$ ).

Số giá đã giảm là: $40-x$ (nghìn đồng).

Theo bài ra, ta có số cam bán được theo ngày là $100+(40-x).10(\text{ kg})$.

Khi $x=35$, số cam bán được theo ngày là: $100+5.10=150\text{ kg}$.

c) Sai

Doanh thu của cửa hàng khi bán được $100+(40-x).10\text{ kg}$ là:

$T(x)=\left[100+(40-x)\cdot 10\right]\cdot x=(500-10x)x$ (nghìn đồng).

Chi phí để nhập số cam đó là: $C(x)=\left[100+(40-x)\cdot 10\right]\cdot 24=(500-10x)\cdot 24$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là:

$L(x)=T(x)-C(x)=(500-10x)x-(500-10x)24=-10x^2+740x-12000$.

Nếu giá bán là 30000 đồng/ 1 kg thì lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là:

$L(30)=-10.30^2+740.30-12000=1200$ (nghìn đồng).

d) Đúng

Ta có: $L'(x)=-20x+740; L'(x)=0 \Rightarrow x=37$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | 24 | | 37 | | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| $L'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $L(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Dựa vào BBT ta thấy tại x=37, thì lợi nhuận của cửa hàng đạt tối đa. Lợi nhuận tối đa là

$L(37)=1690000$ đồng.

**Câu 4.** Một cơ sở sản xuất có thể cung cấp 1000 sản phẩm $A$ trong 1 tháng. Qua khảo sát thì thấy rằng nếu sản phẩm $A$ bán với giá 100 nghìn đồng thì có 290 người mua, nếu cứ giảm 10 nghìn đồng thì lại có thêm 50 người mua. Gọi $p$ là giá bán sản phẩm $A$ (nghìn đồng) và $R(p)$ là hàm doanh thu trong 1 tháng (nghìn đồng).

a) Số sản phẩm bán ra là $790-5p$.

b) Hàm doanh thu $R(p)=1000-790p+5p^2$.

c) Phương trình $R'(p)=0$ có nghiệm là $p=79$.

d) Doanh thu lớn nhất trong 1 tháng là 31.205 .000 đồng.

**Đáp án: Đ-S-Đ-Đ**

**Lời giải**

a) Gọi $p=ax+b(*), x$ là số sản phẩm bán ra.

Vì sản phẩm $A$ bán với giá 100 nghìn đồng thì có 290 người mua nên ta có $p=100$ và $x=290$ thay vào phương trình (*) ta có $290a+b=100(1)$

Vì cứ giảm 10 nghìn đồng thì lại có thêm 50 người mua nên ta có $\mathrm{p}=90, \mathrm{x}=340$ thay vào phương trình (*) ta có $340a+b=90(2)$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}290a+b=100\\340a+b=90\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\b=158\end{cases}$

Ta có $p=-\frac{1}{5}x+158 \Leftrightarrow x=790-5p$

Vậy số sản phẩm bán ra là $790-5p$ .

Nên suy ra mệnh đề đúng.

b) Ta có doanh thu của cơ sở sản xuất là $R(p)=(790-5p)\cdot p=-5p^2+790p$

Nên suy ra mệnh đề sai.

c) Ta có $R(p)=-5p^2+790p$ nên $R'(p)=-10p+790$

$R'(p)=0 \Leftrightarrow -10p+790=0 \Leftrightarrow p=79$ .

Nên suy ra mệnh đề đúng.

d) Ta có bảng biến thiên

| $p$ | $0$ | | $79$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $R'(p)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $R(p)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Doanh thu lớn nhất trong tháng là $R(79)=31205$ nghìn đồng $=31.205.000$ đồng

Nên suy ra mệnh đề đúng.

**Câu 5.** (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^3-3t^2+8t+1$, trong đó $t$ tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

**a)** Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3(\text{ s})$ bằng $8 \text{ m/s}$.

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $13 \text{ m}$ , vận tốc khi đó bằng $8 \text{ m/s}$.

c) Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5 \text{ m/s}$.

d) Gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng $2 \text{ m/s}^2$ .

**Đáp án: S-Đ-Đ-S**

**Lời giải**

Phương trình vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t$ là: $v(t)=[s(t)]'=3t^2-6t+8(\text{ m/s})$.

Phương trình gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t$ là: $a(t)=[v(t)]'=6t-6(\text{ m/s}^2)$.

a) **Sai**: Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3(\text{ s})$ bằng

$v(3)=3.3^2-6.3+8=17(\text{ m/s})$.

b) **Đúng**: Tại thời điểm mà chất điểm đi chuyển được $13 \text{ m}$ , vận tốc khi đó bằng $8 \text{ m/s}$.

Chất điểm di chuyển được 13 m có phương trình là: $13=t^3-3t^2+8t+1 \Leftrightarrow t=2$.
Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2(\mathrm{~s})$ bằng $v(2)=3.2^2-6.2+8=8(\mathrm{~m/s})$.

c) **Đúng**: Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5 \mathrm{~m/s}$.

Ta có: $v(t)=[s(t)]'=3t^2-6t+8=3(t-1)^2+5 \geq 5 \ \forall t$

Do đó vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5 \mathrm{~m/s}$ tại $t=1(\mathrm{~s})$

d) **Sai**: Gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng $2 \mathrm{~m/s^2}$.

Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5 \mathrm{~m/s}$ tại $t=1(\mathrm{~s})$. Khi đó, gia tốc tại thời điểm $t=1(\mathrm{~s})$ bằng: $a(1)=6.1-6=0\left(\mathrm{~m/s^2}\right)$.

Vậy gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng $0 \mathrm{~m/s^2}$.

**Câu 6**. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích $V$ (tính theo lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng $t$ (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4,5\,(0 \leq t \leq 0,5).$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm $t$ với $0 \leq t \leq 0,5$. Biết 1 lít xăng có giá là 21.000 đồng.

**a)** Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1,5 lít.

**b)** Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Số tiền người mua phải trả là 787.500 đồng.

**c)** Khi xăng chảy vào bình xăng thì tốc độ tăng thể tích là lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 21 .

**d)** Phương trình $V'(t)=0$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

**Đáp án: S-Đ-S-S**

**Lời giải**

a) **Sai**. Vì lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là $V(0)=300\left(0^2-0^3\right)+4,5=4,5$ lít.

b) **Đúng**. Ta có $30 \mathrm{~s}=0,5$ phút .

Suy ra $V(0,5)=300\left(0,5^2-0,5^3\right)+4,5=42$ lit.

Khi đó số xăng đã mua là $42-4,5=37,5$.

Vậy số tiền người mua phải trả là $37,5 \cdot 21000=787500$ đồng.

c) **Sai**. Xét hàm số $V'(t)=300\left(2t-3t^2\right)$ với $0 \leq t \leq 0,5$.

Suy ra $V''(t)=300(2-6t)$

Khi đó $V''(t)=0 \Leftrightarrow 300(2-6t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

Với $V'(0)=0; V'\left(\dfrac{1}{3}\right)=100; V'(0,5)=75$.

Vậy $\max\limits_{t\in[0;0,5]} V'(t)=V'\left(\dfrac{1}{3}\right)=100$. Suy ra tại thời điểm ở giây thứ $\dfrac{1}{3}\cdot 60=20$ thì tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

d) **Sai**. Phương trình $V'(t)=0 \Leftrightarrow 300\left(2t-3t^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{2}{3}\notin\left[0;\dfrac{1}{2}\right] \end{array}\right.$.

**Câu 7**. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Bác Lâm muốn gò một cái thùng bằng tôn dạng hình hộp chữ nhật không nắp có đáy là hình vuông và đựng đầy được 32 lít nước. Gọi độ dài cạnh đáy của thùng là $x(\text{dm})$, chiều cao của thùng là $h(\text{dm})$.

a) Thể tích của thùng là $V=x^2\cdot h\left(\text{dm}^3\right)$.

b) Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là: $S=4xh+x^2\left(dm^2\right)$.

c) Đạo hàm của hàm số $S(x)=\dfrac{128}{x}+x^2$ là $S'(x)=\dfrac{128}{x^2}+2x$.

d) Để làm được cái thùng mà tốn ít nguyên liệu nhất thì độ dài cạnh đáy của thùng là 4 dm.

**Lời giải**

a) Thể tích hình hộp chữ nhật là $V=x^2\cdot h$. Suy ra a) **đúng**.

b) Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp là: $S=4xh+x^2\left(dm^2\right)$. Suy ra b) **đúng**.

c) Vì $V=32l=32\text{dm}^3$ nên $x^2h=32 \Leftrightarrow h=\dfrac{32}{x^2}$. Do đó: $S=4x\cdot\dfrac{32}{x^2}+x^2=\dfrac{128}{x}+x^2$. Suy ra $S'(x)=-\dfrac{128}{x^2}+2x$. Do đó c) **sai**.

d) Ta có: $S'(x)=-\dfrac{128}{x^2}+2x=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^3-128}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=4$. Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy độ dài đáy thùng bằng 4 dm thì chi phí là thấp nhất.
Suy ra d) **đúng**.

**Câu 8.** Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ tru ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery.

Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0(s)$ cho đến khi tên lừa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t=126(\text{ s})$, cho bởi hàm số sau:
$v(t)=0,001302t^3-0,09029t^2+23,61t-3,083$($v$ được tính bằng feet $/s$,1 feet $=0,3048$ m).

a) Vận tốc của tàu con thoi luôn tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

b) Gia tốc lớn nhất mà tàu con thoi có thể đạt được trong lúc thực hiện sứ mệnh trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là $62,87\text{feet}/\text{s}^2$.

c) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến thời điểm $t=23(s)$.

d) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ $t=21,5(s)$ đến $t=126(s)$.

**Lời giải**

a) **Đúng**.

Ta có: $v'(t)=3,906\cdot10^{-3}t^2-0,18058t+23,61>0,\forall t\in(0;126)$.

Suy ra vận tốc của tàu con thoi luôn tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

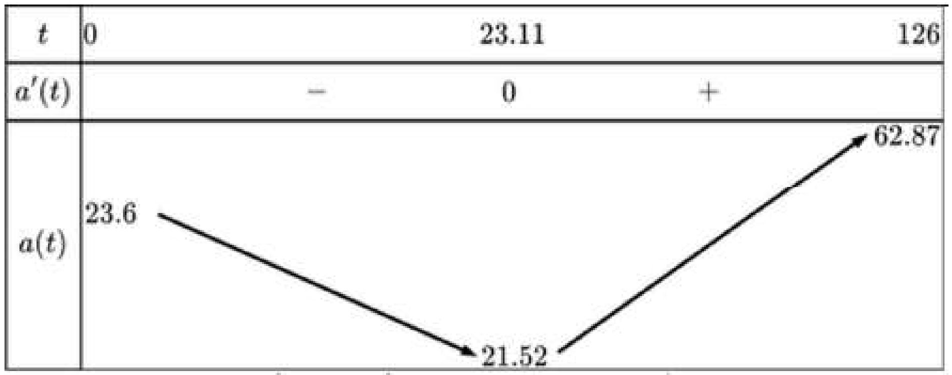
b) **Đúng**.

$$a(t)=v'(t)=3,906\cdot10^{-3}t^2-0,18058t+23,61$$

Ta có: $a'(t)=7,812\cdot 10^{-3}t-0,18058=0$

$$\Rightarrow t\approx 23,11.$$

Bảng biến thiên của $a(t)$




Dựa vào BBT thì gia tốc lớn nhất mà tàu con thoi có thể đạt được trong lúc thực hiện sứ mệnh trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là $62,87\,\text{feet}/\text{s}^2$.

c) **Sai**.

Dựa vào BBT ta thấy gia tốc giảm trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến thời điểm $t=23(\text{ s})$.

d) **Sai**.

Dựa vào BBT ta thấy gia tốc vừa giảm vừa tăng trong khoảng thời gian từ $t=21,5(s)$ đến $t=126(\text{ s})$.

**Câu 9**. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025) Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố ven biển A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]+10$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Cánh đồng muối B (thuộc địa phận của thành phố A ) có thể hoạt động nếu trong ngày nắng nhiều hơn 10 giờ.

a) Ngày có nhiều giờ ánh sáng nhất là 13 giờ.

b) Số giờ có ánh sáng giảm liên tục trong tháng 7 .

c) Cánh đồng muối B có thể hoạt động 213 ngày mỗi năm

d) Ngày thứ 70 trong năm, thành phố có 10 giờ có ánh sáng.

**Lời giải**

a) Ta có

$$-1\le \sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]\le 1\Leftrightarrow -3\le 3\sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]\le 3$$

$$\Rightarrow 7\le \sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]+10\le 13$$

$d(t)=13$ khi $\sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]=1\Leftrightarrow \frac{\pi}{180}(t-70)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=160+360k.$

Mà $0<t\le 365$ nên $0<160+360k\le 360, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=0, t=160$.

Giá trị lớn nhất của $d(t)$ là 13 khi $t=160$. Vậy ngày có nhiều giờ ánh sáng nhất là 13 giờ, ngày thứ 160 trong năm. Suy ra kết luận a) **đúng**.

b) Hàm $d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]+10$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$, trong một chu kì, hàm $d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]+10$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ nên

$$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{180}(t-70)<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{180}(t-70)<\frac{3}{2}\Leftrightarrow 90<t-70<270\Leftrightarrow 160<t<340.$$

Vậy kể từ này thứ 161 đến ngày thứ 340 , số giờ có ánh sáng của thành phố A bắt đầu giảm. Tháng 7 năm không nhuận bắt đầu từ ngày thứ 182 trong năm nên kết luận b) **đúng**.

c) Theo đề bài ta có

$$d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]+10>10\Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{180}(t-70)\right]>0\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{180}(t-70)<\pi$$

$$\Leftrightarrow 0<t-70<180\Leftrightarrow 70<t<250$$

Số ngày có nắng nhiều hơn 10 giờ là $250-70=180$ nên kết luận c) **sai**.

d) Khi $t=70$ thì $d(70)=3\sin 0+10=10$ nên thành phố có 10 giờ có ánh sáng

Do đó kết luận d) **đúng**.

**Câu 10**. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Theo báo cáo của một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất $x\left(m^3\right)$ nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 3 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0{,}0003x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200\ \text{m}^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất $x\left(m^3\right)$ sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó, mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

a) Chi phí sản xuất $100\ \text{m}^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

b) $\bar{c}(x)=0{,}0003x+0{,}15+\frac{3}{x}$.

c) Chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày là $100\text{ m}^3$.

d) $C(x)=0,0003x^2+0,15x+5$.

**Lời giải**

Để sản xuất $x(m^3)$ nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 3 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0003x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc.

Suy ra để sản xuất $1(m^3)$. nước tinh khiết thì cần $\frac{3}{x}$ triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0003x$ chi phí bảo dưỡng máy móc.

$$\Rightarrow \bar{c}(x)=\frac{3}{x}+0,15+0,0003x$$

$$\Rightarrow C(x)=\bar{c}(x).x=3+0,15x+0,0003x^2$$

a) **Sai**.

Chi phí sản xuất $100\text{ m}^3$ là

$$C(100)=3+0,15\cdot 100+0,0003\cdot 100^2=21 \text{ (triệu đồng).}$$

b) **Đúng**.

Ta tìm được $\bar{c}(x)=\frac{3}{x}+0,15+0,0003x$.

c) **Đúng**.

Hàm chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm là $\bar{c}(x)=\frac{3}{x}+0,15+0,0003x, 0<x\le 200$.

Đặt $f(x)=\bar{c}(x)=\frac{3}{x}+0,15+0,0003x, 0<x\le 200$.

$$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+0,0003$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -3+0,0003x^2=0\Rightarrow x=100$$

Bảng biến thiên của hàm $f(x)$.

| $x$ | 0 | | 100 | | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | ↘ | | 0,21 | ↗ | |

Dựa vào BBT thì chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày là $100\ \mathrm{m}^3$.

d) **Sai**.

Ta có: $C(x)=3+0,15x+0,0003x^2$.

**Câu 11**. (Sở Ninh Bình 2025) Một hạt chuyển động trên một đường thẳng có gắn một trục tọa độ với gốc tọa độ là vị trí hạt bắt đầu chuyển động. Tọa độ của hạt trên trục tại thời điểm $t$ (đơn vị: giây) kể từ khi xuất phát được cho bởi công thức $x(t)=2t-3\ln(t+1)$ (đơn vị: mét), $t\geq 0$. Hàm số $v(t)=x'(t)$ (đơn vị: mét/ giây), biểu thị vận tốc chuyển động của hạt.

a) Quãng đường mà hạt đi được trong 3 giây đầu tiên là $1,84\ \mathrm{m}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Hạt đứng yên tại thời điểm $t=0,5\ \mathrm{s}$.

c) $v(t)=2-\dfrac{3}{t+1}$

d) Vận tốc ban đầu của hạt là $1(\ \mathrm{m/s})$.

**Lời giải**

a) **Sai**

Ta có: $x'(t)=2-\dfrac{3}{t+1}\Rightarrow x'(t)=0\Leftrightarrow t=0,5$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $0,5$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $1-3\ln 1,5$ | $\nearrow$ | $6-3\ln 4$ |

Từ bảng biến thiên suy ra quãng đường hạt đi được sau 3 giây đầu tiên là:

$$S=0-(1-3\ln 1,5)+6-3\ln 4-(1-3\ln 1,5)=4-3\ln 4+6\ln 1,5=2,27\ \mathrm{m}$$

b) **Đúng**

Ta có: $v(t)=x'(t)=2-\dfrac{3}{t+1}$.

Hạt đứng yên $\Leftrightarrow v(t)=0\Leftrightarrow 2-\dfrac{3}{t+1}=0\Leftrightarrow t=0,5\ \mathrm{s}$

c) **Đúng**

Ta có: $v(t)=x'(t)=2-\dfrac{3}{t+1}$.

d) **Sai**

Vận tốc ban đầu của hạt là: $v(0)=2-3=-1(\mathrm{~m}/\mathrm{s})$.

**Câu 11**. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao $h$ của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần **đúng**) bởi hàm $h(t)=-0,01t^3+1,1t^2-30t+250$ trong đó $t$ là thời gian tính bằng giây và $h$ là độ cao tính bằng kilomet.

a. Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao lớn nhất mà con tàu đạt được là $250(\mathrm{~km})$.

b) Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao con tàu đạt được khi vận tốc của con tàu lớn nhất là $139,37(\mathrm{~km})$.

c. Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, vận tốc lớn nhất của con tàu là $v\approx 10,33(\mathrm{~km}/\mathrm{s})$.

d) Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao thấp nhất mà con tàu đạt được tại thời điểm $t\approx 25(\mathrm{~s})$.

**Lời giải**

a) **Đúng**

Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao lớn nhất mà con tàu đạt được là $250(\mathrm{~km})$.

Ta có $h(t)=-0,01t^3+1,1t^2-30t+250 \Rightarrow h'(t)=-0,03t^2+2,2t-30$.

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow -0,03t^2+2,2t-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{110+10\sqrt{31}}{3}(l) \\ t_2=\dfrac{110-10\sqrt{31}}{3} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $t_2$ | | $50$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(t)$ | $250$ | $\searrow$ | $h(t_2)$ | $\nearrow$ | $250$ |

Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao lớn nhất mà con tàu đạt được là $250(\mathrm{~km})$.

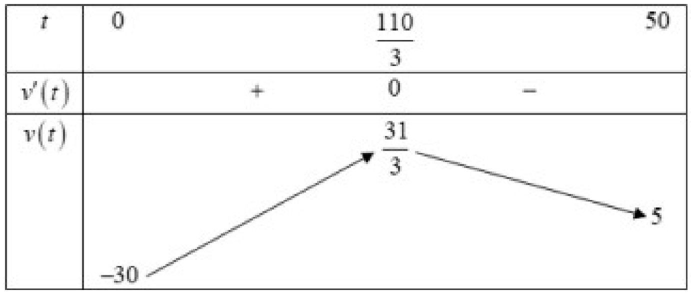
b) **Sai**

Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao con tàu đạt được khi vận tốc của con tàu lớn nhất là $135,93\left(\text{ km}\right)$.

Phương trình biểu thị vận tốc của con tàu $v\left(t\right)=-0,03t^2+2,2t-30$.

Khi đó $v'\left(t\right)=-0,06t+2,2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{110}{3}$.

Bảng biến thiên:




Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, vận tốc của con tàu lớn nhất khi $t=\dfrac{110}{3}$.

Vậy độ cao con tàu đạt được khi vận tốc lớn nhất là $h\left(\dfrac{110}{3}\right)=\dfrac{2670}{27}\approx 135,93\left(\text{ m}\right)$.

c) **Đúng**

Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, vận tốc lớn nhất của con tàu là $v\approx 10,33\left(\text{ km/s}\right)$.

Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, vận tốc lớn nhất của con tàu là $v=\dfrac{31}{3}\approx 10,33\left(\text{ km/s}\right)$.

d) **Sai**

Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao thấp nhất mà con tàu đạt được tại thời điểm $t\approx 18,11\left(\text{ s}\right)$.

Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao thấp nhất mà con tàu đạt được tại thời điểm $t_2=\dfrac{110-10\sqrt{31}}{3}\approx 18,11\left(\text{ s}\right)$.

**Câu 11.** (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Một nhà sản xuất trung bình bán được 1500 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 15 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 600 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 120 ti vi mỗi tuần. Gọi $p$ (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, $x$ là số ti vi.

a) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C\left(x\right)=12000-\dfrac{7}{2}x$ (triệu đồng), trong đó $x$ là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 9,5 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

b) Công ty giảm giá 3,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

c) Tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là $f(p) = -200p^2 + 450p$ (triệu đồng).

d) Hàm cầu là $P = -\frac{1}{200}x + \frac{45}{2}$ (triệu đồng).

**Lời giải**

Gọi $p(p > 0)$ (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, $x(x \in \mathbb{N})$ là số ti vi. Khi đó ta cần xác định hàm cầu $p = p(x)$

Theo giả thiết tốc độ thay đổi của $x$ tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất. Do đó $p = p(x) = ax + b, a \neq 0$.

Theo đề có: $x_1 = 1500$ thì $p_1 = 15; x_2 = 1620$ thì $p_2 = 14,4$.
Khi đó phương trình đường thẳng $p(x) = ax + b, a \neq 0$ đi qua hai điểm ( $1500;15$ )và $(1620;14,4)$ nên ta có hệ phương trình:

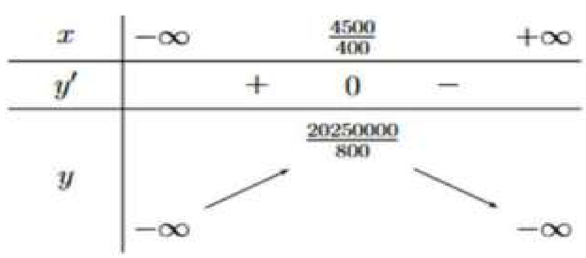
$$\begin{cases} 1500a + b = 15 \\ 1620a + b = 14,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{200} \\ b = \frac{45}{2} \end{cases}$$

Vậy $p = p(x) = -\frac{1}{200}x + \frac{45}{2}$. Chọn d) ĐÚNG
Vi $p = p(x) = -\frac{1}{200}x + \frac{45}{2} \Rightarrow x = -200p + 4500$.
Khi đó tổng doanh thu mỗi tuần từ tiền bán $x$ ti vi là
$f(p) = xp = (-200p + 4500)p = -200p^2 + 4500p$.
Chọn c) **SAI**

Để doanh thu của công ty sẽ lớn nhất, bài toán trở thành tìm $p$ để $f(p)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $$f'(p) = -400p + 4500$$ $$f'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 11,25$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy công ty giảm giá $15-11,25=3,75$ triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.
Chọn b) **SAI**

Doanh thu từ bán $x$ ti vi là $R(x)=xp(x)=x\left(-\frac{1}{200}x+\frac{45}{2}\right)=-\frac{1}{200}x^2+\frac{45}{2}x$.

Khi đó tổng lợi nhuận từ bán $x$ ti vi là:

$$\begin{aligned}P(x)&=R(x)-C(x)\\&=\left(-\frac{1}{200}x^2+\frac{45}{2}x\right)-\left(12000-\frac{7}{2}x\right)\\&=-\frac{1}{200}x^2+26x-12000\end{aligned}$$

Bài toán trở thành tìm $x$ để $P(x)$ lớn nhất.

Ta có: $P'(x)=-\frac{1}{100}x+26; P'(x)=0\Leftrightarrow x=2600$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $2600$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $21800$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số ti vi bán ra trong 1 tuần là 2600 chiếc thì lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất.

Tức là mỗi tuần bán thêm 1100 chiếc thì số tiền phải giảm giá $\frac{1100.600}{120}=5500$ nghìn đồng.
Vậy phải để giá bán là $15-5,5=9,5$ triệu đồng. Chọn a) **ĐÚNG**

**Câu 12.** (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Nồng độ thuốc $C(t)$ tính theo $\mathrm{mg/cm^3}$ trong máu bệnh nhân được tính bởi $C(t)=\frac{0,05t}{t^2+t+1}$ trong đó $t$ là thời gian tính theo giờ kể từ khi tiêm cho bệnh nhân.

a) Có thời điểm nồng độ trong máu của bệnh nhân đạt $0,02\mathrm{mg/cm^3}$.

b) Nồng độ thuốc trong máu lớn nhất ở thời điểm 1 giờ sau khi tiêm.

c) Hàm số $C(t)$ có đạo hàm $C'(t)=\frac{1-t^2}{20\left(t^2+t+1\right)^2},(t\ge 0)$.

d) Sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân giảm dần theo thời gian.

**Lời giải**

a) Ta có $C'(t)=\dfrac{\left(-t^2+1\right)}{20\left(t^2+t+1\right)^2}, C'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$ ta có bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $C(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{60}$ | $\searrow$ | $0$ |

Ta có nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng $\dfrac{1}{60}$ khi $t=1$ mà $\dfrac{1}{60}<0,02$

Chọn **SAI**.

b) Dựa vào bảng biến thiên ta thấy nồng độ thuốc trong máu lớn nhất tại thời điểm 1 giờ sau khi tiêm.

Chọn **ĐÚNG**.

c) Ta có $C'(t)=\dfrac{\left(-t^2+1\right)}{20\left(t^2+t+1\right)^2}, t \geq 0$

Chọn **ĐÚNG**.

d) Dựa vào bảng biên thiên ta có sau khi tiêm nồng độ thuốc trong máu tăng dần trong 1 giờ và sau đó giảm dần

Chọn **SAI**.

**Câu 13**. (THPT Lý Thường Kiệt - Hà Nội 2025) Anh $B$ chế tạo một bể cá có dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $0,096\ \text{m}^3$, chiều cao $h=0,6\ \text{m}$, chiều rộng $x$, chiều dài $y$ (với $x>0$, $y>0$ ). Anh $B$ dùng loại kính để làm các mặt bên có giá 70.000 đồng $/\text{m}^2$ và loại kính để làm đáy có giá 100.000 đồng $/\text{m}^2$. Mọi chi phí khác xem như không đáng kể. Khi đó

a) Biểu thức tín chi phí làm các mặt xung quanh là $C_{xq}=84000 \cdot\left(x+\dfrac{0,16}{x}\right)$.

b) Hàm số biểu thị $y$ theo $x$ là $y=\dfrac{0,16}{x}$.

c) Chi phí mua kính để làm đáy bể là 11200 đồng.

d) Chi phí làm bể cá thấp nhất là 100000 đồng.

**Lời giải**

a) Biểu thức tín chi phí làm các mặt xung quanh là $C_{xq} = 84000 \cdot \left( x + \frac{0,16}{x} \right)$. **Đúng**.

b) Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = xyh = 0,6xy = 0,096 \Rightarrow y = \frac{0,16}{x}$.

Vậy $y = \frac{0,16}{x}$. **Đúng**.

c) Diện tích đáy bể là $S_d = xy = 0,16\ \text{m}^2$.

Chi phí mua kính để làm đáy bể là $C_d = 10000 \cdot S_d = 16000$ đồng. **sai**.

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2(0,6x + 0,6y) = 1,2 \cdot \left( x + \frac{0,16}{x} \right)$.

Biểu thức tính chi phí làm các mặt xung quanh là $C_{xq} = 84000 \cdot \left( x + \frac{0,16}{x} \right)$.

d) Chi phí làm bể cá: $C(x) = C_{xq} + C_d = 84000 \cdot \left( x + \frac{0,16}{x} \right) + 16000, x > 0$.

Chi phí làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi $\left( x + \frac{0,16}{x} \right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{0,16}{x} = \frac{x^2 + 0,16}{x}, x > 0$.

$f'(x) = 1 - \frac{0,16}{x^2} = \frac{x^2 - 0,16}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 0,16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | [illegible]/$5$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{4}{5}$ | ↗ | $+\infty$ |

Suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Vậy chi phí thấp nhất để làm bể cá là: $C = \frac{84000.4}{5} + 16000 = 83200$ đồng. **Sai**.

**Câu 14.** Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên. Gọi số lượng giếng dầu mỗi ngày khai thác là $x$ và $y$ là sản lượng dầu chiết được. Khi đó

a) Khi đó $y = -9x^2 + 398x, x > 17$

b) Khi công ty khai thác thêm 6 giếng dầu, thì sản lượng dầu chiết được tăng lên.

c) Công ty có thể khai thác từ 17 đến 22 giếng dầu mỗi ngày để sản lượng dầu chiết tăng.

d) Sản lượng dầu giảm khi công ty khi thác quá 22 giếng dầu mỗi ngày.

**Lời giải**

a) Sản lượng dầu chiếc được là $y = x\left[245 - 9(x - 17)\right] = -9x^2 + 398x$

Vậy a) **đúng.**

b) Ta có $y' = -18x + 398 = 0 \Leftrightarrow x \approx 22.$ Bảng biến thiên

| $x$ | 0 | 17 | | 22 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | + | 0 | - | |
| $y$ | | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Từ bảng biến thiên, ta thấy khi công ty khai thác từ 17 đến 22 giếng dầu mỗi ngày thì sản lượng dầu chiết tăng, còn trên 22 giếng dầu thì sản lượng dầu chiết được giảm hay khai thác thêm từ 1 đến 4 giếng dầu thì sản lượng dầu chiết tăng và khai thác thêm hơn 5 giếng dầu thì sản lượng dầu chiết giảm. Do đó

b) **SAI.**

c) **ĐÚNG**

d) **Đúng**

**Câu 15.** Quan sát quá trình sinh trưởng và phát triển của một giống cà chua mới trong 18 tuần kể từ khi trồng, các kĩ sư thuộc một trung tâm giống cây trồng nhận thấy: chiều cao thân cây sau $t$ tuần kể từ khi trồng được tính xấp xỉ bởi hàm số $h(t) = 40\log_3(2t+1) + 12$ (đơn vị: centimet, $0 \le t \le 18$ ). Sau 9 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Kể từ đó, đường kính trái cà chua ở tuần thứ $t$ xấp xỉ bởi hàm số $d(t) = 3^{\frac{2t-17}{t-8}} - 3$ (đơn vị: centimet,

$9 \le t \le 18$ ).

a) Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7(làm tròn đến hàng phần trăm) xấp xỉ bằng 4,85 (cm/tuần).

b) Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 92 cm .

c) Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

d) Sau 4 tuần, kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm .

**Lời giải**

a) Đúng. Ta có: $h(t)=40\log_3(2t+1)+12 \Rightarrow h'(t)=40\cdot\dfrac{(2t+1)'}{(2t+1)\ln 3}=\dfrac{80}{(2t+1)\ln 3}$.

Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7là

$h'(7)=\dfrac{80}{(2.7+1)\ln 3}\approx 4,85$ (cm/tuần).

b) Đúng. Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là $h(4)=40\log_3(2.4+1)+12=92$ cm .

c) Đúng. Ta có $h'(t)=\dfrac{80}{(2t+1)\ln 3}>0, 0\le t\le 18$.

Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

d) Sai. Sau 4tuần, kể từ khi kết trái tức tuần thứ $t=13$, đường kính trái cà chua là

$d(13)=3^{\frac{2.13-17}{13-8}}-3\approx 4,22<12$ cm .

Vậy sau 4 tuần,kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm .

**Câu 16.** Một cơ sở sản xuất khăn đang bán mỗi chiếc khăn với giá 50000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 34000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 50000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 500 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 32000 đồng, gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là $x$ (nghìn đồng). Khi đó:

a) Tổng doanh thu trung bình mỗi tháng cơ sở sản xuất thu được khi chưa tăng giá là 1700000000 nghìn đồng.

b) Số khăn bán ra được mỗi tháng sau khi tăng giá là $34000-5x$ chiếc.

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 41 nghìn đồng.

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 12500 chiếc.

**Lời giải**

a. Đúng.

Tổng doanh thu trung bình mỗi tháng cơ sở sản xuất thu được khi chưa tăng giá là: $34000.50000=1700000000$ đồng.

**b. Sai**

Khi tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 500 chiếc.
Vậy khi tăng giá mỗi chiếc khăn là $x$ nghìn đồng thì số khăn bán ra được mỗi tháng là: $34000-500x$ chiếc..

**c. Sai**

Giá bán mới là: $50+x$ (nghìn đồng).
Doanh thu thu được sau khi tăng giá là: $(34000-500x)(50+x)$ (nghìn đồng).
Lợi nhuận thu được: $T(x)=(34000-500x)(50+x)-32(34000-500x)$ (nghìn đồng).
$T=-500x^2+25000x+612000$ (nghìn đồng).
Ta có: $T'(x)=-1000x+25000$.
$T'(x)=0\Rightarrow x=25$.
Ta có bảng biến thiên:

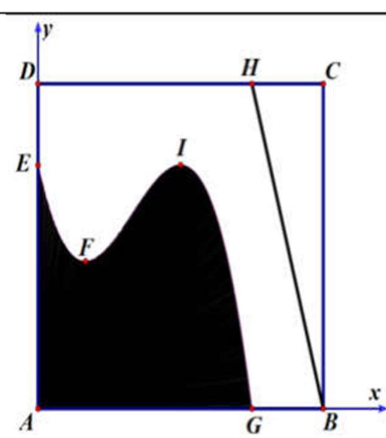
| $x$ | $0$ | | $25$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $T(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Từ bảng biến thiên ta có, lợi nhuận lớn nhất khi $x=25$ nghìn đồng.
Như vậy, để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi $50+25-32=43$ nghìn đồng.

**d. Chọn ĐÚNG.**

Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm $500.25=12500$ chiếc.

**Câu 17. (Sở Thừa Thiên Huế 2025)** Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB=12$ m. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (phần tô đậm) và một lối đi là đoạn thẳng $HB$. Nếu đặt hệ trục toạ độ có gốc tại $A$ như hình vẽ, độ dài đơn vị là $1m$, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y=f(x)$ có $F$ là điểm cực tiểu và $I$ là điểm cực đại. Biết $CH=DE=GB=3m$ và các điểm $F,I$ cách cạnh $AD$ lần lượt là $2m$ và $6m$.



a) Phương trình của đường thẳng $HB$ là $y=-4x+48$.

b) Tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho $f'(x)=a(x+2)(x+6)$

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng $HB$.

d) Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng $2,56$ m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Đúng.

a) Đúng

Gọi phương trình đường thẳng $HB$ là $y=ax+b\,(a\neq 0)$

Đường thẳng $HB$ đi qua hai điểm $B(12;0)$ và $H(9;12)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}0=12a+b\\12=9a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=48\end{cases}$.

Vậy phương trình đường thẳng $HB$ là $y=-4x+48$.

**b) Sai**

Các điểm $F,I$ cách cạnh $AD$ lần lượt là $2m$ và $6m$ nên $x_F=2, x_I=6$.

Mặt khác $F$ là điểm cực tiểu và $I$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nên tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho $f'(x)=a(x-2)(x-6)$.

c) Sai

Ta có: $f'(x)=a(x-2)(x-6)=a(x^2-8x+12)\Rightarrow f(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-4x^2+12x\right)+C$.

Mặt khác: $\begin{cases}f(0)=9\\f(9)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(\frac{0^3}{3}-4.0^2+12.0\right)+C=9\\a\left(\frac{9^3}{3}-4.9^2+12.9\right)+C=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\C=9\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{9}x^3+\frac{4}{3}x^2-4x+9$

$f'(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x-4$

Do $k=f'(7)=-\frac{5}{3}\neq -4$ nên tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 không song song với đường thẳng $HB$.

**d) Đúng**

Gọi $\Delta$ là tiếp tuyến của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;y_0)$.
Để $d(M,HB)$ ngắn nhất thì $\Delta$ song song $H$.

Suy ra $k_\Delta=f'(x_0)=-4\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0{}^2+\frac{8}{3}x_0-4=-4\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0{}^2+\frac{8}{3}x_0=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0(L)\\x_0=8\end{array}\right.$

Khi đó $M\left(8;\frac{49}{9}\right), HB: 4x+y-48=0$

Vậy $d(M,HB)=\dfrac{\left|4.8+\frac{49}{9}-48\right|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}\approx 2,56$.

**Câu 18.** Vận tốc $v_1(\text{ cm/s})$ của con lắc thứ nhất và vận tốc $v_2(\text{ cm/s})$ của con lắc thứ hai theo thời gian $t$ (giây) được cho bởi công thức $v_1(t)=2\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$; $v_2(t)=4\cos\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

a) Tại thời điểm ban đầu vận tốc con lắc thứ nhất bằng 1 .
b) Vận tốc lớn nhất của con lắc thứ hai bằng 4

c) Tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$, vận tốc của con lắc thứ hai gấp hai lần vận tốc của con lắc thứ nhất.

d) Trong thời gian 10 giây đầu tiên, con lắc thứ nhất đạt vận tốc lớn nhất hai lần

**Lời giải**

a) Tại thời điểm ban đầu, với $t=0$ thì $v_1(0)=2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1$. Nên mệnh đề a) đúng.

b) Vì $1\le\cos\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$, nên khi $\cos\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=1$, thì vận tốc của con lắc thứ hai đạt giá trị lớn nhất bằng $v_2(t)=4$. Nên mệnh đề b) đúng.

c) Với $t=\frac{\pi}{4}$ thì $v_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}}{2}$ và $v_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$ Vì $\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}\neq 2\sqrt{2}$, nên $2\cdot v_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq v_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Nên mệnh đề c) sai.

d) Ta có $v_1'(t)=-2\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right), v_1'(t)=0\Leftrightarrow \sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $0 \le t \le 10 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{3} + k\pi \le 10 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le k \le -\frac{1}{3} + \frac{10}{\pi}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$, nên $k = \{0,1,2\}$

Với $k = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow v_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2(\text{ cm/s})$

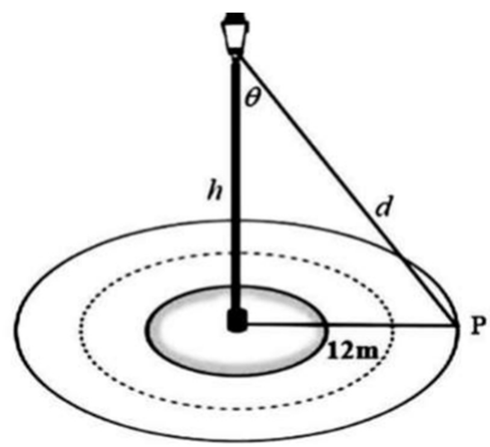
Với $k = 1 \Rightarrow t = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow v_1\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2(\text{ cm/s})$

Với $k = 2 \Rightarrow t = \frac{7\pi}{3} \Rightarrow v_1\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 2(\text{ cm/s})$. Ta có bảng biến thiên như sau:

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{4\pi}{3}$ | | $\frac{7\pi}{3}$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $v_1(t)$ | | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | |

Vậy trong thời gian 10 giây đầu tiên, con lắc thứ nhất đạt vận tốc lớn nhất hai lần bằng 2 (cm/s) tại thời điểm $3t = \frac{\pi}{3}$(s) và $t = \frac{7\pi}{3}$. (s). Nên mênh đề d) đúng.

**Câu 19.**(Sở Ninh Bình 2025) Một chiếc đèn được đặt trên đỉnh của một cột đèn cao $h(\text{ m})$ để chiếu sáng một vòng xuyến giao thông đông đúc có bán kính $12 \text{ m}$. Cường độ ánh sáng $I$ tại một điểm $P$ trên vòng xuyến tỉ lệ thuận với cosin của góc $\theta$ và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách $d(\text{ m})$ từ nguồn sáng đến điểm $P$ (xem hình dưới đây).




a) Nếu $I = f(h)$ thì $f'(h) = k\dfrac{-2h^2 + 144}{(h^2+144)^2\sqrt{(h^2+144)^3}}$.

b) Để cường độ ánh sáng $I$ lớn nhất thì cột đèn phải cao $6\sqrt{2}$ m.

c) $\cos\theta = \dfrac{12}{\sqrt{h^2+144}}$.

d) $I = k\dfrac{\cos\theta}{d^2}$ (với $k$ là hằng số dương).

**Lời giải**

a) SAI
b) ĐÚNG
c) SAI
d) ĐÚNG

+) Vì cường độ ánh sáng $I$ tại một điểm $P$ trên vòng xuyến tỉ lệ thuận với cosin của góc $\theta$ và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách $d(\text{ m})$ từ nguồn sáng đến điểm $P$ nên $I = k\dfrac{\cos\theta}{d^2}$ (với $k$ là hằng số dương). Vậy **d** đúng.

+) $\cos\theta = \dfrac{h}{d} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+144}}$. Vậy c sai.

+) $I = k\dfrac{\cos\theta}{d^2} = k\cdot\dfrac{h}{\sqrt{h^2+144}}\cdot\dfrac{1}{\left(h^2+144\right)} = k\cdot\dfrac{h}{\left(h^2+144\right)^{\frac{3}{2}}} = f(h)$

$$f'(h) = k\dfrac{\left(h^2+144\right)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}\left(h^2+144\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2h^2}{\left(h^2+144\right)^3} = k\cdot\dfrac{\left(h^2+144\right)^{\frac{1}{2}}\left(h^2+144-3h^2\right)}{\left(h^2+144\right)^3}$$

$$= k\cdot\dfrac{\left(h^2+144\right)^{\frac{1}{2}}\left(144-2h^2\right)}{\left(h^2+144\right)^3} = k\cdot\dfrac{144-2h^2}{\left(h^2+144\right)^{\frac{5}{2}}}$$. Vậy a Sai.

+) $f'(h) = k\cdot\dfrac{144-2h^2}{\left(h^2+144\right)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Leftrightarrow 144-2h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

| $h$ | $0$ | | $6\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(h)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(h)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Để cường độ ánh sáng $I$ lớn nhất thì cột đèn phải cao 6, 2 m. Vậy b đúng

## Phần II. Một số bài toán tự luận (trả lời ngắn) thực tế max, min hàm số

### I. Các bài toán về kinh tế (Doanh thu, Chi phí, Lợi nhuận)

***Phương pháp:***

- Nếu $C(x)$ là hàm chi phí, tức là chi phí sản xuất $x$ đơn vị một sản phẩm nào đó thì chi phí biên là tốc độ thay đổi của $C$ đối với $x$, tức là đạo hàm $C'(x)$.
- Chi phí bình quân: $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$. Chi phí bình quân cho biết chi phí trung bình để sản xuất 1 sản phẩm là bao nhiêu hay còn được gọi là giá thành của sản phẩm.
- Hàm doanh thu: Nếu $x$ đơn vị hàng hóa bán ra với giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì hàm doanh thu, kí hiệu $R(x)$, khi đó $R(x)=x.p(x)$ (số sản phẩm nhân với giá tiền mỗi sản phẩm).
- Hàm cầu (hàm giá) $p(x)$ là giá bán của một đơn vị sản phẩm khi công ty bán ra $x$ sản phẩm.
- Hàm lợi nhuận = Doanh thu – Chi phí –Thuế (nếu có)
- Khảo sát hàm số lập BBT tìm GTLN, GTNN hàm số.

**Câu 1.** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất $x$ sản phẩm $\left(1\le x\le 500\right)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x)=x^3-1999x^2+1001000x+250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x)=x+1000+\dfrac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

**Lời giải**

Lợi nhuận của doanh nghiệp khi sản xuất $x$ sản phẩm là

$$L(x)=F(x)-xG(x)=x^3-1999x^2+1001000x+250000-x\left(x+1000+\frac{250000}{x}\right)$$

$$=x^3-2000x^2+1000000x.$$

Bài toán trở thành tìm GTLN của hàm số $L(x)$ trên đoạn $[1;500]$.

Ta có $L'(x)=3x^2-4000x+1000000$; $L'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1000}{3}$.

Khi đó, $L(1)=998001, L\left(\dfrac{1000}{3}\right)\simeq 148148148, L(500)=125000000$

Vậy $\max\limits_{[1;500]} L(x) = L\left(\dfrac{1000}{3}\right)$.

Do số sản phẩm là số nguyên, nên ta xét giá trị của hàm số tại hai điểm nguyên trước và sau giá trị $\dfrac{1000}{3}$ là 333 và 334. Ta có

$f(333) = 148148037; f(334) = 148147704 \Rightarrow f(333) > f(334)$

Do đó, doanh nghiệp nên sản xuất 333 sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

**Câu 3.** Trong một ngày, tổng chi phí để một xưởng sản xuất $x$ (kg) thành phẩm được cho bởi hàm số $C(x) = 2x^3 - 30x^2 + 177x + 2592$ (nghìn đồng). Biết giá bán mỗi kilôgam thành phẩm là 513 nghìn đồng và công suất tối đa của xưởng 20 kg trong một ngày. Khối lượng thành phẩm xưởng nên sản xuất trong trong một ngày là bao nhiêu để lợi nhuận thu được của xưởng trong một ngày là cao nhất?

**Lời giải**

Gọi $P(x)$ là lợi nhuận xưởng thu được trong một ngày khi sản xuất x (kg) thành phẩm. Gọi $R(x)$ là doanh thu xưởng thu được khi bán $x$ sản phẩm. Khi đó $R(x) = 513x$.

Ta có

$$P(x) = R(x) - C(x) = 513x - \left(2x^3 - 30x^2 + 177x + 2592\right)$$
$$= -2x^3 + 30x^2 + 336x - 2592, 0 \le x \le 20.$$

Suy ra $P'(x) = -6x^2 + 60x + 336; P'(x) = 0 \Rightarrow x = 14$.

Ta có $P(0) = -2592; P(14) = 2504; P(20) = 128$.

Suy ra $\max\limits_{[0;20]} P(x) = P(14) = 2504$.

Vậy, khối lượng thành phẩm xưởng nên sản xuất trong trong một ngày là 14 kg thì lợi nhuận thu được của xưởng trong một ngày là cao nhất.

**Câu 4.** Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

**Lời giải**

Gọi $x$ (triệu đồng) là số tiền giảm cho mỗi chiếc xe, $0 \le x \le 4.$.

Khi đó, số tiền thu được khi bán một chiếc xe máy là 31 – x – 27 = 4 – x (triệu đồng).

Số lượng chiếc xe bán được là: 600 + 200x (chiếc).

Hàm chi phí cho 600 + 200x chiếc xe là: $\left(600+200x\right).27$ (triệu đồng).

Hàm doanh thu cho 600 + 200x chiếc xe là: (600 + 200x).(31 – x) (triệu đồng).

Khi đó, lợi nhuận thu được là:

$$P(x)=(600+200x)(31-x)-(600+200x).27=-200x^2+200x+2400.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm P(x) với $0 \le x \le 4$.

Ta có P'(x) = -400x+200 = 0 khi x = 0,5.

Khi đó: P(0)=2 400; P(0,5) = 2 450; P(4)=0

Suy ra 2 450 là giá trị lớn nhất của hàm lợi nhuận, đạt được khi x = 0,5. Tức là mỗi chiếc xe nên giảm giá 0,5 triệu đồng.

Vậy doanh nghiệp nên định giá bán mới là 30,5 triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất.

**Câu 5**. Hiện tại, mỗi tháng một cửa hàng đồ lưu niệm bán được 100 sản phẩm A. Với mỗi sản phẩm A bán được, cửa hàng thu được 20 nghìn đồng lợi nhuận. Qua khảo sát, người ta thấy rằng với mỗi nghìn đồng giảm giá, cửa hàng bán thêm được 10 sản phẩm A. Cửa hàng nên giảm giá bao nhiêu cho mỗi sản phẩm A để thu được lợi nhuận lớn nhất từ việc bán sản phẩm này? Tính lợi nhuận lớn nhất đó.

**Lời giải**

Gọi $x,(x>0)$ (nghìn đồng) giá của hàng cần giảm cho mỗi sản phẩm A.

Mỗi tháng cửa hàng bán được số sản phẩm là $100+10x$.

Với mỗi sản phẩm bán được, cửa hàng thu được lợi nhuận là $20-x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận cửa hàng thu được từ bán sản phẩm A là: $P(x)=(100+10x)(20-x)=-10x^2+100x+2000$ (nghìn đồng).

Bài toán trở thành, tìm giá trị lớn nhất của hàm số P(x) trên $(0;+\infty)$.

Ta có $P'(x)=-20x+100=0 \Rightarrow x=5$. Ta có bảng biên thiên:

| $x$ | 0 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | – | |
| $y$ | 2000 | $\nearrow$ | 2250 | $\searrow$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} L(x) = 2250$ tại x=5.

Vậy cửa hàng giảm giá 5000 đồng cho mỗi sản phẩm A thì lợi nhuận thu được cao nhất.

**Câu 6.** Tại một xưởng sản xuất, chi phí để sản xuất $x$ sản phẩm mỗi tháng là

$C(x) = 5000 + 50x + 0,005x^2$ (nghìn đồng)

a) Tính chi phí trung bình để sản xuất một sản phẩm.

b) Mỗi tháng xưởng sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì chi phí trung bình để sản xuất một sản phẩm thấp nhất?

**Lời giải**

a) Chi phí trung bình sản xuất một sản phẩm là

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{5000 + 50x + 0,005x^2}{x} = \frac{5000}{x} + 50 + 0,005x \text{ với } x > 0.$$

b) Ta có $\overline{C}'(x) = -\dfrac{5000}{x^2} + 0,005 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1000000 \Rightarrow x = 1000.$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | 0 | | 1000 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{C}'(x)$ | | – | 0 | + | |
| $\overline{C}(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | 60 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào BBT ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)} \overline{C}(x) = 60$ tại x=1000.

Vậy mỗi tháng xưởng sản xuất 1000 sản phẩm thì chi phí trung bình là thấp nhất.

**Câu 7.** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 2025 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 50 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 100 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 200 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

**Lời giải**

Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là $x(x \in \mathbb{N}, x > 0)$.

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\dfrac{8000}{30x}$ (giờ).

Tổng chi phí để sản xuất là: $P(x) = \dfrac{8000}{30x}.192 + 200x = 200x + \dfrac{51200}{x}$.

Ta có $P'(x) = 200 - \dfrac{51200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 256 = 0 \Rightarrow x = 16.$

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $16$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P(x)$ | | $\searrow$ | $6400$ | $\nearrow$ | |

Dựa vào BBT ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)} P(x) = 6400$ tại x=16.

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

**Câu 8.** Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm $T$ được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm $T$ là $x(\$)$ thì số sản phẩm $T$ các nhà máy sản xuất sẽ là $R(x) = x - 200$ và số sản phẩm $T$ mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là $Q(x) = 4200 - x$. Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định trên thị trường quốc tế là $x_0 = 3200\$$. Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là $a(\$)$ và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là $4:1$. Hãy xác định giá trị của $a$ biết lãi mà doanh nghiệp thu được do xuất khẩu là nhiều nhất.

**Lời giải.**

- Gọi giá (chi phí) một sản phẩm là $x$. Điều kiện: $200 \le x \le 4200$

- Số sản phẩm sản xuất là: $R(x) = x - 200$

- Số sản phẩm bán được trong nước là $Q(x) = 4200 - x$

- Số sản phẩm còn dư là: $R(x) - Q(x) = 2x - 4400$

- Doanh thu trên thị trường quốc tế là: $P(x) = 3200(2x - 4400)$

- Thuế cho nhà nước là: $T(x) = a(2x - 4400)$

- Lãi xuất khẩu là:

$L(x) = 3200(2x - 4400) - x(2x - 4400) - a(2x - 4400) = (2x - 4400)(3200 - x - a)$ (1) Theo bài ra: Lãi chia cho thuế = 4:1

$\dfrac{(2x-4400)(3200-x-a)}{a(2x-4400)} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow 5a = 3200 - x \Leftrightarrow x = 3200 - 5a$ thay vào (1) ta có:

$L(a) = \left[2(3200 - 5a) - 4400\right](3200 - 3200 + 5a - a) = 40a(-a + 200)$ (trên $[0;200]$)

Lập bảng biến thiên của hàm số $L(a)$ (trên $[0;200]$) ta được $MaxL(a) = L(100) = 400000$

Vậy $a = 100$.

**Bài toán 2: Max, min liên quan đến bài toán chuyển động**

***Phương pháp:***

- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc, quãng đường và thời gian ta có: Nếu hàm số $s(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của xe trong thời gian $t$ giây thì $v(t) = s'(t)$ biểu thị vận tốc vật trong thời gian $t$ giây .
- Xét mối liên hệ giữa gia tốc, vận tốc tại thời điểm $t$ là:
  Đạo hàm của vận tốc chính là gia tốc, tức là $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

**Ví dụ 1.** Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó $t$ tính bằng giây và $s$ tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

**Lời giải**

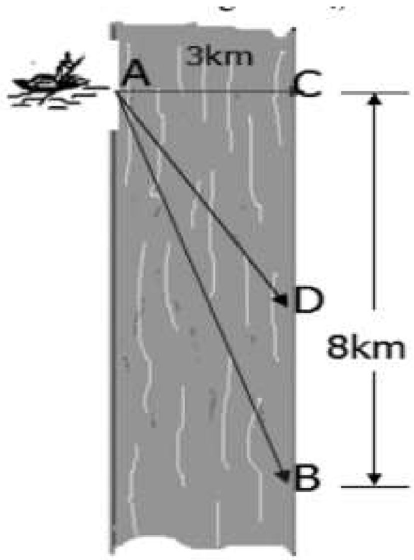
Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$ với $t \in \left[0;5\right]$.

Suy ra $v'(t) = -6t + 12; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Xét $v(0) = 1; v(2) = 13, v(5) = -14$. Vậy $\max\limits_{[0;5]} v(t) = 13$ tại $t = 2$.

Vậy chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng 13 m/s tại thời điểm t = 2 giây trong 5 giây đầu tiên.

**Ví dụ 2.** Anh Tí muốn chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3km (như hình vẽ). Tí có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến vị trí C và sau đó chạy đến vị trí B, hay có thể chèo trực tiếp từ vị trí A đến vị trí B, hoặc anh ta có thể chèo đến một vị trí D ở giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền với tốc độ $6km/h$, chạy với tốc độ $8km/h$ và quãng đường $BC = 8km$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể có với tốc độ chèo thuyền của anh Tí. Khoảng thời gian để anh Tí đến B là bao nhiêu phút? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)




**Lời giải**

**Đáp án:** 80

Gọi $x = CD$, khi đó $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{x^2 + 9}$ và $BD = 8 - x$ với $0 \le x \le 8$

Thời gian anh Tí đi từ $A$ đến $B$ là: $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \dfrac{8-x}{8}$.

Ta có: $t'(x) = \dfrac{1}{6}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{1}{8}$,

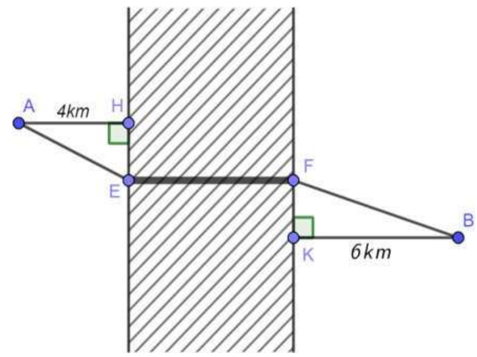
$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Rightarrow 7x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm\dfrac{9}{\sqrt{7}}$.

Vì $x \in [0;8]$ nên $x = \dfrac{9}{\sqrt{7}}$.

Ta có: $t(0) = \dfrac{3}{2}$; $t(8) = \dfrac{\sqrt{73}}{6}$, $t\left(\dfrac{9}{\sqrt{7}}\right) = \dfrac{8+\sqrt{7}}{8}$

Vậy thời gian ngắn nhất khi $x = \dfrac{9}{\sqrt{7}}$ và $t\left(\dfrac{9}{\sqrt{7}}\right) \approx 1,33h \approx 80p$.

**Ví dụ 3.** Hai thành phố ở hai vị trí $A$ và $B$ cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu bắc qua sông biết rằng vị trí $A$ cách con sông một khoảng là $4km$, vị trí $B$ cách con sông một khoảng là $6km$ (được mô hình hóa như hình vẽ bên dưới), $HE+KF=20km$ và độ dài $EF$ không đổi. Hỏi độ dài $EH$ là bao nhiêu $km$ để đường đi từ thành phố $A$ đến thành phố $B$ là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$) ?




**Lời giải:**

Đặt $HE=x\left(0\le x\le 20\right)\Rightarrow KF=20-x$

$\Rightarrow AE=\sqrt{16+x^2}$, $KB=\sqrt{36+\left(20-x\right)^2}$

Đường đi từ thành phố $A$ đến thành phố $B$ (đi theo đường $AEFB$) là $AE+EF+KB$.

Để đường đi từ thành phố $A$ đến thành phố $B$ là ngắn nhất thì $AE+KB$ đạt giá trị nhỏ nhất (vì $EF$ không đổi).

Đặt $f\left(x\right)=AE+KB=\sqrt{16+x^2}+\sqrt{36+\left(20-x\right)^2}$.

$$f'\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}-\frac{20-x}{\sqrt{36+\left(20-x\right)^2}}$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}-\frac{20-x}{\sqrt{36+\left(20-x\right)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}=\frac{20-x}{\sqrt{36+\left(20-x\right)^2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\left(N\right)\\x=-40\left(L\right)\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $8$ | | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy độ dài $EH = 8\ km$ thì đường đi từ thành phố $A$ đến thành phố $B$ là ngắn nhất.

**Bài toán 3: Max, min liên quan đến tốc độ thay đổi.**

***Phương pháp:*** Cho hàm số $y = f(x)$, khi đó tốc độ thay đổi của hàm số $y = f(x)$ là đạo hàm $f'(x)$.

**Ví dụ:** Doanh số bán hệ thống âm thanh nổi mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic $R = R(x) = \dfrac{5000}{1+5e^{-x}}, x \geq 0$ trong đó thời gian $x$ được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm nào?

**Lời giải**

Tốc độ bán hàng là $R'(x) = \dfrac{25000e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}, x \geq 0.$

Tốc độ bán hàng tối đa khi $R'(x)$ đạt giá trị lớn nhất, ta cần tìm giá trị lớn nhất của $R'(x)$ trên $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $R''(x) = 25000\dfrac{-e^{-x}(1+5e^{-x})^2 + e^{-x}.2.(1+5e^{-x}).5e^{-x}}{(1+5e^{-x})^4} = \dfrac{25000(5e^{-x}-1)}{(1+5e^{-x})^3}$

$R''(x) = 0 \Leftrightarrow 5e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 5.$

Ta có BBT

| $x$ | $0$ | | $\ln 5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $R''$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $R'$ | $\dfrac{6250}{9}$ | $\nearrow$ | $1250$ | $\searrow$ | $0$ |

Từ BBT suy ra $R'$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \ln 5 \approx 1,61$.

Vậy tốc độ bán hàng đạt tối đa vào thời điểm năm thứ hai.

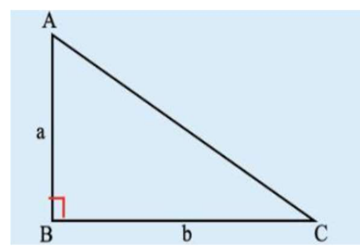
**Bài toán 4: Max min liên quan đến hình học**

***Phương pháp:***

Từ dữ bài toán, ta sẽ xây dựng được một hàm số, tiếp theo ta cần xét hàm số đó (tìm max, min) theo yêu cầu của đề bài.

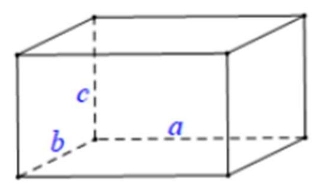
Lưu ý các công thức liên quan đến thể tích, diện tích các hình.

- Diện tích hình chữ nhật có hai kích thước $a, b$ là $S = ab$.
- Diện tích hình vuông cạnh $a$ : $S = a^2$.
- Diện tích hình thang, đáy nhỏ $a$, đáy lớn $b$, chiều cao $h$ là $S = \dfrac{(a+b).h}{2}$.
- Diện tích tam giác đều cạnh $a$ : $S = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
- Diện tích tam giác vuông là $S = \dfrac{1}{2}ab$.




**Một số công thức hình học không gian:**

***Hình hộp chữ nhật:**

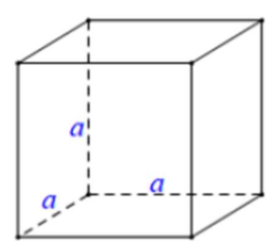



Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2(a+b).c$

Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$

Thể tích hình hộp: $V = abc$.

***Hình lập phương**




Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2$.

Thể tích hình hộp: $V = a^3$.

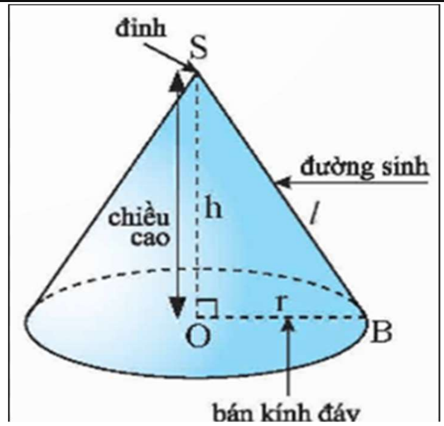
Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$

**Hình nón:**

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl.$

Diện tích toàn phần $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$

Thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h.$

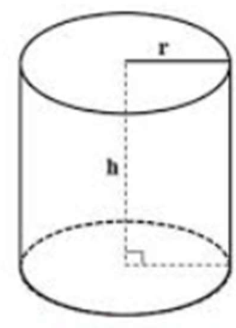



**Hình trụ:**

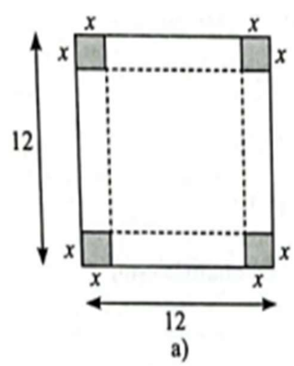
Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh.$

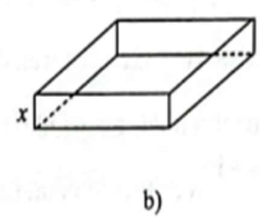
Diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2.$

Thể tích $V = \pi r^2 h.$




**Ví dụ 1.** Từ một miếng bìa hình vuông có cạnh bằng 12 cm, người ta cắt bỏ đi bốn hình vuông nhỏ có cạnh bằng $x$ (cm) ở bốn góc (Hình a) và gấp lại thành một hình hộp không nắp (Hình b). Tìm $x$ để thể tích của hình hộp là lớn nhất.




**Giải**

Theo đề bài, ta có: cạnh của hộp là $12 - 2x$ (cm).

Chiều cao của hộp là $x$ (cm).

Thể tích của hộp là $V = (12-2x)^2.x = 4x^3 - 48x^2 + 144x,$ với $0 \le x \le 6..$

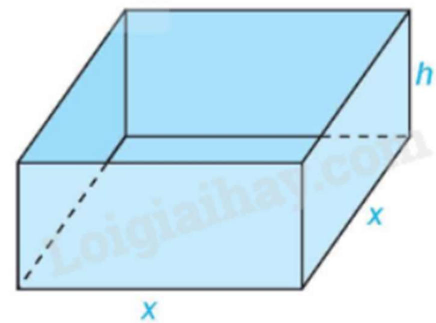
Ta có $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Rightarrow x = 6, x = 2.$

Ta có $V(0) = 0; V(2) = 128, V(6) = 0.$

Vậy $\max\limits_{[0;6]} V(x) = V(2) = 128.$

Vậy với $x = 2$ thì thể tích của hình hộp là lớn nhất.

**Ví dụ 2.** Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 $cm^2$ như hình bên. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.




**Giải**

Diện tích các bề mặt của hộp là diện tích toàn phần của hộp,ta có

$$S_{tp} = x^2 + 2(x+x).h = x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}(cm)$$

Thể tích của hình hộp là $V = x^2.h = x^2.\dfrac{108 - x^2}{4x} = \dfrac{108x - x^3}{4}(cm^3), x > 0.$

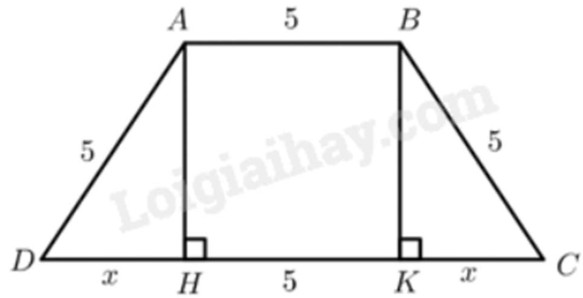
Ta có $V'(x) = \dfrac{-3x^2 + 108}{4} = 0 \Rightarrow x = 6.$

Bảng biến thiên:

| x | 0 | | 6 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V' | | + | 0 | – | |
| V | | | 108 | | |
| | 0 | | | | $-\infty$ |

Dựa vào BBT ta thấy thể tích lớn nhất của hình hộp khi độ dài cạnh đáy $x = 6cm$. Khi đó, chiều cao của hình hộp là $\dfrac{108 - 6^2}{4.6} = 3(cm).$

**Ví dụ 3.** Cho hình thang có đáy nhỏ và cạnh bên bằng nhau và bằng 5. Tìm diện tích lớn nhất của hình thang cân đó.




Xét hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB, gọi H, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ A và B xuống CD.

Đặt $CK = DH = x, 0 \le x < 5$

Ta có $CD = 5 + 2x, AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{25 - x^2}.$

Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S = \frac{(AB + CD).AH}{2} = \frac{(5 + 5 + 2x)\sqrt{25 - x^2}}{2} = (5 + x)\sqrt{25 - x^2}$$

Xét hàm số $S(x) = (5 + x)\sqrt{25 - x^2}$ trên [0;5).

Ta có $S'(x) = \dfrac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 5x + 25 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}.$

Bảng biến thiên:

| $x$ | 0 | | $\frac{5}{2}$ | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\alpha)$ | | + | 0 | – | \|\| |
| $S(\alpha)$ | | | $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ | | |
| | 25 | ↗ | | ↘ | 0 |

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{[0;5)} S(x) = S\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{75\sqrt{3}}{4}.$

Vậy hình thang có diện tích lớn nhất bằng $\dfrac{75\sqrt{3}}{4}.$

**Ví dụ 4.** Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 $cm^3$ . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/$cm^2$ , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/$cm^2$ . Tính các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

**Giải**

Gọi bán kính đáy của bình là $x(cm), x > 0$ và $h(cm), h > 0$ là chiều cao của thùng.

Ta có $V = 1000cm^3 = \pi x^2 h \Rightarrow h = \dfrac{1000}{\pi x^2}$.

Diện tích mặt trên và mặt dưới của bình là $2\pi x^2$..

Chi phí  sản xuất mặt trên và mặt dưới của bình là $1,2.2\pi x^2 = 2,4\pi x^2$.

Diện tích mặt bên của bình là $2\pi xh = 2\pi x\dfrac{1000}{\pi x^2} = \dfrac{2000}{x}$

Chi phí sản xuất mặt bên là $0,75.\dfrac{2000}{x} = \dfrac{1500}{x}$.

Tổng chi phí là $T(x) = 2,4\pi x^2 + \dfrac{1500}{r}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $T(x)$ trên $(0;+\infty)$.

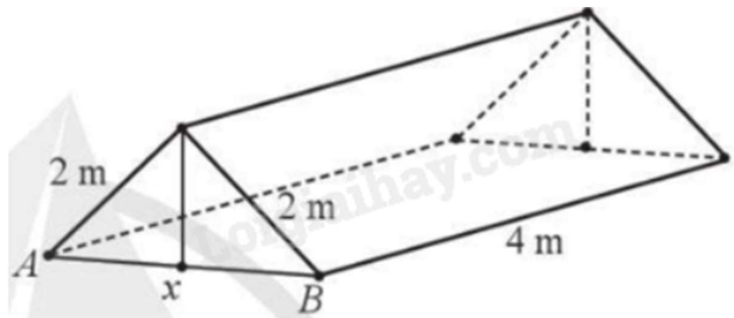
Ta có $T'(x) = 4,8\pi x - \dfrac{1500}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}$

Bảng biến thiên

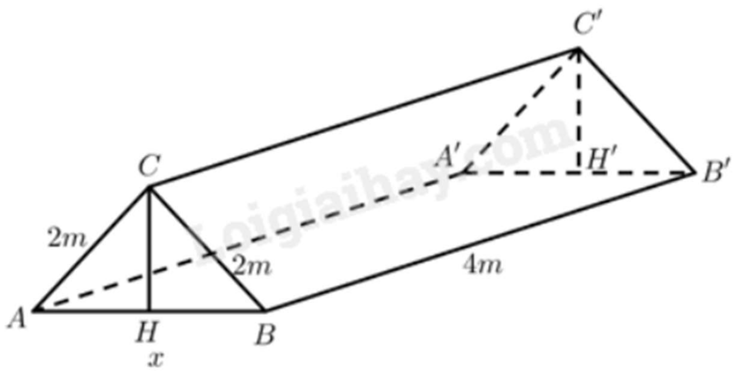
| x | 0 | | $\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T'(x) | | − | 0 | + | |
| T(x) | $+\infty$ | ↘ | $S\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$ | ↗ | $+\infty$ |

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}$ và chiều cao của bình là $\dfrac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}\right)^2}$.

**Ví dụ 5:** Nhóm bạn Đức dựng trên một khu đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình vuông có độ dài cạnh 4 m như hình bên với hai mép tấm bạt sát mặt đất. Tính khoảng cách $AB$ để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.




**Lời giải**




Giả sử lều dựng lên được hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ với $AC = BC = 2, BB' = 4, AB = x (0 < x < 4)$.

Khi đó $AH = \dfrac{x}{2}, CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}}$.

$S_{\triangle ABC} = AB.CH = x\sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC}.BB' = x\sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}}.4 = 2x\sqrt{16 - x^2}$.

Xét hàm số $V(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$ trên $(0;4)$.

Ta có $V'(x) = \dfrac{2(8 - x^2)}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

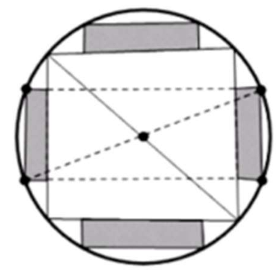
Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $2\sqrt{2}$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | | |
| $y$ | | | $16$ | | |
| | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ |

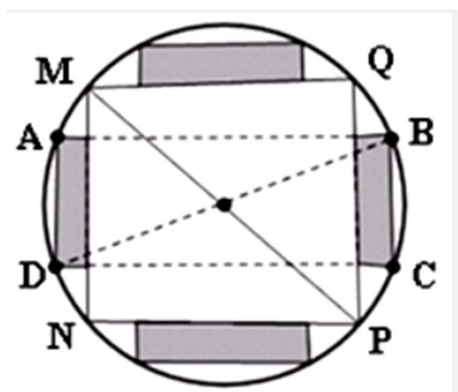
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{(0;4)} V(x) = 16$ tại $x = 2\sqrt{2}$.

Vậy $AB = 2\sqrt{2}$ thì khoảng không gian trong lều là lớn nhất.

**Ví dụ 6:** Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xả thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ tô màu xám như hình vẽ. Tìm chiều rộng $x$ của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



**Giải**




Gọi $x, y$ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của miếng phụ.

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S = S_{MNPQ} + 4xy$.

Cạnh hình vuông $MN = \dfrac{MP}{\sqrt{2}} = \dfrac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}(cm)$.

Do đó $S = \left(20\sqrt{2}\right)^2 + 4xy = 800 + 4xy$ (1).

Lại có $AB^2 + AD^2 = BD^2 = 40^2 \Rightarrow \left(2x + 20\sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 1600 \Rightarrow y^2 = 800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2}$

Thay vào (1) ta được $S = 800 + 4x\sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2} = 800 + 4\sqrt{800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4}$.

Ta có $2x = AB - MN = AB - 20\sqrt{2} < BD - 20\sqrt{2} = 40 - 20\sqrt{2}$

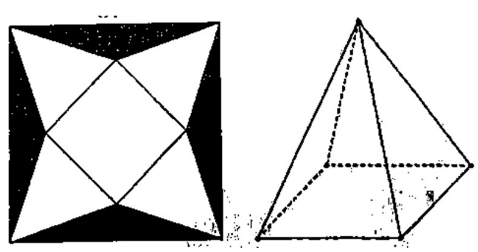
Vậy $0 < x < 40 - 20\sqrt{2}$

Xét hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; 40 - 20\sqrt{2})$

Ta có $S'(x) = 1600 - 240x^2\sqrt{2} - 16x^3 = 16x\left(100 - 15\sqrt{2} - x^2\right) \Rightarrow x = \dfrac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$

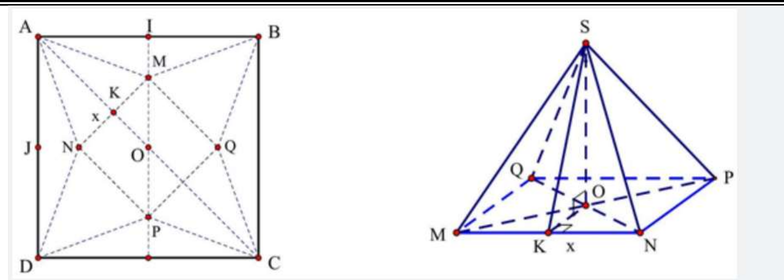
Lập BBT ta có $x = \dfrac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 7.** Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh $2m$, người ta cắt bỏ đi bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông rồi ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều (tham khảo hình vẽ). Giả sử các mối hàn ghép là không đáng kể thì khối chóp được tạo thành có thể tích lớn nhất là bao nhiêu $\mathrm{m}^3$.
(Kết quà làm tròn đến đến hàng phần trăm)



**Lời giải**

Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp là $x(m)$.




Do $MN < IJ = \sqrt{2} \Rightarrow x \in (0;\sqrt{2})$.

Ta có: $OK = \dfrac{x}{2}; OA = \dfrac{AC}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SK = AK = \sqrt{2} - \dfrac{x}{2}$.

Do vậy: $SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \dfrac{x}{2}\right)^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.

Khi đó thể tích khối chóp là: $V = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.

Xét $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}$, ta có

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x\sqrt{2 - \sqrt{2}x} - x^2\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4x(2 - \sqrt{2}x) - \sqrt{2}x^2}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}}\right) = \frac{8x - 5\sqrt{2}x^2}{3(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x})}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 5\sqrt{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | $0$ | – | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Ta thấy thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình là $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$.

Khi đó thể tích lớn nhất của khối chóp là $V_{\max} = f\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\right) = \dfrac{32\sqrt{10}}{375} \approx 0,27$.

## Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Phần A. Trắc nghiệm đúng sai

**Câu 1.** (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Cho hàm số $f(x)=92-20\ln(x+1)$.

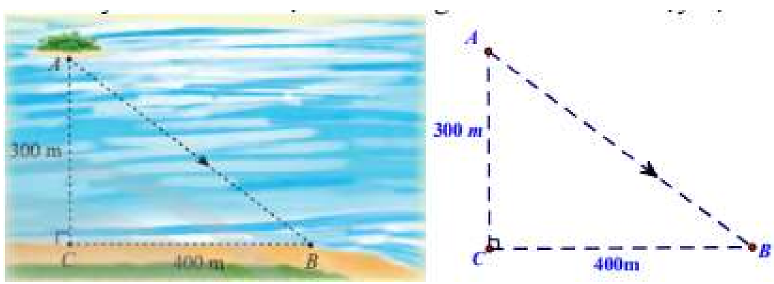
**a)** Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $D=(-1;+\infty)$.

**b)** Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

**c)** Bất phương trình $f(x)\ge 72$ có **đúng** 3 nghiệm nguyên.

**d)** Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau khi tham gia một khóa học, phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ sau $t$ tháng kết thúc khóa học được xác định bởi hàm số $y=f(t)$, trong đó $f(t)$ được tính bằng % và $0\le t\le 24$. Phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ 50% khi $t=7$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

**Câu 2.** Trong một trò chơi thử thách, bạn Giáp đang ở trên thuyền (vị trí $A$ ) cách bờ hồ (vị trí C ) 300 m và cần đi đến vị trí $B$ trên bờ hồ như hình vẽ,
khoảng cách từ $C$ đến $B$ là 400 m , lưu ý là Giáp có thể chèo thuyền thẳng từ $A$ đến $B$ hoặc chèo thuyền từ $A$ đến một điểm nằm giữa $C$ và $B$ rồi chạy bộ đến $B$.




Biết rằng Giáp chèo thuyền với tốc độ $50\text{ m / phút}$ và chạy bộ với tốc độ $100\text{ m / phút}$.

**a)** Thời gian Giáp chèo thuyền thẳng từ $A$ đến $B$ là là 10 phút.

**b)** Thời gian Giáp chèo thuyền từ $A$ đến $C$ rồi chạy bộ từ $C$ đến $B$ là là 10 phút.

**c)** Giả sử Giáp chèo thuyền thẳng đến điểm $D$ nằm giữa $B$ và $C$ và cách $C$ một đoạn $x(\text{ m})$ như hình vẽ dưới đây, rồi chạy bộ đến $B$ thì thời gian Giáp đi từ $A$ đến $B$ được tính bằng công thức

$$f(x)=\frac{1}{100}\left(\sqrt{x^2+90000}+400-x\right)\text{ (phút).}$$

**d)** Thời gian nhanh nhất để Giáp đi từ $A$ đến $B$ xấp xỉ 9,2 phút (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**Câu 3.** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát (người giám sát sẽ giám sát tất cả các máy). Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ.

**a)** Trong 1 giờ, cần 266 máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball.

**b)** Trong $\frac{8}{3}$ giờ, cần 100 máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball.

**c)** Chi phí hoạt động thấp nhất là 6,5 triệu đồng.

**d)** Để chi phí hoạt động thấp nhất, công ty cần sử dụng 16 máy.

**Câu 4.** Chi phí nguyên liệu của một con tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghin đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai ti lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10\text{ km/h}$ thì chi phí nguyển liệu phần thứ hai bằng 30 nghin đồng /giờ. Gọi $x(\text{ km/h})$ là vận tốc của tàu.

**a)** Chi phí nhiên liệu cho phần thứ nhất trong thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{480}{x}$ (nghìn đồng).

**b)** Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trong 1 giờ là $C(x)=480+0,03x^3$ (nghìn đồng).

**c)** Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trên quãng đường 1 km giảm khi vận tốc của tàu thuộc $(0;30)$.

**d)** Tổng chi phí nhiên liệu để tàu chạy trên quãng đường 1 km nhỏ nhất là 43 (nghìn đồng).

**Câu 5.** Nhà máy $A$ chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy $B$. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng $A$ cung cấp cho $B$ số lương sản phẩm theo đơn đặt hàng của $B$ (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là $x$ tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm của $A$ cho $B$ được biểu diễn bởi công thức: $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để $A$ sản xuất $x$ tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

**a)** Lợi nhuận mà $A$ thu được khi bán $x$ tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho $B$ được biểu diễn bởi công thức $H(x)=-0,001x^3+15x-100$.

**b)** Số tiền mà $A$ thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho $B$ là 600 triệu đồng.

**c)** Nhà máy $A$ bán cho nhà máy $B 50\sqrt{2}\approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

**d)** Chi phí để $A$ sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

**Câu 6.** Một loại thuốc được đùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong $t$ giờ được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}(\text{mg/l})$.

**a)** Sau khi tiêm thuốc 2 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bện nhân bằng $0,4(\text{mg/l})$.

**b)** Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân có thể vượt quá $0,5(\text{mg/l})$.

**c)** Sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bện nhân cao nhất.

**d)** Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng $0,5(\mathrm{mg}/\mathrm{l})$.

**Câu 7.** Một sợi dây kim loại dài 6 cm . Người ta cắt sợi dây đó thành hai đoạn. Đoạn có độ dài $x$ (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông $(0 < x < 6)$.

**a)** Bán kính đường tròn là $r = \dfrac{x}{\pi}$.

**b)** Diện tích hình vuông là $\dfrac{(6-x)^2}{4}$.

**c)** ) Tổng diện tích hai hình là $\dfrac{(4+\pi)x^2 - 12\pi x + 36\pi}{16\pi}$.

**d)** Khi $x = \frac{6\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

**Câu 8.** (Sở Lào Cai 2025) Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ ( $\mathrm{mg}/\mathrm{l}$ ) của thuốc trong máu sau $x$ phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x) = \dfrac{30x}{x^2+2}$. (Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning)

**a)** Thời điểm 1 phút sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu là $10(\mathrm{mg}/\mathrm{l})$.

**b)** Đạo hàm của hàm số $C(x)$ là $C'(x) = \dfrac{60-30x^2}{(x^2+2)^2}$.

**c)** Trong khoảng thời gian từ 1 phút sau khi tiêm trở đi, nồng độ thuốc trong máu giảm dần.

**d)** Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm 2 phút sau khi tiêm.

**Câu 9.** (Sở Quảng Nam 2025) Nhà ông $A$ cần làm một bể chứa nước có dạng khối hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình chữ nhật và chiều dài gấp ba lần chiều rộng, khối hộp tương ứng có thể tích bằng $1152\mathrm{dm}^3$. Giả sử bề dày của thành bể và đáy bể là không đáng kể, Giá thuê công nhân để làm bể là 400000 đồng $/\mathrm{m}^2$. Gọi $x$ là chiều rộng của đáy bể ( $x$ là số dương và có đơn vị là dm ).

**a)** Chiều cao của bể nước là $\dfrac{384}{x^2}(\mathrm{dm})$.

**b)** Diện tích xung quanh của bể chứa nước là $\dfrac{3072}{x}(\mathrm{dm}^2)$.

**c)** Tổng diện tích cần làm của bể chứa nước là $\dfrac{3072}{x} + 6x^2(\mathrm{dm}^2)$

**d)** Chi phí thấp nhất mà ông A trả cho công nhân làm bể nước theo yêu cầu là 3072000 đồng.

**Câu 10.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^3-3t^2+6t+4$, trong đó $0\le t\le 10, t$ tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

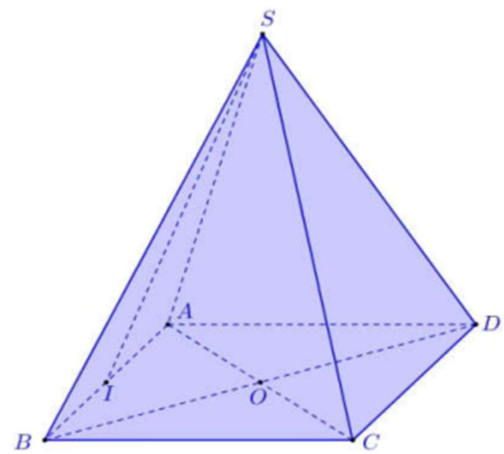
**a)** Quãng đường chất điểm chuyển động trong $2(\mathrm{~s})$ đầu tiên là $8(\mathrm{~m})$.

**b)** Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3(\mathrm{~s})$ là $15(\mathrm{~m/s})$.

**c)** Tại thời điểm mà $s(t)=22(\mathrm{~m})$ thì gia tốc tức thời của chất điểm là $12\left(\mathrm{~m/s^2}\right)$.

**d)** Tại thời điểm $t=2(\mathrm{~s})$ vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 11.** (Liên Trường Nghệ An 2025) Nhân dịp Tết Trung thu, bác Oanh làm các đèn lồng cho con. Mỗi đèn bác dùng một sợi dây đồng dài $24dm$ cắt thành 3 đoạn để uốn làm khung đèn. Đoạn thứ nhất bác uốn thành hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $x(dm)$ để làm đáy, hai đoạn còn lại có độ dài bằng nhau uốn thành các đường gấp khúc $ASC$ và $BSD$. Khung đèn sau khi hoàn thiện có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều $S\cdot ABCD$ và mặt ngoài của đèn được dán giấy màu để trang trí ( xem các mối nối, dán là không đáng kể). Khi đó ta có:



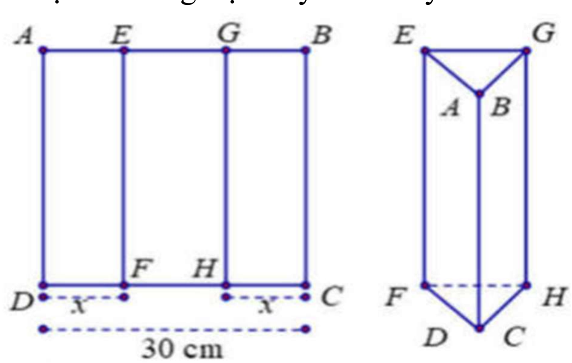

**a)** Độ dài cạnh bên của khung đèn bằng $6-x(dm)$.

**b)** Khi $x=2(dm)$ thì độ dài đường cao của khung đèn là $\sqrt{14}\,(dm)$

**c)** Khi tất cả các cạnh bằng nhau thì diện tích giấy màu cần dùng là $9\left(1+\sqrt{3}\right)dm^2$

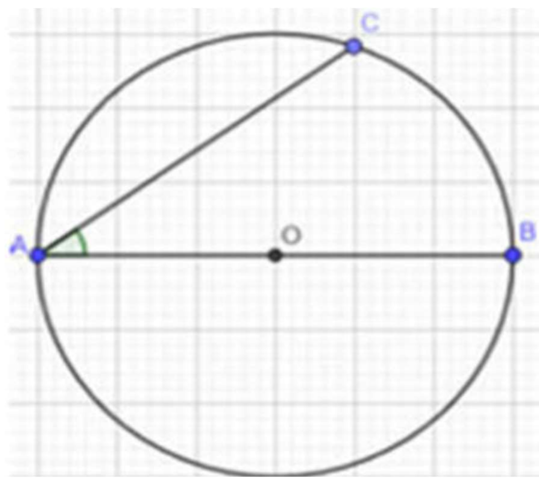
**d)** Thể tích phần không gian của đèn lồng lớn nhất khi $x=2,79dm$ ( Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Câu 12.** Một tấm nhôm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm . Người ta gập tấm nhôm theo hai cạnh $EF$ và $GH$ cho đến khi $AD$ và $BC$ trùng nhau như hình vẽ bên để được mộthình lăng trụ khuyết hai đáy.



**a)** Thể tích khối lăng trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó $S$ là diện tích của tam giác $AEG$.
**b)** Giá trị của $x$ để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10(\text{ cm})$.
**c)** Diện tích của tam giác $AEG$ bằng $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15 - x)^2 \cdot (2x - 15)}$.
**d)** Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250 .

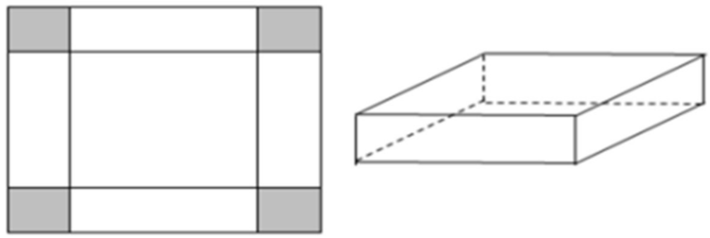
**Câu 13.** Một khu du lịch sinh thái đang khai thác dịch vụ chèo thuyền và ngắm cảnh ven hồ. Hồ nước có dạng hình tròn tâm $O$, bán kính bằng 1 km và tại hai vị trí $A, B$ đối xứng nhau qua $O$ người ta xây dựng nơi bán vé vào và nơi kết thúc thăm quan. Du khách sẽ được sử dụng dịch vụ chèo thuyền từ vị trí $A$ đến vị trí $C$ trên bờ hồ và sẽ có xe chở ngắm cảnh từ vị trí $C$ men theo bờ hồ đến nơi kết thúc $B$. Biết rằng vận tốc chèo thuyền là 100 m mỗi phút và vận tốc xe chạy ngắm cảnh là 200 m mỗi phút. Gọi $x$ (radian) là số đo góc $\widehat{CAB}$ $\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$.




**a)** Khi $x = 0$ thời gian đi từ $A$ đến $B$ là 20 phút.
**b)** Quang đường xe chở người đi ngắm cảnh là $1000x$ ( mét).
**c)** Thời gian đi từ $A$ đến $B$ là $20\cos x + 5x$ (phút).
**d)** Thời gian xe đi từ $A$ đến $B$ luôn ít hơn 22 phút 30 giây với mọi cách chọn từ vị trí điểm $C$.

**Câu 14.** Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 20-10 năm 2024. Ông M đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h$ và $x$.
**a)** Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2h$.
**b)** Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.
**c)** Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{MV} = 2x^2 + 4xh$.
**d)** Khi cạnh đáy của chiếc hộp $x$ lớn hơn 4 thì $x$ càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

**Câu 15.** Một tấm nhôm hình vuông cạnh 240cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x(cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp.



**Câu 16.** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian t giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu 39,2 $\mathrm{m/s}$ là $h(t) = 5 + 39{,}2t - 4{,}9t^2$, chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên (theo Vật li đại cương, $NXB$ Giáo dục Việt Nam, 2016). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Vận tốc của vật sau 3 giây là 4,6 $\mathrm{m/s}$

**b)** Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài hơn 7 giây.

**c)** Vận tốc của vật lúc chạm đất sấp xi $-40{,}43\ \mathrm{m/s}$.

**d)** Vật đạt độ cao lớn nhất bằng 83,4 mét tại thời điểm $t = 4$ giây.

**Câu 17.** Trong một phòng thí nghiệm có máy đo nồng độ khí $CO_2$ cho thấy: nồng độ khí $CO_2$ trong phòng thay đổi theo thời gian $t$ (tính bằng giờ) và được thể hiện qua hàm số $f(t) = 400 + \frac{200}{t^2+5}$ (ppm), với $t \geq 0$ (Khi nói nồng độ khí $CO_2$ trong không khí là 400 ppm , điều đó có nghĩa là: Trong một triệu phần thể tích của không khí, có 400 phần thể tích là khí $CO_2$ ).

Các khẳng định sau đúng hay sai?

**a)** Nồng độ khí $CO_2$ trong phòng tại thời điểm $t = 0$ là $400(\mathrm{ppm})$.

**b)** $f'(t) = \frac{-2000t^2-10000}{(t^2+5)^2}$ với $t \geq 0$.

**c)** Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = 2$.

**d)** Nồng độ khí $CO_2$ cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 947 (ppm).

**Câu 18.** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Biết rằng, nếu số lượng đặt hàng là $x$ (tấn) sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng) và chi phí để nhà máy A sản xuất được $x$ (tấn) sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng, gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

**a)** Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán $x$ (tấn) sản phẩm ( $0 \leq x \leq 100$ ) cho nhà máy B là $H(x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100$.

**b)** Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
**c)** Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là 600 triệu đồng.
**d)** Nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

**Câu 19.** Nhịp tim của một vận động viên chạy sau t giây $(t \geq 0)$ kể từ khi rời vạch xuất phát được cho bởi công thức $P(t) = \dfrac{300 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 2t + 25}}{t + 25}$ (số nhịp tim/ phút). Biết rằng, với vận động viên đó bác sĩ đã đưa ra lời khuyên không nên đẩy nhịp tim quá 175 (số nhịp tim/ phút) để tránh tình trạng quá tải cho tim.
**a)** Nhịp tim của vận động viên đó không vượt quá $150\sqrt{2}$ (số nhịp tim/phút).
**b)** Trong 2 phút đầu tiên kể từ khi xuất phát, nhịp tim của vận động viên đó vẫn trong ngưỡng cho phép theo lời khuyên của bác sĩ .
**c)** Công thức cho biết tốc độ thay đổi nhịp tim theo thời gian $t$ là

$$P'(t) = \frac{3450 \cdot \sqrt{2}t}{(t+25)^2 \cdot \sqrt{t^2 + 4t + 50}}$$

**d)** Tốc độ thay đổi nhịp tịm của vận động viên đó tại thời điểm 1,5 phút sau khi xuất phát bằng 2,63 lần ( kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) tốc độ thay đổi nhịp tim tại thời điểm 0,5 phút sau khi xuất phát.

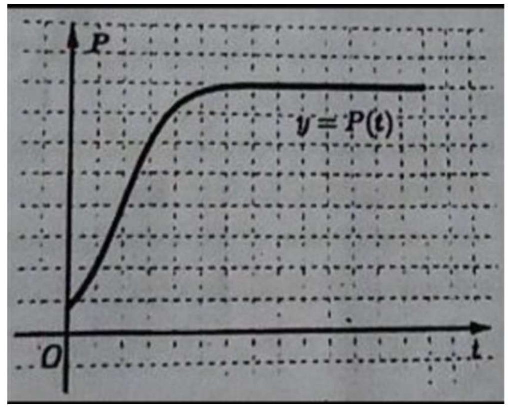
**Phần B. Tự luận (Trả lời ngắn)**

**Bài 1.** Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T\left(t\right) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$, trong đó $T$ là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ lớn nhất của cơ thể người đó.

**Bài 2.** Doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \dfrac{24000}{1 + 6e^{-t}}, t \geq 0$, trong đó thời gian $t$ được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Tốc độ bán hàng lớn nhất đạt được khi $t = \ln a$. Tìm $a$.

**Bài 3.** Một công ty trung bình bán được 900 cái máy lọc nước mỗi tháng với giá 8 triệu đồng/cái. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 100 nghin đồng thì số lượng máy lọc bán ra tăng 10 cái. Biết hàm chi phí là $C(x) = 2000 - \dfrac{9}{5}x$ (triệu đồng), với $x$ là số máy lọc bán ra trong tháng. Tìm lợi nhuận lớn nhất mà công ty thu được (tính theo triệu đồng).

**Bài 4.** Một hồ nước ở Bắc Ontario đã được phục hồi sau một vụ tràn axit khiến tất cá hồi ở đó chết. Một chương trình tái thả cá đã thả 800 con cá hồi vào hồ. Ba năm sau, số lượng được ước tính là 6000 con. Sức chứa của hồ được cho là 8000 con. Để đánh giá khả năng tăng trưởng, người ta mô phỏng số lượng cá trong hồ qua từng năm thông qua hàm số $P(t)=\dfrac{c}{1+ab^{-t}}(a,b,c\in\mathbb{R})$, có đồ thị như hình vẽ bên dưới (trong đó $t$ tính theo năm kể từ lúc bắt đầu thả cá vào hồ). Sử dụng mô hình trên hãy tính tốc độ tăng trưởng tối đa (đơn vị con/năm) của đàn cá. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.




**Bài 5.** Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được $x$ mét vải lụa $\left(1\le x\le 18\right)$. Tổng chi phí sản xuất $x$ mét vải lụa tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x)=x^3-3x^2-20x+500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán $x$ mét vải lụa. Lợi nhuận tối đa mà hộ này thu được là bao nhiêu?

**Bài 6.** Hằng tháng, nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo số lượng đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là $x$ tấn sản phẩm một tháng thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm được biểu diễn bởi công thức $P(x)=50-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất $x$ sản phẩm trong một tháng là $C(x)=95+35x$ (triệu đồng). Hỏi lợi nhuận lớn nhất nhà máy A có thể thu được trong một tháng khi bán hàng cho nhà máy B là bao nhiêu triệu đồng?

**Bài 7.** Một công ty X sản xuất máy tính bảng cho học sinh, bán được $x$ máy mỗi tháng. Giá bán mỗi máy tính bảng được cho bởi công thức $p(x)=8600-10x$ (nghìn đồng). Chi phí để sản xuất mỗi máy tính bảng là $c(x)=x^2-4x+500+\dfrac{1000}{x}$ (nghìn đồng). Hỏi công ty X sẽ bán bao nhiêu máy tính bảng mỗi tháng để lợi nhuận là cao nhất?

**Bài 8.** Nhà máy A chuyển sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là $x$ tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=90-0,01x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất $x$ tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=\dfrac{1}{2}(200+27x)$ (triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu mỗi tháng. Nhà máy A bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng)?

**Bài 9.** Nếu một doang nghiệp sản xuất $x$ sản phẩm trong một tháng $\left(x\in\mathbb{N}^*;1\le x\le 4500\right)$ thì doanh thu nhận được sau khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x)=-0,01x^2+300x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x)=\dfrac{30000}{x}+200$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

**Bài 10.** Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết $x$ sản phẩm đó $(0<x\le 2000)$, tổng số tiền doang nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x)=2000x-x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x)=x^2+1440x+50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là $t$ (chục nghìn đồng) $(0<t<300)$. Mức thuế phụ thu $t$ (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là bao nhiêu đồng?

**Bài 11.** Một công ty muốn đầu tư vào hệ thống điện mặt trời có công suất $x$ (đơn vị tính MW). Theo nghiên cứu cho thấy một số thông tin sau: Chi phí ban đầu là $C_1(x)=1400+55x$ (tỷ đồng). Doanh thu hằng năm là $R(x)=28x-0,15x^2$ (tỷ đồng/năm). Chi phí vận hành hằng năm là $C_2(x)=12+0,35x+0,012x^2$ (tỷ đồng/năm). Hãy tìm công suất $x$ (làm tròn đến hàng đơn vị) để tối đa hóa lợi nhuận trên đầu tư, được tính là tỷ lệ lợi nhuận hằng năm trên chi phí ban đầu. c

**Bài 12.** Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

**Bài 13.** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

**Bài 14.** Năm 2025, một cửa hàng cần nhập về tổng cộng 600 chiếc điện thoại. Cửa hàng sẽ nhận theo nhiều lô hàng, mỗi lô hàng chứa số lượng điện thoại bằng nhau. Chi phí vận chuyển là 50 USD cho mỗi lô hàng, cộng thêm một loại chi phí vận chuyển nữa là 3 USD cho mỗi chiếc điện thoại và phí này cả năm chỉ tính cho lần vận chuyển đầu tiên. Hỏi cửa hàng đó nên nhập mỗi lô hàng bao nhiêu chiếc điện thoại để chi phí vận chuyển cả năm 2025 là thấp nhất?

**Bài 15.** Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Mỗi ngày nếu giá bán rau là 30000 đồng/1kg thì bán hết rau, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa ra 20 kg. Số rau thừa này được mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giábao nhiêu nghìn đồng?

**Bài 16.** Một công ty chuyên sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 9000 quả bóng rổ. Công ty có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 36 quả bóng rổ trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 250 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và chỉ cần có người giám sát. Chi phí trả cho người giám sát là 225 nghin đồng mỗi giờ. Số máy móc công ty cần sử dụng để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất là bao nhiêu?

**Bài 17.** Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bản được 1000 điện thoại A với giá 14 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bản 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán $x$ cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$(triệu đồng) và hàm chỉ phí hàng tuần $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng). Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bản mỗi cái điện thoại A với giá bao nhiêu (triệu đồng)?

**Bài 18.** Một xe ô tô chở khách du lịch có sức chứa tối đa là 16 hành khách. Trong một khu du lịch, một đoản khách gồm 24 người đang đi bộ và muốn thuê xe về khách sạn. Lái xe đưa ra thỏa thuận với đoàn khách du lịch như sau: Nếu một chuyến xe chở $x$ (người) thì giá tiền cho mỗi người là $\dfrac{(44-x)^2}{2}$ (nghìn đồng). Với lợi nhuận như trên, thì lái xe có thể thu được nhiều nhất bao nhiêu triệu đồng từ một chuyến chở khách (làm tròn đến hàng phần trăm)?

**Bài 19**. Trong trung tâm thương mại Lotte thành phố Vinh, có một nhà hàng bán buffet hải sản. Khi nhà hàng bán với giá 200 ngàn đồng một suất thì mỗi ngày nhà hàng bán được 100 suất. Nhà hàng dự định có đợt giảm giá để kích cầu trong dịp cuối năm. Theo khảo sát từ thị trường thi mỗi lần giảm giá 10 ngàn đồng một suất thì nhà hàng bán thêm được 10 suất. Hỏi nhà hàng cần bán với giá mới là bao nhiêu ngàn đồng một suất để doanh thu trong một ngày là lớn nhất?

**Bài 20**. Bác Bình có một nông trại ao nuôi cá, mỗi ngày thu hoạch được 2 tấn cá. Nếu bán cho thương lái với giá 30 nghìn đồng/kg thì hết cá, nếu giá bán cứ tăng thêm 2 nghìn đồng/kg thì số cá thừa sẽ tăng thêm 10 kg. Số cá thừa này được bán để làm thức ăn cho động vật với giá 10 nghin đồng/kg. Hỏi bác Bình phải bán với giá bao nhiêu nghìn đồng/kg để số tiền bán cá mỗi ngày đạt doanh thu lớn nhất?

**Bài 21.** Một nhà xuất bản nhận in 4000 ấn phẩm. Nhà xuất bản có tất cả 14 máy in được cài đặt, hoạt động tự động và giám sát bởi 1 kĩ sư. Mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong một giờ. Chỉ phí cải đặt máy in là 12 USD cho một máy, chỉ phí giám sát là 9USD một giờ. Tính số máy in nhà xuất bản nên sử dụng để chi phí in là nhỏ nhất ?

**Bài 22.** Giả sử chỉ phí đặt hàng và vận chuyển $C$ (đơn vị: triệu đồng) của một linh kiện được sử dụng trong sản xuất một xác định bởi công thức $C(x)=\dfrac{19200000}{x^2}+\dfrac{27x}{x+3000}, x\geq 1$. Trong đó $x$ là số linh kiện được đặt hàng và vận chuyển. Tìm $x$ để chi phí đặt hàng và vận chuyển cho mỗi linh kiện trên là nhỏ nhất.

**Bài 23.** Một chủ nhà hàng kinh doanh phần ăn uống đồng giá có chiến lược kinh doanh như sau: Phí cố định được ước tính trong một năm là 55 triệu đồng. Chi phí một phần ăn ước tính khoảng 22 nghìn đồng. Giá niêm yết trên thực đơn là 30 nghìn đồng. Giả định rằng tất cả các phần ăn chế biến sẵn đều được bán hết và kí hiệu x là số phần ăn trong một năm, giả sử $x$ là số nguyên thuộc [5000:25000]. Mục tiêu của chủ nhà hàng là tạo ra lợi nhuận ít nhất là 135 triệu đồng mỗi năm. Biết rằng nhà hàng mở cửa 300 ngày một năm, hỏi trung bình mỗi ngày nhà hàng phải phục vụ ít nhất bao nhiêu phần ăn để đạt mục tiêu trên?

**Bài 24.** Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Singapore ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 60 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vẻ là 100 nghin đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 24 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tỉnh giá vé là nghìn đồng?

**Bài 25.** Năm 2025, một cửa hàng cần nhập về tổng cộng 600 chiếc điện thoại. Cửa hàng sẽ nhận theo nhiều lô hàng, mỗi lô hàng chứa số điện thoại bằng nhau. Chi phí vận chuyển là 50 USD cho mỗi lô hàng, cộng thêm một loại phi vận chuyển là 3 USD cho mỗi chiếc điện thoại và phí này cả năm chỉ tính cho lần vận chuyển đầu tiên. Hỏi cửa hàng đó nên nhập mỗi lô hàng bao nhiêu chiếc điện thoại để chi phí vận chuyển cả năm 2025 thấp nhất?

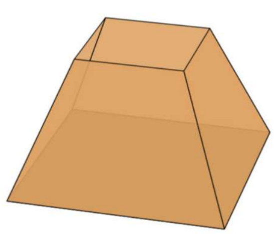
**Bài 26.** Một cửa hàng phân phối gạo với chi phí mua vào là 30 nghìn đồng/1kg, bản ra là 35 nghìn đồng /1kg. Với giá bản này thì số gạo bán được trong một tháng là 12000 kg. Để đẩy mạnh hơn nữa doanh số tiêu thụ gạo trong một tháng, cửa hàng dự định giảm giá bản và ước tính rằng nếu giảm 1 nghìn đồng / 1kg thì số lượng gạo bản ra trong một tháng sẽ tăng thêm 4000 kg. Cửa hàng phải định giá bán gạo mới là bao nhiêu nghìn đồng một kilôgam thì lợi nhuận thu được trong tháng cao nhất?

**Bài 27.** Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoảng chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chỉ phí bảo quản mỗi tạ trái cây trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các của hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí bảo quản trong kho)?

**Bài 28.** Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 480 nghìn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai trên 1 km đường ti lệ thuận với lập phương của tốc độ tảu, khi tốc độ bằng 20 km/h thì chỉ phí phần thứ hai bằng 100 nghìn đồng mỗi giờ. Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phínhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu km/h ? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

**Bài 29.** Một công ty đang triển khai chiến dịch quảng cáo sản phẩm mới. Số tiền đầu tư quảng cáo là $A$ (triệu đồng). Theo kết quả nghiên cứu thị trường, số lượng sản phẩm bán ra (đơn vị: sản phẩm) phụ thuộc vào chi phí quảng cáo theo hàm: $q(A)=1000+\dfrac{1013}{3}\ln(1+A)$. Biết rằng, chỉ phí sản xuất mỗi sản phẩm là 10 triệu đồng và giá bán mỗi sản phẩm là 20 triệu đồng. Giá trị lợi nhuận tối đa mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu tỉ đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Bài 30.** Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi $x$ là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị: dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là: $C(x)=x^2+27$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là: $T(x)=x+3$ (giờ).



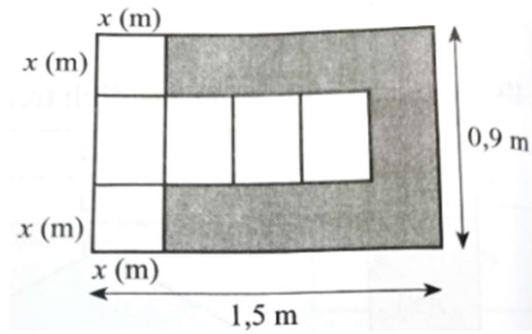
Xưởng muốn xác định kích thước $x$ để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của $x$.

**Bài 31.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-t^3+9t^2+t+10$ trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

**Bài 32.** Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

**Bài 34.** Người ta muốn làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có đáy hình vuông và thể tích là 10 l. Diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp là bao nhiêu?

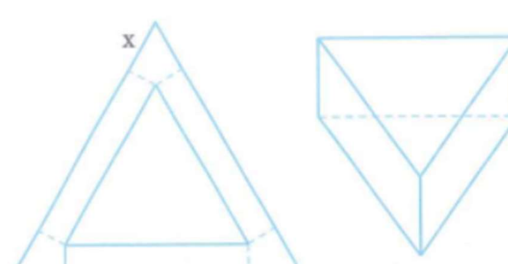
**Bài 35.** Từ một miếng bìa có độ dài hai cạnh lần lượt là 0,9 m và 1,5 m như hình bên. Bạn Minh cắt đi phần tô màu xám và gấp lại để được một hình hộp chữ nhật. Gọi V là thể tích hình hộp chữ nhật được tạo thành, V được tính theo $x$ bởi công thức nào? Tìm $x$ để hình hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.




**Bài 36.** Để tạo một kiện hàng dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, người ta dùng các thanh gỗ ghép khít đóng lại với nhau. Biết rằng, dung tích kiện hàng bằng $9m^3$ và giá thành $1m^2$ gỗ sử dụng là 20 000 đồng. Hỏi sau khi hoàn thành kiện hàng đó, người ta cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng? (Diện tích các mép giữa hai mặt kề nhau không đáng kể)

**Bài 37.** Người ta muốn làm một cái bồn chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đậy, đáy thùng có chiều dài gấp ba lần chiều rộng và có thể tích 18 000 lít. Để giảm chi phí, người ta cần phải thiết kế sao cho tổng diện tích các mặt của bồn chứa nước là nhỏ nhất.Tính chi phí thấp nhất (đơn vị tính triệu đồng) để sản xuất ra một cái bồn. Biết rằng giá vật liệu là 400 nghìn đồng/$m^2$ và giá thiết kế, thi công, hoàn thiện cái bồn là 300 nghìn đồng/$m^2$ .

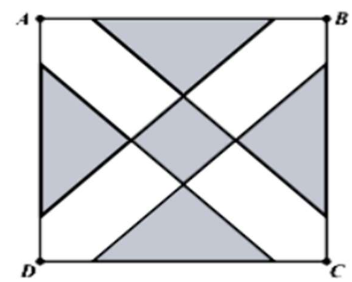
**Bài 38.** Một người muốn tạo khối hộp đựng quà khối lăng trụ tam giác đều, không có nắp bằng cách cắt ba góc của một tam giác đều cạnh $a$ các đoạn bằng $x, \left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình



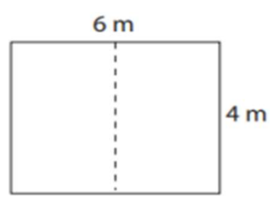
chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dà $x$ để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

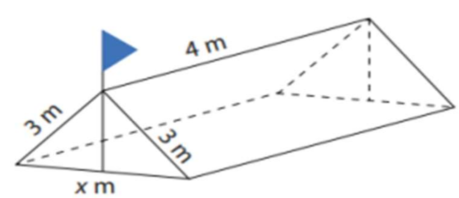
**Bài 39.** Công ty của Bác An định làm một bể chứa nước có dạng hình trụ có nắp đậy bằng thép không gỉ có thể tích là $2\pi(m^3)$ để đựng nước. Biết giá mỗi mét vuông thép không gỉ là 500 nghìn đồng. Hỏi chi phí nguyên vật liệu làm mỗi bể nước thấp nhất là bao nhiêu? (kết quả tính bằng đơn vị nghìn đồng và lấy $\pi = 3{,}14.$).

**Bài 40.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích phần tô màu nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)




**Bài 41.** Trong đợt chào mừng kỷ niệm ngày 26 tháng 3, trường X có tổ chức cho các lớp bày các gian hàng tại sân trường. Để có thể che nắng, chứa đồ đạc trong quá trình tham gia hoạt động, một lớp đã nghĩ ra ý tưởng như sau: Dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều rộng là 4m và chiều dài là 6m, bằng cách gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều dài của tấm bạt, hai mép chiều rộng còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau $x$ (m). Tìm $x$ để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất.




**Gợi ý, hướng dẫn giải bài tập phần tự luyện.**

**Phần A. Trắc nghiệm đúng sai**

**Câu 1.** (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Cho hàm số $f(x) = 92 - 20\ln(x+1)$.

**a)** Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = (-1;+\infty)$.

**b)** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

**c)** Bất phương trình $f(x) \geq 72$ có **đúng** 3 nghiệm nguyên.

**d)** Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau khi tham gia một khóa học, phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ sau $t$ tháng kết thúc khóa học được xác định bởi hàm số $y = f(t)$, trong đó $f(t)$ được tính bằng % và $0 \leq t \leq 24$. Phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ 50% khi $t = 7$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

**Lời giải**

a) Hàm số $y=f\left(x\right)=92-20\ln\left(x+1\right)$ xác định khi $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-1;+\infty\right)$.

Suy ra a) **đúng**.

b) $y=f\left(x\right)=92-20\ln\left(x+1\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{-20}{x+1}<0,\forall x\in\left(-1;+\infty\right)$. .

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$.

Suy ra b) **đúng**.

c) $f\left(x\right)\ge 72\Leftrightarrow 92-20\ln\left(x+1\right)\ge 72\Leftrightarrow \ln\left(x+1\right)\le 1\Leftrightarrow \begin{cases}x>-1\\ x\le e-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\le e-1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-1;e-1\right]$.

Suy ra bất phương trình có **đúng** 2 nghiệm nguyên là $x=0.x=1$.

Suy ra c) **sai**.

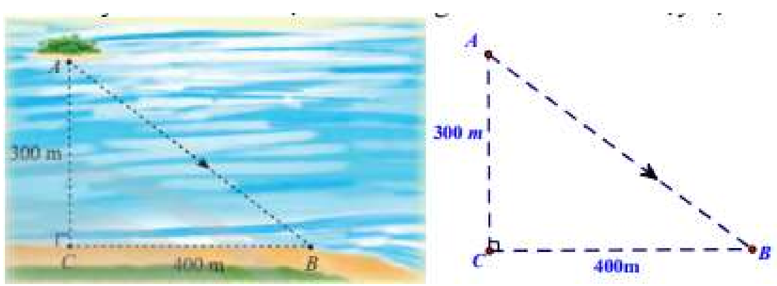
d) Phần trăm kiến thức sinh viên chỉ còn nhớ $50\%$

$$\Rightarrow 92-20\ln\left(t+1\right)=50$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(t+1\right)=\frac{21}{10}\Leftrightarrow t\approx 7,2 \text{ (tháng).}$$

Chọn **đúng**.

**Câu 2.** Trong một trò chơi thử thách, bạn Giáp đang ở trên thuyền (vị trí $A$ ) cách bờ hồ (vị trí C ) 300 m và cần đi đến vị trí $B$ trên bờ hồ như hình vẽ,
khoảng cách từ $C$ đến $B$ là 400 m , lưu ý là Giáp có thể chèo thuyền thẳng từ $A$ đến $B$ hoặc chèo thuyền từ $A$ đến một điểm nằm giữa $C$ và $B$ rồi chạy bộ đến $B$ .




Biết rằng Giáp chèo thuyền với tốc độ $50 \text{ m / phút}$ và chạy bộ với tốc độ $100 \text{ m / phút}$.

**a)** Thời gian Giáp chèo thuyền thẳng từ $A$ đến $B$ là là 10 phút.

**b)** Thời gian Giáp chèo thuyền từ $A$ đến $C$ rồi chạy bộ từ $C$ đến $B$ là là 10 phút.

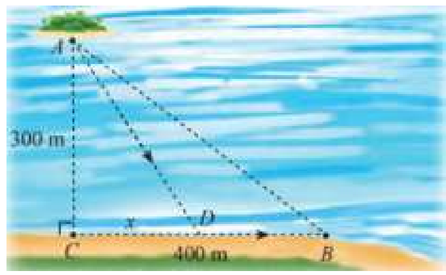
**c)** Giả sử Giáp chèo thuyền thẳng đến điểm $D$ nằm giữa $B$ và $C$ và cách $C$ một đoạn

$x(\text{ m})$ như hình vẽ dưới đây, rồi chạy bộ đến $B$ thì thời gian Giáp đi từ $A$ đến $B$ được tính bằng công thức

$$f(x)=\frac{1}{100}\left(\sqrt{x^2+90000}+400-x\right) \text{ (phút).}$$

**d)** Thời gian nhanh nhất để Giáp đi từ $A$ đến $B$ xấp xỉ 9,2 phút (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**Lời giải**




a) $AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=500 \text{ m}$. Suy ra thời gian đi thẳng từ $A$ đến $B$ là 10 phút.

Suy ra a) **đúng**.

b) Thời gian đi từ $A$ đến $C$ rồi chạy bộ từ $C$ đến $B$ $\frac{300}{50}+\frac{400}{100}=10$ phút.

Suy ra b) **đúng**.

c) Ta có $AD=\sqrt{x^2+300^2}(\text{ m}), DB=400-x(\text{ m})$ với $0\le x\le 400)$.

Thời gian đi từ $A$ đến $B$ là $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+90000}}{50}+\frac{400-x}{100}=\frac{1}{100}\left(2\sqrt{x^2+90000}+400-x\right)$ (phút).

Suy ra c) **sai**.

d) Ta có $f'(x)=\frac{x}{50\sqrt{x^2+90000}}-\frac{1}{100}, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=100\sqrt{3}\in[0;100].$

$$f(0)=10, f\left(100\sqrt{3}\right)=300\sqrt{3}+400\approx 9,2, f(400)=10.$$

$$\Rightarrow \min_{[0;400]} f(x)=f\left(100\sqrt{3}\right)\approx 9,2 \text{ (phút).}$$

Suy ra a) **đúng**.

**Câu 3.** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát (người giám sát sẽ giám sát tất cả các máy). Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ.

**a)** Trong 1 giờ, cần 266 máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball.

**b)** Trong $\frac{8}{3}$ giờ, cần 100 máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball.

**c)** Chi phí hoạt động thấp nhất là 6,5 triệu đồng.

**d)** Để chi phí hoạt động thấp nhất, công ty cần sử dụng 16 máy.

**Lời giải**

a) Trong 1 giờ, cần số máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball là: $8000:30 \approx 267$ (máy) Nên khẳng định a) **sai**.

b) Trong $\frac{8}{3}$ giờ, cần số máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball là:

$$8000:\left(30\cdot\frac{8}{3}\right)=100 \text{ (máy)}$$

Nên khẳng định **b** ) **đúng**.

c) Gọi $x,(x\in\mathbb{N})$ là số máy công ty có.

Chi phí thiết lập là: $200x$ (nghìn đồng).

Số giờ cần để sản xuất 8000 quả bóng là: $\frac{8000}{30x}$ (giờ).

Số tiền trả cho giám sát là: $\frac{8000.192}{30x}=\frac{51200}{x}$ (nghìn đồng).

Tổng chi phí là: $T=200x+\frac{51200}{x}$ (nghìn đồng).

$$T'(x)=200-\frac{51200}{x^2}$$

$$\Rightarrow T'(x)=0 \Leftrightarrow 200-\frac{51200}{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=256 \Leftrightarrow x=16$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | 0 | | 16 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T'(x)$ | | | 0 | | |
| $T(x)$ | | $\searrow$ | 6400 | $\nearrow$ | |

Vậy chi phí hoạt động thấp nhất là 6,4 triệu đồng.

Nên khẳng định c) **sai**.

d) Để chi phí hoạt động thấp nhất, công ty cần sử dụng 16 máy.

Nên khẳng định d) **đúng**.

**Câu 4.** Chi phí nguyên liệu của một con tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghin đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai ti lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10\ \text{km/h}$ thì chi phí nguyển liệu phần thứ hai bằng 30 nghin đồng /giờ. Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc của tàu.

**a)** Chi phí nhiên liệu cho phần thứ nhất trong thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{480}{x}$ (nghin đồng).

**b)** Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trong 1 giờ là $C(x) = 480 + 0,03x^3$ (nghìn đồng).

**c)** Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trên quãng đường 1 km giảm khi vận tốc của tàu thuộc $(0;30)$.

**d)** Tổng chi phí nhiên liệu để tàu chạy trên quãng đường 1 km nhỏ nhất là 43 (nghìn đồng).

**Lời giải**

a) Thời gian để tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{1}{x}$. Chi phí nhiên liệu phần thứ nhất cho quãng đường tàu chạy 1 km là $480 \cdot \frac{1}{x} = \frac{480}{x}$ (nghìn đồng).

Do đó mệnh đề **đúng**.

b) Chi phí nhiên liệu phần một để tàu chạy 1 giờ là 480 (nghìn đồng).

Vì Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, nên ta có: $P_2 = k \cdot x^3$.

Vì khi $v = 10\ \text{km/h}$ thì chi phí nguyên liệu phần thứ hai bằng 30 nghin đồng /giờ nên $30 = k \cdot 10^3 \Rightarrow k = \frac{30}{10^3} = 0,03$. Suy ra $P_2 = 0,03x^3$. (nghìn đồng).

Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy 1 giờ là $C(x) = 480 + 0,03x^3$ (nghìn đồng). Do đó mệnh đề **đúng**.

c) Chi phí nhiên liệu cho quãng đường 1 km là $C(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^3$.

Ta có: $C'(x) = -\frac{480}{x^2} + 0,09x^2 = \frac{0,09x^4 - 480}{x^2}$. $C'(x) = 0 \Rightarrow 0,09x^4 - 480 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{480}{0,09}}$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $\left(0;\sqrt[4]{\frac{480}{0,09}}\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $C(x)$ | | ↘ | $C\left(\sqrt[4]{\frac{480}{0,09}}\right)$ | ↗ | |

Tổng chi phí nhiên liệu cho tàu chạy trên quãng đường 1 km giảm khi vận tốc của tàu thuộc $\left(0;\sqrt[4]{\frac{480}{0,09}}\right)$. Do đó mệnh đề **sai**.

d) Tổng chi phí nhiên liệu cho tàu chạy trên quãng đường 1 km nhỏ nhất là $C\left(\sqrt[4]{\frac{480}{0,09}}\right)=74,89$ (nghìn đồng). Do đó mệnh đề **sai**.

**Câu 5.** Nhà máy $A$ chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy $B$. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng $A$ cung cấp cho $B$ số lương sản phẩm theo đơn đặt hàng của $B$ (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là $x$ tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm của $A$ cho $B$ được biểu diễn bởi công thức: $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để $A$ sản xuất $x$ tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

**a)** Lợi nhuận mà $A$ thu được khi bán $x$ tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho $B$ được biểu diễn bởi công thức $H(x)=-0,001x^3+15x-100$.

**b)** Số tiền mà $A$ thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho $B$ là 600 triệu đồng.

**c)** Nhà máy $A$ bán cho nhà máy $B50\sqrt{2}\approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

**d)** Chi phí để $A$ sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

**Lời giải**

a. **Đúng**

Doanh thu của $A$ khi bán $x$ tấn sản phẩm cho $B$ là:
$xP(x)=\left(45-0,001x^2\right)x=-0,001x^3+45x$.

Lợi nhuận mà $A$ thu được khi bán $x$ tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho $B$ được biểu diễn như sau: $H(x)=-0,001x^3+45x-(100+30x)=-0,001x^3+15x-100$.

b. **Sai**

Số tiền mà $A$ thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho $B$ là: $-0,001\cdot 10^3+45\cdot 10=449$ (triệu đồng).

c. **Đúng**

Ta có: $H'(x)=-0,003x^2+15$.

$H'(x)=0\Leftrightarrow -0,003x^2+15=0\Leftrightarrow x=50\sqrt{2}$ (chọn)

Ta có $H(0)=-100; H\left(50\sqrt{2}\right)=500\sqrt{2}-100; H(100)=400$.

Vậy $A$ bán cho $B$ khoảng $50\sqrt{2}\approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $H\left(50\sqrt{2}\right)=500\sqrt{2}-100$.

d. **Đúng**

Chi phí để $A$ sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là: $C(10)=100+30.10=400$ (triệu đồng).

**Câu 6.** Một loại thuốc được đùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong $t$ giờ được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}(\mathrm{mg}/\mathrm{l})$.

**a)** Sau khi tiêm thuốc 2 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bện nhân bằng $0,4(\mathrm{mg}/\mathrm{l})$.

**b)** Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân có thể vượt quá $0,5(\mathrm{mg}/\mathrm{l})$.

**c)** Sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bện nhân cao nhất.

**d)** Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng $0,5(\mathrm{mg}/\mathrm{l})$.

**Câu 7.** Một sợi dây kim loại dài 6 cm . Người ta cắt sợi dây đó thành hai đoạn. Đoạn có độ dài $x$ (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông $(0<x<6)$.

**a)** Bán kính đường tròn là $r=\frac{x}{\pi}$.

**b)** Diện tích hình vuông là $\frac{(6-x)^2}{4}$.

**c)** ) Tổng diện tích hai hình là $\frac{(4+\pi)x^2-12\pi x+36\pi}{16\pi}$.

**d)** Khi $x=\frac{6\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

**Câu 8.** (Sở Lào Cai 2025) Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ ( $\mathrm{mg}/1$ ) của thuốc trong máu sau $x$ phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x)=\frac{30x}{x^2+2}$. (Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning)

**a)** Thời điểm 1 phút sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu là $10(\mathrm{mg}/\mathrm{l})$.

**b)** Đạo hàm của hàm số $C(x)$ là $C'(x)=\frac{60-30x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$.

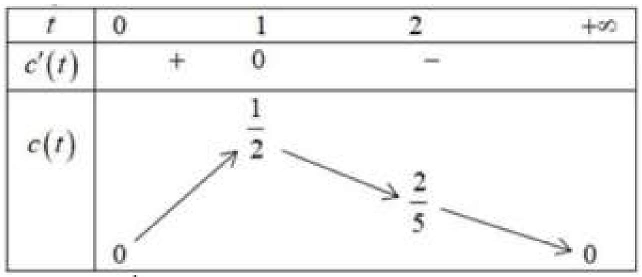
**c)** Trong khoảng thời gian từ 1 phút sau khi tiêm trở đi, nồng độ thuốc trong máu giảm dần.
**d)** Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm 2 phút sau khi tiêm.

**Lời giải**

Ta có: $c'(t)=\dfrac{t^2+1-2t^2}{\left(t^2+1\right)^2}=\dfrac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}$.

$c'(t)=0 \Leftrightarrow 1-t^2=0 \Rightarrow t=1$ (vì $t>0$ ).

Bảng biến thiên:




Từ bảng biến thiên ta có:

a) Sau khi tiêm thuốc 2 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bện nhân bằng $\dfrac{2}{5}=0,4$.

**Đúng**.

b) Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=1$. Suy ra sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân có thể vượt quá 0,5 . **Sai.**

c) Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=1$. Suy ra sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bện nhân cao nhất. **Đúng.**

d) Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng 0,5(mg/l).

**Câu 9.** (Sở Quảng Nam 2025) Nhà ông $A$ cần làm một bể chứa nước có dạng khối hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình chữ nhật và chiều dài gấp ba lần chiều rộng, khối hộp tương ứng có thể tích bằng $1152\mathrm{dm}^3$. Giả sử bề dày của thành bể và đáy bể là không đáng kể, Giá thuê công nhân để làm bể là 400000 đồng $/\mathrm{m}^2$. Gọi $x$ là chiều rộng của đáy bể ( $x$ là số dương và có đơn vị là dm ).

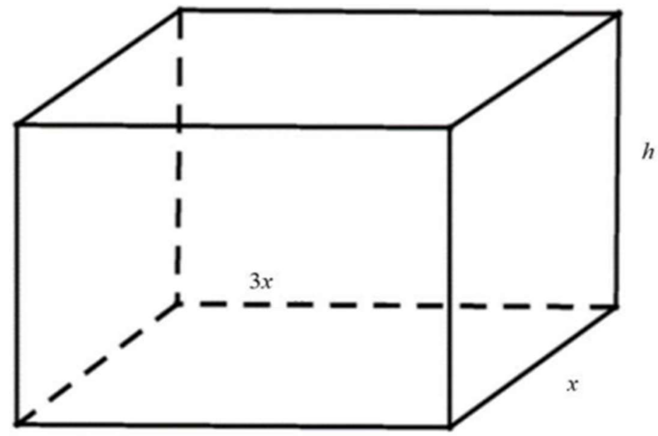
**a)** Chiều cao của bể nước là $\dfrac{384}{x^2}(\mathrm{dm})$.

**b)** Diện tích xung quanh của bể chứa nước là $\dfrac{3072}{x}\left(\mathrm{dm}^2\right)$.

**c)** Tổng diện tích cần làm của bể chứa nước là $\dfrac{3072}{x}+6x^2\left(\mathrm{dm}^2\right)$

**d)** Chi phí thấp nhất mà ông A trả cho công nhân làm bể nước theo yêu cầu là 3072000 đồng.

**Lời giải**




a) Chiều rộng của đáy bể là $x(x>0)$.
$\Rightarrow$ Chiều dài của đáy bể là $3x$.
Gọi chiều cao của bể nước là $h(h>0)$.
Theo bài ra, ta có thể tích của bể nước là: $x\cdot 3x\cdot h=1152 \Rightarrow h=\frac{384}{x^2}$ (dm).
Chọn ĐÚNG.
b) Diện tích xung quanh của bể chứa nước là: $2x\cdot\frac{384}{x^2}+6x\cdot\frac{384}{x^2}=\frac{3072}{x}\left(\mathrm{dm}^2\right)$.

Chọn ĐÚNG.
c) Diện tích đáy bể là: $S_{\text{day}}=x\cdot 3x=3x^2$.

Tổng diện tích cần làm của bể chứa nước là $S=S_{xq}+S_{day}=\frac{3072}{x}+3x^2$.
Chọn SAI.
d) Để chi phí thấp nhất thì diện tích cần lâm của bể chứa nước là nhỏ nhất hay $f(x)=\frac{3072}{x}+3x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x>0$.
Ta có: $f'(x)=-\frac{3072}{x^2}+6x=0\Rightarrow x=8$
Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $576$ | $\searrow$ | |

Từ bảng biến thiên ta thấy, diện tích cần làm nhỏ nhất bằng $576\mathrm{dm}^2 = 5{,}76\ \mathrm{m}^2$ khi $x = 8\mathrm{dm}$.

Khi đó, chi phí thấp nhất mà ông A trả cho công nhân làm bể nước theo yêu cầu là: $5{,}76.400000 = 2304000$ đồng.

Chọn SAI.

**Câu 10.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^3-3t^2+6t+4$, trong đó $0 \le t \le 10, t$ tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

**a)** Quãng đường chất điểm chuyển động trong $2(\mathrm{~s})$ đầu tiên là $8(\mathrm{~m})$.

**b)** Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3(\mathrm{~s})$ là $15(\mathrm{~m/s})$.

**c)** Tại thời điểm mà $s(t)=22(\mathrm{~m})$ thì gia tốc tức thời của chất điểm là $12\left(\mathrm{~m/s^2}\right)$.

**d)** Tại thời điểm $t=2(\mathrm{~s})$ vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

a) Đúng

$v(t)=s'(t)=3t^2-6t+6=3\left(t^2-2t+1\right)+3=3(t-1)^2+3>0, \forall t$.

Quãng đường chất điểm chuyển động trong $2(s)$ đầu tiên là: $s(2)-s(0)=12-4=8(m)$.

b) Đúng

$v(3)=15(\mathrm{~m/s})$

c) Đúng

Ta có $t^3-3t^2+6t+4=22 \Leftrightarrow t=3$

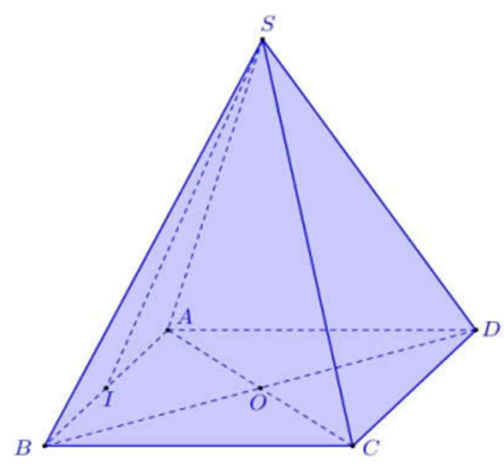
$a(t)=v'(t)=6t-6$

$\Rightarrow a(3)=12\left(\mathrm{~m/s^2}\right)$

d) Sai

$v(t)=3t^2-6t+6, t \in [0;10]$ đạt GTNN bằng $3 \Leftrightarrow t=1$.

**Câu 11.** (Liên Trường Nghệ An 2025) Nhân dịp Tết Trung thu, bác Oanh làm các đèn lồng cho con. Mỗi đèn bác dùng một sợi dây đồng dài $24dm$ cắt thành 3 đoạn để uốn làm khung đèn. Đoạn thứ nhất bác uốn thành hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $x(dm)$ để làm đáy, hai đoạn còn lại có độ dài bằng nhau uốn thành các đường gấp khúc $ASC$ và $BSD$. Khung đèn sau khi hoàn thiện có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều $S \cdot ABCD$ và mặt ngoài của đèn được dán giấy màu để trang trí ( xem các mối nối, dán là không đáng kể). Khi đó ta có:




**a)** Độ dài cạnh bên của khung đèn bằng $6-x(dm)$.

**b)** Khi $x=2(dm)$ thì độ dài đường cao của khung đèn là $\sqrt{14}(dm)$

**c)** Khi tất cả các cạnh bằng nhau thì diện tích giấy màu cần dùng là $9\left(1+\sqrt{3}\right)dm^2$

**d)** Thể tích phần không gian của đèn lồng lớn nhất khi $x=2,79dm$ ( Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

a)Đúng

Theo bài: Đoạn thứ nhất bác uốn thành hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $x(dm)$ để làm đáy, hai đoạn còn lại có độ dài bằng nhau uốn thành các đường gấp khúc $ASC$ và $BSD$. Mà tổng độ dài của dây là: $24dm$ và khung đèn sau khi hoàn thiện có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên ta có phương trình: $4SA=24-4x \Leftrightarrow SA=6-x$

b)Đúng

Với $x=2$ suy ra $\begin{cases} SA=4 \\ AO=\sqrt{2} \end{cases}$ độ dài đường cao của khung đèn là:

$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{16-2}=\sqrt{14}$ c)Đúng

+)Gọi cạnh của hình vuông là: $AB=x$.

+) Theo giả thiết tất cả các cạnh bằng nhau nên $SA=x$

+) Độ dài của dây bằng $24dm$ nên ta có phương trình: $24=4SA+4AB \Leftrightarrow 24=4x+4x \Leftrightarrow x=3$.

+) Diện tích phần giấy màu cần dùng là tổng diện tích các mặt của hình chóp $S.ABCD$, vì chóp tứ diện đều nên các mặt bên bằng nhau nên diện tích cần tìm là:

$S=4S_{SAB}+S_{ABCD}$ +) $S_{SAB}=\frac{1}{2}SI\cdot AB=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2-AI^2}\cdot SA=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$+S_{ABCD}=3^2=9$.

Vậy $S=9+4\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4}=9+9\sqrt{3}=9\left(1+\sqrt{3}\right)$.

d)Đúng

+) Thể tích phần không gian của đèn lồng chính là thể tích khối chóp $S.ABCD$

+) Gọi cạnh của hình vuông là $x(dm)$. Theo câu a độ dài cạnh bên là $SA=6-x(0<x<6)$

$$+SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{(6-x)^2-\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{144-48x+2x^2}}{2}$$

Thể tích khối chóp $V=\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot\frac{\sqrt{144-48x+2x^2}}{2}=\frac{1}{6}\cdot x^2\cdot\sqrt{144-48x+2x^2}$.

+) Yêu cầu của bài toán là tìm $x$ để $V$ max.

Đặt $f(x)=x^2\sqrt{144-48x+2x^2}$ với $0<x<6$. Để $V$ max khi $f(x)=x^2\sqrt{144-48x+2x^2}$ max

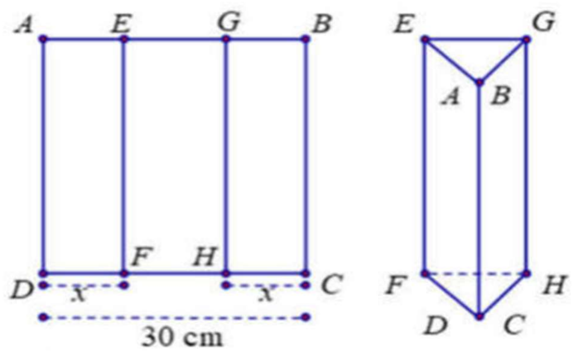
$$+f'(x)=\frac{12x\left(x^2-20x+48\right)}{2\sqrt{144-48x+2x^2}}+f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=0\\x^2-20x+48=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=0(L)\\x=10+2\sqrt{13}(L)\\x=10-2\sqrt{13}\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

| $x$ | $0$ | | $10-2\sqrt{13}$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Căn cứ vào bảng biến thiên $f(x)\max$ tại $x=10-2\sqrt{13}\approx 2,79$.

**Câu 12.** Một tấm nhôm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm . Người ta gập tấm nhôm theo hai cạnh $EF$ và $GH$ cho đến khi $AD$ và $BC$ trùng nhau như hình vẽ bên để được mộthình lăng trụ khuyết hai đáy.




**a)** Thể tích khối lăng trụ được tính bằng công thức $V=30S$ trong đó $S$ là diện tích của tam giác $AEG$.

**b)** Giá trị của $x$ để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x=10(\text{ cm})$.

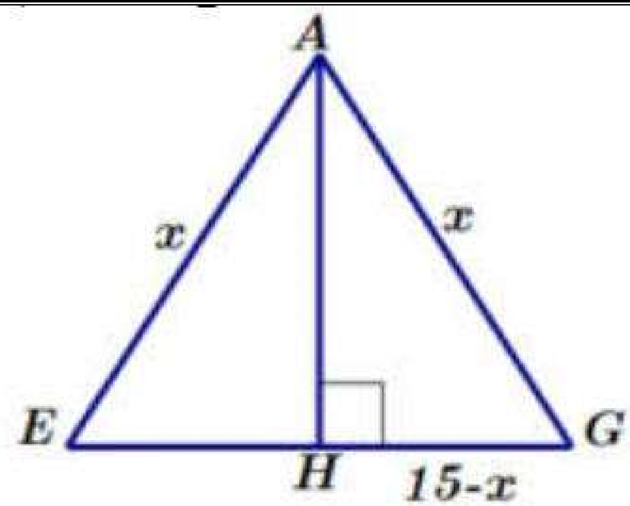
**c)** Diện tích của tam giác $AEG$ bằng $\sqrt{30}\cdot\sqrt{(15-x)^2\cdot(2x-15)}$.

**d)** Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250 .

**Lòi giải**

a) Đúng. Thể tích khối lăng trụ được tính bằng công thức $V=h\cdot S_{\Delta AEG}=30.S$

b) Đúng.




Điều kiện

$\begin{cases} x+x<30 \\ x>15-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<15 \\ x>\dfrac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{15}{2}<x<15$.

Theo đề ta có $7,5<x<15$ và tam giác $AEG$ cân tại $A$.

Gọi $H$ là trung điểm của cạnh $EG$ khi đó $AH \perp EG$ và $HG=15-x$.

Khi đó $AH=\sqrt{AG^2-HG^2}=\sqrt{x^2-(15-x)^2}$.

Diện tích tam giác $AEG$ bằng $S$ khi đó

$S=\frac{1}{2}AH\cdot EG=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{30x-225}\cdot(30-2x)$Xét hàm số $f(x)=\sqrt{30x-225}$. ( $30-2x$ ) với $7,5<x<15$ có

$f'(x)=\dfrac{900-90x}{\sqrt{30x-225}}, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=10$.

Bảng biến thiên

| $x$ | 7,5 | | 10 | | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | – | |
| $f$ | 0 | ↗ | $50\sqrt{3}$ | ↘ | 0 |

Suy ra $\max_{(7,5;15)} f(x)=\dfrac{50\sqrt{3}}{}$ khi $x=10$.

Khi đó $S=\frac{1}{2}f(x)\le\frac{1}{2}\cdot 50\sqrt{3}=25\sqrt{3}$.

Thể tích lăng trụ $V=30S\le 30.25\sqrt{3}=750\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi $x=10$.

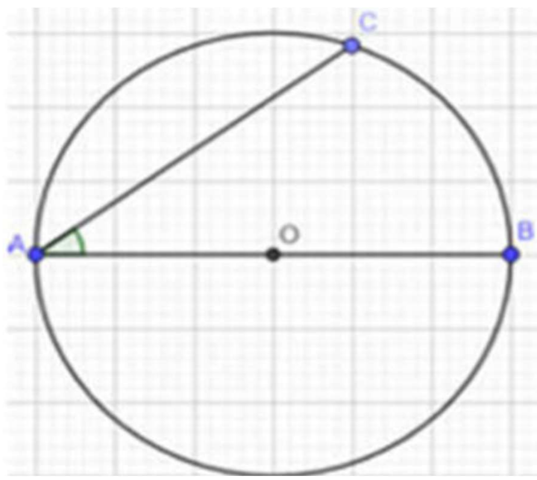
Vậy thể tích lăng trụ lớn nhất khi $x = 10$ cm

c) Sai. Diện tích tam giác $AEG$ bằng $S$ khi đó $S = \frac{1}{2}AH \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{30x - 225} \cdot (30 - 2x)$

d) Sai. Thể tích lăng trụ $V = 30S \leq 30.25\sqrt{3} = 750\sqrt{3} \approx 1299$ dấu bằng xảy ra khi $x = 10$.

Vậy thể tích lăng trụ lớn nhất gần bằng $1299\ \text{cm}^3$.

**Câu 13.** Một khu du lịch sinh thái đang khai thác dịch vụ chèo thuyền và ngắm cảnh ven hồ. Hồ nước có dạng hình tròn tâm $O$, bán kính bằng 1 km và tại hai vị trí $A, B$ đối xứng nhau qua $O$ người ta xây dựng nơi bán vé vào và nơi kết thúc thăm quan. Du khách sẽ được sử dụng dịch vụ chèo thuyền từ vị trí $A$ đến vị trí $C$ trên bờ hồ và sẽ có xe chở ngắm cảnh từ vị trí $C$ men theo bờ hồ đến nơi kết thúc $B$. Biết rằng vận tốc chèo thuyền là 100 m mỗi phút và vận tốc xe chạy ngắm cảnh là 200 m mỗi phút. Gọi $x$ (radian) là số đo góc $\widehat{CAB}$ $\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$.




**a)** Khi $x = 0$ thời gian đi từ $A$ đến $B$ là 20 phút.
**b)** Quang đường xe chở người đi ngắm cảnh là $1000x$ ( mét).
**c)** Thời gian đi từ $A$ đến $B$ là $20\cos x + 5x$ (phút).
**d)** Thời gian xe đi từ $A$ đến $B$ luôn ít hơn 22 phút 30 giây với mọi cách chọn từ vị trí điểm $C$.

**Lời giải**

a) Đúng

Khi $x = 0$ thì người đó chèo thuyền thẳng từ $A$ đến $B$ với quang đường $AB = 2000m$ nên thời gian đi từ $A$ đến $B$ sẽ là $\frac{2000}{100} = 20$ phút.

b) Đúng

Quãng đường xe chở người đi ngắm cảnh là độ dài cung $l_{\overset{\frown}{CB}} = 1000x$ (mét)

c) Đúng

Quãng đường $AC$ dài là $AC = AB \cdot \cos x = 2000\cos x$.

Thời gian đi từ $A$ đến $C$ là $\dfrac{2000\cos x}{100} = 20\cos x$ (phút).

Thời gian đi từ $C$ đến $B$ là $\dfrac{1000x}{200} = 5x$ (phút).

Thời gian đi từ $A$ đến $B$ là $20\cos x + 5x$ (phút).

d) Sai

Do $0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \cos x \le 1 \\ 0 \le 5x < \dfrac{5\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 20\cos x \le 20 \\ 0 \le 5x < \dfrac{5\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < 20\cos x + 5x < 20 + \dfrac{5\pi}{2}$

Hay $0 < 20\cos x + 5x < 27{,}85$. Vậy với mọi cách chọn vị trí điểm $C$ thì thời gian đi từ $A$ đến $B$ luôn nhỏ hơn 27,85 phút.

**Câu 14.** Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 20-10 năm 2024. Ông M đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h$ và $x$.

**a)** Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2h$.

**b)** Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.

**c)** Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{MV} = 2x^2 + 4xh$.

**d)** Khi cạnh đáy của chiếc hộp $x$ lớn hơn 4 thì $x$ càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

**Lời giải**

a) Thể tích khối hộp chữ nhật $V = x.x.h = x^2h$. Mệnh đề đúng.

b) Chiếc hộp có 1 mặt đáy là hình vuông cạnh $x$ và có 4 mặt bên là hình chữ nhật kích thước $x$ và $h$. Vậy diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là: $S_{xq} = x^2 + 4xh$. Mệnh đề sai.

c) Vì mạ vàng trên mọi điểm của chiếc hộp nên mạ cả mặt trong và mặt ngoài.

Vậy $S_{MV} = 2S = 2(x^2 + 4xh) = 2x^2 + 8xh$. Mệnh đề sai.

d) Ta có thể tích chiếc hộp: $V = x^2h = 32$ (đvtt), với $x, h > 0$. Suy ra $h = \frac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S = 2x^2 + 8xh = 2x^2 + 8x \cdot \frac{32}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{256}{x}$ với $x > 0$.

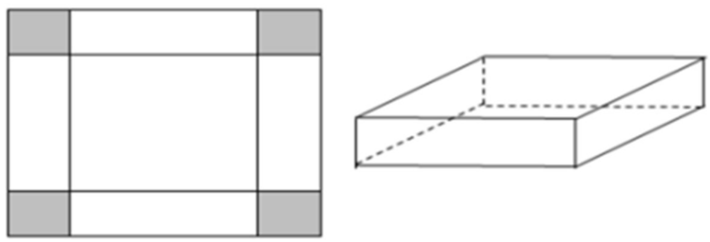
Ta có $f'(x) = 4x - \frac{256}{x^2} = \frac{4x^3 - 256}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 256 \Leftrightarrow x = 4; f(4) = 96$.

BBT

| $x$ | 0 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 96 | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy khi $x > 4$ hàm số $f(x)$ tăng. Vậy lượng vàng được mạ tăng. Mệnh đề đúng.

**Câu 15.** Một tấm nhôm hình vuông cạnh 240cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x(cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp.



**Lời giải**

a) Chọn Đúng

Khi đó chiều cao của hộp nhận được là $x$, chiều đài của đáy là $240 - 2x$. Do đó thể tích của hộp là

$$V = x(240 - 2x)^2$$

b) Chọn Sai

Khi $x = 20$ cm $= 0{,}2$ m $\Rightarrow$ cạnh đáy là $240 - 2.20 = 200$ cm $= 2$ m $\Rightarrow V = 0,2.2^2 = 0{,}8\ \text{m}^3$.

c) Chọn Sai

Có $V = x(240 - 2x)^2 \Rightarrow V' = 12x^2 - 1920x + 57600$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 160x + 4800 = 0 \Leftrightarrow x = 40, x = 120(l)$$

Ta có BBT

| $x$ | $0$ | | $40$ | | $120$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $V$ | $0$ | $\nearrow$ | $1024000$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ BBT, có thể tích hộp đạt lớn nhất khi $x = 40$ cm.
d) Chọn Đúng

Từ BBT, thể tích lớn nhất đạt được là $1024000\ \text{cm}^3 = 1024\text{dm}^3$.

**Câu 16.** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian t giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu $39{,}2\ \text{m/s}$ là $h(t) = 5 + 39{,}2t - 4{,}9t^2$, chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên (theo Vật li đại cương, $NXB$ Giáo dục Việt Nam, 2016). Các mệnh đề sau đúng hay sai?
**a)** Vận tốc của vật sau 3 giây là $4{,}6\ \text{m/s}$
**b)** Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài hơn 7 giây.
**c)** Vận tốc của vật lúc chạm đất sấp xi $-40{,}43\ \text{m/s}$.
**d)** Vật đạt độ cao lớn nhất bằng 83,4 mét tại thời điểm $t = 4$ giây.

**Lời giải.**

a) Sai.

Ta có: $h(t) = 5 + 39{,}2t - 4{,}9t^2 \Rightarrow v(t) = 39{,}2 - 9{,}8t$ nên vận tốc của vật sau 3 giây là $v(3) = 9{,}8\ \text{m/s}$
b) Đúng.

Vật ở độ cao trên 10 mét: $5 + 39{,}2t - 4{,}9t^2 \geq 10 \Leftrightarrow \frac{28\ \ \sqrt{834}}{7} \leq t \leq \frac{28+\sqrt{834}}{7}$ Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét: $\left|\frac{28+\sqrt{834}}{7} - \frac{28-\sqrt{834}}{7}\right| \approx 8{,}25 > 7$
c) Đúng.

Vật chạm đất: $h(t) = 5 + 39{,}2t - 4{,}9t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{28+\sqrt{834}}{7}\,(t/m) \\ t = \frac{28\ \ \sqrt{834}}{7}\,(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{28\ \ \sqrt{834}}{7}$

Vận tốc của vật lúc chạm đất: $v\left(\frac{28+\sqrt{834}}{7}\right) = -40{,}43\ \text{m/s}$
d)

Độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian t giây là $h(t) = 5 + 39{,}2t - 4{,}9t^2, t \geq 0$

$$h'(t) = 39{,}2 - 9{,}8t$$
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

Ta có bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(t)$ | $5$ | $\nearrow$ | $83,4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Vật đạt độ cao lớn nhất bằng 83,4 mét tại thời điểm $t = 4$ giây.

**Câu 17.** Trong một phòng thí nghiệm có máy đo nồng độ khí $CO_2$ cho thấy: nồng độ khí $CO_2$ trong phòng thay đổi theo thời gian $t$ (tính bằng giờ) và được thể hiện qua hàm số $f(t) = 400 + \frac{200}{t^2+5}$ (ppm), với $t \geq 0$ (Khi nói nồng độ khí $CO_2$ trong không khí là 400 ppm , điều đó có nghĩa là: Trong một triệu phần thể tích của không khí, có 400 phần thể tích là khí $CO_2$ ).

Các khẳng định sau đúng hay sai?

**a)** Nồng độ khí $CO_2$ trong phòng tại thời điểm $t = 0$ là $400$(ppm).

**b)** $f'(t) = \frac{-2000t^2-10000}{(t^2+5)^2}$ vói $t \geq 0$.

**c)** Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = 2$.

**d)** Nồng độ khí $CO_2$ cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 947 (ppm).

**Lời giải**

a) Đúng.

Nồng độ khí $CO_2$ trong phòng tại thời điểm $t = 0$ là $f(0) = 400 + \frac{2000.0}{0^2+5} = 400$(ppm).

b) Sai.

Ta có $f'(t) = \frac{2000(t^2+5)-2000t.2t}{(t^2+5)^2} = \frac{-2000t^2+10000}{(t^2+5)^2}$ với $t \geq 0$.

c) Sai.

Ta có $f'(t) = 0 \Rightarrow -2000t^2 + 10000 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 5 \Leftrightarrow t = \sqrt{5}$ (do $t \geq 0$ ).

Vậy nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = \sqrt{5}$.

d) Sai.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên $[0; +\infty)$ ta được

$\max_{[0;+\infty)} f(t) = f(\sqrt{5}) \approx 847(\text{ppm})$.

Khi đó nồng độ khí $CO_2$ cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 847 (ppm).

**Câu 18.** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Biết rằng, nếu số lượng đặt hàng là $x$ (tấn) sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng) và chi phí để nhà máy A sản xuất được $x$ (tấn) sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng, gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

**a)** Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán $x$ (tấn) sản phẩm ( $0 \leq x \leq 100$ ) cho nhà máy B là $H(x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100$.

**b)** Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

**c)** Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là 600 triệu đồng.

**d)** Nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

**Lời giải**

a) Đúng.

Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán $x$ (tấn) sản phẩm $(0 \leq x \leq 100)$ cho nhà máy B là:

$$\begin{aligned} H(x) &= x \cdot P(x) - C(x) = x \cdot (45 - 0{,}001x^2) - (100 + 30x) \\ &= -0{,}001x^3 + 15x - 100. \end{aligned}$$

b) Đúng.

Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là: $C(10) = 100 + 30.10 = 400$ (triệu đồng).

c) Sai.

Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là: $10P(10) = 10 \cdot (45 - 0{,}001 \cdot 10^2) = 449$ (triệu đồng)

d) Đúng.

Xét hàm số $H(x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100$ trên $[0;100]$.

$+H'(x) = -0{,}003x^2 + 15$

$+H'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Rightarrow x = 50\sqrt{2} \approx 70{,}7 \in [0;100]$

$+\begin{cases} H(0) = -100 \\ H(50\sqrt{2}) \approx 607{,}11 \\ H(100) = 400 \end{cases}$

Vậy nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng 607,11 (triệu đồng).

**Câu 19.** Nhịp tim của một vận động viên chạy sau t giây $(t \ge 0)$ kể từ khi rời vạch xuất phát được cho bởi công thức $P(t) = \dfrac{300 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 2t + 25}}{t+25}$ (số nhịp tim/ phút). Biết rằng, với vận động viên đó bác sĩ đã đưa ra lời khuyên không nên đẩy nhịp tim quá 175 (số nhịp tim/ phút) để tránh tình trạng quá tải cho tim.

**a)** Nhịp tim của vận động viên đó không vượt quá $150\sqrt{2}$ (số nhịp tim/phút).

**b)** Trong 2 phút đầu tiên kể từ khi xuất phát, nhịp tim của vận động viên đó vẫn trong ngưỡng cho phép theo lời khuyên của bác sĩ .

**c)** Công thức cho biết tốc độ thay đổi nhịp tim theo thời gian $t$ là

$$P'(t) = \frac{3450 \cdot \sqrt{2}t}{(t+25)^2 \cdot \sqrt{t^2 + 4t + 50}}$$

**d)** Tốc độ thay đổi nhịp tịm của vận động viên đó tại thời điểm 1,5 phút sau khi xuất phát bằng 2,63 lần ( kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) tốc độ thay đổi nhịp tim tại thời điểm 0,5 phút sau khi xuất phát.

**Lời giải**

a) Đúng

Ta có: $P(t) = \frac{300\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+25}}{t+25}$ (số nhịp tim/ phút)

$$\Rightarrow P'(t) = \frac{300 \cdot \dfrac{t+2}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 2t + 25}} \cdot (t+25) - 300 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 2t + 25}}{(t+25)^2}$$

$$= \frac{150 \cdot (t+2) \cdot (t+25) - (150t^2 + 600t + 7500)}{(t+25)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 2t + 25}}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{(150 \cdot t^2 + 4050t + 7500) - (150t^2 + 600t + 7500)}{(t+25)^2 \cdot \sqrt{t^2 + 4t + 50}} = \frac{3450\sqrt{2}t}{(t+25)^2 \cdot \sqrt{t^2 + 4t + 50}}$$

Xét hàm số trên $[0; 60]$ thấy $\underset{[0;60]}{\text{Max}} f(t) < 150\sqrt{2}$ . Chọn Đúng

b)Sai.

c. Đúng.

d)Sai.

Tốc độ thay đổi nhịp tim của vận động viên đó tại thời điểm 1,5 phút sau khi xuất phát là

$$P'(90) = \frac{3450\sqrt{2}\cdot 90}{(90+25)^2\cdot\sqrt{90^2+4.90+50}} = \frac{108\sqrt{4255}}{19573}$$

Tốc độ thay đổi nhịp tìm của vận động viên đó tại thời điểm 0,5 phút sau khi xuất phát là

$$P'(30) = \frac{3450\sqrt{2}\cdot 30}{(30+25)^2\cdot\sqrt{30^2+4.30+50}} = \frac{828\sqrt{535}}{12947}$$

Vi $\frac{\frac{108\sqrt{4255}}{19573}}{\frac{828\sqrt{535}}{12947}} = \frac{363\sqrt{91057}}{450179} \approx 0{,}2433$ nên tốc độ thay đổi nhịp tim của vận động viên đó tại thời điểm 1,5 phút sau khi xuất phát bằng xấp xi 0,243 lần tốc độ thay đổi nhịp tim tại thời điểm 0,5 phút sau khi xuất phát.

**Phần B. Tự luận**

**Bài 1.** Tốc độ thay đổi nhiệt độ là $T'(t)$, khảo sát hàm số $T'(t)$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta tính tốc độ thay đổi của nhiệt độ lớn nhất của cơ thể người đó.

**Bài 2.** Tương tự bài 1, xét hàm số $f'(t)$ trên $[0;+\infty)$ và tìm GTLN.

**Bài 3.** Giả sử bán máy lọc nước với giá $8-0{,}1x$ triệu đồng.

Với giá bán trên thì số máy lọc nước bán được là $900+10x$ cái.

Từ đó, ta có hàm doanh thu là $D(x) = \left(8-0{,}1x\right)(900+10x)$.

Hàm chi phí $C(x) = 2000 - \frac{9}{5}(900+10x) = 380-18x$.

Từ đó, ta có hàm lợi nhuận $L(x) = -x^2+8x+6820$.

Khảo sát hàm số L(x) trên khoảng (0;80), ta được lợi nhuận max 6836 triệu khi x=4.

**Bài 4.** Số lượng cá ban đầu là 800 con nên P(0) = 800 (1)

Sau 3 năm, số lượng cá là 6000 con nên P(3) = 6000 (2)

Vì sức chứa tối đa của hồ là 8000 con cá nên $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = 8000 (3)$

Giải hệ phương trình gồm (1),(2),(3) ta tìm được $\begin{cases} a=9 \\ b=3 \\ c=8000 \end{cases}$

Khi đó $P(t) = \dfrac{8000}{1 + 9.3^{-t}} = \dfrac{8000}{1 + 3^{2-t}}$

Từ đó, tính được $P'(t) = \dfrac{8000\ln 3}{\dfrac{1}{3^{2-t}} + 2 + 3^{2-t}}$.

Đến đây, áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương $\dfrac{1}{3^{2-t}}, 3^{2-t}$ ta được

$3^{2-t} + \dfrac{1}{3^{2-t}} \geq 2\sqrt{3^{2-t}.\dfrac{1}{3^{2-t}}} = 2$.

Vậy $P'(t) \leq \dfrac{8000\ln 3}{4} = 2000\ln 3 \approx 2197.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3^{2-t} = \dfrac{1}{3^{2-t}} \Leftrightarrow t = 2.$

Vậy tốc độ tăng trưởng tối đa của đàn cá là khoảng 2197 con/năm vào năm thứ 2.

**Bài 5.** Ta có hàm lợi nhuận

$L(x) = 220x - \left(x^3 - 3x \;\; - 20x + 500\right) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500.$

Xét hàm số $L(x)$ trên đoạn [1;18] ta kết luận.

Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 1200 nghìn đồng khi sản xuất 10 mét vài lụa trong một ngày.

**Bài 6.** Xét hàm lợi nhuận $L(x) = xP(x) - C(x)$ và tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên [0;100].

**Bài 7.** Xét hàm lợi nhuận $L(x) = xp(x) - xc(x)$ và tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left(0;+\infty\right)$.

**Bài 8.** Xét hàm lợi nhuận $L(x) = x.P(x) - C(x) - 10\%.x.P(x)$ và tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên [0;100].

**Bài 9.** Xét hàm lợi nhuận $L(x) = F(x) - xG(x)$, từ đó giải bất phương trình $L(x) > 100$ để tìm số lượng sản phẩm $x$.

**Bài 10.** Lợi nhuận doanh nghiệp thu được là $L(x) = f(x) - g(x) - tx$

Xét hàm $L(x) = -2x^2 + (560 - t)x - 50$ với $0 < x \leq 2000$

Lập BBT và tìm giá trị lớn nhất của hàm $L(x)$.

Từ bảng biến thiên, ta thấy lợi nhuận lớn nhất doanh nghiệp thu được tại $x = \dfrac{560 - t}{4}$.

Khi đó số tiền thuế là $k(t)=\dfrac{560-t}{4}.t$ với 0<t<300.

Tiếp tục lập BBT và tìm giá trị lớn nhất của $k(t)$, ta được tại t=280 từ đó suy ra số sản phẩm bán được và lợi nhuận cao nhất của doanh nghiệp.

**Bài 11.** Lợi nhuận hằng năm $L(x)=R(x)-C_2(x)=-0{,}162x^2+27{,}65x-12$ (tỷ đồng/năm).

Tỷ lệ lợi nhuận hàng năm trên chi phí đầu tư ban đầu được tính bởi hàm số: $T(x)=\dfrac{L(x)}{C_1(x)}=\dfrac{-0{,}162x^2+27{,}65x-12}{1400+55x}$.

Lập BBT ta thấy T(x) đạt GTLN khi $x\approx 46$

**Bài 12.** Gọi $x, x\in\mathbb{N}^*$ là số lần tăng giá thuê thêm 100 nghìn đồng.

Khi đó, số căn hộ cho thuê là $100-x$ căn.

Doanh thu một tháng khi tăng giá là $D(x)=(8000+100x)(100-x)=100(-x^2+20x+80)$ (nghìn đồng).

Lập bảng biến thiên khảo sát hàm số $D(x)$ trên $(0;100)$ ta được doanh thu lớn nhất khi $x=10$, tức là người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là $8+0{,}1.10=9$ (triệu đồng) thì doanh thu cao nhất.

**Bài 13.** Gọi $x, x\in\mathbb{N}^*$ là số lần tăng giá thuê thêm $200$ nghìn đồng.

Khi đó, số căn hộ cho thuê là $20-x$ căn.

Doanh thu một tháng khi tăng giá là $D(x)=(2000+200x)(20-x)$ (nghìn đồng).

Lập bảng biến thiên, khảo sát hàm số $D(x)$ trên $(0;+\infty)$ ta thấy hàm số D(x) đạt giá trị lớn nhất bằng 45 000 khi x = 5.

Khi đó, số tiền tăng lên khi cho thuê một căn hộ là 200.5 = 1 000 nghìn đồng= 1 triệu đồng. Vậy công ty nên cho thuê mỗi căn hộ 3 triệu đồng/1 tháng thì số tiền thu được là lớn nhất.

**Bài 14.** Gọi $x$ là số điện thoại trong mỗi lô vận chuyển sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất $\left(x\in\mathbb{N}^*, 1\le x\le 600\right)$.

Số đợt vận chuyển trong năm 2025 là $\dfrac{600}{x}$ (lần).

Khi đó, chi phí vận chuyển là $T(x)=50.\dfrac{600}{x}+3x=\dfrac{3000}{x}+3x$.

Xét hàm số $T(x)$ trên đoạn [1;600] và tìm $x$ để $T(x)$ nhỏ nhất.

Ta tìm được $\min\limits_{[0;600]} T(x) = 600$ khi $x = 100$.

Vậy chi phí vận chuyển đạt giá trị nhỏ nhất là 600 USD khi cửa hàng đó nhập mỗi lô 100 chiếc điện thoại.

**Bài 15.** Gọi $x$ là số lần giá bán tăng thêm 1000 đồng/kg.

Giá bán rau là 30000 + 1000$x$ đồng/kg.

Số rau thừa là 20$x$ kg (do mỗi lần tăng giá, số rau thừa tăng thêm 20 kg).

Số rau bán hết là 1000 − 20$x$ kg (do mỗi lần tăng giá, số rau bán hết giảm 20 kg).

Doanh thu từ rau bán hết với giá 30000 + 1000$x$ đồng/kg là $D_1(x) = (1000 - 20x)(30000 + 1000x)$

Doanh thu từ rau thừa bán làm thức ăn gia súc là $D_2(x) = 20x.2000 = 40000x$.

Khi đó, ta có hàm tổng doanh thu

$D(x) = D_1(x) + D_2(x) = 30000000 + 440000 - 20000x^2$

Lập bảng biến thiên khảo sát hàm $D(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có số tiền bán rau nhiều nhất mà trang tại có thể thu được mỗi ngày là 32420000 đồng.

**Bài 16.** Gọi $x$ là số máy móc công ty để sản xuất.

Thời gian cần để sản xuất hết $8000$ quả bóng là $\dfrac{8000}{30x}$ (giờ).

Tổng chi phí để sản xuất là $P(x) = 200x + \dfrac{8000}{30x}.192 = 200x + \dfrac{51200}{x}$

Vẽ bảng biến thiên khảo sát hàm $P(x)$ trên $(0;+\infty)$ ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} P(x) = 6400$ khi $x = 16$.

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

**Bài 17.** Giả sử giá bán mỗi cái điện thoại là $14 - 0,5y$

Số điện thoại bán được là $1000 + 100y$.

Khi đó daonh thu là $(14 - 0,5y)(1000 + 100y)$

Ta có hàm lợi nhuận

$L(x) = \left(14 - 0,5y\right)(1000 + 100y) - \left[1200 - 3(1000 + 100y)\right]$

$= -5y^2 + 1200y + 5000, 0 < y < 28.$

Lập BBT hàm số $L(x)$ ta có $\max L(y) = 12200$ (triệu) khi $y = 12$.

**Bài 18.** Ta có hàm lợi nhuận $L(x) = \dfrac{1}{2}x(40 - x)^2, 0 < x \le 16, x \in \mathbb{N}^*$.

Lập bảng biến thiên hàm L(x), ta được $\max\limits_{(0;16]} L(x) = 4738,5$ (nghìn đồng).

**Bài 19.** Tương tự bài 12,13 (HS tự giải)

**Bài 20.** Tương tự bài 15 (HS tự giải).

**Bài 21.** Tương tự bài 16 (HS tự giải).

**Bài 22.** Chỉ tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $C(x)$ trên $[1;+\infty)$.

**Bài 23.** Hàm lợi nhuận $L(x)=30x-(55000+22x)$ .

Khi đó, ta tìm $x$ nguyên và thuộc đoạn [5000;25 000] sao cho $L(x)>135000$.

Tức là $30x-55000-22x\ge 135000\Rightarrow x\ge \dfrac{47500}{3}\Rightarrow x=15834$

Vậy trung bình mỗi ngày nhà hàng phải phục vụ ít nhất $\dfrac{158834}{300}\approx 530$ phần ăn để đạt mục tiêu trên?

**Bài 24.** Tương tự bài 12, 13 (HS tự giải).

**Bài 25.** Tương tự bài 14 (HS tự giải).

**Bài 26.** Gọi $x$ là số tiền mà của hàng dự định giảm giá $0\le x\le 5$

Ta có hàm lợi nhuận

$$L(x)=(35-x-30)(12000+4000x)=-400x^2+8000x+60000$$

Xét hàm số $L(x)$ trên [1;5], ta được $x=1$ là giá trị cần tìm.

Vậy của hàng bán với giá mới là 34 nghìn đồng/kg thì lợi nhuận thu được cao nhất.

**Bài 27.** Giả sử cần nhập trái cây đủ n ngày để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất $n\in\mathbb{N}^*, n\le 10$.

Mỗi ngày phải phân phối đi 25 tạ trái cây nên tổng số trái cây trong một lần nhập là 25n (tạ).

Chi phí bảo quản ngày đầu là: 25n.0,08 (triệu đồng).

Chi phí bảo quản ngày thứ hai là: 25(n – 1).0,08 (triệu đồng).

Chi phí bảo quản ngày thứ ba là: 25(n – 2).0,08 (triệu đồng).

Chi phí bảo quản ngày cuối cùng là: 25.0,08 (triệu đồng) (vì chỉ còn 25 tạ cho ngày cuối cùng).

Tổng chi phí bảo quản là:

$P = 25n.0,08 + 25(n-1).0,08 + 25(n-2).0,08 + ... + 25.0,08$
$= 2\left[n + (n-1) + (n-2) + ... + 1\right]$

Ta có thể viết $P = 2.(1 + 2 + 3 + .. + n)$. Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng, ta được: $P = 2.\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Tổng chi phí (gồm phí vận chuyển và bảo quản) là $25 + n(n+1)$ (triệu đồng).

Chi phí trung bình là $Q(n) = \dfrac{25 + n(n+1)}{n} = \dfrac{25}{n} + n + 1$.

Xét hàm số $Q(n)$ trên đoạn [1;10]

| n | 1 | | 5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Q'(n) | | - | 0 | + | |
| Q(n) | 27 | ↘ | 11 | ↗ | 13,5 |

Vậy, để chi phí trung bình nhỏ nhất thì đại lý cần nhập đủ trái cây cho 5 ngày.

**Bài 28.** Gọi x, x>0 (km) là vận tốc của tàu, khi đó thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\dfrac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí nhiêu liệu cho phần thứ nhất là $c_1(x) = \dfrac{1}{x}.480 = \dfrac{480}{x}$ (nghìn đồng)

Hàm chi phí cho phần hai là $c_2(x) = kx^3$ (nghìn đồng/giờ).

Theo đề bài, $c_2(20) = 100 \Rightarrow k = 0,0125$.

Vậy tổng chi phí là $c(x) = c_1(x) + c_2(x) = \dfrac{480}{x} + 0,0125x^3$

Xét hàm c(x) trên $(0;+\infty)$ và tìm giá trị của x để c(x) nhỏ nhất.

**Bài 29.** Ta có hàm lợi nhuận
$L(A) = 20q(A) - \left[10q(A) + A\right] = 10000 + 2026\ln(1+A) - A$.

Tìm max của $L(A)$ với $A > 0$.

**Bài 30.** Chi phí trung bình là $T'(x) = \dfrac{C(x)}{T(x)}$

Xét hàm $T'(x)$ với x>0 và tìm min T'(x).

**Bài 31.** Ta có $v = S' = -3t^2 + 18t + 1$, tìm t để v max.

**Bài 32.** Tìm giá trị  lớn nhất của hàm số $v = s'(t)$ trên [0;9].

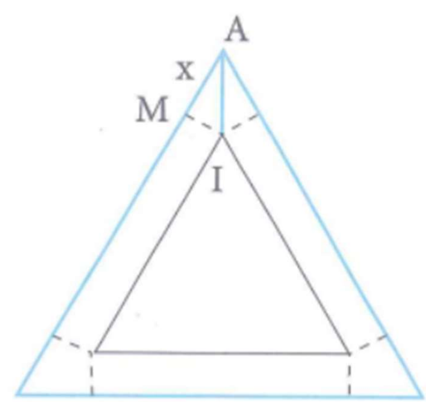
**Bài 34.** $x = \sqrt[3]{10}dm^3$.

**Bài 35.** Thể tích khối hộp là $V(x) = x^2(0,9 - 2x)$

**Bài 36.**  5,4 triệu đồng.

**Bài 37.**

**Bài 38.**




Xét tam giác  $AMI$  như hình vẽ đặt $AM = x > 0, \angle AMI = 30^\circ \Rightarrow MI = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

Lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy $a - 2x, 0 < x < \dfrac{a}{2}$ và chiều cao $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ nên có thể tích

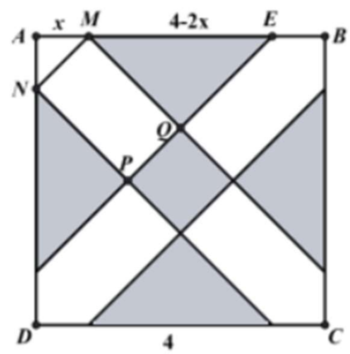
là $V(x) = \dfrac{(a-2x)^2.\sqrt{3}}{4}.\dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{4}$

Ta tìm $x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$ để $V(x)$ lớn nhất.

Lập bảng biến thiên ta tìm được thể tích V lớn nhất khi $x = \frac{a}{6}$.

**Bài 39. ĐS:** 9420.

**Bài 40.**




Đặt $AM = x, 0 < x < 4$. Ta có $ME = 4 - 2x$.

$2MQ^2 = (4-2x)^2 \Rightarrow MQ^2 = 2(2-x)^2 \Rightarrow MQ = \sqrt{2(2-x)}$

Gọi S là tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

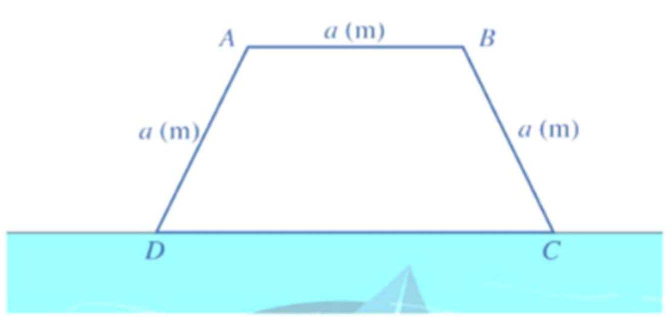
Khi đó $S = 4.\frac{MQ^2 2}{2} + PQ^2 = (4-2x)^2 + (x\sqrt{2})^2$

Lập bảng biến thiên hàm số S(x), ta tìm được $MaxS(x) = \frac{16}{3}$

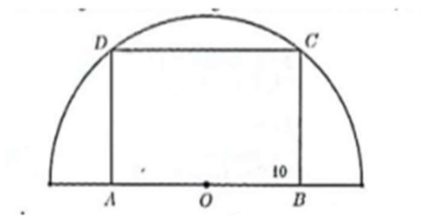
**Bài 41.** $x = 3\sqrt{2}m$.

## Một số bài tập VDC

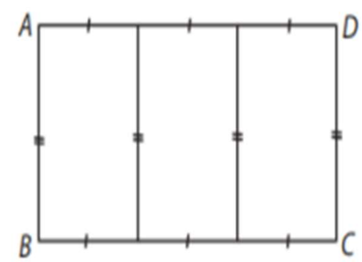
**Bài 1.** Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a$ (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình bên dưới (bờ sông là đường thẳng $CD$ không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



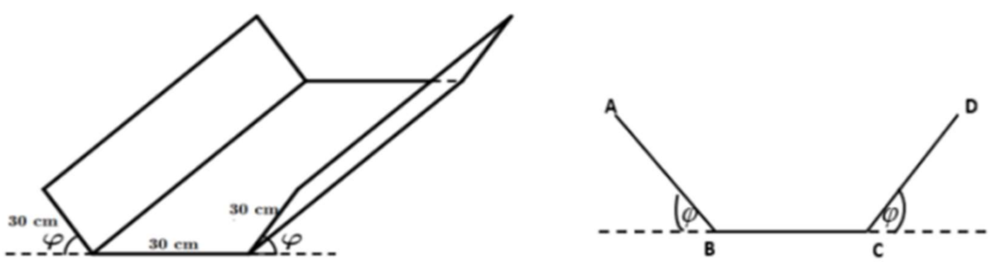
**Bài 2.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp nửa đường tròn tâm $O$, bán kính $R = 10$(cạnh $AB$ của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp). Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$.




**Bài 3.** Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 600 $m^2$. Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau (hình vẽ). Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60.000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật $ABCD$ không vượt quá 60 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ sao cho chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

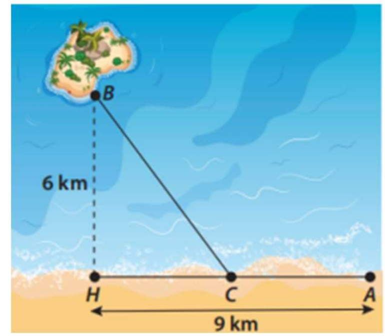



**Bài 4.** Ông Dũng định làm một máng thoát nước mưa từ một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài 2 m và chiều rộng 90 cm. Ông Dũng chia chiều rộng của miếng tôn thành 3 phần bằng nhau, mỗi phần dài 30 cm, rồi gập hai bên lên một góc $\varphi\left(0^\circ < \varphi < 90^\circ\right)$ như hình vẽ dưới đây:



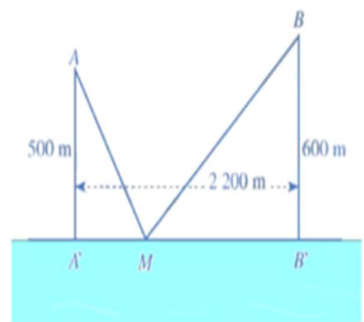

Mặt cắt ngang của máng là hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $AD$, đáy nhỏ $BC$ và $AB = BC = CD = 30$ cm (minh hoạ hình bên trên). Tìm số đo góc $\varphi$ (đơn vị: độ) để diện tích mặt cắt ngang của máng nước lớn nhất.

**Bài 5.** Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là BH = 6 km (hình vẽ). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50.000 USD mỗi kilomet và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130.000 USD mỗi kilomet, biết rằng AH = 9 km.

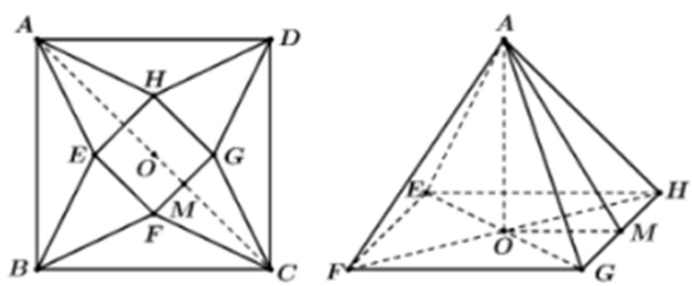


Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

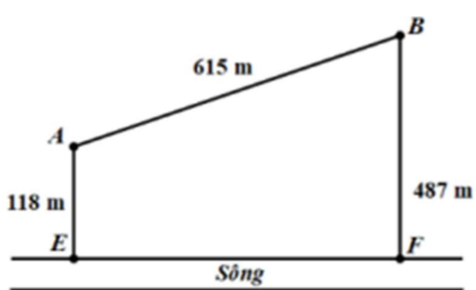
**Bài 6.** Có hai xã cùng ở một bên bờ sông Lam. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là AA′ = 500 m, BB′ = 600 m và A′B′ = 2200 m (Hình bên). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn A′B′ sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.




**Bài 7.** Trong một tiết học Toán, giáo viên phát cho 4 tổ một tấm bìa hình vuông ABCD cạnh bằng 10 cm. Giáo viên yêu cầu 4 tổ sử dụng tấm bìa này và cắt tấm bìa theo các tam giác cân AEB, BF C, CGD, DHA để sau đó gấp các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều (tham khảo hình vẽ bên dưới). Khi đó thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng là $\frac{a\sqrt{b}}{c}(cm^3)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính P = a + b + c.

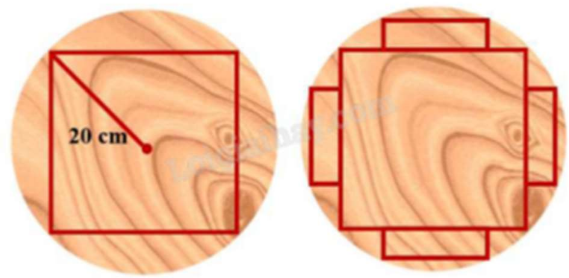



**Bài 8.** Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m và cùng nằm về một phía bờ sông, giả sử bờ sông có dạng thẳng; khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m như hình vẽ sau

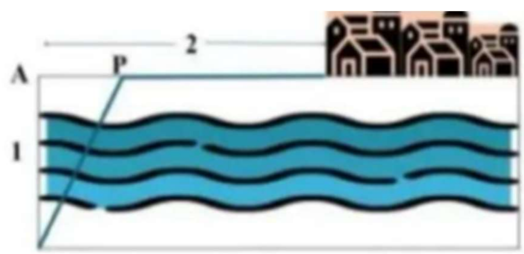


Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Quãng đường ngắn nhất (tính theo đơn vị mét) mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

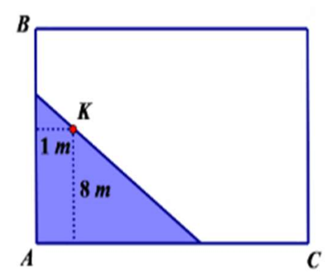
**Bài 9.** Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích mặt cắt ngang tối đa của mỗi tấm ván (theo đơn vị $cm^2$ và làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



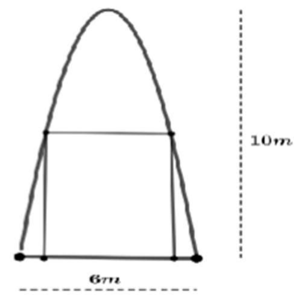

**Bài 10.** Bạn An đang đứng trên bờ một con sông rộng 1 km và muốn đến một thị trấn ở phía bên kia bờ, cách 2 km xuôi dòng. Bạn An dự định chèo thuyền theo một đường thẳng đến một điểm P trên bờ đối diện (tham khảo hình vẽ) và sau đó đi bộ quãng đường còn lại dọc theo bờ. Biết bạn An chèo thuyền với vận tốc 4 km/giờ và đi bộ với vận tốc 5km/giờ. Gọi $x_0$ (km) là khoảng cách từ A đến P trong trường hợp thời gian bạn An đến thị trấn là ngắn nhất. Giá trị của $3x_0$ bằng bao nhiêu?




**Bài 11.** Một cái ao nuôi cá hình chữ nhật của nhà ông An có chiều dài 20m và chiều rộng 15m , tại một góc nhỏ của ao ông An đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một dây phao căng thẳng ngăn một góc nhỏ của ao để làm nơi cho cá ăn (phần in đậm như hình vẽ) sao cho dây phao có thể đồng thời chạm vào hai bờ AB, AC và vào cái cọc K . Biết mỗi mét dây phao ông An cần mua có giá 130 nghìn đồng. Hỏi ông An phải bỏ ra ít nhất bao nhiêu nghìn đồng để mua dây phao đó (bỏ qua đường kính của dây phao và cái cọc, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



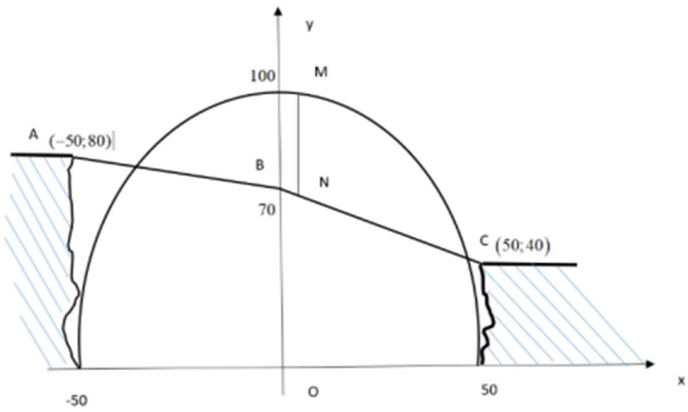
**Bài 12.** Một cái cổng trường có hình dạng parabol cao 10 m và rộng 6m. Người ta muốn đặt một khung hình chữ nhật để thiết kế trang trí, có hai đỉnh nằm trên vòm cổng và hai đỉnh còn lại nằm dưới mặt đất. Khung hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét vuông để có thể đặt vào cổng trường (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?




**Bài 13.** Khi dạo chơi trên một công viên bạn Đoàn di chuyển trên cung đường có dạng hình Parabol, bạn Kết di chuyển trên cung đường có dạng đường tròn (xem hình minh họa). Khoảng cách giữa đỉnh A của Parabol và tiếp điểm B của đường tròn là 16 m, HK⊥AB và AH = 6m ,HK = 9m

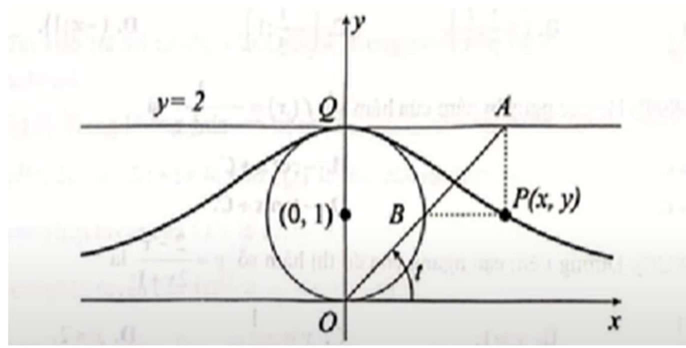

Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn Đoàn và Kết bằng bao nhiêu mét, biết rằng đường tròn có bán kính bằng 3m ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Bài 14.** Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 100 mét, một bên cao 80 mét và một bên cao 40 mét. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây



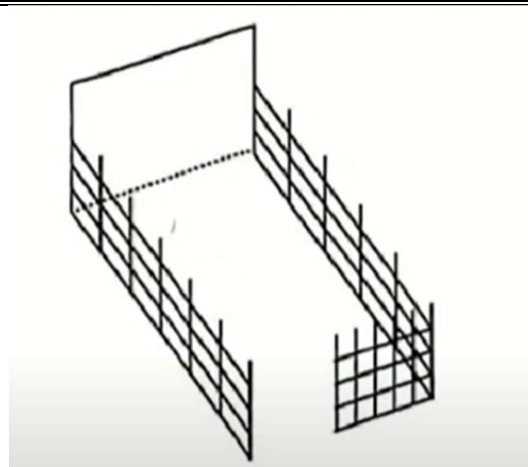

Con đường xuyên qua hẻm núi chia thành hai đoạn thẳng AB và BC như hình vẽ trên. Cột đỡ dọc MN là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường xuyên qua hẻm núi. Độ dài lớn nhất của MN là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục).

**Bài 15.** Hình vẽ sau mô tả một đường cong **Agnesi** và được xây dựng trong hệ tọa độ $Oxy$ như sau: vẽ một đường tròn có tâm $I(0;1)$ và bán kính bằng 1, từ điểm $O$ kẻ một đường thẳng cắt đường tròn tại điểm thứ hai là điểm $B$ và cắt đường thẳng $y=2$ tại điểm $A$. Gọi $P$ là giao điểm của đường thẳng qua $A$ vuông góc với $Ox$ và đường thẳng qua $B$ vuông góc với $Oy$. Tập hợp các điểm $P$ tạo thành một đường cong $y=f(x)$ gọi là đường cong Agnesi. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



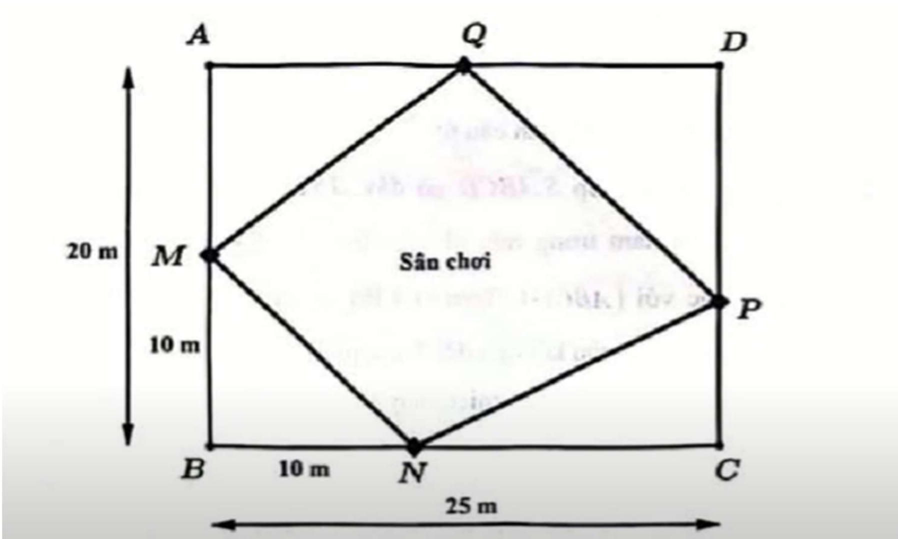

**Bài 16.** Cấu trúc tổ ong là một cấu trúc đặc biệt, mỗi lỗ ong là một lăng kính hình lục giác, một đầu hở còn một đầu tạo thành một góc tam diện. Ong đã xây các lỗ này với một cách làm tối ưu về diện tích bề mặt (đã sử dụng lượng sát ong ít nhất để xây tổ). Người ta đã quan sát, nghiên cứu thì thấy rằng góc $\theta$ (rad) ở đỉnh nhất quán một cách đáng kinh ngạc, dựa trên cấu trúc hình học của lỗ ong người ta chứng minh được diện tích bề mặt $S$ của lỗ ong là $S=6s.h-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}s^2.\dfrac{1}{\sin\theta}$ ($s$ là chiều dài các cạnh của lỗ ong, $h$ là chiều cao, $s$ và $h$ đều là hằng số). Vậy để tối thiểu hóa diện tích bề mặt, con ong đã xây một góc $\theta$ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng trăm).

**Bài 17.** Chủ một nhà hàng muốn làm tường rào bao quanh 600 $m^2$ đất để làm bãi đỗ xe. Ba cạnh của khu đất được rào bằng thép với chi phí 14 000 đồng một mét, mặt thứ tư tiếp giáp với mặt bên của nhà hàng nên được xây bằng gạch xi măng với chi phí 28 000 đồng mỗi mét.



Tìm chu vi khu đất sao cho chi phí nguyên liệu bỏ ra là ít nhất, biết rằng khu đất rào được có dạng hình chữ nhật.

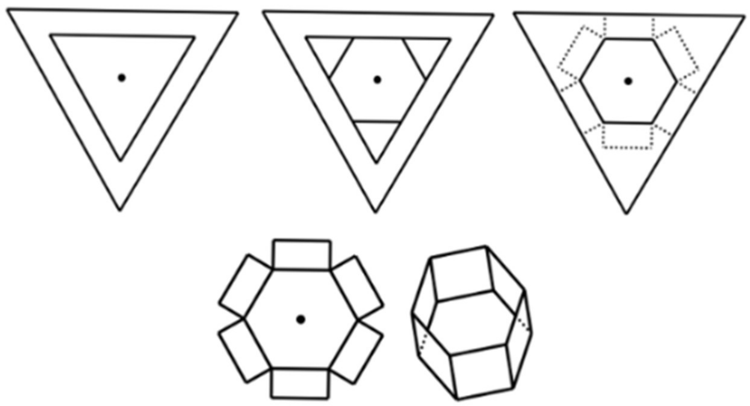
**Bài 18.** Một công viên hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước 20m x 25 m có hai vị trí $M, N$ cố định lần lượt thuộc cạnh $AB$ và $BC$ sao cho $BM = BN = 10m$



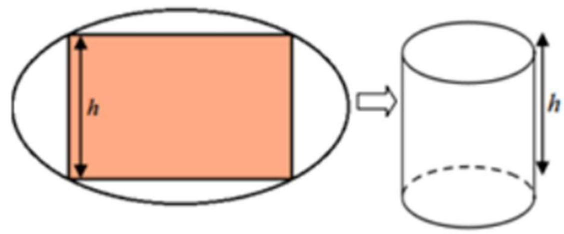

Trên cạnh $CD$ và $AD$ người ta xác định hai điểm $P, Q$ để xây dựng sân chơi $MNPQ$ sao cho $MNPQ$ là hình thang có $MN$ song song với $PQ$. Diện tích lớn nhất của sân chơi là bao nhiêu mét vuông? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

**Bài 19.** Cho một tấm tôn hình một tam giác đều có cạnh bằng 2 m. Người ta thiết kế một hình lục giác đều và sáu hình chữ nhật ở phía ngoài lục giác có một cạnh bằng cạnh của lục giác, một cạnh bằng $x$ (mét) với $0 < x < \frac{2}{3}$. Sau đó người ta cắt theo nét đứt đoạn để thu được một hình hợp bởi một lục giác đều và sáu hình chữ nhật. Sau đó gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ lục giác đều (*tham khảo hình vẽ dưới đây*).

Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu $dm^3$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*)?

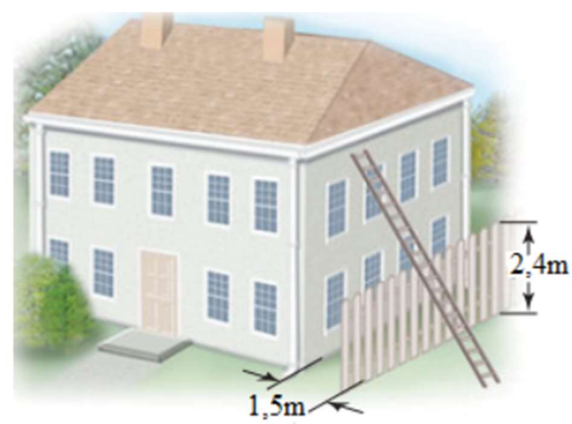


**Bài 20.** Người ta cần cắt cần cắt một tấm tôn có hình dạng là một elip với độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn hình chữ nhật nội tiếp elip. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được một hình trụ không có đáy (như hình bên). Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó.

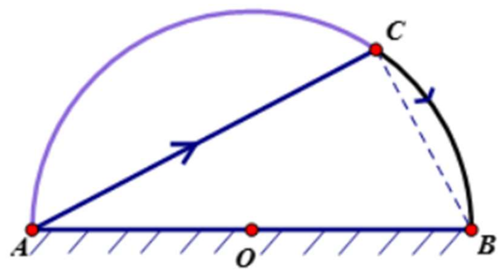



**Bài 21.** Theo thống kê tại một nhà máy *Z*, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 công nhân đi làm và mỗi công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ. Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x)=\dfrac{95x^2+120x}{4}$, với $x$ là thời gian làm việc trong một tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

**Bài 22.** Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà. Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dàin ngắn nhất của cây thang bao nhiêu mét để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

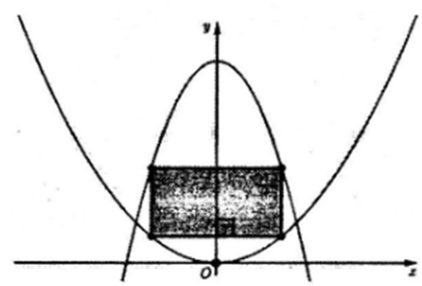


**Bài 23.** Một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km, đường kính $AB$ (tham khảo hình vẽ). Từ điểm $A$ anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm $C$ trên hồ, rồi chạy dọc theo thành hồ đến vị trí $B$ với vận tốc 6km/h ($C$ không trùng với $A$ và $B$)

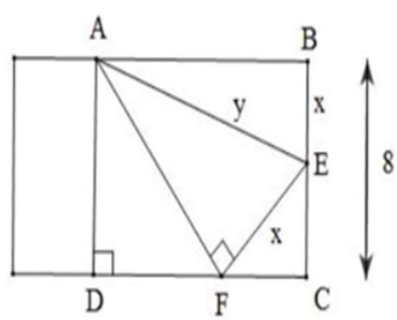



Thời gian ngắn nhất mà anh Tài di chuyển từ $A$ đến $B$ là bao nhiêu (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

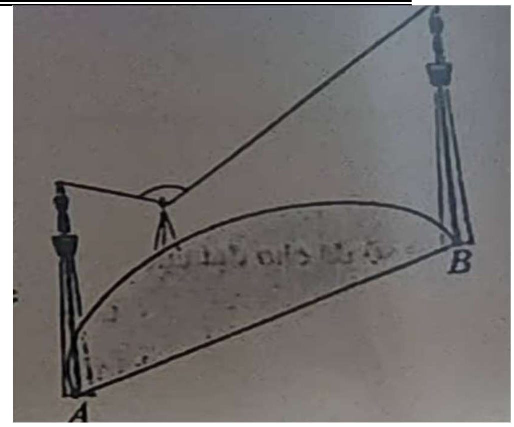
**Bài 24.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có hai điểm nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và hai điểm còn lại nằm trên đồ thị hàm số $y = 5 - x^2$ trên khoảng $(-2;2)$ như hình vẽ bên. Hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



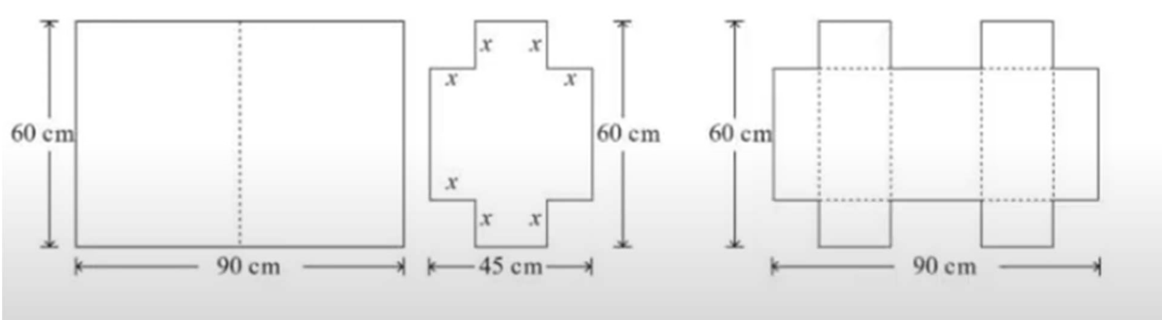

**Bài 25.** Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 cm và chiều rộng 8 cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho khi gấp đỉnh của góc đó chạm đáy như hình vẽ. Độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



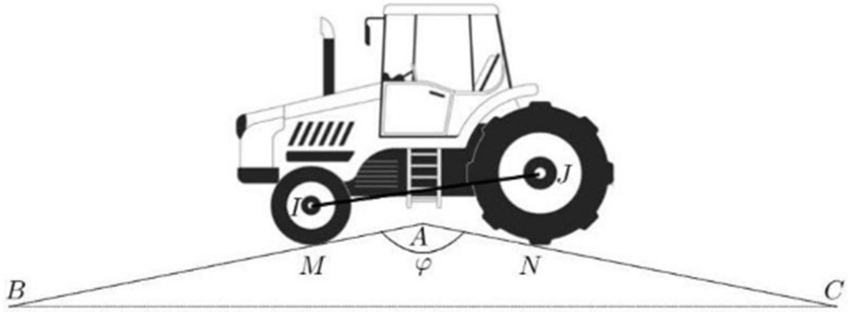
**Bài 26.** Trong công viên, có một hồ nước hình bán nguyệt đường kinh AB bằng 100 (m). Tại A và B người ta dựng hai bức tượng lần lượt cao 8 m và 10 m. Một người đứng trên phần cung tròn của bờ hồ muốn đặt máy ảnh cao 1,6 m để chụp toàn cảnh hai bức tượng. Gọi góc quan sát là góc tạo bởi hai tia nối vị trí đặt máy ảnh với hai đỉnh của các bức tượng. Khi người đó di chuyển trên phần cung tròn của bờ hồ thì góc quan sát lớn nhất bằng bao nhiêu độ? (làm tròn hàng đơn vị).




**Bài 27.** Một tấm bìa cứng có kích thước 60 cm x 90 cm được gấp đôi thành một hình chữ nhật 60 cm x 45 cm như hình vẽ. Sau đó, cắt ra từ các góc của hình chữ nhật vừa gấp bốn hình vuông bằng nhau có cạnh $x$ (cm). Tấm bìa được mở ra và sáu mép được gấp lên để tạo thành một hộp chữ nhật $(H)$ có nắp và đáy (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối $(H)$ bằng bao nhiêu lít? Làm tròn đến hàng phần mười.




**Bài 28.** Trong mặt phẳng, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$; $AB = 1000; \angle BAC = \varphi$ thỏa mãn $\tan\varphi = -\frac{3}{4}$. Điểm $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Hai điểm $I$ và $J$ di động sao cho đường thẳng $AB$ tiếp xúc với đường tròn tâm $I$ bán kính bằng 100 tại điểm $M$ thuộc đoạn $AB$, đường thẳng $AC$ tiếp xúc với đường tròn tâm $J$ bán kính bằng 180 tại điểm $N$ thuộc đoạn $AC$, khoảng cách giữa hai điểm $I$ và $J$ bằng 700, hai điểm $I$ và $G$ nằm ở hai phía khác nhau của đường thẳng $AB$, hai điểm $J$ và $G$ nằm ở hai phía khác nhau của đường thẳng $AC$. Khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $IJ$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).


I
J
A
φ
M
N
B
C