

CHƯƠNG 4**NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN****BÀI 1****NGUYÊN HÀM****1. Khái niệm nguyên hàm**

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in K$.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho

$$G(x) = F(x) + C \text{ với mọi } x \in K$$

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K , kí hiệu $\int f(x)dx$ và viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Chú ý:

- Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$

Vậy, $dF(x) = F' dx = f(x) dx$

- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .
- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà khoogn chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$

2. Các tính chất của nguyên hàm

- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, với k là hằng số khác 0
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3. Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1

NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

DẠNG 1

NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Bảng nguyên hàm hàm số lũy thừa

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$
	$\int dx = x + C$
	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$

Chú ý : Dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

- $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
- $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$

3. Công thức lũy thừa:

- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Bài 1. Tìm:

a) $\int 3x^3 dx$

b) $\int 2\sqrt{x^5} dx$

c) $\int 2\sqrt[4]{x} dx$

d) $\int x\sqrt{x^3} dx$

e) $\int 3x^2\sqrt[3]{x^4} dx$

f) $\int 2x^5\sqrt{x^3} dx$

Bài 2. Tìm:

a) $\int \frac{2024}{x^5} dx$

b) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

c) $\int \frac{2025}{x^4\sqrt{x^3}} dx$

d) $\int \frac{2\sqrt{x}}{x^2} dx$

e) $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

f) $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

Bài 3. Tìm:

a) $\int (x^2 - 2025) dx$

b) $\int \left(x^4 + \frac{2}{x^3} - 2024 \right) dx$

c) $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 1 \right) dx$

d) $\int \left(\frac{2024}{x} - \frac{2025}{x^2} + 2026 \right) dx$

e) $\int \left(3x^2 - \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$

f) $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2024 \right) dx$

Bài 4. Tìm:

a) $\int 2x(1+3x^3) dx$

b) $\int \left(x - \frac{1}{x^2} \right)^2 dx$

c) $\int (x-3)^3 dx$

d) $\int x^2(x-2)^2 dx$

e) $\int x(1-x)^3 dx$

f) $\int (x+1)(3-x)^2 dx$

Bài 5. Tìm:

a) $\int \frac{2x^4 - 3}{x^2} dx$

b) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x} dx$

c) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x}} dx$

d) $\int \frac{(3x-2)^2}{x} dx$

e) $\int \left(\frac{3x+1}{x} \right)^2 dx$

f) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

DẠNG 2**NGUYÊN HÀM HÀM LƯỢNG GIÁC****1. Bảng nguyên hàm hàm số lượng giác**

Nguyên hàm hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

Chú ý: Cần thuộc các công thức lượng giác sau:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
- $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$
- $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$
- $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$
- $\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x \Rightarrow \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \sin^2 x$
- $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$
- $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

Bài 1. Tìm:

a) $\int (\sin x + 3 \cos x) dx$

b) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

c) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

d) $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

e) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

f) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$

Bài 2. Tìm:

a) $\int (4x + 3 \cos x) dx$

b) $\int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

c) $\int \left(2025x - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$

$$\text{d) } \int \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x \right) dx$$

$$\text{e) } \int x \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} \right) dx$$

$$\text{f) } \int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2} \right) dx$$

Bài 3. Tìm:

$$\text{a) } \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$\text{b) } \int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

$$\text{c) } \int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx$$

$$\text{d) } \int x^2 \left(\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right) dx$$

DẠNG 3
NGUYÊN HÀM HÀM MŨ

Nguyên hàm hàm số mũ

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Chú ý : Dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

$$\bullet \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\bullet \int a^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Bài 1. Tìm:

a) $\int 2025^x dx$

b) $\int e^{-x} dx$

c) $\int \frac{1}{3^x} dx$

d) $\int \frac{1}{e^x} dx$

e) $\int \frac{1}{e^{3x}} dx$

f) $\int \frac{1}{5^{2x+1}} dx$

Bài 2. Tìm:

a) $\int (2024^x + 1) dx$

b) $\int (2e^x - 3^x) dx$

c) $\int \left(2.5^x - \frac{1}{3}.7^x \right) dx$

d) $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

e) $\int 8^x \cdot 2^{1-2x} dx$

f) $\int (9^x - 2 + 9^{-x}) dx$

Bài 3. Tìm:

a) $\int 2^{3x} \cdot 3^{2x} dx$

b) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$

c) $\int \frac{e^{2x} - e^x + 2024}{e^x} dx$

d) $\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x} \right)^2 dx$

e) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$

f) $\int e^x \left(2024 - \frac{2025e^{-x}}{x^5} \right) dx$

Bài 4. Tìm:

a) $\int (2^x + 3^x) dx$

b) $\int e^{3x+2024} dx$

c) $\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx$

d) $\int (3^x + 5^x)^2 dx$

e) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

f) $\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx$

DẠNG 4

NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm $F(x)$, biết:

- a) $f(x) = 2^x$ và $F(e) = 1$.
 b) $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 2025$.
 c) $f(x) = e^x(e^x - 1)$ và $F(\ln 2) = 2024$.
 d) $f(x) = e^{3x} \cdot 3^x$ và $F(1) = 0$.

Bài 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của:

- a) $f(x) = x^3 - 4x + 2024$. Biết $F(1) = 0$, tính $F(0)$.
 b) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$. Biết $F(-2) = 0$, tính $F(2)$.
 c) $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}$. Biết $F(e) = 1$, tính $F(2)$.
 d) $f(x) = \frac{1 + 2x^2}{x}$. Biết $F(-1) = 3$, tính $F(1)$.

Bài 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của:

- a) $f(x) = 3 - 5 \cos x$. Biết $F(\pi) = 2$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 b) $f(x) = \sin x + 1$. Biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 c) $f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2}$. Biết $F(2\pi) = 0$, tính $F(0)$.
 d) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}$. Biết $F(\pi) = 1$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$F(0) = 2. \text{ Tính } F(-1) + 2F(2).$$

Bài 5. Cho $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \tan x$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số

$$g(x) = \frac{\tan x}{f'(x)}.$$

Bài 6. Tìm giá trị của tham số m biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa

mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$.

Bài 7. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn:

a) $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Tìm hàm $f(x)$.

b) $f'(x) = 2e^{2x} + 1$ và $f(0) = 2$. Tìm hàm $f(x)$.

Bài 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 6x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(2) = 0$. Tính $F(4)$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{3x^3 + 1}{x}$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $f(-3) + f(3)$

biết $f(1) = 2, f(-1) = 3$.

Bài 10. Tìm hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1, f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 .

DẠNG 5**NGUYÊN HÀM CỦA HÀM ẨN****I. Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp**

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = \left[\ln(f(x)) \right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$
- $n.f'(x).f(x) = \left[f(x)^n \right]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[2\sqrt{f(x)} \right]'$
- $f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = \left[f(x).g(x) \right]'$
- $\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$

II. Các dạng hàm ẩn thường gặp**1. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) \cdot f(x) = p(x)$** **Phương pháp giải:**

$$f'(x) \cdot f(x) = p(x) \Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]' = p(x) \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int p(x) dx$$

2. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x) \cdot f(x)$ **Phương pháp giải:**

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = \int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

3. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x) \cdot [f(x)]^n$ **Phương pháp giải:**

$$f'(x) = p(x) \cdot [f(x)]^n$$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = p(x)$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = \int p(x) dx$$

4. Hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

5. Hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)

Ý tưởng giải:

- Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$ và

lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x).h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x).h(x) dx}{u(x)}$$

- Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$

Hai dạng đặc biệt của (1)

• $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

• $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $f'(x) \cdot f(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \sqrt{2024}$. Tính $f^2(1)$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 2) = 0$ và $f'(x) = \frac{e^x}{f(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $f(x) \neq 0$. Tính $f^2(0)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(e) = 1$ và $xf'(x) = [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(e^3)$.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x \cdot f(x)$. Tính $f(1)$.

Bài 5. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(4)$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Tính giá trị $f^2(4)$.

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $(x+1)f'(x) + f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2024$. Tính $f(2)$.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

A. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$.

Câu 2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + C$.

B. $x^2 + 6x + C$.

C. $2x^2 + C$.

D. $2x^2 + 6x + C$.

Câu 3. $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C$.

B. $\frac{1}{3}x^3 + C$.

C. $x^3 + C$.

D. $3x^3 + C$.

Câu 4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

A. $2x^2 + 4x + C$.

B. $x^2 + 4x + C$.

C. $x^2 + C$.

D. $2x^2 + C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C$

C. $6x + C$

D. $x^3 + x + C$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2x + C$.

B. $\int f(x)dx = x^2 + 4x + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$.

D. $\int f(x)dx = x^3 + 4x + C$.

Câu 7. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2$ là

A. $\int f(x)dx = 2x + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = x^2 - 2x + C$.

D. $\int f(x)dx = x^3 - 2x + C$.

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

B. $3x^2 + 1 + C$

C. $x^3 + x + C$

D. $x^4 + x^2 + C$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 2024$ là

A. $x^4 - 2024x + C$.

B. $4x^3 - 2024x + C$.

C. $12x^3 + C$.

D. $x^4 + C$.

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ B. $x^4 + x^2 + C$ C. $x^5 + x^3 + C$ D. $4x^3 + 2x + C$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{R} ?

- A. $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$. B. $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$. C. $F_3(x) = x^3 - x^2 + 1$. D. $F_4(x) = 3x^3 + x^2$.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ là

- A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$. B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.
C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$. D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.

Câu 13. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 8x^3 - 6x$ là

- A. $F(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^2 + C$. B. $F(x) = x^5 - x^4 - x^2 + C$.
C. $F(x) = x^5 - 4x^4 - 2x^2 + C$. D. $F(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + C$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$?

- A. $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{x}$. B. $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{x}$.
C. $F_3(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$. D. $F_4(x) = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$?

- A. $F_1(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$. B. $F_2(x) = 3x + \ln x$. C. $F_3(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$. D. $F_4(x) = 3x - \ln x$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$.

- A. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$. B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.
C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$. D. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.

Câu 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x^{2024}$ là

A. $\sqrt{x} + \frac{x^{2023}}{673} + C.$

B. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^{2024}}{2025} + C.$

C. $2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2025}}{2025} + C.$

D. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 6054x^{2025} + C.$

Câu 18. Biết $F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x.$

B. $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}.$

C. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}.$

D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x + x + C.$

Câu 19. Biết $\int \left(\frac{1}{2x} + x^5 \right) dx = a \ln|x| + bx^6 + C$ với $(a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R})$. Tính $a^2 + b$?

A. $\frac{5}{12}.$

B. 9.

C. $\frac{7}{13}.$

D. $\frac{7}{6}.$

Câu 20. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$?

A. $\frac{x^{2023}}{2023} + 1.$

B. $\frac{x^{2023}}{2023}.$

C. $y = 2022x^{2021}.$

D. $\frac{x^{2023}}{2023} - 1.$

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$ là

A. $2x + 3 + C.$

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

C. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

D. $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$

Câu 22. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$

B. $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

D. $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

Câu 23. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = x(x+1)^5$ là

A. $\frac{(x+1)^7}{7} + \frac{(x+1)^6}{6} + C.$

B. $6(x+1)^5 + 5(x+1)^4 + C.$

C. $6(x+1)^5 - 5(x+1)^4 + C.$

D. $\frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C.$

Câu 24. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

A. $(5x+3)^6 + C.$

B. $(5x+3)^4 + C.$

C. $\frac{(5x+3)^6}{30} + C.$

D. $\frac{(5x+3)^4}{30} + C.$

Câu 25. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Câu 26. Trên khoảng $(0; +\infty)$, cho hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + C$.

B. $\int f(x) dx = \int \sqrt{x^3} dx$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} + C$.

Câu 27. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\sqrt{2024}}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2024}-1} x^{\sqrt{2024}-1} + C$.

B. $\int f(x) dx = x^{\sqrt{2024}+1} + C$.

C. $\int f(x) dx = \sqrt{2024} x^{\sqrt{2024}-1} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2024}+1} x^{\sqrt{2024}+1} + C$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4+2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 29. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + 5 \ln x^2 + C$.

D. $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$.

Câu 30. Tính $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$.

A. $\frac{4}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$.

B. $\frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$.

C. $\frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x} + C$.

D. $\frac{4}{15} x^{15} \sqrt{x} + C$.

Câu 31. Tính $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

A. $x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - 2x^{\frac{17}{4}} \sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$.

B. $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{4}} \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.

C. $x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{4}} \sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$.

D. $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - 2x^{\frac{17}{4}} \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.

Câu 32. Khẳng định nào đây sai?

A. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

B. $\int \cos x \, dx = -\sin x + C$.

C. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

D. $\int \cos x \, dx = -\tan x + C$.

Câu 33. Cho $\int f(x) \, dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = -\sin x$.

B. $f(x) = -\cos x$.

C. $f(x) = \sin x$.

D. $f(x) = \cos x$.

Câu 34. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$.

B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

D. $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) \, dx = x - \cos x + C$.

B. $\int f(x) \, dx = x + \sin x + C$.

C. $\int f(x) \, dx = x + \cos x + C$.

D. $\int f(x) \, dx = \cos x + C$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) \, dx = x + \tan x + C$.

B. $\int f(x) \, dx = x + \cot x + C$.

C. $\int f(x) \, dx = x - \tan x + C$.

D. $\int f(x) \, dx = x - \cot x + C$.

Câu 37. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \cos x - 4 \sin x$ là:

A. $3 \sin x - 4 \cos x + C$.

B. $-3 \sin x + 4 \cos x + C$.

C. $3 \sin x + 4 \cos x + C$.

D. $-3 \sin x + 4 \cos x + C$.

Câu 38. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + \frac{3}{\sin^2 x}$ là:

A. $-2 \cos x - 3 \cot x + C$.

B. $2 \cos x - 3 \tan x + C$.

C. $-2 \cos x + 3 \cot x + C$.

D. $2 \cos x - 3 \cot x + C$.

Câu 39. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C$.

B. $-\sin x + 3x^2 + C$.

C. $\sin x + 6x^2 + C$.

D. $-\sin x + C$.

Câu 40. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + 3x$.

A. $\int (2 \sin x + 3x) \, dx = -2 \cos x + \frac{3}{2} x^2 + C$

B. $\int (2 \sin x + 3x) \, dx = 2 \cos x + 3x^2 + C$

C. $\int (2 \sin x + 3x) \, dx = \sin^2 x + \frac{3}{2} x + C$

D. $\int (2 \sin x + 3x) \, dx = \sin 2x + \frac{3}{2} x^2 + C$

Câu 41. Tính $\int (x - \sin x) \, dx$.

A. $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$. B. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$. C. $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$. D. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Câu 42. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$. B. $6x + \cos x + C$. C. $x^3 - \cos x + C$. D. $6x - \cos x + C$.

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

A. $\ln x - \cos x + C$. B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. C. $\ln|x| + \cos x + C$. D. $\ln|x| - \cos x + C$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $\int f(x) dx = \ln|x| + \tan x + C$. B. $\int f(x) dx = \ln x + \tan x + C$.
C. $\int f(x) dx = \ln x + \tan|x| + C$. D. $\int f(x) dx = \ln|x| + \tan x$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x + C$. B. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos x + C$
C. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sin x + C$. D. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \cos x + C$

Câu 46. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

A. $F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$
C. $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + C$ D. $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x) + C$

Câu 47. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ là:

A. $4 \cos \frac{x}{2} + C$. B. $x + \sin x + C$. C. $2 \sin^2 \frac{x}{2} + C$. D. $\frac{2}{3} \cos^3 \frac{x}{2} + C$.

Câu 48. Nguyên hàm của hàm số có $f(x) = \tan^2 x + \cot^2 x$ là:

A. $2 \tan x + 2 \cot x + C$. B. $\frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{3} \cot^3 x + C$.
C. $\tan x + \cot x - 2x + C$. D. $\tan x - \cot x - 2x + C$.

Câu 49. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2$ là:

A. $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} + C$. B. $x - \cos x + C$.

C. $\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 + C.$

D. $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} + C.$

Câu 50. Tìm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

A. $\cos x + \sin x + C.$

B. $-\cos x - \sin x + C.$

C. $-\cot x - \tan x + C.$

D. $\cot x - \tan x + C.$

Câu 51. Nguyên hàm của hàm số $y = \tan^2 x$ là

A. $\tan x - x + C.$

B. $-\tan x - x + C.$

C. $-\tan x + x + C.$

D. $\tan x + x + C.$

Câu 52. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int e^x dx = xe^x + C.$

B. $\int e^x dx = e^{x+1} + C.$

C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C.$

D. $\int e^x dx = e^x + C.$

Câu 53. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x + C.$

B. $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$

C. $\frac{1}{3}e^x + C.$

D. $3e^{3x} + C.$

Câu 54. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

A. $2e^{2x-1} + C.$

B. $e^{2x-1} + C.$

C. $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

D. $\frac{1}{2}e^x + C.$

Câu 55. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x + xe^{x-1} + C.$

B. $\int f(x) dx = 1 + e^x + C.$

C. $\int f(x) dx = x + e^x + C.$

D. $\int f(x) dx = 1 + xe^{x-1} + C.$

Câu 56. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\int f(x) dx = e^{x-2} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^x + 2x + C.$

C. $\int f(x) dx = e^x + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x - 2x + C.$

Câu 57. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

A. $e^x + x^2 + C.$

B. $e^x - x^2 + C.$

C. $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C.$

D. $e^x - 2 + C.$

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C.$

B. $\int f(x) dx = e^x + C.$

C. $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C.$

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^x + C.$

B. $\int f(x) dx = x + 2e^{2x} + C.$

C. $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

D. $\int f(x) dx = x + e^{2x} + C.$

Câu 60. Hàm số $F(x) = x^2 + e^{-2x} + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2024x$.

B. $f(x) = 2x + 2e^{-2x} + 2024$.

C. $f(x) = 2x - 2e^{-2x} + 2024x$.

D. $f(x) = 2x - 2e^{-2x}$.

Câu 61. Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào sau đây?

A. $f(x) = x^2 + e^x$.

B. $f(x) = 3x^2 + e^x$.

C. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$.

D. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$.

Câu 62. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1} - 2x^2$ là

A. $\frac{e^{3x+1}}{3} - 2x^3$.

B. $\frac{e^{3x+1}}{3} - x^3$.

C. $\frac{e^{3x+1} - 2x^3}{3}$.

D. $\frac{e^{3x+1} - x^3}{3}$.

Câu 63. Kết quả $\int (x + e^{2020x}) dx$ bằng

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$.

B. $x^3 + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$.

C. $x^2 + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$.

D. $x + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$.

Câu 64. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$.

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.

C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Câu 65. Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C$

B. $2e^x - \tan x + C$

C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$

D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Câu 66. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} \left(2 + \frac{e^x}{\cos^2 x} \right)$.

A. $F(x) = -\frac{2}{e^x} + \tan x + C$.

B. $F(x) = 2e^x - \tan x + C$.

C. $F(x) = -\frac{2}{e^x} - \tan x + C$.

D. $F(x) = 2e^{-x} + \tan x + C$.

Câu 67. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Câu 68. Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$.

B. $\int 2^x dx = 2^x + C$.

C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C$.

$$\text{A. } \int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) dx = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$$

$$\text{B. } \int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$$

$$\text{C. } \int (2x - 2024)^2 dx = x - 1012 + C$$

$$\text{D. } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C$$

Câu 78. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

$$\text{A. } \int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C.$$

$$\text{B. } \int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C$$

$$\text{C. } \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x + \cos x + C.$$

$$\text{D. } \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x - \cos x + C$$

Câu 79. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

$$\text{A. } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

$$\text{B. } \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$$

$$\text{C. } \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\text{D. } \int e^x dx = e^x + C.$$

Câu 80. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

$$\text{A. } F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} x^2 + \ln|x| + C \text{ là nguyên hàm của hàm số } f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{(5x+3)^6}{30} + C \text{ là nguyên hàm của hàm số } f(x) = (5x+3)^5.$$

$$\text{C. } F(x) = \frac{3}{2} x\sqrt{x} + \frac{4}{3} x\sqrt[3]{x} + \frac{5}{4} x\sqrt[4]{x} + C \text{ là nguyên hàm của hàm số } f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}.$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2024x + C \text{ là nguyên hàm của hàm số } f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4x^3$.

a) $f'(x) = x^3 + 12x^2$.

b) Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = -12$ và $x = 0$.

c) $\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3 \right) dx = \frac{1}{4}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(0) = 2024$ thì $F(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 - 2024$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x) = x + 1$.

a) $\int f(x) dx = x^2 + x + C$, với C là hằng số.

b) $\int [(x-1) \cdot f(x)] dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$, với C là hằng số.

c) $\int \frac{f(x+1)}{x} dx = x + \ln|x| + C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 2$ thì $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$.

Câu 83. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 6x$.

a) $\int (4x^3 - 6x) dx = x^4 - 6x + C$, với C là hằng số.

b) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2$. Khi đó $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

c) $\int f(x-1) dx = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x + C$, với C là hằng số.

d) Biết $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $G(1) = 0$. Khi đó $G(0) = -2$.

Câu 84. Cho hàm số $f(x) = x^2$.

a) $\int f(x) dx = x^3 + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3) = 1$ thì $F(4) = \frac{40}{3}$.

c) $\int f(2x+1) dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$, với C là hằng số.

d) $\int [x \cdot f(x-2)] dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$, với C là hằng số.

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = 3$.

a) $\int f(x) dx = 3x + C$, với C là hằng số.

b) $\int \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{3}{x} + C$, với C là hằng số.

c) $\int [f(x) + x]^2 dx = x^3 + 3x^2 + 9x + C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $F(1) = 1$ thì $F(1) + F(2) + \dots + F(2024) = 303550$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

a) $\int f(x) dx = x^2 + x + C$, với C là hằng số.

b) $\int f^2(x) dx = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(0) = 1$ thì $F(2) = 6$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 2$ và

$$\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(2)} + \dots + \frac{1}{F(2024)} + \frac{1}{F(2025)} = \frac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản}), \text{ khi đó } a + b = 4049.$$

Câu 87. Cho hàm số $F(x) = x^2 + x - 6$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$, với C là hằng số.

b) Hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1) = 3$ thì giá trị $G(4) = 21$.

c) Hàm số $H(x-1)$ là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $H(0) = 3$ thì giá trị của biểu thức $H(2) - H(4) = -14$.

d) $f(1) + f(2) + \dots + f(2024) + f(2025) = 4104675$

Câu 88. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x + 5$.

a) $\int (x^3 - 4x + 5) dx = x^4 - 2x^2 + 5x + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 3$, khi đó $F(0) = -\frac{1}{4}$

c) $\int [f(x) + f'(x)] dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 9x + C$, với C là hằng số.

d) $\int f(x+1) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$, với C là hằng số.

Câu 89. Hàm hai số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ và

$$\int g(x) dx = x + \ln|x| + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

b) $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) + g(x)$ và thỏa mãn $F(-1) = 3$. Khi đó $F(x) = x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) + g(x)$. Biết $G(2) = 2\ln 2$ và $G(4) + G(-4) = 2$. Khi đó $G(-6) = a\ln 2 + b\ln 3 + c$, với a, b, c là các số thực. Vậy $a + b + c = -2$.

Câu 90. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{x}$.

a) $f'(x) = 1 + \frac{7}{x^2}$.

b) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + 5x + 7\ln|x| + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1) = 5$. Khi đó $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + \frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 4$ và $G(3) + G(-9) = 20$. Khi đó tìm được $G(-6) = a\ln 2 + b\ln 3 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Vậy $a + b + c = \frac{2}{3}$.

Câu 91. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3}$.

a) $f(x) = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1) = 0$. Khi đó tìm được $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 0$ và $G(-3) - G(3) = 2$. Khi đó $G(-2) = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a + b + c = 1090$.

Câu 92. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x}$.

a) $f'(x) = 3 + \frac{2}{x^2}$

b) $\int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=15$. Khi đó

$$F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 15.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2)=1$ và $G(5)+G(-5)=10$. Khi đó tìm được $G(-10)=a\ln 2+b\ln 5+c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Vậy $a+b+c=70$.

Câu 93. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

a) $f'(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$.

b) $\int f(x)dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=5$. Khi đó ta tìm được

$$F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln 3 + \frac{7}{3}.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=5$ và $G(2)+G(-4)=2025$. Khi đó tìm được $F(-8) = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b=16000$.

Câu 94. Cho hàm số $F(x) = \int \left(\sqrt[5]{x^3}\right) dx$ (với $x > 0$).

a) $F(x) = \int x^{\frac{3}{5}} dx$

b) $F(x) + C = \int \left(\sqrt[5]{x^3}\right) dx$, với C là hằng số.

c) $F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}} + C$, với C là hằng số.

d) Biết $F(1) = -\frac{3}{8}$, khi đó $F(x) = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + \frac{3}{8}$

Câu 95. Cho hàm số $F(x) = \int (2x + \sqrt{x}) dx$ (với $x > 0$).

a) $F(x) = 2\int x dx + \int \sqrt{x} dx + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

b) Nếu $G(x) = F(x) + 1$ thì $G(x) = \int (2x + \sqrt{x}) dx$

c) $F(x) = x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

d) Nếu $F(1) = \frac{2}{3}$ thì $F(4) = \frac{25}{3}$

Câu 96. Cho hàm số $f(x) = \sin x$.

a) $\int f(x) dx = -\cos x + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(\pi) = 1$. Khi đó $F(0) = -1$.

c) $\int F(x) dx = \sin x + C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x) = f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0; 4\pi]$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} .

a) $F(x) = \sin x + \cos x + C$, với C là hằng số.

b) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Khi đó, $F(x) = \sin x - \cos x$.

c) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Khi đó, Hàm số $F(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Khi đó, Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{2}$.

Câu 98. Cho $F(x) = -\int \sin x dx$ và thỏa mãn $F(0) = 1$.

a) $F(x) = \cos x$.

b) Hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên \mathbb{R} .

c) $F(\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$, $\forall \alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $F\left(\frac{\pi}{2^{2025}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2024}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right) \cdots F\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{1}{2^{2024} \sin \frac{\pi}{2^{2025}}}$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x$ và $F(x) = \int f(x) dx$.

a) $F'(x) = \sin 2x$

b) $F(x) = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$

c) $\frac{\sin x \cos x + x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

d) Biết $F(0) = 0$. Suy ra $F(\pi) = 2\pi$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = \tan^2 x$ và $F(x) = \int f(x) dx$.

a) $F'(x) = \tan^2 x$.

b) $\tan x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) $F(x) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$.

d) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(\pi) = \pi$.

Câu 101. Cho $F(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

a) $F(x) = -\cot x + C$, với C là hằng số.

b) Nếu $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ thì $F(x) = 1 - \cot x$.

c) Nếu $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ thì hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên tập xác định của $F(x)$.

d) Phương trình $F(x) = 0$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 102. Cho $F(x) = \int \tan^2 x dx$ và thỏa mãn $F(0) = 0$.

a) $F(x) = x + \tan x$.

b) Hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Phương trình $F(x) + x = 0$ có các nghiệm là $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 103. Cho hàm số $f(x) = e^x + x^e$.

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + 2024$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) $F(x) = e^x + x^e + C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$ thì $F(1) = 2e$.

d) Nếu $F(x), G(x)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1, G(1) = e$ thì ta luôn có $G(x) = F(x) + 2e$.

Câu 104. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = e^x - 2x$ trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 1$.

a) $F'(0) = 0$.

b) $F(1) = e - 1$.

c) $\int F(x) dx = e^x - \frac{x^3}{3} + C$.

d) $\int \frac{f(x)}{xe^x} dx = \ln|x| - 2e^x + C$

Câu 105. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$.

a) $f(2) = 4 + e$

b) $\int f(x) dx = x^2 + e^x + C$.

c) $F(x) = x^2 + e^x + 2024$.

d) $\int xf'(x^2) dx = x^2 + xe^{x^2} + C$

Câu 106. Cho hàm số $f(x) = e^x(2 + e^x)$ và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

a) $\int f'(x)dx = 2e^x + e^{2x} + C$.

b) $F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

c) Nếu $F(0) = 3$ thì $F(1) = \frac{e^2 + 1}{2}$.

d) Nếu $F(0) = \frac{5}{2}$ thì phương trình $F(x) = 0$ có nghiệm.

Câu 107. Cho hàm số $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1)dx$.

a) $F(x) = \int 4^x dx + \int 2^x dx + \int dx$.

b) $F(x) = \frac{2^{2x} + 2^x}{\ln 2} + x + C$.

c) Nếu $F(1) = \frac{4}{\ln 2}$ thì $F(2) = \frac{12}{\ln 2} - 1$.

d) Nếu $G(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$ thì $G(x) = F(x) + C$.

Câu 108. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

a) $F'(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

b) $F(x) = \frac{\int (6^{x+1} + 3^{2x})dx}{\int 2^{2x+3} dx}$.

c) $F(x) = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx$.

d) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(1) = \frac{29}{\ln 3 - \ln 2}$.

Câu 109. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2^{2x+1} - 1 + \cos 2x}{2^x + \sin x}$ trên $[0; +\infty)$ thỏa

mãn $F(0) = \frac{2}{\ln 2} + 2$.

a) $f(\pi) = 2^{\pi+1} - 1$.

b) $F'(0) = 2$

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là $k = 2\sqrt{2^\pi} - 2$

d) $F(-1) = \frac{1}{\ln 2} + 2\cos 1$.

Câu 110. Cho hàm số $f(x) = 2x + m$ và $G(x) = x^3 + mx^2 + 3x + m$ với $m \in \mathbb{R}$.

a) Khi $m = 3$ thì $\int f(x) dx = x^2 + 3x + C$.

b) Khi $m = 2$ thì $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) Khi $m = -1$ thì $\int (G(x) - f(x)) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

d) Gọi $F(x)$ làm một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0) = 1$. Khi đó, có 4 giá trị nguyên của tham số m thì $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) \neq 0$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Khi $f(1) = 2$ thì $f'(1) = 16$

b) Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

c) $\left[\frac{1}{f(x)} \right]' = 4x^3$

d) Khi $f(2) = -\frac{1}{25}$ thì $f(1) = \frac{1}{10}$.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + 2x + 1$.

a) Khi $f'(3) = 1$ thì $f(3) = -3$.

b) $\left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = 1$

c) $f(2) = 3$.

d) $\int \frac{f(x+1)}{x} dx = x + 2 \ln|x| + C$, với C là hằng số.

Câu 113. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$.

a) Khi $f'(3) = 1$ thì $f(1) = 8$.

b) $[xf(x)]' = 4x^3 + 3x^2$

c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $y = 16x + 20$.

d) $\int f(x-1) dx = x^4 - 2x^3 + x^2 + C$, với C là hằng số.

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$.

a) Khi $f(1) = e$ thì $f'(1) = \frac{1 - e^2}{e}$.

b) $(f(x)e^x)' = e^{-x}$

c) $f(\ln 2) = \ln 2 + 1$

d) Nguyên hàm của $f(x)e^x$ là $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$, với C là hằng số.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 115. Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Tính $F'(25)$.

Trả lời:

Câu 116. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ có dạng $F(x) = ax^4 + bx^2$. Tính $T = 4a + b$.

Trả lời:

Câu 117. Để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ thì giá trị thực của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 118. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ thỏa mãn $F(1) = -2024$. Tính $F(0)$ (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ nhất).

Trả lời:

Câu 119. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 3)^2$ thỏa $F(0) = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_2[3F(1) - 2F(2)]$.

Trả lời:

Câu 120. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tính $F(4)$.

Trả lời:

Câu 121. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Tính $F(-2e)$.

Trả lời:

Câu 122. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 123. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên \mathbb{R}

thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 124. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 125. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 126. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính

$F(\pi)$.

Trả lời:

Câu 127. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Biết

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\pi + b\sqrt{3} + c}{6}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a + b - c$.

Trả lời:

Câu 128. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 2\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Tính

$F(-\pi)$.

Trả lời:

Câu 129. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x - \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tính $F(-\pi)$.

Trả lời:

Câu 130. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời:

Câu 131. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = F(0) + F(\pi) + F(2\pi)$.

Trả lời:

Câu 132. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính

$F(0)$ (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ nhất).

Trả lời:

Câu 133. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Biết

$$F(0) + F(1) + \dots + F(2024) + F(2025) = \frac{2^a + b}{\ln 2}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân thức tối giản. Tính giá trị}$$

biểu thức $a - b$.

Trả lời:

Câu 134. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 135. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$F(0) = 2024. \text{ Biết } F(2) = e^a + b, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức } a + b.$$

Trả lời:

Câu 136. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 2x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$F(0) = 1. \text{ Biết } F(1) = \frac{e^a + e^b + c}{e}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Tính giá trị biểu thức } a + b + c.$$

Trả lời:

Câu 137. Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$F(0) = 1. \text{ Biết } F(-1) = \frac{a}{b} + \frac{c}{2 \ln 2}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức}$$

$a + b + c$.

Trả lời:

Câu 138. Cho $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 \cdot e^{2x}$. Tính tổng

$a + b + 2c$.

Trả lời:

Câu 139. Biết $F(x) = e^{2x} + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giả sử $G(x)$ là một

nguyên hàm của hàm số $f(2x) + \cos \pi x$. Khi đó $G(2) - G(0) = a \cdot e^b + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $a \cdot b \cdot c$.

Trả lời:

Câu 140. Cho hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = -(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x}. \text{ Tính tổng } a + b + c.$$

Trả lời:

Câu 141. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), với $a, b \in \mathbb{Q}$. Biết rằng

$$F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0, \text{ tính tổng } a + b.$$

Trả lời:

Câu 142. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 143. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, thỏa mãn $f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ và $f(1) = 1$.

Biết $f(2) = a\sqrt{2} + b\sqrt[3]{4} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a + b + c$.

Trả lời:

Câu 144. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}, f'(1) = 3, f(1) = 2, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Tính giá trị

$2a + b$.

Trả lời:

Câu 145. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}, f(-2) = \frac{3}{2}$ và

$f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. Biết $f(-1) + f(4) = \frac{a \ln 2 + b}{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị

biểu thức $a + b + c$.

Trả lời:

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Biết $f(\pi) = a\pi + b$, với

$a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

Trả lời:

Câu 147. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $f'(x) \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời:

Câu 148. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn: $f'(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ và

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$. Tính $f(0)$.

Trả lời:

Câu 149. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn: $f'(x) = 1 + e^{2x}$ và $f(0) = 2$. Biết

$f(\ln 2) = a + \ln b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

Trả lời:

Câu 150. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn: $f'(x) = 2^x + 3^x$ và $f(0) = \frac{1}{\ln 3}$. Biết

$f(1) = \frac{a}{b \ln 2} + \frac{3}{c \ln 3}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + b + c$.

Trả lời:**Câu 151.** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn: $f'(x) = e^{3x+2024}$ và $f(-675) = 1$. Biết

$$f(0) = \frac{e^a + b.e + c}{3e}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Tính giá trị biểu thức } a + b + c.$$

Trả lời:**Câu 152.** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn: $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$ và $f(1) = 0$. Biết

$$f(0) = \frac{a}{\ln 12}, \text{ với } a \in \mathbb{Z}. \text{ Tính giá trị } a.$$

Trả lời:**Câu 153.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = e^x + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Gọi $F(x)$ lànguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = e$. Biết $F(0) = \frac{a}{b}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản.Tính giá trị biểu thức $a + b$.**Trả lời:****Câu 154.** Cho $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot \tan x$. Biết nguyên hàm của hàm số $\frac{\tan x}{f'(x)}$ có dạng $\frac{a}{b} \tan x + C$ với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Tính giátrị biểu thức $a - 2b$.**Trả lời:**

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 155. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

Câu 156. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Tính giá trị của $f(1)$.

Câu 157. Cho hàm số $f(x) > 0$ thỏa mãn $f(\pi) = e^2$ và $f'(x) - f(x) \sin x = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng bao nhiêu?

Câu 158. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Câu 159. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x \cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

Câu 160. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(3)$.

Câu 161. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0; 1]$. Tính giá trị của $f'(2)$.

Câu 162. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1, f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Câu 163. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f'(x) + f(x) = e^{-x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(\ln 2)$ bằng bao nhiêu?

Câu 164. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 2) = 1$ và $f'(x) - f(x) = e^{2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Câu 165. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f'(x) f(x) - \sin x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f^2(\pi)$ bằng bao nhiêu?

Câu 166. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Câu 167. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Câu 168. Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} đồng thời thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$,

$f'(x) = -e^x f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(\ln 2) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, tính giá trị của $a + b$.

Câu 169. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng

tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Tính giá trị của $b - a$

Câu 170. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$\forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$.

Câu 171. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ nhất).

Câu 172. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng

$(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) - \frac{\sqrt{f(x)}}{x^3} = 0, \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân

số tối giản. Tính giá trị của $a + b$.

Câu 173. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng

$(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x + 1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Biết

$f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024) = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của

$b - a$.

Câu 174. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết

$f(1) = \frac{e}{2}(a + b \ln 2)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a - b$.

Câu 175. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn

$(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ hai).

Câu 176. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ hai).

Câu 177. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 1$,

tính $f(e^2)$

Câu 178. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $f(3)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ nhất).

Câu 179. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện

$x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Câu 180. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Biết $f^2(2) = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a - b$.

Câu 181. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và

$f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng bao nhiêu?

Câu 182. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết

$f(1) = f'(1) = 1$. Biết $f^2(2) = 2(a + b \ln 2)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + b$.

Câu 183. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = 2e^{-3x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2024$. Biết $f(\ln 2) = \frac{a}{b}$

với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + b$.

Câu 184. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f'(x) - f(x) = 2024$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết

$f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = \frac{a + b \cdot e}{c \cdot e}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + b + c$.

Câu 185. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$.

Tính $f(1)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ hai).

Câu 186. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2 \sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$.

Tính $f(4)$.

Câu 187. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của

$f(2)$ bằng bao nhiêu?

Câu 188. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x) - x^2.f'(x) = 2f^2(x)$, với

$f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

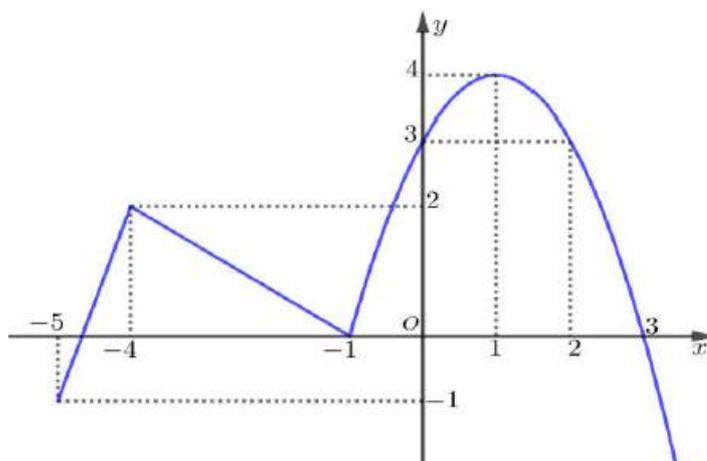
$y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M - m$.

Câu 189. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao

nhieu điểm cực trị?

Câu 190. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ

thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $6f(-5) + 3f(2)$ bằng bao nhiêu?

CHƯƠNG 4

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

BÀI 1

NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in K$.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho

$$G(x) = F(x) + C \text{ với mọi } x \in K$$

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K , kí hiệu $\int f(x)dx$ và viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Chú ý:

- Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$

Vậy, $dF(x) = F'dx = f(x)dx$

- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .
- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà khoogn chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$

2. Các tính chất của nguyên hàm

- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, với k là hằng số khác 0
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3. Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1

NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

DẠNG 1

NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Bảng nguyên hàm hàm số lũy thừa

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$
	$\int dx = x + C$
	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$

Chú ý : Dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

- $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
- $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$

3. Công thức lũy thừa:

- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Bài 1. Tìm:

a) $\int 3x^3 dx$

b) $\int 2\sqrt{x^5} dx$

c) $\int 2\sqrt[4]{x} dx$

d) $\int x\sqrt{x^3} dx$

e) $\int 3x^2\sqrt[3]{x^4} dx$

f) $\int 2x^5\sqrt[4]{x^3} dx$

Lời giải

a) $\int 4x^3 dx = 4 \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = x^3 + C$

b) $\int 2\sqrt{x^5} dx = 2 \int x^{\frac{5}{2}} dx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{4}{7} x^3 \sqrt{x} + C$

c) $\int 2\sqrt[4]{x} dx = 2 \int x^{\frac{1}{4}} dx = 2 \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = 2 \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = \frac{8}{5} x^{\frac{5}{4}} + C$

d) $\int x\sqrt{x^3} dx = \int x \cdot x^{\frac{3}{2}} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C$

e) $\int 3x^2\sqrt[3]{x^4} dx = 3 \int x^2 \cdot x^{\frac{4}{3}} dx = 3 \int x^{\frac{10}{3}} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1} + C = \frac{6}{13} x^4 \sqrt[3]{x} + C$

f) $\int 2x^5\sqrt[4]{x^3} dx = 2 \int x^5 \cdot x^{\frac{3}{4}} dx = 2 \int x^{\frac{23}{4}} dx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{23}{4}+1}}{\frac{23}{4}+1} + C = \frac{8}{27} x^6 \sqrt[4]{x^3} + C$

Bài 2. Tìm:

a) $\int \frac{2024}{x^5} dx$

b) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

c) $\int \frac{2025}{x^4\sqrt{x^3}} dx$

d) $\int \frac{2\sqrt{x}}{x^2} dx$

e) $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

f) $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

Lời giải

a) $\int \frac{2024}{x^5} dx = 2024 \int x^{-5} dx = 2024 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{506}{x^4} + C$

b) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2 \int x^{-\frac{2}{3}} dx = 2 \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = 6\sqrt[3]{x} + C$

c) $\int \frac{2025}{x^4\sqrt{x^3}} dx = 2025 \int \frac{1}{x^{\frac{11}{2}}} dx = 2025 \int x^{-\frac{11}{2}} dx = 2025 \cdot \frac{x^{-\frac{11}{2}+1}}{-\frac{11}{2}+1} + C = -2700 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + C$

$$d) \int \frac{2\sqrt{x}}{x^2} dx = 2 \int x^{-\frac{3}{2}} dx = 2 \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + C$$

$$e) \int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3 \int x^{\frac{1}{3}} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{9}{4} x \sqrt[3]{x} + C$$

$$f) \int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}} dx = \int x^{\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + C = \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + C$$

Bài 3. Tìm:

$$a) \int (x^2 - 2025) dx$$

$$b) \int \left(x^4 + \frac{2}{x^3} - 2024 \right) dx$$

$$c) \int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 1 \right) dx$$

$$d) \int \left(\frac{2024}{x} - \frac{2025}{x^2} + 2026 \right) dx$$

$$e) \int \left(3x^2 - \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$$

$$f) \int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2024 \right) dx$$

Lời giải

$$a) \int (x^2 - 2025) dx = \frac{x^3}{3} - 2025x + C$$

$$b) \int \left(x^4 + \frac{2}{x^3} - 2024 \right) dx = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{x^2} - 2024x + C$$

$$c) \int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 1 \right) dx = \frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| - x + C$$

$$d) \int \left(\frac{2024}{x} - \frac{2025}{x^2} + 2026 \right) dx = 2024 \ln|x| + \frac{2025}{x} + 2026x + C$$

$$e) \int \left(3x^2 - \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 3 \ln|x| - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$$

f)

$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2024 \right) dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} + 2024 \right) dx = \frac{6}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 2024x + C = 2x\sqrt{x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2024x + C$$

Bài 4. Tìm:

$$a) \int 2x(1+3x^3) dx$$

$$b) \int \left(x - \frac{1}{x^2} \right)^2 dx$$

$$c) \int (x-3)^3 dx$$

$$d) \int x^2(x-2)^2 dx$$

$$e) \int x(1-x)^3 dx$$

$$f) \int (x+1)(3-x)^2 dx$$

Lời giải

$$a) \int 2x(1+3x^3) dx = \int (2x+6x^4) dx = x^2 + \frac{6x^5}{5} + C$$

$$b) \int \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \frac{x^3}{3} - 2\ln|x| - \frac{1}{3x^3} + C$$

$$c) \int (x-3)^3 dx = \int (x^3 - 9x^2 + 27x + 27) dx = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + \frac{27}{2}x^2 + 27x + C$$

$$d) \int x^2(x-2)^2 dx = \int x^2(x^2 - 4x + 4) dx = \int (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 + C$$

$$e) \int x(1-x)^3 dx = \int x(1-3x+3x^2-x^3) dx = \int (x-3x^2+3x^3-x^4) dx = \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{x^5}{5} + C$$

$$f) \int (x+1)(3-x)^2 dx = \int (x+1)(9-6x+x^2) dx = \int (x^3-5x^2+3x+9) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + C$$

$$d) \text{ Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$$

$$e) \text{ Ta có } \int \frac{2}{4x-3} dx = \int \frac{1}{2x-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} \ln\left|2x-\frac{3}{2}\right| + C$$

Bài 5. Tìm:

$$a) \int \frac{2x^4-3}{x^2} dx$$

$$b) \int \frac{x^2-3x+2}{x} dx$$

$$c) \int \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x}} dx$$

$$d) \int \frac{(3x-2)^2}{x} dx$$

$$e) \int \left(\frac{3x+1}{x}\right)^2 dx$$

$$f) \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

Lời giải

$$a) \int \frac{2x^4-3}{x^2} dx = \int \left(2x^2 - \frac{3}{x^2}\right) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$$

$$b) \int \frac{x^2-3x+2}{x} dx = \int \left(x-3+\frac{2}{x}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\ln|x| + C$$

$$c) \int \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$$

$$d) \int \frac{(3x-2)^2}{x} dx = \int \left(9x-12+\frac{4}{x}\right) dx = \frac{9}{2}x^2 - 12x + 4\ln|x| + C$$

$$e) \int \left(\frac{3x+1}{x}\right)^2 dx = \int \left(3+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(9+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right) dx = 9x + 6\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

$$f) \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \left(x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C$$

DẠNG 2**NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC****1. Bảng nguyên hàm hàm số lượng giác**

Nguyên hàm hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

Chú ý: Cần thuộc các công thức lượng giác sau:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
- $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$
- $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$
- $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$
- $\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x \Rightarrow \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \sin^2 x$
- $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$
- $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

Bài 1. Tìm:

a) $\int (\sin x + 3 \cos x) dx$

b) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

c) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

d) $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

e) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

f) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$

Lời giải

a) $\int (\sin x + 3 \cos x) dx = \int \sin x dx + 3 \int \cos x dx = -\cos x + 3 \sin x + C.$

$$b) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C.$$

$$c) \int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx = \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

$$d) \int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$e) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan x - \cot x + C.$$

$$f) \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (1 + \sin x) dx = \int 1 dx + \int \sin x dx$$

$$= x - \cos x + C$$

Bài 2. Tìm:

$$a) \int (4x + 3 \cos x) dx$$

$$b) \int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$c) \int \left(2025x - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$$

$$d) \int \left(\frac{1}{3} x^2 - 2x + \frac{1}{2} \tan^2 x \right) dx$$

$$e) \int x \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} \right) dx$$

$$f) \int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2} \right) dx$$

Lời giải

$$a) \int (4x + 3 \cos x) dx = \frac{4x^2}{2} + 3 \sin x + C = 2x^2 + 3 \sin x + C.$$

$$b) \int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x^2 - \cot x + C.$$

$$c) \int \left(2024x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (2025x + 1 - \cos x) dx = \frac{2025}{2} x^2 + x - \sin x + C$$

$$d) \int \left(\frac{1}{3} x^2 - 2x + \frac{1}{2} \tan^2 x \right) dx = \int \left(\frac{1}{3} x^2 - 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \frac{1}{9} x^3 - x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan x + C$$

$$e) \int x \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} \right) dx = \int \left(x - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + C$$

$$f) \int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2} \right) dx = \int (x^2 + x - \tan^2 x) dx = \int \left(x^2 + x + 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - \tan x + C$$

Bài 3. Tìm:

$$a) \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$b) \int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

$$c) \int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx$$

$$d) \int x^2 \left(\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right) dx$$

Lời giải

$$a) \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 x} dx = 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -4 \cot x + C$$

$$b) \int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x} \right) dx = \int \left(2024x - \frac{1}{x^2} + \sin x \right) dx = 1012x^2 + \frac{1}{x} - \cos x + C$$

$$c) \int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx = \int x^3 \left(\frac{1 + \sin x}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right) dx = \int \left(1 + \sin x - 2x^4 + \frac{1}{x^{2021}} \right) dx$$

$$= x - \cos x - \frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{2020 x^{2020}} + C$$

$$d) \int x^2 \left(\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right) dx = \int x^2 \left(\frac{1}{\frac{1}{4} x^2 \sin^2 x} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 x} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx$$

$$= 4 \tan x + 3 \ln|x| + \frac{4}{x} + C$$

DẠNG 3
NGUYÊN HÀM HÀM MŨ

Nguyên hàm hàm số mũ

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Chú ý : Dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

$$\bullet \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\bullet \int a^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha \ln a} a^{\alpha x + \beta} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Bài 1. Tìm:

a) $\int 2025^x dx$

b) $\int e^{-x} dx$

c) $\int \frac{1}{3^x} dx$

d) $\int \frac{1}{e^x} dx$

e) $\int \frac{1}{e^{3x}} dx$

f) $\int \frac{1}{5^{2x+1}} dx$

Lời giải

a) $\int 2025^x dx = \frac{2025^x}{\ln 2025} + C$

c) $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$

b) $\int \frac{1}{3^x} dx = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C.$

d) $\int \frac{1}{e^x} dx = \int \left(\frac{1}{e}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{\ln \frac{1}{e}} + C = -\frac{1}{e^x} + C.$

e) $\int \frac{1}{e^{3x}} dx = \int (e^{-3})^x dx = \frac{e^{-3x}}{\ln e^{-3}} + C = -\frac{1}{3e^{3x}} + C$

f) $\int \frac{1}{5^{2x+1}} dx = \int 5 \cdot 25^x dx = 5 \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{5}{2} \cdot \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{5^{2x+1}}{2 \ln 25} + C$

Bài 2. Tìm:

a) $\int (2024^x + 1) dx$

b) $\int (2e^x - 3^x) dx$

c) $\int \left(2.5^x - \frac{1}{3}.7^x \right) dx$

d) $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

e) $\int 8^x \cdot 2^{1-2x} dx$

f) $\int (9^x - 2 + 9^{-x}) dx$

Lời giải

a) $\int (2024^x + 1) dx = \frac{2024^x}{\ln 2024} + x + C$

b) $\int (2e^x - 3^x) dx = 2e^x - \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

c) $\int \left(2.5^x - \frac{1}{3}.7^x \right) dx = \int 2.5^x dx - \int \frac{1}{3}.7^x dx = 2 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{7^x}{3 \ln 7} + C.$

d) $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{x} + C$

e) $\int 8^x \cdot 2^{1-2x} dx = \int 2^{3x} \cdot 2^{1-2x} dx = \int 2 \cdot 2^x dx = 2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + C$

f) $\int (9^x - 2 + 9^{-x}) dx = \frac{9^x}{\ln 9} - 2x - \frac{1}{9^x \ln 9} + C = \frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \cdot 9^x \ln 3} - 2x + C$

Bài 3. Tìm:

a) $\int 2^{3x} \cdot 3^{2x} dx$

b) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$

c) $\int \frac{e^{2x} - e^x + 2024}{e^x} dx$

d) $\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x} \right)^2 dx$

e) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$

f) $\int e^x \left(2024 - \frac{2025e^{-x}}{x^5} \right) dx$

Lời giải

a) $\int 2^{3x} \cdot 3^{2x} dx = \int 8^x \cdot 9^x dx = \int 72^x dx = \frac{72^x}{\ln 72} + C.$

b) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int 2 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^x dx - \int \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x dx = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{5} \right)^x}{\ln \frac{1}{5}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C = \frac{-2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5 \cdot 2^x \ln 2} + C.$

c) $\int \frac{e^{2x} - e^x + 2024}{e^x} dx = \int \left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x} \right) dx = e^x - x - \frac{2024}{e^x} + C.$

d) $\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x} \right)^2 dx = \int \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{e^{2x}} dx = \int \left(e^{2x} - 2 + \frac{1}{e^{2x}} \right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C.$

e) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.$

$$e) \int e^x \left(2024 - \frac{2025e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2024e^x - \frac{2025}{x^5} \right) dx = 2024e^x + \frac{506,25}{x^4} + C.$$

Bài 4. Tìm:

$$a) \int (2^x + 3^x) dx$$

$$b) \int e^{3x+2024} dx$$

$$c) \int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx$$

$$d) \int (3^x + 5^x)^2 dx$$

$$e) \int (e^x + e^{-x})^2 dx$$

$$f) \int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx$$

Lời giải

$$a) \int (2^x + 3^x) dx = \int 2^x dx + \int 3^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$b) \int e^{3x+2024} dx = \int e^{2024} \cdot (e^3)^x dx = e^{2024} \cdot \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{1}{3} e^{3x+2024} + C$$

$$c) \int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \int 3^2 \cdot 3^x \cdot 2 \cdot 4^x dx = 18 \int 12^x dx = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C = 18 \frac{12^x}{2 \ln 2 + \ln 3} + C$$

$$d) \int (3^x + 5^x)^2 dx = \int (9^x + 2 \cdot 15^x + 25^x) dx = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{2 \cdot 15^x}{\ln 15} + \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{2 \cdot 15^x}{\ln 5 + \ln 3} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$$

$$e) \int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2e^{2x}} + 2x + C$$

$$f) \int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx = \int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{1 - \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x (e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1} dx = \int e^x (e^x + 1) dx = \int (e^{2x} + e^x) dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + e^x + C$$

DẠNG 4**NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN**

Bài 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm $F(x)$, biết:

- a) $f(x) = 2^x$ và $F(e) = 1$.
 b) $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 2025$.
 c) $f(x) = e^x(e^x - 1)$ và $F(\ln 2) = 2024$.
 d) $f(x) = e^{3x} \cdot 3^x$ và $F(1) = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Mà $F(e) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\ln 2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{2}{\ln 2}$ nên $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 1 - \frac{2}{\ln 2}$.

b) Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C$.

Mà $F(0) = 2025 \Leftrightarrow \frac{e^{2 \cdot 0}}{2} + C = 2025 \Leftrightarrow C = \frac{4049}{2}$ nên $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{4049}{2}$.

c) Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int e^x(e^x - 1) dx = \int (e^{2x} - e^x) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C$.

Mà $F(\ln 2) = 2024 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2 \ln 2} - e^{\ln 2} + C = 2024 \Leftrightarrow C = 2024$ nên $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 2024$.

d) Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int e^{3x} \cdot 3^x dx = \int (3e^3)^x dx = \frac{(3e^3)^x}{\ln(3e^3)} + C = \frac{3^x e^{3x}}{3 + \ln 3} + C$.

Mà $F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3e^3}{3 + \ln 3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3e^3}{3 + \ln 3}$ nên $F(x) = \frac{3^x e^{3x}}{3 + \ln 3} - \frac{3e^3}{3 + \ln 3} = \frac{3^x e^{3x} - 3e^3}{3 + \ln 3}$.

Bài 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của:

- a) $f(x) = x^3 - 4x + 2024$. Biết $F(1) = 0$, tính $F(0)$.
 b) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$. Biết $F(-2) = 0$, tính $F(2)$.
 c) $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}$. Biết $F(e) = 1$, tính $F(2)$.
 d) $f(x) = \frac{1 + 2x^2}{x}$. Biết $F(-1) = 3$, tính $F(1)$.

Lời giải

a) Ta có $F(x) = \int (x^3 - 4x + 2024) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2024x + C$.

Mà $F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - 2 + 2024 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{8089}{4}$ nên $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2024x - \frac{8089}{4}$.

Do đó: $F(0) = -\frac{8089}{4}$

b) Ta có $F(x) = \int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = \int \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx = x^2 + \frac{1}{x} + C$.

Mà $F(-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{7}{2}$ nên $F(x) = x^2 + \frac{1}{x} - \frac{7}{2}$.

Do đó: $F(2) = 2^2 + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = 1$

c) Ta có $F(x) = \int \frac{3 - 5x^2}{x} dx = \int \left(\frac{3}{x} - 5x\right) dx = 3\ln|x| - \frac{5}{2}x^2 + C$.

Mà $F(e) = 1 \Leftrightarrow 3\ln|e| - \frac{5}{2}e^2 + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{5}{2}e^2 - 2$ nên $F(x) = 3\ln|x| - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}e^2 - 2$.

Do đó: $F(1) = \frac{5}{2}e^2 - \frac{9}{2}$

d) Ta có $F(x) = \int \frac{1 + 2x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 2x\right) dx = \ln|x| + x^2 + C$.

Mà $F(-1) = 3 \Leftrightarrow \ln|-1| + (-1)^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$ nên $F(x) = \ln|x| + x^2 + 2$.

Do đó: $F(1) = \ln|1| + 1^2 + 2 = 3$

Bài 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của:

a) $f(x) = 3 - 5\cos x$. Biết $F(\pi) = 2$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) $f(x) = \sin x + 1$. Biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) $f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2}$. Biết $F(2\pi) = 0$, tính $F(0)$.

d) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}$. Biết $F(\pi) = 1$, tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

a) Ta có $F(x) = \int (3 - 5\cos x) dx = 3x - 5\sin x + C$.

Mà $F(\pi) = 2 \Leftrightarrow 3\pi - 5\sin \pi + C = 2 \Leftrightarrow C = 2 - 3\pi$ nên $F(x) = 3x - 5\sin x + 2 - 3\pi$.

Do đó: $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} - 3$

b) Ta có $F(x) = \int (\sin x + 1) dx = -\cos x + x + C$.

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow -\cos \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \text{ nên } F(x) = -\cos x + x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Do đó: } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

c) Ta có

$$F(x) = \int \left(2024 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx = \int \left(2024 - \frac{1 - \cos x}{2}\right) dx = \int \left(\frac{4047}{2} - \frac{1}{2} \cos x\right) dx = \frac{4047x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C.$$

$$\text{Mà } F(2\pi) = 0 \Leftrightarrow \frac{4047 \cdot 2\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\pi + C = 0 \Leftrightarrow C = -4047\pi \text{ nên } F(x) = \frac{4047x}{2} - \frac{1}{2} \sin x - 4047\pi.$$

$$\text{Do đó: } F(0) = -4047\pi$$

$$\text{d) Ta có } F(x) = \int \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \sin x + C.$$

$$\text{Mà } F(\pi) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \pi - \frac{1}{8} \sin \pi + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{1}{8} \pi \text{ nên } F(x) = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \sin x + 1 - \frac{1}{8} \pi.$$

$$\text{Do đó: } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{8} - \frac{16}{8} \pi$$

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$F(0) = 2. \text{ Tính } F(-1) + 2F(2).$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int (2x-1) dx = x^2 - x + C_1; \int (3x^2-2) dx = x^3 - 2x + C_2$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ mà ta có } F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2.$$

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\text{Suy ra: } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\text{Khi đó, ta có } F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } F(-1) + 2F(2) = 9.$$

Bài 5. Cho $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số

$$g(x) = \frac{\tan x}{f'(x)}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } F'(x) = -2 \sin 2x = -4 \sin x \cos x$$

Vì $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ nên:

$$F'(x) = f(x) \cdot \tan x \Leftrightarrow -4 \sin x \cos x = f(x) \cdot \tan x \Leftrightarrow f(x) = -4 \cos^2 x$$

Suy ra $f'(x) = 8 \sin x \cos x$

$$\text{Vậy } \int g(x) dx = \int \frac{\tan x}{f'(x)} dx = \int \frac{\tan x}{8 \sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{8 \cos^2 x} dx = \frac{1}{8} \tan x + C$$

Bài 6. Tìm giá trị của tham số m biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1 \right) dx = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) dx + \int (m - 1) dx = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) d(x+1) + \int (m - 1) dx \\ &= \sqrt{x+1} + (m - 1)x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} F(0) = 0 \\ F(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + 1 = 0 \\ C + 3m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Vậy $m = 3$ khi đó $F(x) = \sqrt{x+1} + 2x - 1$.

Bài 7. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn:

a) $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Tìm hàm $f(x)$.

b) $f'(x) = 2e^{2x} + 1$ và $f(0) = 2$. Tìm hàm $f(x)$.

Lời giải

a) Ta có $f(x) = \int (2 - 5 \sin x) dx = 2x + 5 \cos x + C$.

Mà $f(0) = 10 \Rightarrow C = 5$ nên $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

b) Ta có: $f(x) = \int (2e^{2x} + 1) dx = e^{2x} + x + C$.

Suy ra $f(x) = e^{2x} + x + C$.

Mà: $f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy: $f(x) = e^{2x} + x + 1$.

Bài 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 6x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(2) = 0$. Tính $F(4)$.

Lời giải

Ta có: $\int f'(x) dx = \int (6x^2 - 2) dx = 2x^3 - 2x + C$.

Suy ra $f(x) = 2x^3 - 2x + C$.

Theo bài ra ta có $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 2x + 1$.

Khi đó: $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x^3 - 2x + 1) dx = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x + C'$.

Mà $F(2) = 0 \Rightarrow 6 + C' = 0 \Rightarrow C' = -6$ suy ra $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x - 6 \Rightarrow F(4) = 110$.

Vậy $F(4) = 110$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{3x^3 + 1}{x}$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $f(-3) + f(3)$

biết $f(1) = 2, f(-1) = 3$.

Lời giải

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3x^3 + 1}{x} dx = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx = x^3 + \ln|x| + C = \begin{cases} x^3 + \ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ x^3 + \ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1; f(-1) = -1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 4.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} x^3 + \ln x + 1 & \text{khi } x > 0 \\ x^3 + \ln(-x) + 4 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ nên } f(-3) + f(3) = 2 \ln 3 + 5.$$

Bài 10. Tìm hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 .

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3x^2 + 2x - m + 1) dx = x^3 + x^2 + (1 - m)x + C$$

$$\text{Theo đề bài, ta có } \begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1 - m) + C + 12 = 1 \\ C = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ C = -5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$$

DẠNG 5**NGUYÊN HÀM CỦA HÀM ẨN****I. Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp**

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)}\right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}\right]'$
- $n \cdot f'(x) \cdot f(x) = [f(x)^n]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$
- $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$
- $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$

II. Các dạng hàm ẩn thường gặp**1. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) \cdot f(x) = p(x)$** **Phương pháp giải:**

$$f'(x) \cdot f(x) = p(x) \Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]' = p(x) \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int p(x) dx$$

2. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x) \cdot f(x)$ **Phương pháp giải:**

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = \int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

3. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x) \cdot [f(x)]^n$

Phương pháp giải:

$$f'(x) = p(x) \cdot [f(x)]^n$$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = p(x)$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = \int p(x) dx$$

4. Hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$ **Phương pháp giải:**

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

5. Hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)**Ý tưởng giải:**

- Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$ và

lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x).h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x).h(x) dx}{u(x)}$$

- Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$

Hai dạng đặc biệt của (1)

• $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

• $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $f'(x) \cdot f(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \sqrt{2024}$. Tính $f^2(1)$.

Lời giải

Ta có:

$$f'(x) \cdot f(x) = x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]' = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int x^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^3}{3} + C.$$

Do $f(0) = \sqrt{2024}$ nên: $\frac{2024}{2} = C \Rightarrow C = 1012$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^3}{3} + 1012$$

Vậy $\frac{f^2(1)}{2} = \frac{1}{3} + 1012 \Rightarrow f^2(1) = \frac{6074}{3}$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 2) = 0$ và $f'(x) = \frac{e^x}{f(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $f(x) \neq 0$. Tính $f^2(0)$.

Lời giải

Ta có:

$$f'(x) = \frac{e^x}{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) f(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]' = e^x$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = e^x + C.$$

Do $f(\ln 2) = 0$ nên: $0 = e^{\ln 2} + C \Rightarrow C = -2$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = e^x - 2$$

Vậy $\frac{f^2(0)}{2} = 1 - 2 \Rightarrow f^2(0) = -2$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(e) = 1$ và $xf'(x) = [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(e^3)$.

Lời giải

$$xf'(x) = [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\ln|x| + C$$

Mà $f(e) = 1 \Rightarrow 1 = -\ln|e| + C \Rightarrow C = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\ln|x| + 2$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{f(e^3)} = -\ln|e^3| + 2 \Rightarrow f(e^3) = -1$$

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x \cdot f(x)$. Tính $f(1)$.

Lời giải

Ta có với $\forall x \in (0; +\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x+1 > 0$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Do đó

$$[f'(x)]^2 = xf(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{xf(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

$$\text{Vì } f(3) = \frac{4}{9} \text{ nên } C = \frac{2-3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{2-3\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{2-3\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\text{suy ra } f(1) = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Bài 5. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Ta có :

$$f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C}$$

Mà $f(1) = 1$ nên $1 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} + C} \Rightarrow C = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Suy ra $f(4) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{4} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết

$f(1) = f'(1) = 1$. Tính giá trị $f^2(4)$.

Lời giải

Ta có: $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]; x > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot [f'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x) \cdot f''(x)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Do đó: $\int [f(x) \cdot f'(x)]' \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \frac{1}{x} + C$.

Vì $f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + C \Leftrightarrow C = -1$.

Nên $\int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx \Leftrightarrow \int f(x) \cdot d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + C$$

Vì $f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + C \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $\frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(4) = 10 + 4 \ln 2$.

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $(x+1)f'(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2024$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Ta có

$$(x+1)f'(x) + f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)f'(x) + (x+1)'f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)]' = x$$

$$\Rightarrow (x+1)f(x) = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow (x+1)f(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Vì $f(0) = 2024$ Nên $(0+1)f(0) = \frac{1}{2}.0 + C \Rightarrow C = 2024$

$$\Rightarrow (x+1)f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2024$$

$$\Rightarrow (2+1)f(2) = \frac{1}{2}.2^2 + 2024$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{2026}{3}$$

PHẦN B**TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

A. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ nên phương án A, B, D đúng.

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + C$.

B. $x^2 + 6x + C$.

C. $2x^2 + C$.

D. $2x^2 + 6x + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\int (2x + 6)dx = x^2 + 6x + C$$

Câu 3. $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C$.

B. $\frac{1}{3}x^3 + C$.

C. $x^3 + C$.

D. $3x^3 + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

A. $2x^2 + 4x + C$.

B. $x^2 + 4x + C$.

C. $x^2 + C$.

D. $2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int (2x + 4)dx = 2 \int xdx + 4 \int dx = x^2 + 4x + C.$$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C$

C. $6x + C$

D. $x^3 + x + C$

Lời giải

Chọn D.

$$\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = 2x + C.$

B. $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$

D. $\int f(x) dx = x^3 + 4x + C.$

Lời giải

Ta có: $f(x) = x^2 + 4 \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2$ là

A. $\int f(x) dx = 2x + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - 2x + C.$

C. $\int f(x) dx = x^2 - 2x + C.$

D. $\int f(x) dx = x^3 - 2x + C.$

Lời giải**Chọn B.**

Ta có $\int f(x) dx = \int (x^2 - 2) dx = \int x^2 dx - 2 \int dx = \frac{x^3}{3} - 2x + C.$

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

B. $3x^2 + 1 + C$

C. $x^3 + x + C$

D. $x^4 + x^2 + C$

Lời giải**Chọn A.**

$$\int (x^3 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 2024$ là

A. $x^4 - 2024x + C.$

B. $4x^3 - 2024x + C.$

C. $12x^3 + C.$

D. $x^4 + C.$

Lời giải**Chọn A.**

Ta có $\int (4x^3 - 2024) dx = x^4 - 2024x + C.$

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$

B. $x^4 + x^2 + C$

C. $x^5 + x^3 + C.$

D. $4x^3 + 2x + C$

Lời giải**Chọn A.**

$$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{R} ?

- A.** $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$. **B.** $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$. **C.** $F_3(x) = x^3 - x^2 + 1$. **D.** $F_4(x) = 3x^3 + x^2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $F_1'(x) = 3x^2 + 2x$; $F_2'(x) = x^2 + x$; $F_3'(x) = 3x^2 - 2x$; $F_4'(x) = 9x^2 + 2x$.

Suy ra: $F_1'(x) = 3x^2 + 2x = f(x)$.

Vậy $F_1(x) = x^3 + x^2 - 4$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 + 2x$ trên \mathbb{R} .

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ là

- A.** $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$. **B.** $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.
C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$. **D.** $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.

Lời giải

Chọn C.

Sử dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ta được:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2024x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + C.$$

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 8x^3 - 6x$ là

- A.** $F(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^2 + C$. **B.** $F(x) = x^5 - x^4 - x^2 + C$.
C. $F(x) = x^5 - 4x^4 - 2x^2 + C$. **D.** $F(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x) = \int (5x^4 - 8x^3 - 6x) dx = x^5 - 2x^4 - 3x^2 + C$.

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^2 + C$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$?

A. $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{x}$.

B. $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{x}$.

C. $F_3(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$.

D. $F_4(x) = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x}$.

Lời giải**Chọn D.**

Ta có: $F_1'(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $F_2'(x) = x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $F_3'(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $F_4'(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Suy ra: $F_4'(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$.

Vậy $F_4(x) = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ trên $(0; +\infty)$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$?

A. $F_1(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$.

B. $F_2(x) = 3x + \ln x$.

C. $F_3(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$.

D. $F_4(x) = 3x - \ln x$.

Lời giải**Chọn B.**

Ta có: $F_1'(x) = 3 + \frac{2}{x^3}$; $F_2'(x) = 3 + \frac{1}{x}$; $F_3'(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$; $F_4'(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

Suy ra: $F_2'(x) = 3 + \frac{1}{x} = f(x)$.

Vậy $F_2(x) = 3x + \ln x$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$.

A. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.

B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.

C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$.

D. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.

Lời giải**Chọn B.**

Ta có: $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.

Câu 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x^{2024}$ là

A. $\sqrt{x} + \frac{x^{2023}}{673} + C$.

B. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^{2024}}{2025} + C$.

C. $2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2025}}{2025} + C.$

D. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 6054x^{2025} + C.$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \int (3\sqrt{x} + x^{2024}) dx = \int (3x^{\frac{1}{2}} + x^{2024}) dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{2025}}{2025} + C = 2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2025}}{2025} + C.$$

Câu 18. Biết $F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x.$

B. $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}.$

C. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}.$

D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x + x + C.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0; +\infty)$ nên $F'(x) = f(x)$ với

$$\text{mọi } x \in (0; +\infty) \text{ mà } F'(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x} + 1\right)' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Câu 19. Biết $\int \left(\frac{1}{2x} + x^5\right) dx = a \ln|x| + bx^6 + C$ với $(a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R})$. Tính $a^2 + b$?

A. $\frac{5}{12}.$

B. 9.

C. $\frac{7}{13}.$

D. $\frac{7}{6}.$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int \left(\frac{1}{2x} + x^5\right) dx = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{6}x^6 + C \text{ nên } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{6} \Rightarrow a^2 + b = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

Câu 20. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$?

A. $\frac{x^{2023}}{2023} + 1.$

B. $\frac{x^{2023}}{2023}.$

C. $y = 2022x^{2021}.$

D. $\frac{x^{2023}}{2023} - 1.$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \int x^{2022} dx = \frac{x^{2023}}{2023} + C, C \text{ là hằng số.}$$

Nên các phương án A, B, D đều là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$.

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$ là

A. $2x + 3 + C$.

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

C. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

D. $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Lời giải**Chọn D.**

Ta có $\int f(x)dx = \int (x+1)(x+2)dx = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Câu 22. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C$.

B. $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C$.

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$.

D. $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C$.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có: $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$\Rightarrow F(x) = \int (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$$

Câu 23. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = x(x+1)^5$ là

A. $\frac{(x+1)^7}{7} + \frac{(x+1)^6}{6} + C$.

B. $6(x+1)^5 + 5(x+1)^4 + C$.

C. $6(x+1)^5 - 5(x+1)^4 + C$.

D. $\frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$.

Lời giải**Chọn D.**

Ta có $y = x(x+1)^5 = (x+1-1)(x+1)^5 = (x+1)^6 - (x+1)^5$

Kiểm tra $F(x) = \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$ ta có $F'(x) = \frac{7(x+1)^6}{7} - \frac{6(x+1)^5}{6} = (x+1)^6 - (x+1)^5$

Câu 24. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

A. $(5x+3)^6 + C$.

B. $(5x+3)^4 + C$.

C. $\frac{(5x+3)^6}{30} + C$.

D. $\frac{(5x+3)^4}{30} + C$.

Lời giải**Chọn C.**

$$f(x) = (5x+3)^5 \Rightarrow \int f(x)dx = \int (5x+3)^5 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+3)^6}{6} + C = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$$

Câu 25. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 26. Trên khoảng $(0; +\infty)$, cho hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$.

B. $\int f(x)dx = \int \sqrt{x^3} dx$.

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$.

Câu 27. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\sqrt{2024}}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2024}-1} x^{\sqrt{2024}-1} + C$.

B. $\int f(x)dx = x^{\sqrt{2024}+1} + C$.

C. $\int f(x)dx = \sqrt{2024} x^{\sqrt{2024}-1} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2024}+1} x^{\sqrt{2024}+1} + C$.

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản suy ra $\int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{5}+1} x^{\sqrt{5}+1} + C$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4+2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx$.

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{x^4+2}{x^2} dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 29. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5 + 2x^4}{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + 5\ln x^2 + C$.

D. $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f(x) dx = \int \left(2x^2 + \frac{5}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$.

Câu 30. Tính $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$.

A. $\frac{4}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$.

B. $\frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$.

C. $\frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x} + C$.

D. $\frac{4}{15} x^{15} \sqrt{x} + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int \sqrt{x \sqrt{x} x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{2}}} dx = \int \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{2}}} dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx = \frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1} + C = \frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$$

Câu 31. Tính $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

A. $x^5 \sqrt{x} - 2x^{17} \sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$.

B. $\frac{4}{5} x^5 \sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{17} \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.

C. $x^5 \sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{17} \sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$.

D. $\frac{4}{5} x^5 \sqrt{x} - 2x^{17} \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 1}{x^{\frac{1}{4}}} dx = \int \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} - 2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}} \right) dx = \frac{4}{5} x^5 \sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{17} \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$$

Câu 32. Khẳng định nào đây sai?

A. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

B. $\int \cos x dx = -\sin x + C$.

C. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

D. $\int \cos x dx = -\tan x + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int \cos x \, dx = -\sin x + C$

Câu 33. Cho $\int f(x) \, dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $f(x) = -\sin x$. **B.** $f(x) = -\cos x$. **C.** $f(x) = \sin x$. **D.** $f(x) = \cos x$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$. Suy ra $f(x) = \sin x$.

Câu 34. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

- A.** $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải**Chọn D.**

Có $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$ suy ra $F(x) = \cot x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $\int f(x) \, dx = x - \cos x + C$. **B.** $\int f(x) \, dx = x + \sin x + C$.
C. $\int f(x) \, dx = x + \cos x + C$. **D.** $\int f(x) \, dx = \cos x + C$.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có $\int f(x) \, dx = \int (1 + \sin x) \, dx = \int 1 \, dx + \int \sin x \, dx = x - \cos x + C$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $\int f(x) \, dx = x + \tan x + C$. **B.** $\int f(x) \, dx = x + \cot x + C$.
C. $\int f(x) \, dx = x - \tan x + C$. **D.** $\int f(x) \, dx = x - \cot x + C$.

Lời giải**Chọn C.**

$$\int f(x) \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) \, dx = x - \tan x + C.$$

Câu 37. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$ là:

- A.** $3\sin x - 4\cos x + C$. **B.** $-3\sin x + 4\cos x + C$.

C. $3\sin x + 4\cos x + C$.

D. $-3\sin x + 4\cos x + C$.

Lời giải

Chọn C.

$$\int f(x)dx = \int (3\cos x - 4\sin x)dx = 3\int \cos x dx - 4\int \sin x dx = 3\sin x - 4\cos x + C.$$

Câu 38. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x}$ là:

A. $-2\cos x - 3\cot x + C$.

B. $2\cos x - 3\tan x + C$.

C. $-2\cos x + 3\cot x + C$.

D. $2\cos x - 3\cot x + C$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int \left(2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx = 2\int \sin x dx + 3\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -2\cos x - 3\cot x + C.$$

Câu 39. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C$.

B. $-\sin x + 3x^2 + C$.

C. $\sin x + 6x^2 + C$.

D. $-\sin x + C$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int (\cos x + 6x)dx = \sin x + 3x^2 + C.$$

Câu 40. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x + 3x$.

A. $\int (2\sin x + 3x)dx = -2\cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$

B. $\int (2\sin x + 3x)dx = 2\cos x + 3x^2 + C$

C. $\int (2\sin x + 3x)dx = \sin^2 x + \frac{3}{2}x + C$

D. $\int (2\sin x + 3x)dx = \sin 2x + \frac{3}{2}x^2 + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int (2\sin x + 3x)dx = -2\cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$$

Câu 41. Tính $\int (x - \sin x)dx$.

A. $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

B. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$.

C. $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$.

D. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \int (x - \sin x)dx = \frac{x^2}{2} + \cos x + C.$$

Câu 42. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$.

B. $6x + \cos x + C$.

C. $x^3 - \cos x + C$.

D. $6x - \cos x + C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C$.

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

- A. $\ln x - \cos x + C$. B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. C. $\ln|x| + \cos x + C$. D. $\ln|x| - \cos x + C$.

Lời giải**Chọn D.**

Ta có $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx = \ln|x| - \cos x + C$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}$. Chọn khẳng định đúng:

- A. $\int f(x) dx = \ln|x| + \tan x + C$. B. $\int f(x) dx = \ln x + \tan x + C$.
C. $\int f(x) dx = \ln x + \tan|x| + C$. D. $\int f(x) dx = \ln|x| + \tan x$.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có: $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \ln|x| + \tan x + C$

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x + C$. B. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos x + C$
C. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sin x + C$. D. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \cos x + C$

Lời giải**Chọn D.**

$\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$

Câu 46. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

- A. $F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$
C. $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + C$ D. $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x) + C$

Lời giải**Chọn B.**

Ta có: $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow F(x) = \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$

Câu 47. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ là:

- A. $4\cos \frac{x}{2} + C$. B. $x + \sin x + C$. C. $2\sin^2 \frac{x}{2} + C$. D. $\frac{2}{3}\cos^3 \frac{x}{2} + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int 2\cos^2 \frac{x}{2} dx = \int (1 + \cos x) dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + C.$$

Câu 48. Nguyên hàm của hàm số có $f(x) = \tan^2 x + \cot^2 x$ là:

- A. $2\tan x + 2\cot x + C$. B. $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{3}\cot^3 x + C$.
C. $\tan x + \cot x - 2x + C$. D. $\tan x - \cot x - 2x + C$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int f(x) dx &= \int \tan^2 x dx + \int \cot^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx + \int (1 + \cot^2 x - 1) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - 2 \int dx \\ &= \tan x - \cot x - 2x + C. \end{aligned}$$

Câu 49. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2$ là:

- A. $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} + C$. B. $x - \cos x + C$.
C. $\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 + C$. D. $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int f(x) dx &= \int \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C. \end{aligned}$$

Câu 50. Tìm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

- A. $\cos x + \sin x + C$. B. $-\cos x - \sin x + C$.
C. $-\cot x - \tan x + C$. D. $\cot x - \tan x + C$.

Lời giải

Chọn C.

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cot x - \tan x + C.$$

Câu 51. Nguyên hàm của hàm số $y = \tan^2 x$ là

- A.** $\tan x - x + C.$ **B.** $-\tan x - x + C.$ **C.** $-\tan x + x + C.$ **D.** $\tan x + x + C.$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

Câu 52. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $\int e^x dx = xe^x + C.$ **B.** $\int e^x dx = e^{x+1} + C.$ **C.** $\int e^x dx = -e^{x+1} + C.$ **D.** $\int e^x dx = e^x + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có } \int e^x dx = e^x + C.$$

Câu 53. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- A.** $3e^x + C.$ **B.** $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$ **C.** $\frac{1}{3}e^x + C.$ **D.** $3e^{3x} + C.$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Cách 1: } \int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$\text{Cách 2: Trắc nghiệm } \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C, \text{ với } C \text{ là hằng số bất kì.}$$

Câu 54. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- A.** $2e^{2x-1} + C.$ **B.** $e^{2x-1} + C.$ **C.** $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$ **D.** $\frac{1}{2}e^x + C.$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Cách 1: } \int e^{2x-1} dx = \int e^{-1} \cdot (e^2)^x dx = e^{-1} \cdot \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x-1}}{2} + C$$

$$\text{Cách 2: } \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C.$$

Câu 55. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $\int f(x) dx = x + xe^{x-1} + C.$ **B.** $\int f(x) dx = 1 + e^x + C.$
C. $\int f(x) dx = x + e^x + C.$ **D.** $\int f(x) dx = 1 + xe^{x-1} + C.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int f(x)dx = \int (1 + e^x)dx = x + e^x + C$.

Câu 56. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\int f(x)dx = e^{x-2} + C$.

B. $\int f(x)dx = e^x + 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = e^x + C$.

D. $\int f(x)dx = e^x - 2x + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int f(x)dx = \int (e^x + 2)dx = e^x + 2x + C$

Câu 57. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

A. $e^x + x^2 + C$.

B. $e^x - x^2 + C$.

C. $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C$.

D. $e^x - 2 + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int (e^x - 2x)dx = e^x - x^2 + C$

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = e^x + x^2 + C$.

B. $\int f(x)dx = e^x + C$.

C. $\int f(x)dx = e^x - x^2 + C$.

D. $\int f(x)dx = e^x + 2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x)dx = \int (e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C$.

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$.

B. $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C$.

C. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

D. $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int (1 + e^{2x})dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Câu 60. Hàm số $F(x) = x^2 + e^{-2x} + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2024x$.

B. $f(x) = 2x + 2e^{-2x} + 2024$.

C. $f(x) = 2x - 2e^{-2x} + 2024x$.

D. $f(x) = 2x - 2e^{-2x}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $F(x) = x^2 + e^{-2x} + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + e^{-2x} + 2024)' = 2x - 2e^{-2x}$.

Câu 61. Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào sau đây?

- A. $f(x) = x^2 + e^x$. B. $f(x) = 3x^2 + e^x$. C. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$. D. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

Suy ra hàm số cần tìm là $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + e^x\right)' = x^2 + e^x$.

Câu 62. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1} - 2x^2$ là

- A. $\frac{e^{3x+1}}{3} - 2x^3$. B. $\frac{e^{3x+1}}{3} - x^3$. C. $\frac{e^{3x+1} - 2x^3}{3}$. D. $\frac{e^{3x+1} - x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

$\int f(x)dx = \int (e^{3x+1} - 2x^2)dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+1} d(3x+1) - \frac{2}{3} x^3 = \frac{e^{3x+1} - 2x^3}{3}$.

Câu 63. Kết quả $\int (x + e^{2020x}) dx$ bằng

- A. $\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$. B. $x^3 + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$. C. $x^2 + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$. D. $x + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int (x + e^{2020x}) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{2020x}}{2020} + C$.

Câu 64. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

- A. $\int f(x)dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$. B. $\int f(x)dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.
C. $\int f(x)dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$. D. $\int f(x)dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Lời giải

Chọn C.

$\int f(x)dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$

Câu 65. Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

- A. $2e^x + \tan x + C$ B. $2e^x - \tan x + C$ C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$ D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) = 2e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int y dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2e^x + \tan x + C.$$

Câu 66. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} \left(2 + \frac{e^x}{\cos^2 x} \right)$.

- A. $F(x) = -\frac{2}{e^x} + \tan x + C.$ B. $F(x) = 2e^x - \tan x + C.$
 C. $F(x) = -\frac{2}{e^x} - \tan x + C.$ D. $F(x) = 2e^{-x} + \tan x + C.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x) = \int e^{-x} \left(2 + \frac{e^x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(2e^{-x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -2e^{-x} + \tan x + C = -\frac{2}{e^x} + \tan x + C.$

Câu 67. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x.$

- A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$ B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$ C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$ D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$

Câu 68. Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$ B. $\int 2^x dx = 2^x + C.$ C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$ D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn C.

Do theo bảng nguyên hàm: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

Câu 69. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2025^x$ là

- A. $F(x) = x \cdot 2025^{x-1}.$ B. $F(x) = 2025 \cdot 2024^x.$

C. $F(x) = \frac{2025^x}{\ln 2025}$.

D. $F(x) = 2025^x \cdot \ln 2025$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int f(x)dx = \int 2025^x dx = \frac{2025^x}{\ln 2025} + C$.

Câu 70. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

B. $-3^{-x} + C$

C. $3^{-x} \ln 3 + C$

D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\int f(x)dx = \int 3^{-x} dx = \int (3^{-1})^x d(x) = \frac{3^{-x}}{\ln 3^{-1}} + C = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Cách 2: $\int f(x)dx = \int 3^{-x} dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Câu 71. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x-1}$ là

A. $\frac{1}{2\ln 5} \cdot 5^{2x-1} + C$.

B. $2 \cdot 5^{2x-1} \cdot \ln 5 + C$.

C. $5^{2x-1} \cdot \ln 5 + C$.

D. $\frac{1}{2} \cdot 5^{2x-1} \cdot \ln 5 + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int f(x)dx = \int 5^{2x-1} dx = \frac{1}{5} \int 25^x dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{1}{2\ln 5} \cdot 5^{2x-1} + C$.

Câu 72. Cho hàm số $f(x) = 2^x + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2^{x-3} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 3x + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 3 + C$.

D. $\int f(x)dx = 2^x \ln 2 + 3x + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int f(x)dx = \int (2^x + 3)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 3x + C$.

Câu 73. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 2x$.

A. $\int (3^x + 2x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$

B. $\int (3^x + 2x)dx = 2^x \cdot \ln 2 + x^2 + C$

C. $\int (3^x + 2x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$

D. $\int (3^x + 2x)dx = 2^x \cdot \ln 2 + x + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int (3^x + 2x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$$

Câu 74. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

Lời giải**Chọn C.**

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

Câu 75. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \cos 2x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{\sin 2x}{2} + C.$

B. $4^x \ln 4 + \frac{\sin 2x}{2} + C.$

C. $4^x \ln 4 - \frac{\sin 2x}{2} + C.$

D. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{\sin 2x}{2} + C.$

Lời giải**Chọn D.**

Ta có $\int (4^x + \cos 2x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{\sin 2x}{2} + C.$

Câu 76. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x(1 + 2^{-x} \cdot \sin x)$ là

A. $\frac{2^{x+1}}{x+1} - \cos x + C$

B. $\frac{2^x}{\ln 2} + \sin x + C.$

C. $\frac{2^x}{\ln 2} - \cos x + C.$

D. $\frac{2^{x-1}}{x+1} + \cos x + C.$

Lời giải**Chọn C.**

Ta có: $\int f(x) dx = \int 2^x(1 + 2^{-x} \cdot \sin x) dx = \int (2^x + \sin x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \cos x + C$

Câu 77. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) dx = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$

B. $\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$

C. $\int (2x - 2024)^2 dx = x - 1012 + C$

D. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C$

Lời giải**Chọn C.**

$\int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) dx = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$

$$\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023} \int x^{-2024} dx = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$$

$$\int (2x - 2024)^2 dx = \frac{(2x - 2024)^3}{3} + C$$

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C$$

Câu 78. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C$.

B. $\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$

C. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x + \cos x + C$.

D. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x - \cos x + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int (2 + \cot^2 x) dx = \int (1 + 1 + \cot^2 x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = x - \cot x + C$$

$$\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C$$

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C$$

Câu 79. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

B. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Lời giải

Chọn A.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$
 .

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$
 .

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
 .

$$\int e^x dx = e^x + C$$
 .

Câu 80. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$.

B. $F(x) = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

C. $F(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt[3]{x} + \frac{5}{4}x\sqrt[4]{x} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.

D. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2024x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x}$.

Lời giải

Chọn C.

A. $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (x^3 - 3x + \frac{1}{x})dx = \int x^3 dx - 3 \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$$

B. $f(x) = (5x+3)^5 \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (5x+3)^5 dx = \int (5x+3)^5 \frac{d(5x+3)}{5} = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$

C. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} \Rightarrow F(x) = \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}})dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$$

D. $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{x^3 - 2024x}{x} dx = \int (x^2 - 2024) dx = \frac{1}{3}x^3 - 2024x + C$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4x^3$.

a) $f'(x) = x^3 + 12x^2$.

b) Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = -12$ và $x = 0$.

c) $\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3\right) dx = \frac{1}{4}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(0) = 2024$ thì $F(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 - 2024$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $f'(x) = x^3 + 12x^2$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -12 \end{cases}$.

c) $\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3\right) dx = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C$

d) Ta có $F(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C$

$F(0) = 2024 \Leftrightarrow C = 2024 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + 2024$

Câu 82. Cho hàm số $f(x) = x + 1$.

a) $\int f(x) dx = x^2 + x + C$, với C là hằng số.

b) $\int [(x-1) \cdot f(x)] dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$, với C là hằng số.

c) $\int \frac{f(x+1)}{x} dx = x + \ln|x| + C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 2$ thì $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

$$a) \int f(x)dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$b) \int [(x-1) \cdot f(x)]dx = \int (x-1) \cdot (x+1)dx = \int (x^2 - 1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C.$$

$$c) \int \frac{f(x+1)}{x}dx = \int \frac{x+2}{x}dx = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx = x + \ln|x| + C.$$

$$d) \text{Ta có } F(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$F(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2} \text{ vậy } F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}.$$

Câu 83. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 6x$.

$$a) \int (4x^3 - 6x)dx = x^4 - 6x + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

b) Biết $F(x)$ **là một nguyên hàm của** $f(x)$ **và** $F(0) = 2$. **Khi đó** $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

$$c) \int f(x-1)dx = x^4 - 4x^3 + 3x^3 + 2x + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

d) Biết $G(x)$ **là một nguyên hàm của** $f(x-1)$ **và** $G(1) = 0$. **Khi đó** $G(0) = -2$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

$$a) \int (4x^3 - 6x)dx = \int 4x^3dx - \int 6xdx = x^4 - 3x^2 + C.$$

$$b) F(x) = x^4 - 3x^2 + C$$

$$\text{Theo giả thiết } F(0) = 2 \text{ suy ra } C = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

$$c) \int f(x-1)dx = \int [4(x-1)^3 - 6(x-1)]dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 6x + 2)dx = x^4 - 4x^3 + 3x^3 + 2x + C$$

$$d) G(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^3 + 2x + C$$

$$\text{Theo giả thiết } G(1) = 0 \text{ suy ra } C = -2 \Rightarrow G(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^3 + 2x - 2 \Rightarrow G(0) = -2$$

Câu 84. Cho hàm số $f(x) = x^2$.

$$a) \int f(x)dx = x^3 + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

b) Gọi $F(x)$ **là một nguyên hàm của** $f(x)$. **Biết** $F(3) = 1$ **thì** $F(4) = \frac{40}{3}$.

$$c) \int f(2x+1)dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

$$d) \int [x \cdot f(x-2)]dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $\int f(x)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

b) Ta có $F(3) = 1 \Leftrightarrow \frac{3^3}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = -8$ vậy $F(x) = \frac{x^3}{3} - 8$ nên $F(4) = \frac{40}{3}$.

c) $\int f(2x+1)dx = \int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2 + 4x + 1)dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$.

d) $\int [x.f(x-2)] dx = \int x.(x-2)^2 dx = \int x.(x^2 - 4x + 4)dx$
 $= \int (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = 3$.

a) $\int f(x)dx = 3x + C$, với C là hằng số.

b) $\int \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{3}{x} + C$, với C là hằng số.

c) $\int [f(x) + x]^2 dx = x^3 + 3x^2 + 9x + C$, với C là hằng số.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $F(1) = 1$ thì $F(1) + F(2) + \dots + F(2024) = 303550$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

a) $\int f(x)dx = 3x + C$

b) $\int \frac{f(x)}{x^2} dx = \int \frac{3}{x^2} dx = -\frac{3}{x} + C$

c) $\int [f(x) + x]^2 dx = \int (3+x)^2 dx = \int (x^2 + 6x + 9)dx = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + C$

d) Ta có: $F(x) = 3x + C$

$F(1) = 1 \Leftrightarrow 3 + C = 1 \Leftrightarrow C = -2$ vậy $F(x) = 3x - 2$.

Ta có: $F(x) = 3x - 2$ nên $F(1) = 1; F(2) = 4; F(3) = 7; \dots; F(2024) = 6070$ là cấp số cộng với $u_1 = 1; d = 3$.

Khi đó: $F(1) + F(2) + \dots + F(2024) = \frac{(1+6070).100}{2} = 303550$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

a) $\int f(x)dx = x^2 + x + C$, với C là hằng số.

b) $\int f^2(x)dx = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(0) = 1$ thì $F(2) = 6$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 2$ và

$$\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(2)} + \dots + \frac{1}{F(2024)} + \frac{1}{F(2025)} = \frac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản}), \text{ khi đó } a + b = 4049.$$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = x^2 + x + C.$

b) $\int f^2(x)dx = \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)dx = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$

c) Ta có $F(x) = x^2 + x + C$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \text{ vậy } F(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow F(2) = 7.$$

d) Ta có $F(x) = x^2 + x + C$

$$F(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0 \text{ vậy } F(x) = x^2 + x.$$

Ta có: $F(x) = x^2 + x = x(x+1)$ nên ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(2)} + \dots + \frac{1}{F(2024)} + \frac{1}{F(2025)} \\ &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2024.2025} + \frac{1}{2025.2026} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} = 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026} \end{aligned}$$

Vậy $a = 2025; b = 2026$ nên $a + b = 4051$.

Câu 87. Cho hàm số $F(x) = x^2 + x - 6$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$, với C là hằng số.

b) Hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1) = 3$ thì giá trị $G(4) = 21$.

c) Hàm số $H(x-1)$ là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $H(0)=3$ thì giá trị của biểu thức

$$H(2) - H(4) = -14.$$

d) $f(1) + f(2) + \dots + f(2024) + f(2025) = 4104675$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có $f(x) = F'(x) = 2x + 1$

b) Ta có $G(x) = x^2 + x + C$ với $G(1) = 3 \Leftrightarrow 1^2 + 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 1$

Khi đó $G(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow G(4) = 21.$

c) $H(x-1) = (x-1)^2 + (x-1) + C = x^2 - 2x + 1 + x - 1 + C = x^2 - x + C$

với $x=1$ ta có: $H(0) = 3 \Leftrightarrow C = 3$ nên $H(x-1) = x^2 - x + 3$

$$H(2) = H(3-1) = 9$$

$$H(4) = H(5-1) = 23$$

Khi đó: $H(2) - H(4) = 9 - 23 = -14.$

d) Ta có $f(x) = 2x + 1$

$f(x) = 2x + 1$ là cấp số cộng với $u_1 = f(1) = 3; d = 2; u_{2025} = f(2025) = 4051$ nên

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{(3 + 4051) \cdot 2025}{2} = 4104675$$

Câu 88. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x + 5.$

a) $\int (x^3 - 4x + 5) dx = x^4 - 2x^2 + 5x + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 3$, khi đó $F(0) = -\frac{1}{4}$

c) $\int [f(x) + f'(x)] dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 9x + C$, với C là hằng số.

d) $\int f(x+1) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$, với C là hằng số.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) $\int (x^3 - 4x + 5) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C.$

b) Ta có $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C$

$$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{13}{4} + C = 3 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{4} \text{ vậy } F(0) = -\frac{1}{4}.$$

c) $\int [f(x) + f'(x)] dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + x^3 - 4x + C = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + x + C.$

d) $\int f(x+1) dx = \frac{(x+1)^4}{4} - 2(x+1)^2 + 5(x+1) + C = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C.$

Câu 89. Hàm hai số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn: $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ và

$$\int g(x) dx = x + \ln|x| + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$

b) $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) + g(x)$ và thỏa mãn $F(-1) = 3$. Khi đó

$$F(x) = x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) + g(x)$. Biết $G(2) = 2\ln 2$ và $G(4) + G(-4) = 2$. Khi đó $G(-6) = a\ln 2 + b\ln 3 + c$, với a, b, c là các số thực. Vậy $a + b + c = -2$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}.$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

b) $\int g(x) dx = x + \ln|x| + C \Rightarrow g(x) = 1 + \frac{1}{x}.$

c) Ta có $f(x) + g(x) = x + 1 + \frac{2}{x}.$

$$\text{Nên } \int [f(x) + g(x)] dx = \int \left(x + 1 + \frac{2}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x| + C.$$

Do $F(-1) = 3 \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}$ nên $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x| + \frac{7}{2}.$

$$d) \text{ Ta có } \int [f(x) + g(x)] dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x| + C = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + 2\ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + 2\ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} G(2) = 2\ln 2 \\ G(4) + G(-4) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ 8 + 4 + 4\ln 2 - 4 + 8 - 4 + 4\ln 2 + C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = -8\ln 2 - 10 \end{cases}$$

Nên $G(-6) = 18 - 6 + 2\ln 6 - 8\ln 2 - 10 = 2 - 6\ln 2 + 2\ln 3 = a\ln 2 + b\ln 3 + c$.

Vậy $a + b + c = -6 + 2 + 2 = -2$.

Câu 90. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{x}$.

a) $f'(x) = 1 + \frac{7}{x^2}$.

b) $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 5x + 7\ln|x| + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1) = 5$. Khi đó

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + \frac{1}{2}.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 4$ và $G(3) + G(-9) = 20$. Khi đó tìm

được $G(-6) = a\ln 2 + b\ln 3 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Vậy $a + b + c = \frac{2}{3}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{x} = x + 5 - \frac{7}{x}$.

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{7}{x^2}$$

b) $\int f(x) dx = \int \left(x + 5 - \frac{7}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + C$.

c) Ta có $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + C$.

Do $F(1) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 5 + C = 5 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$ nên $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| - \frac{1}{2}$.

$$d) \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + C = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} G(1) = 4 \\ G(3) + G(-9) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} + 15 - 7 \ln 3 - \frac{3}{2} + \frac{81}{2} - 45 - 14 \ln 3 + C_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{2} \\ C_2 = 21 \ln 3 + \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } G(-6) = \frac{36}{2} - 30 - 7 \ln 6 + 21 \ln 3 + \frac{13}{2} = -7 \ln 2 + 14 \ln 3 - \frac{11}{2}.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = -7 + 14 - \frac{11}{2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 91. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3}$.

a) $f(x) = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x) dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1) = 0$. Khi đó tìm được

$$F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 0$ và $G(-3) - G(3) = 2$. Khi đó

$$G(-2) = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}, \text{ với } a, b, c \text{ là các số nguyên dương và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản. Vậy } a + b + c = 1090.$$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) $f(x) = \frac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3} = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x) dx = \int \left(3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$.

c) Ta có $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

Do $F(-1) = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$ nên $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}$.

d) $\int f(x) dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C = \begin{cases} x^3 - 2x + \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ x^3 - 2x + \ln(-x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} G(1) = 0 \\ G(-3) - G(3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ -27 + 6 + \ln 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + C_2 - 27 + 6 - \ln 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{5}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = \frac{275}{6} \end{cases}$$

Nên $G(-2) = -8 + 4 + \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{275}{6} = \frac{1013}{24} + \frac{1}{\log_2 e} = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}$.

Vậy $a + b + c = 1013 + 24 + 2 = 1039$.

Câu 92. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x}$.

a) $f'(x) = 3 + \frac{2}{x^2}$

b) $\int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$, với C là hằng số.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 15$. Khi đó

$$F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 15.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2) = 1$ và $G(5) + G(-5) = 10$. Khi đó tìm được $G(-10) = a \ln 2 + b \ln 5 + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Vậy $a + b + c = 70$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x} = \frac{3x^2 + x - 2}{x} = 3x + 1 - \frac{2}{x}$.

$$\Rightarrow f'(x) = 3 + \frac{2}{x^2}$$

b) $\int f(x)dx = \int \left(3x + 1 - \frac{2}{x} \right) dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$.

c) Ta có $F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$.

Do $F(3) = 15 \Leftrightarrow \frac{27}{2} + 3 - 2\ln 3 + C = 15 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 - \frac{3}{2}$.

Suy ra $F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 2\ln 3 - \frac{3}{2}$.

d) Ta có: $\int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$$\text{Do } \begin{cases} G(2)=1 \\ G(5)+G(-5)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+2+C_1=1 \\ \frac{75}{2}+5-2\ln 5+C_1+\frac{75}{2}-5-2\ln 5+C_2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=-7 \\ C_2=4\ln 5-65 \end{cases}.$$

$$\text{Nên } G(-10)=150-10-2\ln 10+4\ln 5-65=75-2\ln 2+2\ln 5=a\ln 2+b\ln 5+c.$$

$$\text{Vậy } a+b+c=-2+2+75=75.$$

Câu 93. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

$$\text{a) } f'(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}.$$

$$\text{b) } \int f(x)dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=5$. Khi đó ta tìm được

$$F(x)=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+2\ln 3+\frac{7}{3}.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=5$ và $G(2)+G(-4)=2025$. Khi đó tìm được $F(-8)=\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b=16000$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

$$\text{a) } f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}.$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$$

$$\text{b) } \int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{c) Ta có: } F(x)=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C.$$

$$\text{Do } F(3)=5 \Leftrightarrow 3-2\ln 3-\frac{1}{3}+C=5 \Leftrightarrow C=2\ln 3+\frac{7}{3}.$$

$$\text{Vậy } F(x)=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+2\ln 3+\frac{7}{3}.$$

$$\text{d) Ta có: } \int f(x)dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C = \begin{cases} x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x > 0. \\ x - 2\ln(-x) - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(1) = 5 \\ G(2) + G(-4) = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ 2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2} + 5 - 4 - 4\ln 2 + \frac{1}{4} + C_2 = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 6\ln 2 + \frac{8089}{4} \end{cases}$$

Nên $G(-8) = -8 - 6\ln 2 + \frac{1}{8} + 6\ln 2 + \frac{8089}{4} = \frac{16115}{8} \Rightarrow a = 16115; b = 8.$

Vậy $a + b = 16115 + 8 = 16123.$

Câu 94. Cho hàm số $F(x) = \int (\sqrt[5]{x^3}) dx$ (với $x > 0$).

a) $F(x) = \int x^{\frac{3}{5}} dx$

b) $F(x) + C = \int (\sqrt[5]{x^3}) dx$, với C là hằng số.

c) $F(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{2}{5}} + C$, với C là hằng số.

d) Biết $F(1) = -\frac{3}{8}$, khi đó $F(x) = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + \frac{3}{8}$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $F(x) = \int (\sqrt[5]{x^3}) dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx$

b) Nếu $F(x), G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x) + C$

c) $F(x) = \int (\sqrt[5]{x^3}) dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C$

d) $F(x) = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C, F(1) = \frac{5}{8} + C = -\frac{3}{8} \Rightarrow C = -1 \Rightarrow F(x) = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} - 1.$

Câu 95. Cho hàm số $F(x) = \int (2x + \sqrt{x}) dx$ (với $x > 0$).

a) $F(x) = 2 \int x dx + \int \sqrt{x} dx + C$ với $C \in \mathbb{R}.$

b) Nếu $G(x) = F(x) + 1$ thì $G(x) = \int (2x + \sqrt{x}) dx$

c) $F(x) = x^2 + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C.$

d) Nếu $F(1) = \frac{2}{3}$ thì $F(4) = \frac{25}{3}$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $F(x) = 2 \int x dx + \int \sqrt{x} dx + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

b) $F(x), G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x) + C$

nên $G(x) = F(x) + 1$ thì $G(x) = \int (2x + \sqrt{x}) dx$

c) $F(x) = \int (2x + \sqrt{x}) dx = \int \left(2x + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = x^2 + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$

d) Ta có $F(x) = x^2 + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$

Mà $F(1) = 1 + \frac{2}{3} + C = \frac{2}{3} \Rightarrow C = -1 \Rightarrow F(x) = x^2 + \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 1 \Rightarrow F(4) = \frac{25}{3}$

Câu 96. Cho hàm số $f(x) = \sin x$.

a) $\int f(x) dx = -\cos x + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(\pi) = 1$. Khi đó $F(0) = -1$.

c) $\int F(x) dx = \sin x + C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x) = f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0; 4\pi]$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) $\int f(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$.

b) Từ giả thiết, ta được $-\cos \pi + C = 1 \Leftrightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$

Suy ra $F(x) = -\cos x \Rightarrow F(0) = -1$.

c) $\int F(x) dx = -\int \cos x dx = -\sin x + C_1$.

d) Ta có $F(x) = f(x) \Leftrightarrow -\cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta xét $0 \leq \frac{-\pi}{4} + k\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{17}{4}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $[0; 4\pi]$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} .

a) $F(x) = \sin x + \cos x + C$, với C là hằng số.

b) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Khi đó, $F(x) = \sin x - \cos x$.

c) Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Khi đó, Hàm số $F(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) **Biết $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Khi đó, Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{2}$.**

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x + C$.

b) Từ giả thiết, ta được $\sin 0 - \cos 0 + C = -1 \Leftrightarrow C = 0$ nên $F(x) = \sin x - \cos x$.

c) Ta có $F'(x) = \sin x + \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) $F(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

mà $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow \text{Min}F(x) = -\sqrt{2}$

Câu 98. Cho $F(x) = -\int \sin x dx$ và thỏa mãn $F(0) = 1$.

a) $F(x) = \cos x$.

b) Hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên \mathbb{R} .

c) $F(\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}, \forall \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $F\left(\frac{\pi}{2^{2025}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2024}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right) \cdots F\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{1}{2^{2024} \sin \frac{\pi}{2^{2025}}}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

a) Ta có $F(x) = -\int \sin x dx = \cos x + C$. Mà $F(0) = 1$ nên ta có $C = 0 \Rightarrow F(x) = \cos x$.

b) Ta có $F(-x) = \cos(-x) = \cos x = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên $F(x)$ là hàm chẵn trên \mathbb{R} .

c) Ta có $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ hay $F(\alpha) = \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$.

d) Ta có $F\left(\frac{\pi}{2^{2025}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2024}}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right) \cdots F\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cdot F\left(\frac{\pi}{2^2}\right)$
 $= \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2024}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{2025}}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2023}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{2024}}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2022}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{2023}}} \cdots \frac{\sin \frac{\pi}{2^2}}{2 \sin \frac{\pi}{2^3}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2^2}} = \frac{1}{2^{2024} \sin \frac{\pi}{2^{2025}}}$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x$ và $F(x) = \int f(x) dx$.

a) $F'(x) = \sin 2x$

b) $F(x) = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$

c) $\frac{\sin x \cos x + x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

d) Biết $F(0) = 0$. Suy ra $F(\pi) = 2\pi$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) $F'(x) = f(x) = \cos^2 x$.

b) Do $f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

c) $\left(\frac{\sin x \cos x + x}{2}\right)' = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{2} = \frac{2\cos^2 x}{2} = \cos^2 x$.

d) Do $\frac{\sin x \cos x + x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F(x) = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + C$

Ta lại có $F(0) = C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin x \cos x + x}{2} \Rightarrow F(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = \tan^2 x$ và $F(x) = \int f(x) dx$.

a) $F'(x) = \tan^2 x$.

b) $\tan x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) $F(x) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$.

d) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(\pi) = \pi$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Vì $F'(x) = f(x) = \tan^2 x$

b) Ta có $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

c) Do $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ nên $F(x) = \int f(x)dx = \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$.

d) Ta có $F(x) = \tan x - x + C$.

Khi đó $F(0) = C = 0 \Rightarrow F(x) = \tan x - x \Rightarrow F(\pi) = -\pi$.

Câu 101. Cho $F(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

a) $F(x) = -\cot x + C$, với C là hằng số.

b) Nếu $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ thì $F(x) = 1 - \cot x$.

c) Nếu $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ thì hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên tập xác định của $F(x)$.

d) Phương trình $F(x) = 0$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có $F(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$.

b) Từ giả thiết, ta được $C - \cot \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow C = 1$ nên $F(x) = 1 - \cot x$.

c) Ta có $F(x) = 1 - \cot x$.

Ta thấy $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $F\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 2$ nên $F\left(\frac{-\pi}{4}\right) \neq \pm F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm chẵn mà cũng không là hàm lẻ trên tập xác định của $F(x)$.

d) Ta có $F(x) = -\cot x + C$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \cot x = 0 \Leftrightarrow \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 102. Cho $F(x) = \int \tan^2 x dx$ và thỏa mãn $F(0) = 0$.

a) $F(x) = x + \tan x$.

b) Hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Phương trình $F(x) + x = 0$ có các nghiệm là $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có $F(x) = \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$.

Mặt khác $F(0) = 0$ nên ta có $C = 0$ nên $F(x) = -x + \tan x$.

b) $F(x) = -x + \tan x$

Ta thấy rằng $F(-x) = x - \tan x = -F(x)$ nên hàm số đã cho là hàm lẻ trên mỗi khoảng xác định của $F(x)$.

c) $F(x) = -x + \tan x \Rightarrow F'(x) = -1 + \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

Ta có $F'(x) = \tan^2 x \geq 0$ với mọi x thuộc tập xác định của $F(x)$ nên hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Ta có $F(x) + x = 0 \Leftrightarrow -x + \tan x + x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 103. Cho hàm số $f(x) = e^x + x^e$.

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + 2024$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) $F(x) = e^x + x^e + C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$ thì $F(1) = 2e$.

d) Nếu $F(x), G(x)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1, G(1) = e$ thì ta luôn có $G(x) = F(x) + 2e$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Đúng: Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có:

$$(F(x) + 2024)' = (F(x))' + (2024)' = F'(x) = f(x).$$

Do đó $F(x) + 2024$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) Ta có: $\int f(x) dx = \int (e^x + x^e) dx = e^x + ex^{e-1} + C$.

Suy ra $F(x) = e^x + ex^{e-1} + C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Ta có: $F(x) = \int (e^x + x^e) dx = e^x + ex^{e-1} + C$ và $F(0) = 1 \Rightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = e^x + ex^{e-1} \Rightarrow F(1) = e + e = 2e$.

d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$ thì $F(x) = e^x + ex^{e-1}$ (1)

Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1) = e$ thì

$$\begin{cases} G(x) = e^x + ex^{e-1} + C \\ G(1) = e \end{cases} \Rightarrow 2e + C = e \Leftrightarrow C = -e \Rightarrow G(x) = e^x + ex^{e-1} - e \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $G(x) = F(x) - e$.

Câu 104. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = e^x - 2x$ trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 1$.

a) $F'(0) = 0$.

b) $F(1) = e - 1$.

c) $\int F(x) dx = e^x - \frac{x^3}{3} + C$.

d) $\int \frac{f(x)}{xe^x} dx = \ln|x| - 2e^x + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) Ta có $F'(x) = f(x) = e^x - 2x \Rightarrow F'(0) = e^0 - 2 \cdot 0 = 1$

b) $\int f(x) dx = \int (e^x - 2x) dx = e^x - x^2 + C \Rightarrow F(x) = e^x - x^2 + C$.

$F(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 - 0^2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = e^x - x^2 \Rightarrow F(1) = e - 1$

c) $\int F(x) dx = \int (e^x - x^2) dx = e^x - \frac{x^3}{3} + C$

d) $\int \frac{f(x)}{xe^x} dx = \int \frac{e^x - 2x}{x \cdot e^x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2 \cdot e^{-x} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - 2 \int (e^{-1})^x dx$

$= \ln|x| - 2(e^{-1})^x \ln e^{-1} + C = \ln|x| + 2e^{-x} + C$

Câu 105. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$.

a) $f(2) = 4 + e$

b) $\int f(x) dx = x^2 + e^x + C$.

c) $F(x) = x^2 + e^x + 2024$.

d) $\int xf'(x^2) dx = x^2 + xe^{x^2} + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) $f(2) = 4 + e^2$.

b) $\int f(x)dx = \int (2x + e^x)dx = x^2 + e^x + C$.

c) Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2025$.

Suy ra $\begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2025 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2025 \Leftrightarrow C = 2024$.

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2024$.

d) Ta có $\int xf'(x^2)dx = \int x(2 + e^{x^2})dx = x^2 + \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Câu 106. Cho hàm số $f(x) = e^x(2 + e^x)$ và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

a) $\int f'(x)dx = 2e^x + e^{2x} + C$.

b) $F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

c) Nếu $F(0) = 3$ thì $F(1) = \frac{e^2 + 1}{2}$.

d) Nếu $F(0) = \frac{5}{2}$ thì phương trình $F(x) = 0$ có nghiệm.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $\int f'(x)dx = f(x) + C = 2e^x + e^{2x} + C$.

b) $F(x) = \int f(x)dx = \int e^x(2 + e^x)dx = \int (2e^x + e^{2x})dx = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

c) $F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

Mà $F(0) = 3 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \Rightarrow F(1) = 2e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 4e + 1}{2}$.

d) Với $F(0) = \frac{5}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}$

Ta có: $F(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} = 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Câu 107. Cho hàm số $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1)dx$.

a) $F(x) = \int 4^x dx + \int 2^x dx + \int dx$.

b) $F(x) = \frac{2^{2x} + 2^x}{\ln 2} + x + C$.

c) Nếu $F(1) = \frac{4}{\ln 2}$ thì $F(2) = \frac{12}{\ln 2} - 1$.

d) Nếu $G(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$ thì $G(x) = F(x) + C$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1) dx = \int 4^x dx + \int 2^x dx + \int dx$

b) $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C = \frac{2^{2x}}{2 \ln 2} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C = \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x + C$.

c) Do $F(x) = \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x + C$ và $F(1) = \frac{4}{\ln 2}$ nên $\frac{4}{\ln 2} + 1 + C = \frac{4}{\ln 2} \Leftrightarrow C = -1$

$\Rightarrow F(x) = \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x - 1 \Rightarrow F(2) = \frac{12}{\ln 2} + 1$.

d) Ta có: $G(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{2^{3x} + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{(2^x + 1)(4^x - 2^x + 1)}{2^x + 1} dx = \int (4^x - 2^x + 1) dx \neq F(x) + C$.

Câu 108. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

a) $F'(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

b) $F(x) = \frac{\int (6^{x+1} + 3^{2x}) dx}{\int 2^{2x+3} dx}$.

c) $F(x) = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx$.

d) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(1) = \frac{29}{\ln 3 - \ln 2}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Theo định nghĩa nguyên hàm suy ra $F'(x) = f(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

b) Theo tính chất nguyên hàm suy ra $F(x) = \int \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}} dx \neq \frac{\int (6^{x+1} + 3^{2x}) dx}{\int 2^{2x+3} dx}$.

c) Ta có $F(x) = \int \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}} dx = \int \frac{6 \cdot 6^x + 9^x}{8 \cdot 4^x} dx = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx$.

d) $F(x) = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x}{\ln \frac{9}{4}} + C = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3 - \ln 2} + C$

Do $F(0) = 0$ nên $\frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)}$.

Suy ra $F(x) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3 - \ln 2} - \frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)}$

Khi đó $F(1) = \frac{81}{64(\ln 3 - \ln 2)} - \frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)} = \frac{29}{64(\ln 3 - \ln 2)}$.

Câu 109. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2^{2x+1} - 1 + \cos 2x}{2^x + \sin x}$ trên $[0; +\infty)$ thoả

mãn $F(0) = \frac{2}{\ln 2} + 2$.

a) $f(\pi) = 2^{\pi+1} - 1$.

b) $F'(0) = 2$

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là $k = 2\sqrt{2^\pi} - 2$

d) $F(-1) = \frac{1}{\ln 2} + 2\cos 1$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Ta có $f(x) = \frac{2^{2x+1} - 2\sin^2 x}{2^x + \sin x} = \frac{2(2^x - \sin x)(2^x + \sin x)}{2^x + \sin x} = 2 \cdot 2^x - 2\sin x$

a) $f(\pi) = 2 \cdot 2^\pi - 2\sin \pi = 2^{\pi+1}$.

b) $F'(x) = f(x) = 2 \cdot 2^x - 2\sin x \Rightarrow F'(0) = 2 \cdot 2^0 - 2\sin 0 = 2$.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là

$$k = F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 2^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \sqrt{2^\pi} - 2.$$

$$d) \int f(x)dx = \int [2 \cdot 2^x - 2 \sin x] dx = 2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + 2 \cos x + C \Rightarrow F(x) = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + 2 \cos x + C.$$

$$\text{Giả thiết } F(0) = \frac{2}{\ln 2} + 2 \Leftrightarrow \frac{2^{0+1}}{\ln 2} + 2 \cos 0 + C = \frac{2}{\ln 2} + 2 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + 2 \cos x$$

$$\Rightarrow F(-1) = \frac{2^0}{\ln 2} + 2 \cos(-1) = \frac{1}{\ln 2} + 2 \cos 1.$$

Câu 110. Cho hàm số $f(x) = 2x + m$ và $G(x) = x^3 + mx^2 + 3x + m$ với $m \in \mathbb{R}$.

a) Khi $m = 3$ thì $\int f(x)dx = x^2 + 3x + C$.

b) Khi $m = 2$ thì $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) Khi $m = -1$ thì $\int (G(x) - f(x))dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

d) Gọi $F(x)$ làm một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0) = 1$. Khi đó, có 4 giá trị nguyên của tham số m thì $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) Khi $m = 3$ thì $\int f(x)dx = \int (2x + 3)dx = \int 2xdx + \int 3dx = x^2 + 3x + C$

b) Khi $m = 2$, ta có: $f(x) = 2x + 2; G(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

Ta có $G'(x) = 3x^2 + 4x + 3 \Rightarrow G'(1) = 10 \neq f(1)$ nên khi $m = 2$, $G(x)$ là không phải là một nguyên hàm của $f(x)$

c) Khi $m = -1$, ta có: $f(x) = 2x - 1; G(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$

$$\int (G(x) - f(x))dx = \int (x^3 - x^2 + x)dx = \int x^3dx - \int x^2dx + \int xdx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

d) Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int 2xdx + \int m dx = x^2 + mx + C$ mà $F(0) = 1$ suy ra $C = 1$

$$\Rightarrow F(x) = x^2 + mx + 1.$$

$$F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thì $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) \neq 0$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Khi $f(1) = 2$ thì $f'(1) = 16$

b) Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

c) $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = 4x^3$

d) Khi $f(2) = -\frac{1}{25}$ thì $f(1) = \frac{1}{10}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Khi $f(1) = 2$ thì $f'(1) = 4[f(1)]^2 = 4 \cdot 2^2 = 16$

b) Từ hệ thức đề cho: $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2$, suy ra $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

c) Ta có $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -4x^3$

d) Ta có: $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \int (-4x^3) dx \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$

Do $f(2) = -\frac{1}{25}$, nên ta có $C = -9$.

Do đó $f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = 2$ và

$x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + 2x + 1.$

a) Khi $f'(3) = 1$ thì $f(3) = -3$.

b) $\left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x)\right]' = 1$

c) $f(2) = 3$.

d) $\int \frac{f(x+1)}{x} dx = x + 2 \ln|x| + C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Khi $f'(3) = 1$ thì $3 \cdot (3+1) \cdot f'(3) + f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow f(3) = 3$

b) Chia cả hai vế của biểu thức $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + 2x + 1$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = 1$$

b) Ta có: $\left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x + C$$

Do $f(1) = 2$ nên ta có $\frac{1}{1+1} \cdot 2 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Khi đó $\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x \Rightarrow f(x) = x + 1$.

Vậy ta có $f(2) = 3$.

d) ta có $f(x) = x + 1 \Rightarrow f(x+1) = x + 2$

Khi đó $\int \frac{f(x+1)}{x} dx = \int \frac{x+2}{x} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx = x + 2 \ln|x| + C$

Câu 113. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và

$$f(1) = 2.$$

a) Khi $f'(3) = 1$ thì $f(1) = 8$.

b) $[xf(x)]' = 4x^3 + 3x^2$

c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $y = 16x + 20$.

d) $\int f(x-1) dx = x^4 - 2x^3 + x^2 + C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Khi $f'(1) = 1$ thì $1 + f(1) = 7 \Rightarrow f(1) = 6$.

b) Ta có:

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 4x^3 + 3x^2.$$

$$\Leftrightarrow [xf(x)]' = 4x^3 + 3x^2$$

c) Ta có: $[xf(x)]' = 4x^3 + 3x^2$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $xf(x) = \int (4x^3 + 3x^2) dx = x^4 + x^3 + C$.

Với $x=1$ ta có: $f(1) = 2 + C$.

Theo bài ra $f(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy $xf(x) = x^4 + x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x^2$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 2x$; $f'(2) = 16$; $f(2) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là:

$$y = 16(x - 2) + 12 \Leftrightarrow y = 16x - 20.$$

d) Ta có: $f(x) = x^3 + x^2 \Rightarrow f(x-1) = (x-1)^3 + (x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$

nên: $\int f(x-1) dx = \int (x^3 - 2x^2 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$, với C là hằng số.

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$.

a) Khi $f(1) = e$ thì $f'(1) = \frac{1-e^2}{e}$.

b) $(f(x)e^x)' = e^{-x}$

c) $f(\ln 2) = \ln 2 + 1$

d) Nguyên hàm của $f(x)e^x$ là $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$, với C là hằng số.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

a) Khi $f(1) = e$ thì $e + f'(1) = e^{-1} \Rightarrow f'(1) = \frac{1-e^2}{e}$.

b)

$$f(x) + f'(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1.$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1$$

c) Ta có: $(f(x)e^x)' = 1$

$$\Rightarrow f(x)e^x = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x = x + C$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C = 2$.

$$\Rightarrow f(x)e^x = x + 2$$

$$\text{Do đó: } \Rightarrow f(\ln 2)e^{\ln 2} = \ln 2 + 2 \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2 + 1$$

d) Ta có: $f(x)e^x = x + 2$

$$\Rightarrow \int f(x)e^x dx = \int (x + 2) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 115. Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Tính $F'(25)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 625

Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$ nên ta có $F'(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $F'(25) = 25^2 = 625$.

Câu 116. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ có dạng $F(x) = ax^4 + bx^2$. Tính $T = 4a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $F(x) = ax^4 + bx^2$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ nên

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4ax^3 + 2bx = x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$$

Do đó $T = 4a + b = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 2$.

Câu 117. Để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ thì giá trị thực của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên ta có

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 3mx^3 + 2(3m + 2)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 3 \\ 2(3m + 2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 118. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ thỏa mãn $F(1) = -2024$. Tính

$F(0)$ (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ nhất).

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0,08

$$\text{Ta có } \int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024 \right) dx = \frac{1}{3} \int x^3 dx - 2 \int x^2 dx + \int x dx - 2024 \int dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2024x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + C.$$

$$F(1) = -2024 \Leftrightarrow \frac{1}{12} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2024 \cdot 1 + C = -2024 \Leftrightarrow C = \frac{1}{12}.$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + \frac{1}{12}.$$

$$\Rightarrow F(0) = \frac{1}{12} \approx 0,08$$

Câu 119. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-3)^2$ thỏa $F(0) = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của

$$\text{biểu thức } T = \log_2 [3F(1) - 2F(2)].$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

$$\text{Ta có: } F(x) = \int (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2} \int (2x-3)^2 d(2x-3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^3}{3} + C.$$

$$\text{Ta có } F(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(0-3)^3}{3} + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = \frac{29}{6}.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^3}{3} + \frac{29}{6} \text{ nên } F(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{29}{6} = \frac{14}{3}; F(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{29}{6} = 5.$$

$$\Rightarrow T = \log_2 [3F(1) - 2F(2)] = \log_2 \left(3 \cdot \frac{14}{3} - 2 \cdot 5 \right) = \log_2 4 = 2.$$

Câu 120. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tính $F(4)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 17

$$\text{Ta có: } \int (2x + 3\sqrt{x}) dx = x^2 + 2x\sqrt{x} + C \text{ mà } F(1) = 0 \Rightarrow C = -3.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} - 3.$$

$$\Rightarrow F(4) = 17$$

Câu 121. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Tính

$$F(-2e).$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$ với $\forall x \in (-\infty; 0)$.

Lại có $F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$.

Do đó $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$.

Vậy $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \forall x \in (-\infty; 0)$.

$\Rightarrow F(-2e) = \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 1$

Câu 122. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có:

$$\int (2x-1) dx = x^2 - x + C_1;$$

$$\int (3x^2-2) dx = x^3 - 2x + C_2$$

Suy ra $F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Mà ta có $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 = 1$.

Khi đó ta có: $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases}$.

Vậy $F(-1) + 2F(2) = 9$.

Câu 123. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên \mathbb{R}

thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 21

Khi $x \geq 1$ thì $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C_1$

$$\text{Khi } x < 1 \text{ thì } F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 + 2)dx = x^3 + 2x + C_2$$

Theo giả thiết $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

$$\text{Do đó hàm số } F(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 + 4 = C_2 + 3 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\text{Vậy } F(-1) + 2F(2) = -3 + C_2 + 2(10 + C_1) = 21$$

Câu 124. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$F(0) = 2. \text{ Giá trị của } F(-1) + 2F(2) \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 27

Theo giả thiết F là một nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{R} nên ta có

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } F(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 2.$$

Mặt khác, $F(x)$ liên tục trên \mathbb{R} nên liên tục tại $x = 1$ nên ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Leftrightarrow 6 + C_1 = 5 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 - 1 = 1$$

$$\text{Vậy } F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = -3 + 2 \cdot 15 = 27.$$

Câu 125. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$F(0) = 2. \text{ Giá trị của } F(-1) + 2F(2) \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 18

$$F \text{ là nguyên hàm của } f \text{ trên } \mathbb{R} \text{ nên } F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2. \quad (1)$$

$$\text{Do } F \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$$

$$\Leftrightarrow C_1 + 3 = C_2 + 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} C_1 + 3 = 4 \Leftrightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } F(-1) + 2F(2) = 18.$$

Câu 126. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính

$$F(\pi).$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$$

$$\Rightarrow F(\pi) = 0$$

Câu 127. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Biết

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\pi + b\sqrt{3} + c}{6}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Tính giá trị biểu thức } a + b - c.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 7

$$F(x) = \int (\sin x + 1) dx = x - \cos x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$F(x) = x - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi + 3\sqrt{3} - 3}{6}$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 3; c = -3 \Rightarrow a + b - c = 7$$

Câu 128. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 2\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Tính

$$F(-\pi).$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -1

Ta có $\int (\sin x + 2\cos x) dx = -\cos x + 2\sin x + C$.

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = -2$ nên $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$.

$$\Rightarrow F(-\pi) = -1$$

Câu 129. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x - \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tính $F(-\pi)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 3

$$F(x) = \int (2\sin x - \cos x) dx = -2\cos x - \sin x + C.$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} + C = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -2\cos x - \sin x + 1.$$

$$\Rightarrow F(-\pi) = 3$$

Câu 130. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

Theo bài ra $f(x) = \sin x$ nên $F(x) = -\cos x + C$, với C là hằng số tùy ý.

Đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$ nên $1 = -\cos 0 + C \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = -\cos x + 2$.

$$\text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Câu 131. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = F(0) + F(\pi) + F(2\pi)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } F(0) + F(\pi) + F(2\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 = 2.$$

Câu 132. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính

$F(0)$ (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ nhất).

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $-0,6$

$$\text{Ta có } F(x) = \int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + C.$$

$$\text{Vì } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên } C = \sqrt{2} - 1 \text{ nên } F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$$

$$F(0) = -1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 2 \approx -0,6$$

Câu 133. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Biết

$$F(0) + F(1) + \dots + F(2024) + F(2025) = \frac{2^a + b}{\ln 2}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân thức tối giản. Tính giá trị}$$

biểu thức $a - b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2027

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\text{mà } F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

$$\Rightarrow F(0) + F(1) + \dots + F(2024) + F(2025) = \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2024} + 2^{2025}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2026} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2026} - 1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow a = 2026; b = -1 \Rightarrow a - b = 2027$$

Câu 134. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

$$\text{Ta có } F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

$$\text{mà } F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4.$$

Câu 135. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2024$. Biết $F(2) = e^a + b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + b$.**Trả lời:**

Lời giải

Đáp án: 2025

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C.$$

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2019$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2024 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2024 \Leftrightarrow C = 2023.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^2 + e^x + 2023.$$

$$\Rightarrow F(2) = e^2 + 2027$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 2023 \Rightarrow a + b = 2025$$

Câu 136. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 2x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Biết $F(1) = \frac{e^a + e^b + c}{e}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a + b + c$.**Trả lời:**

Lời giải

Đáp án: 1

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) = e^x + 2e^{-x} - 2x.$$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (e^x + 2e^{-x} - 2x) dx = e^x - 2e^{-x} - x^2 + C.$$

$$\text{Vì } F(0) = 1 \text{ nên suy ra } e^0 - 2e^0 - 2 \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 2 \text{ nên } F(x) = e^x - 2e^{-x} - x^2 + 2.$$

$$\Rightarrow F(1) = e - \frac{2}{e} + 1 = \frac{e^2 + e - 2}{e}$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 1; c = -2 \Rightarrow a + b + c = 1$$

Câu 137. Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$F(0) = 1$. Biết $F(-1) = \frac{a}{b} + \frac{c}{2 \ln 2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

$$F(x) = \int (2^x + x + 1) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\ln 2} 2^0 + \frac{1}{2} 0^2 + 0 + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + 1 - \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow F(-1) = \frac{1}{\ln 2} 2^{-1} + \frac{1}{2} (-1)^2 + (-1) + 1 - \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln 2}$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 2; c = -1 \Rightarrow a + b + c = 2$$

Câu 138. Cho $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 \cdot e^{2x}$. Tính tổng $a + b + 2c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $F'(x) = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = [2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c]e^{2x}$.

Mà $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 \cdot e^{2x}$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $a + b + 2c = 1$.

Câu 139. Biết $F(x) = e^{2x} + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x) + \cos \pi x$. Khi đó $G(2) - G(0) = a \cdot e^b + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $a \cdot b \cdot c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 62

Ta có $F(x) = e^{2x} + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} .

$$\text{Suy ra } f(x) = F'(x) = 2e^{2x} + 4x \Rightarrow f(2x) = 2e^{4x} + 8x$$

$$\text{Khi đó } \int (f(2x) + \cos \pi x) dx = \int (2e^{4x} + 8x + \cos \pi x) dx = \frac{1}{2} e^{4x} + 4x^2 + \frac{1}{\pi} \sin \pi x + C.$$

$$\text{Suy ra } G(x) = \frac{1}{2} e^{4x} + 4x^2 + \frac{1}{\pi} \sin \pi x + C.$$

$$\text{Do đó } G(2) - G(0) = \left(\frac{1}{2} e^8 + 16 + C \right) - \left(\frac{1}{2} + C \right) = \frac{1}{2} e^8 + \frac{31}{2}.$$

Vậy $a.b.c = 62$.

Câu 140. Cho hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x}$. Tính tổng $a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } F'(x) &= \left[(ax^2 + bx + c)e^{-2x} \right]' = (2ax + b)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx + c)e^{-2x} \\ &= -\left[2ax^2 - (2a - 2b)x - b + 2c \right] e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\text{Do } F'(x) = f(x) \text{ nên } \begin{cases} 2a = 2 \\ -2a + 2b = -8 \\ -b + 2c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0.$$

Câu 141. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), với $a, b \in \mathbb{Q}$. Biết rằng

$$F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0, \text{ tính tổng } a + b.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} ax^2 - \frac{b}{x} + C.$$

$$\text{Theo bài ra } \begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + b + C = 1 \\ \frac{1}{2}a - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow a + b = 0$$

Câu 142. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có: $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x + C_1$.

Mà $f(1) = 3 \Rightarrow 3 = 6 + C_1 \Rightarrow C_1 = -3 \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x - 3 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + C_2$.

Lại có: $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$.

Khi đó: $F(1) = 1$.

Cách khác: Ta có: $F(1) = \int_0^1 f(x) dx + F(0) = \int_0^1 (4x^3 + 2x - 3) dx + 2 = -1 + 2 = 1$.

Câu 143. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, thỏa mãn $f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ và $f(1) = 1$.

Biết $f(2) = a\sqrt{2} + b\sqrt[3]{4} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 3

$f(x) = \int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + C$

Mà $f(1) = 1 \Leftrightarrow 2 + 3 + C = 1 \Leftrightarrow C = -4 \Rightarrow f(x) = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4$

$\Rightarrow f(2) = 4\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{4} - 4$

$\Rightarrow a = 4; b = 3; c = -4 \Rightarrow a + b + c = 3$

Câu 144. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Tính giá trị

$2a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $f'(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$ (1).

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, các điểm $x = 1, x = \frac{1}{2}$ đều thuộc $(0; +\infty)$ nên

$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(ax^2 + \frac{b}{x^3} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C$.

$$+ f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \quad (2).$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=3 \\ \frac{a}{3}-\frac{b}{2}+C=2 \\ \frac{a}{24}-2b+C=-\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ C=\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow 2a+b=2.2+1=5.$$

Câu 145. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và

$f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. Biết $f(-1) + f(4) = \frac{a \ln 2 + b}{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị

biểu thức $a+b+c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 15

$$\text{Có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x < 0 \\ \ln|x| - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Do } f(-2) = \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} + C_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = 1 - \ln 2$$

$$\text{Do } f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 - \frac{1}{2} + C_2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \ln 2 - 1$$

$$\text{Nhu vậy, } f(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + 1 - \ln 2 & \text{khi } x < 0 \\ \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln 2 - 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(-1) + f(4) = (2 - \ln 2) + \left(\ln 4 - \frac{1}{4} + \ln 2 - 1\right) = \frac{8 \ln 2 + 3}{4}.$$

$$\Rightarrow a = 8; b = 3; c = 4 \Rightarrow a + b + c = 15$$

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Biết $f(\pi) = a\pi + b$, với

$a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 13

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$$

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

$$\text{Vậy } f(x) = 3x + 5 \cos x + 5.$$

$$\Rightarrow f(\pi) = 3\pi + 10$$

$$\Rightarrow a = 3; b = 10 \Rightarrow a + b = 13$$

Câu 147. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $f'(x) \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời:**Lời giải****Đáp án:** 0

Ta có:

$$f'(x) \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \cot x + C$$

$$\text{Do } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow C = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \cot x - 4$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cot \frac{\pi}{2} - 4 = 0$$

Câu 148. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn: $f'(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ và

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}. \text{ Tính } f(0).$$

Trả lời:**Lời giải****Đáp án:** 1

$$f'(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \left(2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (2023 + \cos x) dx = 2023x - \sin x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = 2023x - \sin x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2023\pi}{2} = 2023 \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + C \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2023x - \sin x + 1$$

$$\Rightarrow f(0) = 1$$

Câu 149. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn: $f'(x) = 1 + e^{2x}$ và $f(0) = 2$. Biết

$f(\ln 2) = a + \ln b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 5

$$f'(x) = 1 + e^{2x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 + C \Leftrightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{2} e^{2x} + 1$$

$$\Rightarrow f(\ln 2) = 3 + \ln 2$$

$$\Rightarrow a = 3; b = 3 \Rightarrow a + b = 5$$

Câu 150. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn: $f'(x) = 2^x + 3^x$ và $f(0) = \frac{1}{\ln 3}$. Biết

$f(1) = \frac{a}{b \ln 2} + \frac{3}{c \ln 3}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 5

$$f'(x) = 2^x + 3^x$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (2^x + 3^x) dx = \int 2^x dx + \int 3^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{\ln 3} \Rightarrow \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{3}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3}$$

$$\Rightarrow a = 3; b = 1; c = 1 \Rightarrow a + b + c = 5$$

Câu 151. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn: $f'(x) = e^{3x+2024}$ và $f(-675) = 1$. Biết

$$f(0) = \frac{e^a + b.e + c}{3e}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Tính giá trị biểu thức } a + b + c.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2027

$$f'(x) = e^{3x+2024}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int e^{3x+2024} dx = \frac{1}{3} e^{3x+2024} + C$$

$$f(-675) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{3} e^{3(-675)+2024} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{3e}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} e^{3x+2024} + 1 - \frac{1}{3e}$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{1}{3} e^{2024} + 1 - \frac{1}{3e} = \frac{e^{2025} + 3e - 1}{3e}$$

$$\Rightarrow a = 2025; b = 3; c = -1 \Rightarrow a + b + c = 2027$$

Câu 152. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn: $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$ và $f(1) = 0$. Biết

$$f(0) = \frac{a}{\ln 12}, \text{ với } a \in \mathbb{Z}. \text{ Tính giá trị } a.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -198

$$f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \int 3^2 \cdot 3^x \cdot 2 \cdot 4^x dx = 18 \int 12^x dx = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 0 = 18 \frac{12}{\ln 12} + C \Rightarrow C = -\frac{216}{\ln 12}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{18 \cdot 12^x}{\ln 12} - \frac{216}{\ln 12} = \frac{18 \cdot 12^x - 216}{\ln 12}$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{-198}{\ln 12} \Rightarrow a = -198$$

Câu 153. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = e^x + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = e$. Biết $F(0) = \frac{a}{b}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản.

Tính giá trị biểu thức $a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 7

$$\text{Ta có } f'(x) = e^x + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \int (e^x + 2x + 1) dx = e^x + x^2 + x + C$$

$$\text{Vì } f(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 + 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \text{ nên } f(x) = e^x + x^2 + x$$

$$\text{Vì } F(x) \text{ là nguyên hàm của } f(x) \text{ nên } F(x) = \int (e^x + x^2 + x) dx = e^x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\text{Lại có } F(1) = e \Leftrightarrow C = -\frac{5}{6} \text{ suy ra } F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$$

$$\text{Khi đó } F(0) = e^0 - \frac{5}{6} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 6 \Rightarrow a + b = 7$$

Câu 154. Cho $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot \tan x$. Biết nguyên hàm của hàm số

$\frac{\tan x}{f'(x)}$ có dạng $\frac{a}{b} \tan x + C$ với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Tính giá

trị biểu thức $a - 2b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -15

$$\text{Ta có } F'(x) = -2 \sin 2x = -4 \sin x \cos x.$$

Vì $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot \tan x$ nên:

$$F'(x) = f(x) \cdot \tan x \Leftrightarrow -4 \sin x \cos x = f(x) \cdot \tan x \Leftrightarrow f(x) = -4 \cos^2 x.$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = 8 \sin x \cos x.$$

$$\text{Khi đó ta có: } \int \frac{\tan x}{f'(x)} dx = \int \frac{\tan x}{8 \sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{8 \cos^2 x} dx = \frac{1}{8} \tan x + C \text{ suy ra } a = 1, b = 8.$$

$$\text{Vậy } a - 2b = -15.$$

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 155. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

Lời giải

Ta có:

$$f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]' = x^4 + x^2$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int (x^4 + x^2) dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Do $f(0) = 2$ nên suy ra $C = 2$.

$$\text{Vậy } f^2(2) = 2 \left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{332}{15}.$$

Câu 156. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Tính giá trị của $f(1)$.

Lời giải

Ta có:

$$(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(f(x))^3}{3} \right]' = 3x^2 + 4x + 2$$

$$\Rightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = \int (3x^2 + 4x + 2) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + C) \quad (1)$$

Theo đề bài $f(0) = 3$ nên từ (1) ta có $(f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9$

$$\Rightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)}.$$

$$\Rightarrow f(1) = \sqrt[3]{42}$$

Câu 157. Cho hàm số $f(x) > 0$ thỏa mãn $f(\pi) = e^2$ và $f'(x) - f(x)\sin x = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị

của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$f'(x) - f(x)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = f(x)\sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \sin x$$

$$\Rightarrow \ln|f(x)| = \int \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = -\cos x + C$$

Theo đề bài $f(\pi) = e^2$ nên $\ln e^2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$

$$\Rightarrow \ln f(x) = -\cos x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-\cos x + 1} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$$

Câu 158. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$

bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1: lấy nguyên hàm

$$f'(x) = x[f(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \int -x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{f(2)} = -2 + C \Leftrightarrow \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -2 + C \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} - 1$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$$

Cách 2: Lấy tích phân

$$\text{Chia 2 vế hệ thức (1) cho } [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2].$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 2]$ hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2} df(x) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{-1}{f(x)} \right|_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{3} \text{ nên suy ra } f(1) = -\frac{2}{3}.$$

Câu 159. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x \cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

Lời giải

Ta có với $\forall x \in (0; +\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x+1 > 0$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Do đó

$$[f'(x)]^2 = xf(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{xf(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

$$\text{Vì } f(3) = \frac{4}{9} \text{ nên } C = \frac{2-3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2-3\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2-3\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

$$\text{suy ra } f(8) = \frac{43-24\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 160. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(3)$.

Lời giải

Ta có:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \text{ nên } C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(3) = e^{2\sqrt{3}}$$

Câu 161. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0;1]$. Tính giá trị của $f'(2)$.

Lời giải

$$[f'(x)]^2 = f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f'(x)} \right)' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = -\int dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + C$$

$$\text{Mà } f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{1-2} = 1$$

Câu 162. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1, f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Theo đề bài, ta có

$$[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + C \cdot x + D$$

$$\text{Mà } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra : } f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}$$

Câu 163. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f'(x) + f(x) = e^{-x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(\ln 2)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{ta có } f'(x) + f(x) = e^{-x}$$

$$\text{Nhân hai vế với } e^x \text{ ta được: } e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = 1$$

$$\Rightarrow e^x \cdot f(x) = \int dx$$

$$\Rightarrow e^x \cdot f(x) = x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \text{ nên } e^0 \cdot 1 = 0 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\text{Do đó: } e^x \cdot f(x) = x + 1 \Rightarrow e^{\ln 2} f(\ln 2) = 1 + \ln 2 \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$$

Câu 164. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 2) = 1$ và $f'(x) - f(x) = e^{2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

ta có $f'(x) - f(x) = e^{2x}$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được: $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^x \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^x$

$$\Rightarrow e^{-x} \cdot f(x) = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow e^{-x} \cdot f(x) = e^x + C$$

$$\text{Mà } f(\ln 2) = 1 \text{ nên } \Rightarrow e^{-\ln 2} \cdot 1 = e^{\ln 2} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Do đó: } e^{-1} \cdot f(1) = e - \frac{3}{2} \Rightarrow f(1) = e^2 - \frac{3}{2}e$$

Câu 165. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f'(x)f(x) - \sin x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f^2(\pi)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có

$$f'(x)f(x) - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow [f^2(x)]' = \sin x$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \int \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = -\cos x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \text{ nên } 1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow f^2(x) = -\cos x + 2$$

$$\Rightarrow f^2(\pi) = 3$$

Câu 166. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{f(x)} \right]' = x^3 \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -1.$$

Câu 167. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(x) = x^3 [f(x)]^2 &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5} = -0,8. \end{aligned}$$

Câu 168. Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} đồng thời thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -e^x f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(\ln 2) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, tính giá trị của $a + b$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) = -e^x f^2(x) &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \quad (\text{do } f(x) > 0) \\ &\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int -e^x dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -e^x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -1 + C \Rightarrow C = -1.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow a = 3; b = 1 \Rightarrow a + b = 4$$

Câu 169. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Tính giá trị của $b - a$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) = (2x + 3)f^2(x) &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x + 3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ f(3) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \\ \vdots \\ f(2025) = \frac{1}{2026} - \frac{1}{2025} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2026} = -\frac{506}{1013}.$$

$$\text{Do } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = -506, b = 1013 \Rightarrow b - a = 1519$$

Câu 170. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$\forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Ta có

$$x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + C$$

$$\text{Mà: } f(1) = \frac{1}{3} \text{ nên } \Rightarrow 3 = 1 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{5} = 0,4$$

Câu 171. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ nhất).

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + C}.$$

$$\text{Theo giả thiết } f(-1) = 1 \text{ nên } e^{\frac{1}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } y = f(x) = e^{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}}.$$

$$\text{Do đó } f(2) = e^3 \approx 20,1.$$

Câu 172. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng

$$(0; +\infty) \text{ thỏa mãn } f'(x) - \frac{\sqrt{f(x)}}{x^3} = 0, \forall x > 0 \text{ và } f(1) = -\frac{1}{2}. \text{ Biết } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{b} \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân}$$

số tối giản. Tính giá trị của $a + b$.

Lời giải

Ta có

$$f'(x) - \frac{\sqrt{f(x)}}{x^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2x^3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{f(x)} \right]' = \frac{1}{3x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \int \frac{1}{3x^3} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = -\frac{1}{6x^2} + C$$

$$\text{Theo giả thiết } f(1) = 4 \text{ nên } \sqrt{4} = -\frac{1}{6} + C \Rightarrow C = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{4}{6} + \frac{13}{6} = \frac{9}{6} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{36}$$

$$\Rightarrow a = 81; b = 36 \Rightarrow a + b = 117$$

Câu 173. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng

$$(0; +\infty) \text{ thỏa mãn } f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0 \text{ và } f(1) = -\frac{1}{2}. \text{ Biết}$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024) = \frac{a}{b} \text{ với } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản. Tính giá trị của}$$

$$b - a.$$

Lời giải

Ta có:

$$f'(x) = (2x+1)f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2+x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2024) = \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = f(1) + f(2) + \dots + f(2024) = -1 + \frac{1}{2025} = -\frac{2024}{2025}.$$

$$\text{Do } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = -2024, b = 2025 \Rightarrow b - a = 4049$$

Câu 174. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết

$f(1) = \frac{e}{2}(a + b \ln 2)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a - b$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $f'(x) = \frac{2^x}{e^x} [f(x)]^2$ với mọi $x \in (1; 2]$.

Do đó $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Xét với mọi $x \in [1; 2]$ ta có:

$$e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2^x}{e^x} [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \left(\frac{2}{e}\right)^x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln \frac{2}{e}} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 - \ln 2} + C$$

Mà $f(0) = 1 - \ln 2 \Rightarrow C = 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 - \ln 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 - \ln 2}{\left(\frac{2}{e}\right)^x}$$

Vậy $f(1) = \frac{e}{2}(1 - \ln 2)$.

$$\Rightarrow a = 1; b = -1 \Rightarrow a - b = 2$$

Câu 175. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ hai).

Lời giải

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

Từ giả thiết $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) = \sqrt{f(x) \cdot e^x}$, $\forall x \in [0; +\infty)$.

Do đó, $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \in [0; +\infty)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C$, $\forall x \in [0; +\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Từ đó, tính được $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$.

Câu 176. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ hai).

Lời giải

Ta có :

$$f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + C}$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \text{ nên } 1 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} + C} \Rightarrow C = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{Suy ra } f(5) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}} \approx 4,17.$$

Câu 177. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ và

$f(1) = 1$. Biết $f(2) = e^{\frac{a}{b}}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + b$.

Lời giải

$$e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) = x$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)})' = x$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \text{ nên } e = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = e - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} \Rightarrow f(2) = e^{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow a = 5; b = 2 \Rightarrow a + b = 7$$

Câu 178. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1$, $(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $f(3)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ nhất).

Lời giải

Ta có: $(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{(f(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot (f(x))^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(3) = e^3 \approx 20,1$$

Câu 179. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính giá trị của } f(2).$$

Lời giải

Ta có

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 [f'(x)]^3 = -27 [f(x) - 1]^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^4} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^3 [f(x) - 1]} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x) - 1)\sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{3}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3(f(x) - 1)\sqrt[3]{f(x) - 1}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' = \frac{1}{x^2}$$

Do đó $\int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{1}{x} + C.$

Có $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0.$

Do đó $f(x) = 1 - x^3.$

Khi đó $f(2) = -7.$

Câu 180. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1.$

Biết $f^2(2) = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a - b.$

Lời giải

Ta có

$$[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow [f(x).f'(x)]' = x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = \int (x^3 - 2x) dx$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1.$ Suy ra $C = 1.$

$$\text{Vậy } f(x).f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$$

Tiếp đến có:

$$2f(x).f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))' = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

Từ $f(0) = 1$. Suy ra $C = 1$.

$$\text{Vậy } f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1.$$

$$\text{Do đó } f^2(2) = \frac{43}{15}$$

$$\Rightarrow a = 43; b = 15 \Rightarrow a - b = 28$$

Câu 181. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } [f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x).$$

$$\text{Do đó theo giả thiết ta được } [f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1.$$

$$\text{Suy ra } f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C. \text{ Hơn nữa } f(0) = f'(0) = 3 \text{ suy ra } C = 9.$$

$$\text{Tương tự vì } [f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) \text{ nên } [f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right).$$

$$\text{Suy ra } f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right) dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C,$$

$$\text{cũng vì } f(0) = 3 \text{ suy ra } f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9.$$

$$\text{Do đó } [f(1)]^2 = 28.$$

Câu 182. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$ với mọi x dương. Biết

$f(1) = f'(1) = 1$. Biết $f^2(2) = 2(a + b \ln 2)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + b$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } [xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]; x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot [f'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x) \cdot f''(x)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó: } \int [f(x) \cdot f'(x)]' \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Nên } \int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx \Leftrightarrow \int f(x) \cdot d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + C \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2(1 + \ln 2).$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 1 \Rightarrow a + b = 2$$

Câu 183. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = 2e^{-3x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2024$. Biết $f(\ln 2) = \frac{a}{b}$

với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + b$.

Lời giải

$$f(x) + f'(x) = 2e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 2e^{-2x}.$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = \int 2e^{-2x} dx$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x = -e^{-2x} + C$$

$$\text{Vì } f(0) = 2024 \text{ nên } C = 2025.$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = -e^{-2x} + 2025$$

$$\Rightarrow f(\ln 2)e^{\ln 2} = -e^{-2\ln 2} + 2 \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow a = 7; b = 8 \Rightarrow a + b = 15$$

Câu 184. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f'(x)-f(x)=2024$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f\left(\ln \frac{1}{2}\right)=\frac{a+b.e}{c.e} \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{c} \text{ là phân số tối giản. Tính giá trị của } a+b+c.$$

Lời giải

ta có

$$f'(x)-f(x)=2024$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \cdot f'(x)-e^{-x} \cdot f(x)=2024e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \left[e^{-x} \cdot f(x) \right]' = 2024e^{-x}$$

$$\Rightarrow e^{-x} \cdot f(x) = \int 2024e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow e^{-x} \cdot f(x) = -2024e^{-x} + C$$

$$\text{Mà } f(1)=1 \text{ nên } e^{-1} \cdot 1 = -2024e^{-1} + C \Rightarrow C = \frac{2025}{e}$$

$$\Rightarrow e^{-x} \cdot f(x) = -2024e^{-x} + \frac{2025}{e}$$

$$\Rightarrow e^{-\ln \frac{1}{2}} \cdot f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = -2024e^{-\ln \frac{1}{2}} + \frac{2025}{e} \Rightarrow f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = \frac{2025-4048e}{2e}$$

$$\Rightarrow a=2025; b=-4048; c=2 \Rightarrow a-b+c=6075$$

Câu 185. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0)=0$.

Tính $f(1)$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng thứ hai).

Lời giải

Ta có

$$f'(x)+2x.f(x)=e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} f'(x)+2x.e^{x^2} \cdot f(x)=1$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{x^2} \cdot f(x) \right)' = 1$$

$$\text{Suy ra } \int \left(e^{x^2} \cdot f(x) \right)' dx = \int dx$$

$$\Rightarrow e^{x^2} \cdot f(x) = x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+C}{e^{x^2}}$$

$$\text{Vì } f(0)=0 \Rightarrow C=0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = \frac{1}{e} \approx 0,37.$$

Câu 186. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$.

Tính $f(4)$.

Lời giải

Trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$$2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow \int (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C \quad (*)$$

Mà $f(1) = \frac{1}{2}$ nên từ (*) có: $\sqrt{1} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{2}$.

Vậy $f(4) = \frac{4^2\sqrt{4}}{2} = 16$.

Câu 187. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$f(x) - xf'(x) = -2x^3 - 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 2x + 3$$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2x + 3$.

Ta có $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C, C \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C_1, (1)$ với $C_1 \in \mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1) = 4$ theo giả thiết, nên thay $x = 1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1 = 0$, từ đó $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Vậy $f(2) = 20$.

Câu 188. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x) - x^2.f'(x) = 2f^2(x)$, với

$f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M - m$.

Lời giải

Ta có:

$$3x.f(x) - x^2.f'(x) = 2f^2(x)$$

$$\Rightarrow 3x^2.f(x) - x^3.f'(x) = 2x.f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2.f(x) - x^3.f'(x)}{f^2(x)} = 2x \text{ vì } f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = \int 2x dx = x^2 + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}.$$

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

Vậy, hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mà $[1; 2] \subset (0; +\infty)$ nên hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Suy ra, } M = f(2) = \frac{4}{3}; m = f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow M - m = 1.$$

Câu 189. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ta có $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow F'(x^2 + x) = f(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' = (2x + 1)(x^2 + x)e^{(x^2+x)^2} \left((x^2 + x)^2 - 4 \right)$$

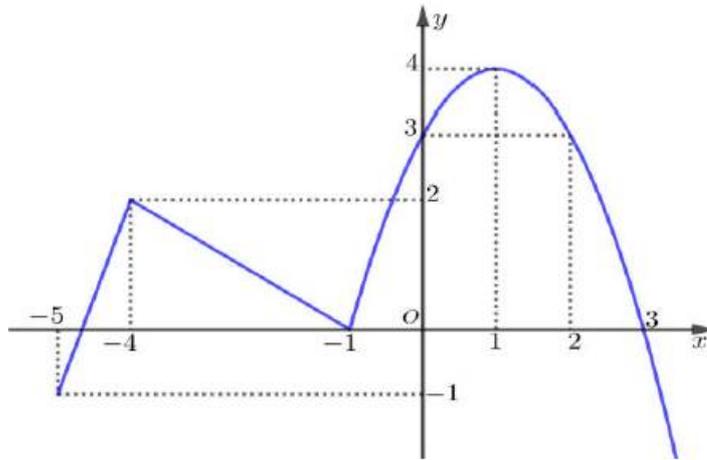
$$= (2x + 1)x(x + 1)e^{(x^2+x)^2} (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$$

$$= (2x + 1)x(x + 1)(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 2)e^{(x^2+x)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -2; -1; \frac{-1}{2}; 0; 1 \right\}$$

$F'(x^2 + x) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên $F(x^2 + x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 190. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ

thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $6f(-5) + 3f(2)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ qua các điểm $(2; 3), (1; 4), (0; 3), (-1; 0), (3; 0)$ nên xác định được

$$y = -x^2 + 2x + 3, \forall x \geq -1 \text{ suy ra } f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_1.$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x.$$

$$\text{Có } f(-1) = -\frac{5}{3}; f(2) = \frac{22}{3} \quad (1)$$

* Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4; -1]$ qua các điểm $(-4; 2), (-1; 0)$ nên

$$f'(x) = \frac{-2}{3}(x+1) \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C_2.$$

$$\text{Mà } f(-1) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - 2, \text{ hay } f(-4) = \frac{-14}{3}.$$

* Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5; -4]$ qua các điểm $(-4; 2), (-5; -1)$ nên

$$f'(x) = 3x + 14 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + C_3.$$

$$\text{Mà } f(-4) = \frac{-14}{3} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (-4)^2}{2} + 14 \cdot (-4) + C_3 = \frac{-14}{3} \text{ suy ra } C_3 = \frac{82}{3}.$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + \frac{82}{3} \Rightarrow f(-5) = -\frac{31}{6} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được $6f(-5) + 3f(2) = -31 + 22 = -9$.

CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA NGUYÊN HÀM****PHẦN A****TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t) = \int v(t) dt$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$

Bài 1. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 72 km/h thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 40 m , người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



- Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu giây?
- Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi chuyển được bao nhiêu mét? Xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

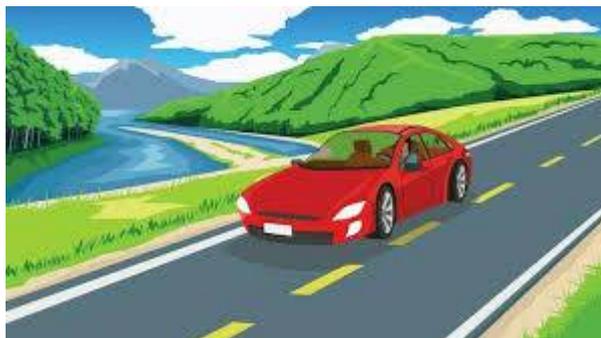
c) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

Bài 2. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).



- Tính quãng đường viên đạn đi sau 2 giây đầu.
- Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất.

Bài 3. Một xe ô tô chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t) = \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$, với (m/s²). Biết tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc bằng 2(m/s) và quãng đường đi được của vật bằng 0.



- Thiết lập công thức tính vận tốc của xe ô tô theo thời gian t .
- Tính quãng đường đi được của xe ô tô trong thời gian $t = \pi$ giây đầu tiên.

Bài 4. Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}$ (m/s).

- Thiết lập công thức tính quãng đường $s(t)$ của vật theo thời gian t .
- Gọi s_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và s_2 là quãng đường đi từ giây thứ 4 đến giây thứ 6.

So sánh s_1 và s_2

DẠNG 2**MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG THỰC TIỄN**

Bài 1. Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 8 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 8 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 2t + 7$, trong đó $h(t)(\text{cm})$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm). Cây con khi được trồng cao 25 cm.



- Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.
- Sau bao nhiêu năm trồng, cây cao được $1,03(m)$.
- Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Bài 2. Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây Xoài lai (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây Xoài lai cao 2,5 mét. Trong 10 năm tiếp theo cây Xoài lai phát triển với tốc độ

$$h'(x) = \frac{3}{2x} \text{ (mét /năm)}.$$



- Xác định chiều cao của cây Xoài lai sau x năm.
- Sau bao nhiêu năm cây Xoài lai cao 4,5 mét?

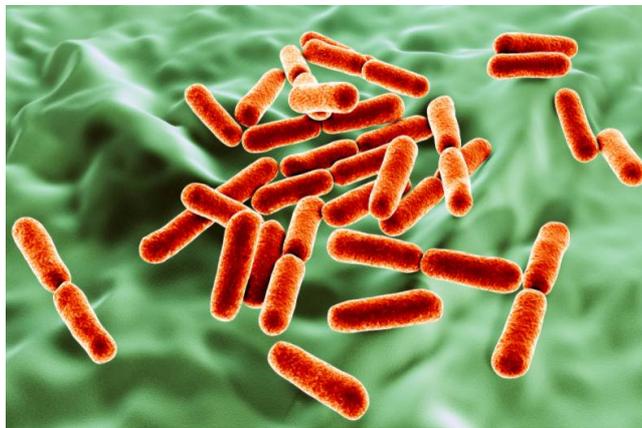
Bài 3. Một công nhân bơm nước vào bể chứa nước để sử dụng trong quá trình sản xuất. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 2 giây thì thể tích nước trong bể là $12m^3$. Sau 12 giây thì thể tích nước trong bể là $1872m^3$.



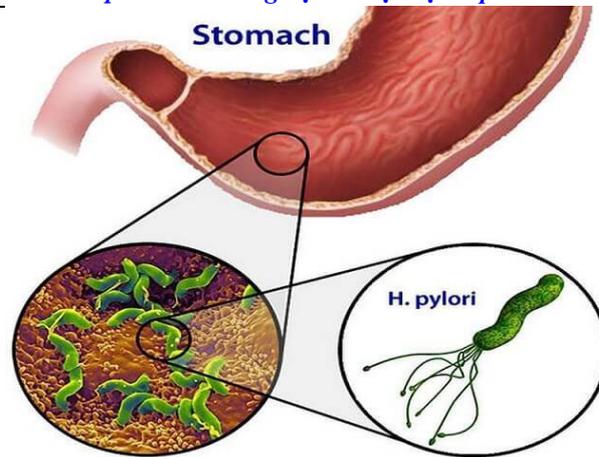
- a) Xác định thể tích nước bơm được sau t giây.
 b) Hỏi bơm trong bao lâu thì thể tích nước trong bể bằng $27900(m^3)$?
 c) Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 1 phút?

Trả lời:

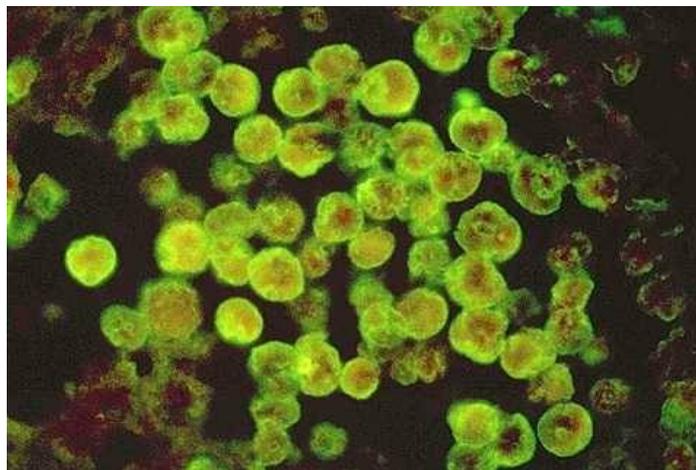
Bài 4. Một loài vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t) = \frac{300}{0,25t}$, trong đó, t là thời gian tính bằng ngày. Với $t=1$ thì số lượng vi khuẩn là 1000 con. Hỏi sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?



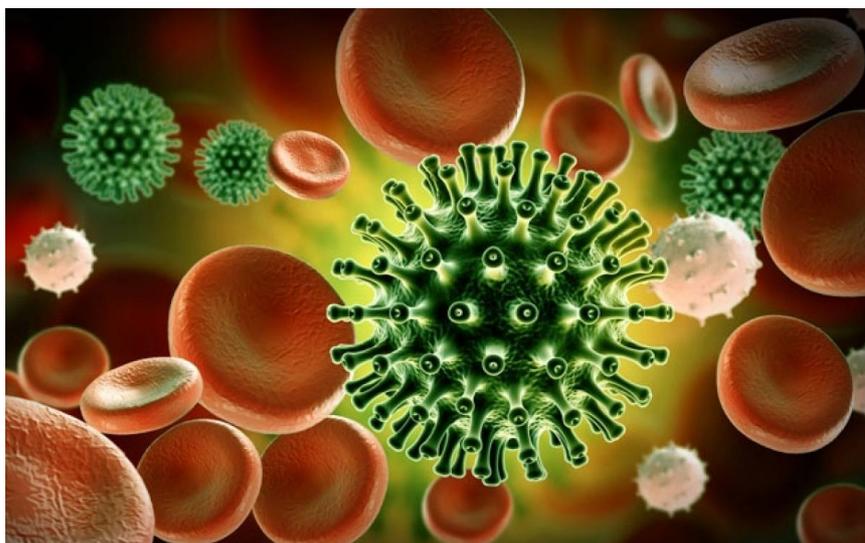
Bài 5. Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(t) = \frac{600}{t}$ và ngày đầu tiên bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?



Bài 6. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Tìm số số lượng vi trùng sau 10 ngày.



Bài 7. Một quần thể virus Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t) = \frac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virus Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Tìm số lượng virus Corona sau 3 giờ.



Bài 8. Một chiếc cốc chứa nước ở 95°C được đặt trong phòng có nhiệt độ 20°C . Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t=0$ là thời điểm nước ở 95°C) là một

hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi công thức

$$T'(t) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}} \text{ (}^\circ\text{C/phút)}. \text{ Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm } t = 30 \text{ phút.}$$

Bài 9. Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây thì điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

Bài 10. Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce (1 ounce = 28,3485 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ

$$B'(t) = \frac{2436e^{-0,193t}}{(1 + 784e^{-0,193t})^2}, \quad 8 \leq t \leq 43 \text{ với } B(t) \text{ là cân nặng tính bằng ounce và } t \text{ là thời gian tính bằng}$$

tuần. Hãy tính trọng lượng của bào thai sau 25 tuần tuổi (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. $4(m)$. B. $7,5(m)$. C. $2,5(m)$. D. $5(m)$.

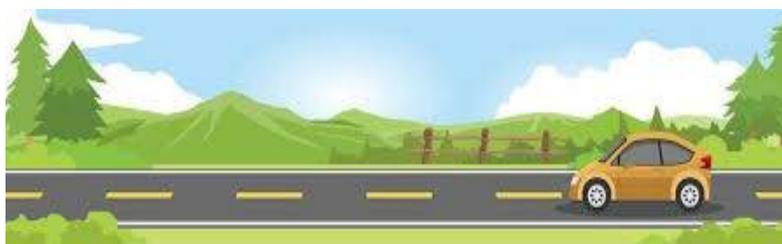


Câu 2. Một ô tô đang chạy với vận tốc $12(m/s)$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?

- A. $24(m)$. B. $12(m)$. C. $6(m)$. D. $18(m)$.



Câu 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc $70km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30(m/s)$.



Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?

A. $51(m)$.

B. $43(m)$.

C. $54(m)$.

D. $45(m)$.

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc $36(km/h)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc

$$a(t) = 1 + \frac{t}{3} (m/s^2).$$



Tính quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

A. $90(m)$

B. $85(m)$

C. $80(m)$

D. $100(m)$

Câu 5. Một vật chuyển động với vận tốc $10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là

$$a(t) = 3t + t^2 (m/s^2).$$

Tính quãng đường vật đi được trong khoảng 10s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{130}{3}(m)$.

B. $130(m)$.

C. $\frac{3400}{3}(m)$.

D. $\frac{4300}{3}(m)$.

Câu 6. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$ có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t} (m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của

vật là $6(m/s)$. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn đến kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $11,9(m/s)$.

B. $12,9(m/s)$.

C. $14,2(m/s)$.

D. $13,2(m/s)$.

Câu 7. Một ca nô đang chạy trên hồ với vận tốc $20(m/s)$ thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển

động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được bao nhiêu mét?

A. $50(m)$.

B. $45(m)$.

C. $30(m)$.

D. $40(m)$.



Câu 8. Một máy bay cất cánh từ sân bay Cam Ranh với vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

- A. 36m . B. 252m. C. 1134m. D. 966m.



Câu 9. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

- A. 6(m/p). B. 7(m/p). C. 9(m/p). D. 8(m/p).



Câu 10. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 25 - 9,8t$ (m/s). Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau:

- A. 30,9(m). B. 64,8(m). C. 61,8(m). D. 31,9(m).



Câu 11. Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây

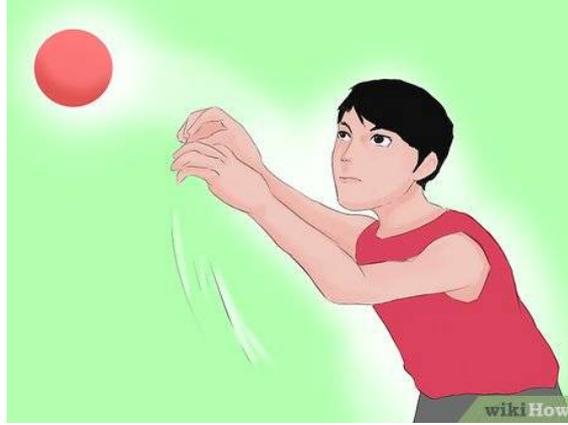
$v(t) = -10t + 16$ (m/s). Công thức nào sau đây tính độ cao của quả bóng theo thời gian t ?

A. $h(t) = -5t^2 + 16t + C$.

B. $h(t) = -5t^2 + 16t + 20$.

C. $h(t) = 5t^2 - 16t + 20$.

D. $h(t) = 5t^2 - 16t + C$.



Câu 12. Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm , t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{3t}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 10 giây là bao nhiêu cm ? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

A. $25,6(cm)$.

B. $42,1(cm)$.

C. $21,2(cm)$.

D. $23,3(cm)$.



Câu 13. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \frac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250.000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 272304 con

B. 212302 con

C. 242102 con

D. 252302 con.



Câu 14. Một vườn ươm cây Bạch Đàn cung cấp trồng rừng để phủ đồi trọc. Biết tốc độ tăng trưởng trong suốt t năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = \frac{1}{2}t + 4$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm). Cây con khi được ươm có chiều cao 20 cm. Sau 5 năm, cây được ươm cao bao nhiêu centimét?

A. 7,25(cm).

B. 6,25(cm).

C. 5,5(cm).

D. 8,5(cm).



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 15. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



a) Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh theo hàm $s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

c) Xe ô tô gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật.

d) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô không va chạm với chướng ngại vật.

Câu 16. Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe.



a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 6 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn là 39 mét.

Câu 17. Một xe đạp chuyển động với gia tốc $a(t) = 4\cos t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tại thời điểm bắt đầu chuyển động vật có vận tốc bằng 0.



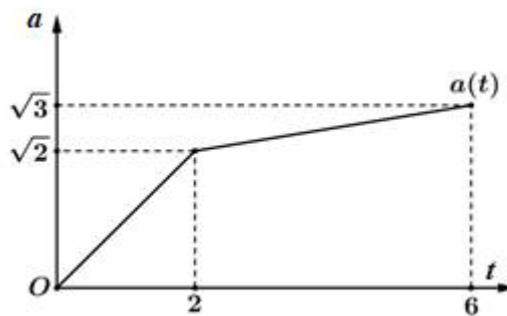
a) Vận tốc của xe đạp được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 4\cos t \text{ (m/s)}$.

b) Vận tốc của xe đạp tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là 2 (m/s)

c) Tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4} \text{ (s)}$ sau khi xuất phát thì vận tốc của xe đạp là $\sqrt{2} \text{ (m/s)}$

d) Gia tốc của xe đạp tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4} \text{ (s)}$ là $2\sqrt{2} \text{ (m/s}^2\text{)}$

Câu 18. Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$ và hàm số vận tốc là $v(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0) = 1 \text{ (m/s)}$.



a) Tại thời điểm $t = 2$ giây, gia tốc của vật là $1,4 \text{ (m/s}^2\text{)}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

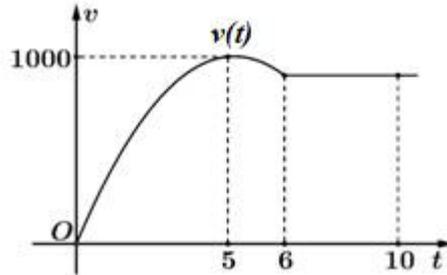
b) Gia tốc của vật bằng $\sqrt{3} \text{ (m/s}^2\text{)}$ tại thời điểm $t = 6$ giây.

c) Vận tốc của vật được biểu diễn theo hàm $v(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{8}t^2 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}t + C & \text{khi } 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$, với C là

hằng số thực.

d) Tại thời điểm $t = 6$ giây, vận tốc của vật là $1,73 (m/s)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 19. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 mét/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều. Gọi $s(t)$ là hàm số quãng đường và $v(t)$ là hàm số vận tốc của chuyển động ô tô.



a) Trong 6 phút đầu tiên, vận tốc của xe ô tô được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = -40t^2 + 100t$, với $t \in [0; 6]$.

b) Trong 6 phút đầu tiên, quãng đường của xe ô tô được biểu diễn bởi hàm số $s(t) = -\frac{40}{3}t^3 + 50t^2$, với $t \in [0; 6]$.

c) Trong khoảng 6 phút đầu, ô tô đi được quãng đường là $4320(m)$.

d) Quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là $8160(m)$.

Câu 20. Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t) = -0,8t + 4,16 (m/s)$.



a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2(m)$, với $t \geq 0$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = 5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016 (m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t = 10,5 (s)$.

Câu 21. Cây keo lai là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh, hiệu quả kinh tế. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{9}{x}$ (mét/năm).



a) Chiều cao của một cây sau khi trồng x năm $h(x)$ là: $h(x) = 9 \ln x + C$ (m), với $x > 0$.

b) Sau 4 năm cây cao $20,5(m)$ (kết quả làm tròn đến chữ số hàng thập phân thứ nhất).

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ tăng dần.

d) Người ta thường thu hoạch cây keo lai khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Khi đó, cây keo được trồng từ 10 hoặc 11 năm.

Câu 22. Cây cà chua khi trồng có chiều cao $5cm$. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng cm) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t .



a) Độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t là $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3}$, với $t \geq 0$.

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3}(cm)$.

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 8 tuần đầu tiên.

d) Vào thời điểm cây cà chua phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt được $\frac{4405}{81}(cm)$.

Câu 23. Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$. Trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 15$), $B'(t)$ được tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.



a) Số lượng khách tham dự lễ hội được biểu diễn hàm $B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95$, với $0 \leq t \leq 15$.

b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là 2300 khách.

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 10 giờ.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Câu 24. Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$ (con/giờ).

a) $f(t) = \frac{t^3}{3} - 8t^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

b) Số lượng vi sinh vật tăng trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó giảm dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Câu 25. Vào năm 2014, dân số Việt Nam khoảng 90,7 triệu người. Giả sử dân số Việt Nam sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t) = 1,2698.e^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/năm.

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$

b) $S(t) = 90,7.e^{0,014t} + 90,7$

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số Việt Nam năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/năm) khoảng 1,7 triệu người/năm

d) Theo công thức trên, dân số Việt Nam năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 100 triệu người/năm

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 26. Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox , với vận tốc cho bởi công thức $v(t) = 3t^2 + 4t$ (m/s) với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 1$. Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là bao nhiêu mét?

Trả lời:

Câu 27. Một xe tải đang chuyển động đều với gia tốc $v_0 = 15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s²). Tính quãng đường (làm tròn kết quả đến phần chục của mét) xe tải đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt đầu tăng tốc.



Trả lời:

Câu 28. Một xe mô tô đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15$ (m/s) thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s²). Vận tốc xe mô tô đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc bằng bao nhiêu mét/giây?



Trả lời:

Câu 29. Một xe taxi chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (giây) là $a(t) = 2t - 7$ (m/s²). Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s), hỏi sau bao nhiêu giây thì xe taxi đạt vận tốc 18 m/s?



Trả lời:

Câu 30. Một vận động viên đạp chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0 = 10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi là $a = 2(m/s^2)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) vận động viên đạp chiếc xe đạp đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.



Trả lời:

Câu 31. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(m/s)$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 32. Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t) = \cos x \left(t + \frac{\pi}{2} \right) (m/s^2)$. Biết tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Tính quãng đường (làm tròn kết quả đến phần chục của mét) đi được của vật đó trong $\frac{\pi}{2}$ giây đầu tiên.

Trả lời:

Câu 33. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 24,5 - 9,8t (m/s)$. Tính quãng đường (mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.



Trả lời:

Câu 34. Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72(m/s)$ bắt đầu từ độ cao $2(m)$. Hãy xác định chiều cao (mét) của viên đạn sau thời gian 10 giây đầu tiên kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9,8(m/s^2)$.



Trả lời:

Câu 35. Một xe gắn máy đang chuyển động với vận tốc $6(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của xe gắn máy sau 10 giây bằng bao nhiêu mét/giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

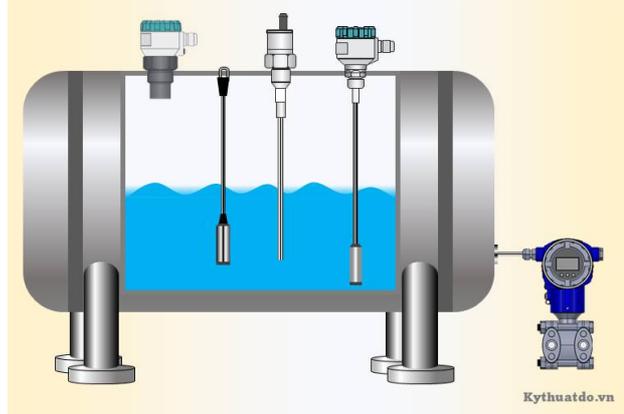


Trả lời:

Câu 36. Gọi $h(t)$ (đơn vị: mét) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng

$$h'(t) = \frac{1}{5} \sqrt[3]{t} \quad (m/s) \quad \text{và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây}$$

(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Trả lời:

Câu 37. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên

$$\text{cây cao } \frac{4}{3} (m), \text{ trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ } h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \text{ (mét /năm). Sau bao}$$

hiều năm cây cao được $\frac{16}{3}$ mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của năm)?



Trả lời:

Câu 38. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây cao su (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao su cao $3(m)$. Trong 15 năm tiếp theo cây cao su phát triển với tốc độ

$$h'(x) = \frac{2}{x} \text{ (mét/năm). Xác định chiều cao của cây cao su sau 12 năm trồng (làm tròn kết quả đến hàng}$$

đơn vị của mét).



Trả lời:

Câu 39. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t) = \frac{34}{t^2 + 4t + 4}$ (nghìn người/năm) biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần chục của nghìn người) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Trả lời:

Câu 40. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t , trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.



Trả lời:

Câu 41. Một đàn con trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t) = \frac{800}{t}$ và ngày đầu tiên, đàn con trùng có 500 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Trả lời:

Câu 42. Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C . Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút ($0 \leq t \leq 5$) được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ ($^{\circ}\text{C}/\text{phút}$). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt bằng bao nhiêu $^{\circ}\text{C}$?



Trả lời:

Câu 43. Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.



Trả lời:

Câu 44. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số

$$B'(t) = \frac{1000}{(1+0,3t)^2} \text{ với } t \geq 0, \text{ trong đó } B(t) \text{ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ } t. \text{ Số}$$

lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lý và thay nước mới cho hồ bơi.



Trả lời:

Câu 45. Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$. Trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 0,4 triệu đồng. Chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành) bằng bao nhiêu tỉ đồng?

Trả lời:

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

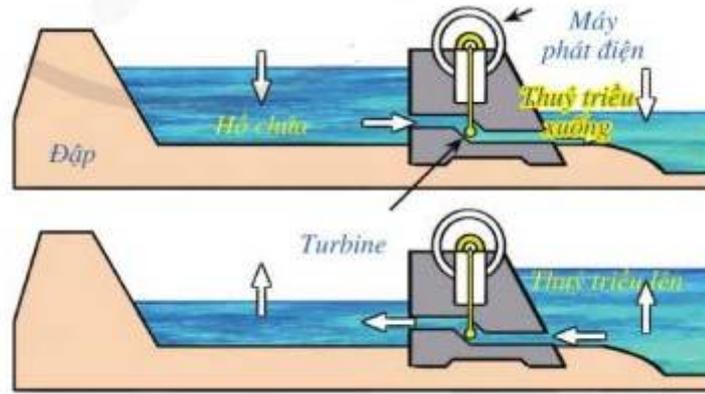
Câu 46. Một xe gắn máy chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t) = \frac{2}{t+1}(m/s^2)$. Tính vận tốc của xe gắn máy tại giây thứ 20 (là tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét/giây).



Câu 47. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t) = 10t + 500(m^3/s)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu m^3 ?



Câu 48. Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Gọi $h_1(m)$ là mực nước trong hồ cao nhất và $h_2(m)$ là mực nước thấp nhất, tính giá trị $h_1 + h_2$.



Câu 49. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu m^3 ?



Câu 50. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích (m^3) nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



Trả lời:

CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA NGUYÊN HÀM****PHẦN A****TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t) = \int v(t) dt$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$

Bài 1. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 72 km/h thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 40 m , người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



- Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu giây?
- Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? Xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

c) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

Lời giải

a) Quỹ đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t) = \int v(t) dx = \int (-10t + 20) dx = -5t^2 + 20t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -5t^2 + 20t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -5t^2 + 20t$$

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 20 = 0 \Rightarrow t = 2$.

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 2 giây

b) Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường:

$$s(2) = -5 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 = 20(m)$$

Do $40 > 20$ nên xe ô tô dừng hẳn trước khi va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn không xảy ra.

c) $72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$

Người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh nên xe đi được quãng đường $20m$ trong 1 giây

Tổng quãng đường xe đi được đến khi dừng hẳn là: $20 + 20 = 40(m)$

Do chướng ngại vật trên đường cách đó $40m$ xe khi bắt đầu đạp phanh nên xe ô tô va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn xảy ra.

Bài 2. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 24,5 - 9,8t (m/s)$.



a) Tính quãng đường viên đạn đi sau 2 giây đầu.

b) Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất.

Lời giải

a) Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t) = \int (24,5 - 9,8t) dx = 24,5t - 4,9t^2 + C$

$$\Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2 + C$$

Chọn $t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2$$

sau 2 giây đầu quãng đường viên đạn đi là $s(2) = 24,5 \cdot 2 - 4,9 \cdot 2^2 = 29,4m$

b) khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow 24,5 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 2,5(s)$

quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là:

$$s(2,5) = 2(24,5 \cdot 2,5 - 4,9 \cdot 2,5^2) = 61,25m$$

Bài 3. Một xe ô tô chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t) = \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$,

với (m/s^2) . Biết tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc bằng $2(m/s)$ và quãng đường đi được của vật bằng 0.



a) Thiết lập công thức tính vận tốc của xe ô tô theo thời gian t .

b) Tính quãng đường đi được của xe ô tô trong thời gian $t = \pi$ giây đầu tiên.

Lời giải

a) $a(t) = \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos t$

Vận tốc của xe ô tô tại thời điểm t là: $v(t) = \int a(t) dt = \int -\cos t dt = -\sin t + C$.

Ta có: $v(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -\sin 0 + C \Leftrightarrow C = 2$

$$\Rightarrow v(t) = -\sin t + 2.$$

b) Quãng đường của xe ô tô đi được tại thời điểm t là:

$$s(t) = \int (-\sin t + 2) dt = \cos t + 2t + C_1.$$

Khi đó: $s(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \cos 0 + 2 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = -1$ nên ta suy ra $s(t) = \cos t + 2t - 1$

$$\Rightarrow s(\pi) = \cos \pi + 2\pi - 1 \approx 6,28(m)$$

Bài 4. Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} (m/s)$.

a) Thiết lập công thức tính quãng đường $s(t)$ của vật theo thời gian t .

b) Gọi s_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và s_2 là quãng đường đi từ giây thứ 4 đến giây thứ 6.

So sánh s_1 và s_2

Lời giải

a) Gọi thời điểm ban đầu $t = 0; s = 0$

$$\text{Khi đó: } s(t) = \int \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right) dt = \frac{1}{2\pi}t - \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi t) + C$$

$$\text{Ta có: } s(0) = 0 \Rightarrow C - \frac{1}{\pi^2} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\text{Suy ra } s(t) = \frac{1}{2\pi}t - \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}$$

$$\text{b) Ta có: } s(t) = \frac{1}{2\pi}t - \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}$$

$$\text{Quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu là } s_1 = s(2) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 - \frac{1}{\pi^2} \cos(2\pi) + \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}$$

$$s_2 = s(6) - s(4) = \frac{1}{2\pi} \cdot 6 - \frac{1}{\pi^2} \cos(6\pi) + \frac{1}{\pi^2} - \left[\frac{1}{2\pi} \cdot 4 - \frac{1}{\pi^2} \cos(4\pi) + \frac{1}{\pi^2} \right] = \frac{1}{\pi}$$

Vậy $s_1 = s_2$

DẠNG 2**MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG THỰC TIỄN**

Bài 1. Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 8 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 8 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 2t + 7$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm). Cây con khi được trồng cao 25 cm.



- Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.
- Sau bao nhiêu năm trồng, cây cao được $1,03(m)$.
- Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) $h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t) = 2t + 7$.

Ta có: $h(t) = \int h'(t) dt = \int (2t + 7) dt = t^2 + 7t + C$.

Khi đó $h(t) = t^2 + 7t + C$.

Vì cây con khi được trồng cao 25 cm nên $h(0) = 25$ suy ra $C = 25$ nên $h(t) = t^2 + 7t + 25$.

b) cây cao $1,03(m) = 103(cm)$

Do đó: $t^2 + 7t + 25 = 103 \Leftrightarrow t^2 + 7t - 78 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -13(L) \\ t = 6(N) \end{cases}$

Vậy sau 6 năm trồng, cây cao được $1,03(m)$.

c) Sau 8 năm trồng và uốn tạo dáng. Cây có chiều cao là: $h(8) = 8^2 + 7.8 + 25 = 145(cm)$.

Vậy khi được bán, cây cao $145(cm)$

Bài 2. Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây Xoài lai (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây Xoài lai cao 2,5 mét. Trong 10 năm tiếp theo cây Xoài lai phát triển với tốc độ

$$h'(x) = \frac{3}{2x} \text{ (mét /năm)}.$$



- a) Xác định chiều cao của cây Xoài lai sau x năm.
b) Sau bao nhiêu năm cây Xoài lai cao 4,5 mét?

Lời giải

- a) Chiều cao của cây Xoài lai sau x năm ($1 \leq x \leq 11$).

$$\text{Ta có } h(x) = \int h'(x) dx = \int \frac{3}{2x} dx = \frac{3}{2} \ln|x| + C = \frac{3}{2} \ln x + C \quad (\text{vì } 1 \leq x \leq 11)$$

$$\text{Vì } h(1) = 2,5 \text{ nên } \ln 1 + C = 2,5 \Rightarrow C = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Chiều cao của cây Xoài lai sau } x \text{ năm } (1 \leq x \leq 11) \text{ là } h(x) = \frac{3}{2} \ln x + \frac{5}{2} \quad (m)$$

$$\text{b) Ta có } h(x) = \frac{3}{2} \ln x + \frac{5}{2} \quad (m)$$

$$\text{Xoài lai cao } 4,5 \text{ mét nên } \frac{3}{2} \ln x + \frac{5}{2} = 4,5 \Leftrightarrow \ln x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,8 \text{ (năm).}$$

Vậy sau 3,8 năm thì cây cao 4,5 mét.

Bài 3. Một công nhân bơm nước vào bể chứa nước để sử dụng trong quá trình sản xuất. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 2 giây thì thể tích nước trong bể là $12m^3$. Sau 12 giây thì thể tích nước trong bể là $1872m^3$.



- a) Xác định thể tích nước bơm được sau t giây.
b) Hỏi bơm trong bao lâu thì thể tích nước trong bể bằng $27900(m^3)$?

c) Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 1 phút?

Lời giải

Ta có: $h'(t) = 3at^2 + bt$

Suy ra $h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$

Chọn $t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2$

Sau 2 giây thì thể tích nước trong bể là $12m^3$: $h(2) = 12 \Leftrightarrow 8a + 2b = 12$

Sau 12 giây thì thể tích nước trong bể là $1872m^3$: $h(12) = 1872 \Leftrightarrow 1728a + 72b = 1872$

Ta có hệ: $\begin{cases} 8a + 2b = 12 \\ 1728a + 72b = 1872 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2$

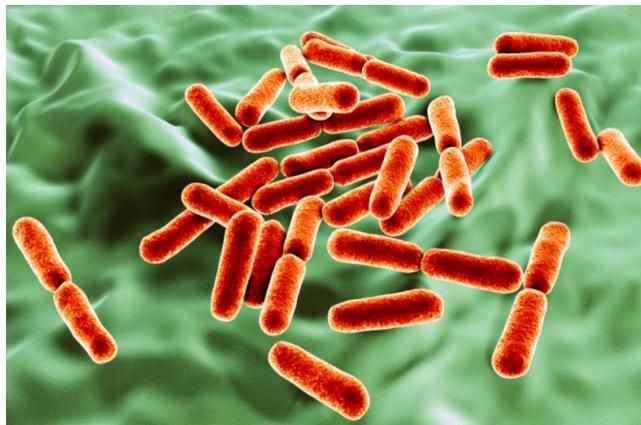
b) Ta có $h(t) = 27900 \Leftrightarrow t^3 + t^2 = 27900 \Leftrightarrow t = 30$ giây

Vậy bơm trong 30 giây thì thể tích nước trong bể bằng $27900(m^3)$

c) Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 1 phút = 60 giây là $h(60) = 60^3 + 60^2 = 219600(m^3)$

Bài 4. Một loài vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t) = \frac{300}{0,25t}$, trong đó, t là thời gian tính bằng

ngày. Với $t = 1$ thì số lượng vi khuẩn là 1000 con. Hỏi sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?



Lời giải

Do vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t) = \frac{300}{0,25t}$ nên hàm số lượng vi khuẩn $P(t)$ tại thời điểm t là

một nguyên hàm của hàm số $f(t) = \frac{300}{0,25t}$.

Từ đó có $P(t) = \int \frac{300}{0,25t} dt = \frac{300}{0,25} \cdot \ln t + C = 1200 \cdot \ln t + C$.

Ta có với $P(1) = 1000 \Leftrightarrow 1200 \cdot \ln 1 + C = 1000 \Rightarrow C = 1000$.

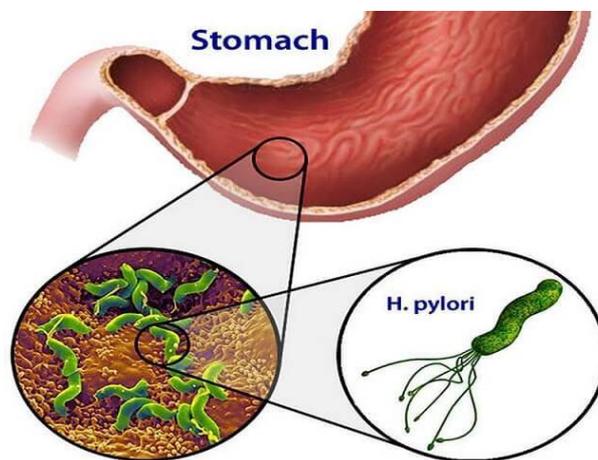
Hàm số biểu diễn số lượng vi khuẩn theo thời gian t là: $P(t) = 1200 \cdot \ln t + 1000$.

Sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là $P(3) = 1200 \cdot \ln 3 + 1000 \approx 2318$ (con).

Bài 5. Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$, biết nếu

phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(t) = \frac{600}{t}$

và ngày đầu tiên bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?



Lời giải

Ta có $F(t) = \int F'(t)dt = \int \frac{600}{t} dt = 600 \ln|t| + C$.

$$F(1) = 2000 \Leftrightarrow 600 \ln|1| + C = 2000 \Leftrightarrow C = 2000$$

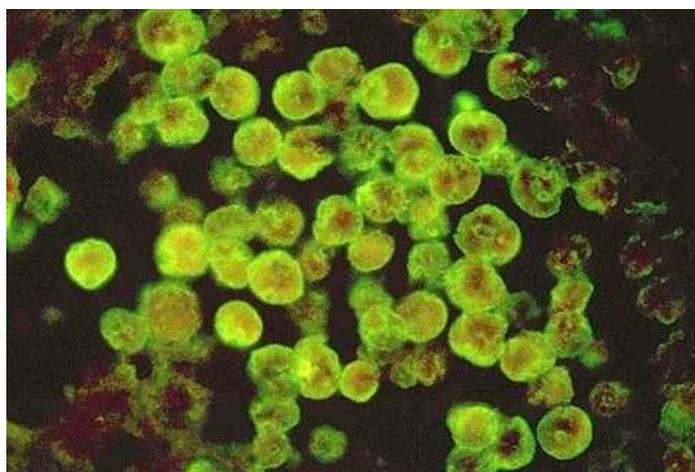
$$\Rightarrow F(t) = 600 \ln|t| + 2000$$

Sau 15 ngày, số vi khuẩn trong dạ dày bệnh nhân là: $F(15) = 600 \ln|15| + 2000 \approx 3625$ (con)

Vì $3625 < 4000$ nên bệnh nhân có cứu chữa được.

Bài 6. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám

vi trùng có 300000 con. Tìm số số lượng vi trùng sau 10 ngày.



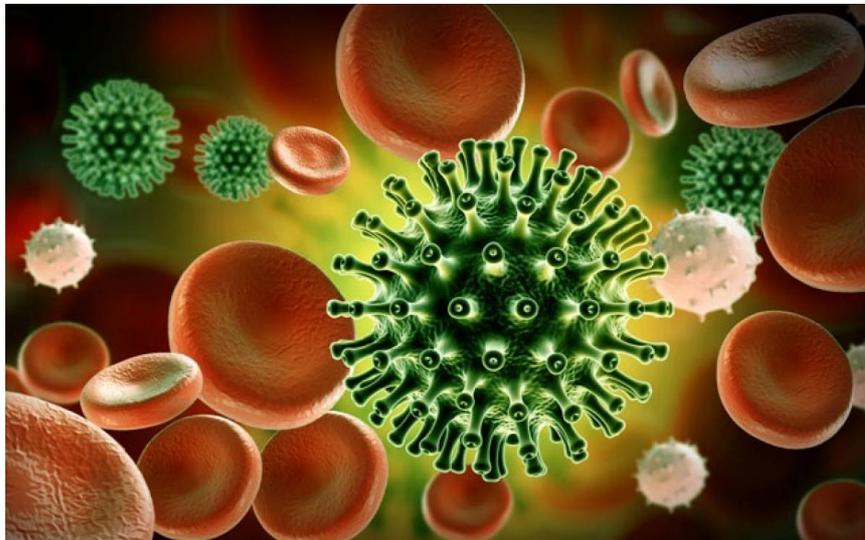
Lời giải

Ta có $N(t) = \int N'(t)dt = \int \frac{2000}{1+2t} dt = 1000 \ln|1+2t| + C$.

$$N(0) = 300000 \Leftrightarrow 1000 \ln|1| + C = 300000 \Leftrightarrow C = 300000$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \ln|1 + 2t| + 300000 \Rightarrow N(10) = 1000 \ln|1 + 2 \cdot 10| + 300000 \approx 303044.$$

Bài 7. Một quần thể virut Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t) = \frac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virut Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Tìm số lượng virut Corona sau 3 giờ.



Lời giải

$$\text{Ta có } P(t) = \int P'(t) dt = \int \frac{5000}{1+0,2t} dt = 5000 \cdot \frac{1}{0,2} \ln(1+0,2t) + C = 25000 \cdot \ln(1+0,2t) + C.$$

$$P(0) = 1000 \Leftrightarrow C = 1000.$$

Vậy biểu thức tính số lượng virut Corona với thời gian t bất kỳ là

$$P(t) = 25000 \cdot \ln(1+0,2t) + 1000.$$

$$\text{Với } t = 3 \text{ giờ ta có } P(3) = 25000 \cdot \ln(1+0,2 \cdot 3) + 1000 \approx 12750,09.$$

Vậy số lượng virut khi $t = 3$ giờ khoảng 12750 con.

Bài 8. Một chiếc cốc chứa nước ở 95°C được đặt trong phòng có nhiệt độ 20°C . Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t = 0$ là thời điểm nước ở 95°C) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi công thức

$$T'(t) = -\frac{3}{2} e^{-\frac{t}{50}} \text{ (}^\circ\text{C/phút)}. \text{ Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm } t = 30 \text{ phút.}$$

Lời giải

Ta có nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút là:

$$T(t) = \int T'(t) dt = \int \left(-\frac{3}{2} e^{-\frac{t}{50}} \right) dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{50}}}{\ln e^{-\frac{1}{50}}} + C = 75 \cdot e^{-\frac{t}{50}} + C$$

Vì $t = 0$ là thời điểm nước ở 95°C nên ta có:

$$T(0) = 95 \Leftrightarrow 75 + C = 95 \Leftrightarrow C = 15 \Rightarrow T(t) = 75.e^{-\frac{t}{50}} + 15.$$

Vậy nhiệt độ của nước tại thời điểm $t = 30$ phút là: $T(30) = 75.e^{-\frac{30}{50}} + 15 \approx 56,16^\circ\text{C}$.

Bài 9. Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây thì điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } Q(t) = \int Q'(t) dt = \int (3t^2 - 6t + 5) dt = t^3 - 3t^2 + 5t + C.$$

$$\text{Vì } Q(1) = 4 \Rightarrow 1 - 3 + 5 + C = 4 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow Q(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1.$$

Suy ra điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$ là $Q(3) = 3^3 - 3.3^2 + 5.3 + 1 = 16(\text{C})$.

Bài 10. Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce (1 ounce = 28,3485 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ

$$B'(t) = \frac{2436e^{-0,193t}}{(1 + 784e^{-0,193t})^2}, \quad 8 \leq t \leq 43 \text{ với } B(t) \text{ là cân nặng tính bằng ounce và } t \text{ là thời gian tính bằng}$$

tuần. Hãy tính trọng lượng của bào thai sau 25 tuần tuổi (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).

Lời giải

Theo giả thiết, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$ nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

$$\text{Khi đó: } B(t) = \int B'(t) dt = \int \frac{2436e^{-0,193t}}{(1 + 784e^{-0,193t})^2} dt$$

$$\text{Đặt } u = 1 + 784e^{-0,193t} \Rightarrow du = 784 \cdot (-0,193) \cdot e^{-0,193t} dt = -151,312e^{-0,193t} dt$$

$$B(t) = -\frac{2436}{151,312} \int \frac{du}{u^2} = \frac{2436}{151,312u} + C = \frac{2436}{151,312 \cdot (1 + 784e^{-0,193t})} + C.$$

Sau 8 tuần tuổi thì bào thai cân nặng khoảng 0,04 ounce nên:

$$B(8) = 0,04 \Leftrightarrow \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193 \cdot 8})} + C = 0,04 \Leftrightarrow C = 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})}$$

Do đó ta có hàm số cân nặng của bào thai là:

$$B(t) = \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193t})} + 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})}, \quad 8 \leq t \leq 43.$$

Cân nặng của bào thai sau 25 tuần tuổi là:

$$B(25) = \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-0,193 \cdot 25})} + 0,04 - \frac{2436}{151,312(1 + 784e^{-1,544})} \approx 2,15.$$

PHẦN B**TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì người người đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. $4(m)$. B. $7,5(m)$. C. $2,5(m)$. D. $5(m)$.



Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } v(t) = 20(m/s) \Rightarrow 20 = -40t + 20 \Rightarrow t = 0$$

$$v(t) = -40t + 20$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t)dt = \int (-40t + 20)dt = -20t^2 + 20t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -20t^2 + 20t + C$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -20t^2 + 20t$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -40t + 20 = 0 \Rightarrow t = 0,5.$$

$$\text{Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được: } s(0,5) = -20(0,5)^2 + 20(0,5) = 5(m)$$

Câu 2. Một ô tô đang chạy với vận tốc $12(m/s)$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?

- A. $24(m)$. B. $12(m)$. C. $6(m)$. D. $18(m)$.



Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } v(t) = 12(m/s) \Leftrightarrow 12 = -6t + 12 \Rightarrow t = 0$$

$$v(t) = -6t + 12(m/s)$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (-6t + 12) dt = -3t^2 + 12t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -3t^2 + 12t + C$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -3t^2 + 12t$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow 0 = -6t + 12 \Leftrightarrow t = 2.$$

$$\text{Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được: } s(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 12(m)$$

Câu 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 70 km/h thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30 (m/s)$.



Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?

A. $51(m)$.

B. $43(m)$.

C. $54(m)$.

D. $45(m)$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi hãm phanh.

$$\text{Ta có: } s(t) = \int (-10t + 30) dt = -5t^2 + 30t + C.$$

$$\text{Do } s(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Khi đó: } s(t) = -5t^2 + 30t \Rightarrow s(3) = -5 \cdot 9 + 30 \cdot 3 = 45(m).$$

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc $36(km/h)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc

$$a(t) = 1 + \frac{t}{3} (m/s^2).$$



Tính quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

- A.** $90(m)$ **B.** $85(m)$ **C.** $80(m)$ **D.** $100(m)$

Lời giải

Chọn A.

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

Ta có: $v(t) = \int a(t) dt = \int \left(1 + \frac{t}{3}\right) dt = t + \frac{t^2}{6} + C$

$v = 36(km/h) = 10(m/s)$

Chọn $t = 0$ lúc ô tô bắt đầu tăng tốc, khi đó $v(0) = 10(m/s)$

Do đó: $v(0) = 0 + \frac{0^2}{6} + C \Rightarrow C = 10$

$\Rightarrow v(t) = \frac{t^2}{6} + t + 10$

Ta lại có: $s(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{t^2}{6} + t + 10\right) dt = \frac{t^3}{18} + \frac{t^2}{2} + 10t + C_1.$

Do $s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$

Khi đó: $s(t) = \frac{t^3}{18} + \frac{t^2}{2} + 10t \Rightarrow s(6) = \frac{6^3}{18} + \frac{6^2}{2} + 10 \cdot 6 = 90(m)$

Câu 5. Một vật chuyển động với vận tốc $10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là

$a(t) = 3t + t^2 (m/s^2).$ Tính quãng đường vật đi được trong khoảng 10s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

- A.** $\frac{130}{3}(m).$ **B.** $130(m).$ **C.** $\frac{3400}{3}(m).$ **D.** $\frac{4300}{3}(m).$

Lời giải

Chọn D.

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

$$\text{Ta có: } v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$$

Chọn $t = 0$ lúc ô tô bắt đầu tăng tốc, khi đó $v(0) = 10(m/s)$

$$\text{Do đó: } v(0) = \frac{3}{2}.0^2 + \frac{1}{3}.0^3 + C \Rightarrow C = 10$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 10$$

$$\text{Ta lại có: } s(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 10 \right) dt = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + 10t + C_1.$$

$$\text{Do } s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$\text{Khi đó: } s(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + 10t \Rightarrow s(10) = \frac{4300}{3}(m)$$

Câu 6. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$ có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t} (m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là $6(m/s)$. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn đến kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. $11,9(m/s)$. B. $12,9(m/s)$. C. $14,2(m/s)$. D. $13,2(m/s)$.

Lời giải

Chọn B.

Giả sử tại thời điểm ban đầu $t = 0; v(0) = 6(m/s)$

$$\text{Ta có: } v(0) = 6(m/s) \Rightarrow v(t) = \int v'(t) dt = \int \frac{3}{t} dt = 3 \ln|t| + C$$

$$v(0) = 6 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow v(t) = 3 \ln|t| + 6 \Rightarrow v(10) = 3 \ln 10 + 6 \approx 12,9(m/s)$$

Câu 7. Một ca nô đang chạy trên hồ với vận tốc $20(m/s)$ thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được bao nhiêu mét?

- A. $50(m)$. B. $45(m)$. C. $30(m)$. D. $40(m)$.



Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } v(t) = 20(m/s) \Leftrightarrow 20 = -5t + 20 \Rightarrow t = 0$$

$$v(t) = -5t + 20$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (-5t + 20) dt = -\frac{5}{2}t^2 + 20t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 20t + C$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 20t$$

$$\text{Khi ca nô dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow 0 = -5t + 20 \Leftrightarrow t = 4.$$

$$\text{Từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được: } s(4) = -\frac{5}{2}.4^2 + 20.4 = 40(m)$$

Câu 8. Một máy bay cất cánh từ sân bay Cam Ranh với vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5(m/s)$. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

A. 36m .

B. 252m.

C. 1134m.

D. 966m.



Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$$v(t) = 3t^2 + 5$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 + 5) dt = t^3 + 5t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = t^3 + 5t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = t^3 + 5t$$

$$\text{Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 là: } s(4) = 4^3 + 5.4 = 84m$$

$$\text{Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 10 là: } s(10) = 10^3 + 5.10 = 1050m$$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là: $s(10) - s(4) = 966m$

Câu 9. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

A. $6(m/p)$.

B. $7(m/p)$.

C. $9(m/p)$.

D. $8(m/p)$.



Lời giải

Chọn D.

Ta có: $v(t) = 10t - t^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq 10$

$$v(t) = 10t - t^2$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (10t - t^2) dt = 5t^2 - \frac{t^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow s(t) = 5t^2 - \frac{t^3}{3} + C$$

Chọn $t = 0 \Rightarrow s(0) = -162 \Rightarrow -162 = C$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{t^3}{3} + 5t^2 - 162$$

$$\text{Khi bắt đầu tiếp đất thì: } s(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{t^3}{3} + 5t^2 - 162 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t \approx -4,93(L) \\ t \approx 10,93(L) \\ t = 9(N) \end{cases}$$

Khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là: $v(9) = 10 \cdot 9 - 9^2 = 9(m/p)$

Câu 10. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 25 - 9,8t(m/s)$. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau:

A. $30,9(m)$.

B. $64,8(m)$.

C. $61,8(m)$.

D. $31,9(m)$.



Lời giải

Chọn B.

Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t) = \int (25 - 9,8t) dx = 25t - 4,9t^2 + C$

$$\Rightarrow s(t) = 25t - 4,9t^2 + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = 25t - 4,9t^2$$

Khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow 25 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{125}{49} (s)$

Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là:

$$s\left(\frac{125}{49}\right) = 2 \left[25 \cdot \frac{125}{49} - 4,9 \cdot \left(\frac{125}{49}\right)^2 \right] \approx 64,8 (m)$$

Câu 11. Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây

$v(t) = -10t + 16 (m/s)$. Công thức nào sau đây tính độ cao của quả bóng theo thời gian t ?

A. $h(t) = -5t^2 + 16t + C$.

B. $h(t) = -5t^2 + 16t + 20$.

C. $h(t) = 5t^2 - 16t + 20$.

D. $h(t) = 5t^2 - 16t + C$.



Lời giải

Chọn B.

Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t .

Suy ra: $h'(t) = v(t)$ do đó $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$

Ta có: $\int(-10t+16)dt = -5t^2 + 16t + C$.

Do quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ nên tại thời điểm $t = 0$ thì $h = 20$.

Hay $h(0) = 20 \Rightarrow C = 20$ nên $h(t) = -5t^2 + 16t + 20$.

Câu 12. Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{3t}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 10 giây là bao nhiêu cm? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

A. 25,6(cm).

B. 42,1(cm).

C. 21,2(cm).

D. 23,3(cm).



Lời giải

Chọn D.

Ta có: $h(t) = \int h'(t) dt = \int \sqrt[3]{3t} dt = \frac{3t}{4} \sqrt[3]{3t} + C$.

Lúc đầu $t = 0$, bể không có nước $\Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow h(t) = \frac{3t}{4} \cdot \sqrt[3]{3t} \Rightarrow h(10) \approx 23,3$.

Câu 13. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \frac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250.000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 272304 con

B. 212302 con

C. 242102 con

D. 252302 con.



Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có : } N'(t) = \frac{1000}{t}$$

$$\Rightarrow N(t) = \int \frac{1000}{t} dt = 1000 \ln|t| + C$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \ln|t| + C$$

$$\text{Chọn } t = 1 \Rightarrow N(1) = 250000 \Rightarrow C = 250000$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \ln|t| + 250000$$

số lượng vi rút sau 10 ngày là: $N(10) = 1000 \ln 10 + 250000 \approx 252302$

Câu 14. Một vườn ươm cây Bạch Đàn cung cấp trồng rừng để phủ đồi trọc. Biết tốc độ tăng trưởng trong suốt t năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = \frac{1}{2}t + 4$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm). Cây con khi được ươm có chiều cao 20 cm. Sau 5 năm, cây được ươm cao bao nhiêu centimét?

A. 7,25(cm).

B. 6,25(cm).

C. 5,5(cm).

D. 8,5(cm).



Lời giải

Chọn B.

$h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t) = \frac{1}{2}t + 4$.

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int \left(\frac{1}{2}t + 4 \right) dt = \frac{1}{4}t^2 + 4t + C.$$

$$\text{Khi đó } h(t) = \frac{1}{4}t^2 + 4t + C.$$

Vì cây con khi được trồng cao 5cm nên $h(0) = 20$ suy ra $C = 20$ nên $h(t) = \frac{1}{4}t^2 + 4t - 20$.

Sau 5 năm, cây có chiều cao là: $h(5) = \frac{1}{4}5^2 + 4 \cdot 5 - 20 = 6,25(cm)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 15. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



a) Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh theo hàm $s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

c) Xe ô tô gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật.

d) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô không va chạm với chướng ngại vật.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t) = \int v(t) dx = \int (-3t + 15) dx = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$$

$$\text{b) Ta có: } s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5.$$

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây

c) Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường: $s(5) = -\frac{3 \cdot 5^2}{2} + 15 \cdot 5 = 37,5(m)$

Do $50 > 37,5$ nên xe ô tô dừng hẳn trước khi va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn không xảy ra.

d) Người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh nên xe đi được quãng đường $15m$ trong 1 giây

Tổng quãng đường xe đi được đến khi dừng hẳn là : $15 + 37,5 = 52,5(m)$

Do $50 < 52,5$ nên xe ô tô va chạm chướng ngại vật.

Câu 16. Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe.



a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 6 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn là 39 mét.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $v(t) = \int a(t) dt$

b) $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

c) $v(t) = \int a(t) dt = \int -3dt = -3t + C$.

$v(0) = -3 \cdot 0 + C = 15 \Rightarrow C = 15$. Suy ra $v(t) = -3t + 15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Rightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5$ giây.

d) $s(t) = \int v(t) dt = \int -3t + 15 dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$.

$s(0) = -\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(5) = 37,5$ mét.

Câu 17. Một xe đạp chuyển động với gia tốc $a(t) = 4 \cos t$ (m/s²). Tại thời điểm bắt đầu chuyển động vật có vận tốc bằng 0.



a) Vận tốc của xe đạp được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 4 \cos t$ (m/s).

b) Vận tốc của xe đạp tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là 2 (m/s)

c) Tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của xe đạp là $\sqrt{2}$ (m/s)

d) Gia tốc của xe đạp tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}$ (m/s²)

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int 4 \cos t dt = 4 \sin t + C$. Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, xe đạp có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0) = 0$ hay $C = 0$.

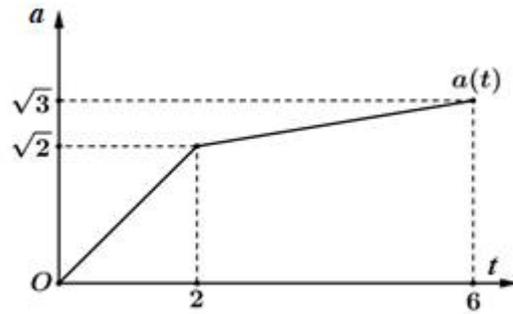
Vậy $v(t) = 4 \sin t$.

b) Vận tốc của xe đạp tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 2$ (m/s).

c) Vận tốc của xe đạp tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ là $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$ (m/s)

d) Gia tốc của xe đạp tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) là: $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$ (m/s²)

Câu 18. Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$ và hàm số vận tốc là $v(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0) = 1$ (m/s).



a) Tại thời điểm $t = 2$ giây, gia tốc của vật là $1,4 (m/s^2)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

b) Gia tốc của vật bằng $\sqrt{3} (m/s^2)$ tại thời điểm $t = 6$ giây.

c) Vận tốc của vật được biểu diễn theo hàm $v(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{8}t^2 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}t + C & \text{khi } 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$, với C là

hằng số thực.

d) Tại thời điểm $t = 6$ giây, vận tốc của vật là $1,73 (m/s)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) Từ đồ thị, ta có: Tại thời điểm $t = 2$ giây, gia tốc của vật là $\sqrt{2} \approx 1,4 (m/s^2)$

b) Từ đồ thị, ta có: Gia tốc của vật bằng $\sqrt{3} (m/s^2)$ tại thời điểm $t = 6$ giây.

c) Từ đồ thị, ta có : $a(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}t + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} & \text{khi } 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$.

Mà $v(0) = 1 (m/s)$ nên $v(t) = \int a(t) dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{8}t^2 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}t + C & \text{khi } 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$, với C là hằng số

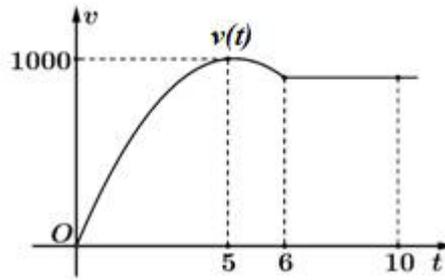
thực.

d) Vì vận tốc là hàm số liên tục nên :

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{x \rightarrow 2^+} v(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 2}{2}.$$

Do đó $v(6) = 1 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \approx 8,71 (m/s)$.

Câu 19. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 mét/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều. Gọi $s(t)$ là hàm số quãng đường và $v(t)$ là hàm số vận tốc của chuyển động ô tô.



- a) Trong 6 phút đầu tiên, vận tốc của xe ô tô được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = -40t^2 + 100t$, với $t \in [0; 6]$.
- b) Trong 6 phút đầu tiên, quãng đường của xe ô tô được biểu diễn bởi hàm số $s(t) = -\frac{40}{3}t^3 + 50t^2$, với $t \in [0; 6]$.
- c) Trong khoảng 6 phút đầu, ô tô đi được quãng đường là $4320(m)$.
- d) Quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là $8160(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Trong 6 phút đầu tiên, vận tốc của xe ô tô được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol: $v(t) = at^2 + bt$, với $t \in [0; 6]$.

Dựa vào đồ thị ta tính được: $a = -40; b = 400$

Do đó hàm số vận tốc của ô tô là: $v(t) = -40t^2 + 400t$ với $t \in [0; 6]$

b) Trong khoảng 6 phút đầu, hàm số quãng đường là: $s(t) = \int (-40t^2 + 400t) dt = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2 + C$.

Tại thời điểm xe ô tô xuất phát ta có $t = 0$ và $s(0) = 0$ suy ra $C = 0$ nên $s(t) = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2$.

c) Ta có: $s(t) = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2$

Do đó, trong khoảng 6 phút đầu, ô tô đi được quãng đường là: $s(6) = -\frac{40}{3} \cdot 6^3 + 200 \cdot 6^2 = 4320m$

d) Trong 4 phút, tiếp theo xe chuyển động thẳng đều với vận tốc: $v(6) = -40 \cdot 6^2 + 400 \cdot 6 = 960(m/s)$

Do đó, 4 phút tiếp theo ô tô đi được quãng đường là $960 \cdot 4 = 3840(m)$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là $4320 + 3840 = 8160(m)$ m.

Câu 20. Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây

$$v(t) = -0,8t + 4,16 \text{ (m/s)}.$$



a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2(m)$, với $t \geq 0$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = 5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016(m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t = 10,5(s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) $h(t) = \int v(t) dt = \int (-0,8t + 4,16) dt = -0,4t^2 + 4,16t + C.$

Mà $h(0) = 2,2$ nên $C = 2,2$ nên $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2(m).$

b) Xét $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2$, với $t \geq 0$.

$$\text{Max}[h(t)] = -0,4(t^2 - 10,4t + 27,04) + 13,016 = -0,4(t - 5,2)^2 + 13,016 \leq 13,016$$

Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = 5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $h(5,2) = 13,016(m)$.

d) Quả cầu chạm đất khi $h(t) = 0 \Leftrightarrow -0,4t^2 + 4,16t + 2,2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 10,9 \\ t \approx -0,5 \end{cases}$

Vì $t > 0$ nên chọn $t \approx 10,9(s)$.

Câu 21. Cây keo lai là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh, hiệu quả kinh tế. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{9}{x}$ (mét/năm).



a) Chiều cao của một cây sau khi trồng x năm $h(x)$ là: $h(x) = 9 \ln x + C$ (m), với $x > 0$.

b) Sau 4 năm cây cao $20,5(m)$ (kết quả làm tròn đến chữ số hàng thập phân thứ nhất).

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ tăng dần.

d) Người ta thường thu hoạch cây keo lai khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Khi đó, cây keo được trồng từ 10 hoặc 11 năm.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có: $h'(x) = \frac{9}{x} \Rightarrow h(x) = \int \frac{9}{x} dx = 9 \ln |x| + C = 9 \ln(x) + C$ (vì $x > 0$)

b) Ta có: $h(x) = 9 \ln x + C$ (m)

Vì sau năm đầu tiên cây cao $8m$ nên $h(1) = 8 \Rightarrow 9 \ln(1) + C = 8 \Rightarrow C = 8$

$\Rightarrow h(x) = 9 \ln x + 8 \Rightarrow h(4) = 9 \ln 4 + 8 \approx 20,5(m)$.

Vậy sau 4 năm cây cao khoảng $20,5(m)$.

c) Ta có tốc độ phát triển của cây là hàm số $h'(x) = \frac{9}{x} \Rightarrow h''(x) = \frac{-9}{x^2} < 0$ nên $h'(x)$ là hàm nghịch biến.

Do đó tốc độ phát triển của cây sẽ giảm dần trong 10 năm đầu.

d) Ta có $26 \leq h(x) \leq 28 \Rightarrow 26 \leq 9 \ln(x) + 8 \leq 28 \Rightarrow 7,39 \leq x \leq 9,23$

Vậy sau 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Câu 22. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng cm) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t .



a) Độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t là $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3}$, với $t \geq 0$.

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3}$ (cm).

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 8 tuần đầu tiên.

d) Vào thời điểm cây cà chua phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt được $\frac{4405}{81}$ (cm).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Do $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$ nên

$$h(t) = \int v(t)dt = \int (-0,1t^3 + t^2)dt = \int (-0,1t^3 + t^2)dt = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C.$$

Nên $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0) = 5$ suy ra $C = 5$.

Vậy $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5, t \geq 0$.

b) Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5$ với $t \geq 0$.

Ta có: $h'(t) = \frac{-t^3}{10} + t^2 = \frac{t^2}{10}(-t + 10)$ suy ra $h'(t) = 0$ khi $t = 0$ hoặc $t = 10$.

Bảng biến thiên:

t		0		10		$+\infty$
$h'(t)$			+	0	-	
$h(t)$		0	$\frac{265}{3}$			$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ tại $t = 10$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3}$ (cm).

c) Cây tăng trưởng khi $v(t) > 0 \Leftrightarrow -0,1t^3 + t^2 > 0 \Rightarrow t < 10$.

Vậy giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 10 tuần.

d) Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$ với $t \geq 0$.

Ta có: $v'(t) = -0,3t^2 + 2t = -0,3t\left(t - \frac{20}{3}\right)$, suy ra $v'(t) = 0$ khi $t = 0$ hoặc $t = \frac{20}{3}$.

Bảng biến thiên:

t		0		$\frac{20}{3}$		$+\infty$
$v'(t)$			+	0	-	
$v(t)$		0	$\frac{400}{27}$			$+\infty$

Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{400}{27}$ tại $t = \frac{20}{3}$.

$$\text{Khi đó: } h\left(\frac{20}{3}\right) = -\left(\frac{20}{3}\right)^4 + \frac{\left(\frac{20}{3}\right)^3}{3} + 5 = \frac{4405}{81}.$$

Câu 23. Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$. Trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 15$), $B'(t)$ được tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.



- a) Số lượng khách tham dự lễ hội được biểu diễn hàm $B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95$, với $0 \leq t \leq 15$.
- b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là 2300 khách.
- c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 10 giờ.
- d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Ta có $B(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$.

$$\text{Do đó } B(t) = \int (20t^3 - 300t^2 + 1000t) dt = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C.$$

$$\text{Nên } B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C.$$

Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên $B(1) = 405 + C = 500 \Rightarrow C = 95$.

$$\text{Vậy } B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95, \quad 0 \leq t \leq 15.$$

b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là: $B(3) = 5 \cdot 3^4 - 100 \cdot 3^3 + 500 \cdot 3^2 + 95 = 2300$ (khách).

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $B(t)$ trên đoạn $[0; 15]$.

$$\text{Ta có: } B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \\ t = 10 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } B(0) = 95; B(5) = 3220; B(10) = 95; B(15) = 28220.$$

Vậy Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 15 giờ,

d) Ta tìm t để hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 15]$.

$$\text{Ta có: } B''(t) = 60t^2 - 600t + 1000 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Ta có: $B'(0) = 0; B'\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{3}\right) \approx 962,25; B'\left(\frac{15+5\sqrt{3}}{3}\right) \approx -962,25; B'(15) = 15000$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ trên đoạn $[0;15]$ bằng 15000 tại $t = 15$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Câu 24. Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$ (con/giờ).

a) $f(t) = \frac{t^3}{3} - 8t^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

b) Số lượng vi sinh vật tăng trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó giảm dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có: $\int (t^2 - 8t) dt = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C$.

b) Ta có: $f'(t) > 0$ khi $8 < t < 10$ và $f'(t) < 0$ khi $3 < t < 8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Ta có: $f'(t) > 0$ khi $8 < t < 10$ và $f'(t) < 0$ khi $3 < t < 8$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3	8	10	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$				

d) Ta có: $f(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C$.

Do $f(3) = 50 \Rightarrow \frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3^2 + C = 50 \Rightarrow C = 77$.

Suy ra $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 77 \Rightarrow f(6) = 5$.

Câu 25. Vào năm 2014, dân số Việt Nam khoảng 90,7 triệu người. Giả sử dân số Việt Nam sau t năm

được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi

$$S'(t) = 1,2698.e^{0,014t}, \text{ với } t \text{ là số năm kể từ năm 2014, } S'(t) \text{ tính bằng triệu người/ năm.}$$

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$

b) $S(t) = 90,7.e^{0,014t} + 90,7$

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số Việt Nam năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/ năm) khoảng 1,7 triệu người/ năm

d) Theo công thức trên, dân số Việt Nam năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 100 triệu người/ năm

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Ta có $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) Ta có $\int S'(t) dt = \int 1,2698.e^{0,014t} dt = 1,2698 \int (e^{0,014})^t dt = \frac{1,2698.e^{0,014t}}{0,014} + C = 90,7.e^{0,014t} + C$

Vì $S(0) = 90,7$ nên $C = 0$.

Suy ra $S(t) = 90,7.e^{0,014t}$.

c) Tốc độ tăng dân số Việt Nam năm 2034 là $S'(20) = 1,2698.e^{0,014.20} \approx 1,7$ (tr người/ năm).

d) Dân số Việt Nam năm 2034 là $S(20) = 90,7.e^{0,014.20} \approx 120$ (triệu người).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 26. Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox , với vận tốc cho bởi công thức $v(t) = 3t^2 + 4t$ (m/s) với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 1$. Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là bao nhiêu mét?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

Phương trình tọa độ của chất điểm là nguyên hàm của phương trình vận tốc nên ta có:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 + 4t) dt = t^3 + 2t^2 + C$$

Tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 1$ nên khi $t = 0$ có $C = 1 \Rightarrow x(t) = t^3 + 2t^2 + 1$.

Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là $x = 4$ (m).

Câu 27. Một xe tải đang chuyển động đều với gia tốc $v_0 = 15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s²). Tính quãng đường (làm tròn kết quả đến phần chục của mét) xe tải đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt đầu tăng tốc.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 69,8

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int (t^2 + 4t) dt = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + C.$$

$$\text{Mà } v(0) = 15 \Rightarrow C = 15 \text{ nên } v(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15.$$

$$S(t) = \int \left(\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15 \right) dt = \frac{t^4}{12} + \frac{2t^3}{3} + 15t + C_1$$

$$S(0) = \frac{0^4}{12} + \frac{2 \cdot 0^3}{3} + 15 \cdot 0 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{2t^3}{3} + 15t \Rightarrow S(3) = \frac{3^4}{12} + \frac{2 \cdot 3^3}{3} + 15 \cdot 3 = \frac{279}{4} \approx 69,8 \text{ (m)}$$

Câu 28. Một xe mô tô đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15(\text{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t (\text{m/s}^2)$. Vận tốc xe mô tô đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc bằng bao nhiêu mét/giây?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 41

Ta có $a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C (C \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết $v(0) = 15 \Rightarrow C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$ nên $v(3) = \frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 + 15 = 41(\text{m/s})$.

Câu 29. Một xe taxi chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (giây) là $a(t) = 2t - 7 (\text{m/s}^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $10 (\text{m/s})$, hỏi sau bao nhiêu giây thì xe taxi đạt vận tốc 18 m/s ?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 8

Ta có $v(t) = \int (2t - 7) dt = t^2 - 7t + C$.

Vận tốc ban đầu bằng $10(\text{m/s})$ nên $v(0) = 10 \Leftrightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = t^2 - 7t + 10$.

Chất điểm đạt vận tốc $18(\text{m/s})$ khi và chỉ khi $t^2 - 7t + 10 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 8. \end{cases}$

Vậy sau 8s thì chất điểm đạt vận tốc $18(m/s)$.

Câu 30. Một vận động viên đạp chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0 = 10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi là $a = 2(m/s^2)$. Tính quãng đường (đơn vị mét) vận động viên đạp chiếc xe đạp đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 39

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int 2 dt = 2t + C.$$

$$\text{Vì } v(0) = 10 \text{ nên } C = 10 \Rightarrow v(t) = 2t + 10.$$

$$\text{Khi đó } s(t) = \int v(t) dt = \int (2t + 10) dt = t^2 + 10t + C_1.$$

$$\text{Vì } s(0) = 0 \text{ nên } C_1 = 0 \Rightarrow s(t) = t^2 + 10t \text{ (m)}$$

Quãng đường xe đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là $s(3) = 3^2 + 10 \cdot 3 = 39 \text{ (m)}$.

Câu 31. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(m/s)$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 37,5

$$\text{Ta có quãng đường xe đi được là } s(t) = \int v(t) dt = \int (-3t + 15) dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C.$$

Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$. Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Rightarrow t = 5$.

Suy ra quãng đường đi được là $s(5) = 37,5(m)$.

Câu 32. Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t) = \cos x\left(t + \frac{\pi}{2}\right) (m/s^2)$. Biết tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều

bằng 0. Tính quãng đường (làm tròn kết quả đến phần chục của mét) đi được của vật đó trong $\frac{\pi}{2}$ giây đầu tiên.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0,57

$$a(t) = \cos x\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$$

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là: $v(t) = \int a(t) dt = \int \sin t dt = -\cos t + C$

$$\Rightarrow v(t) = -\cos t + C$$

Ta có $v(0) = 0 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow v(t) = -\cos t + 1$.

$$\Rightarrow s(t) = \int (-\cos t + 1) dt = -\sin t + t + C_1 \text{ và } s(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0.$$

$$\Rightarrow s(t) = -\sin t + t.$$

$$\Rightarrow s\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \approx 0,57(m)$$

Câu 33. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 24,5 - 9,8t (m/s)$. Tính quãng đường (mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.



Trả lời:

Lời giải

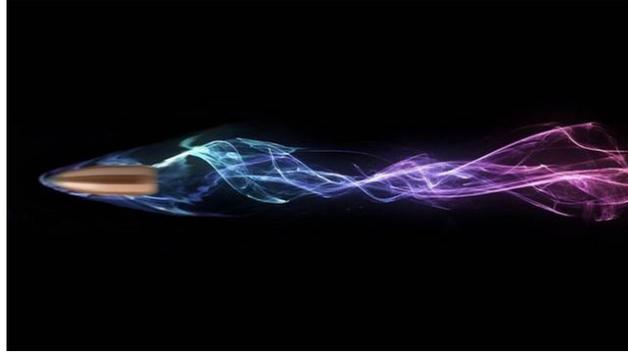
Đáp án: 29,4

Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t) = \int (24,5 - 9,8t) dt = 24,5t - 4,9t^2 + C \Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2 + C$.

Chọn $t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2$

Vậy sau 2 giây đầu quãng đường viên đạn đi là $s(2) = 24,5 \cdot 2 - 4,9 \cdot 2^2 = 29,4(m)$

Câu 34. Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72(m/s)$ bắt đầu từ độ cao $2(m)$. Hãy xác định chiều cao (mét) của viên đạn sau thời gian 10 giây đầu tiên kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9,8(m/s^2)$.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 232

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là: $v(t) = \int -9,8dt = -9,8t + C_1$

Do $v(0) = 72$ nên $v(0) = -9,8 \cdot 0 + C_1 = 72 \Leftrightarrow C_1 = 72 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 72$.

Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-9,8t + 72) dt = -4,9t^2 + 72t + C_2$$

Vì $s(0) = 2$ nên $s(0) = -4,9 \cdot 0^2 + 72 \cdot 0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 72t + 2$.

Vậy sau khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao:

$$s(10) = -4,9 \cdot 10^2 + 72 \cdot 10 + 2 = 232(m).$$

Câu 35. Một xe gắn máy đang chuyển động với vận tốc $6(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc

$a(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc

của xe gắn máy sau 10 giây bằng bao nhiêu mét/giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 13

$$\text{Ta có } v(t) = \int \frac{3}{t+1} dt = 3\ln|t+1| + C.$$

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t=0$ thì $v=6(m/s)$ nên ta có $3\ln 1 + C = 6 \Leftrightarrow C = 6$.

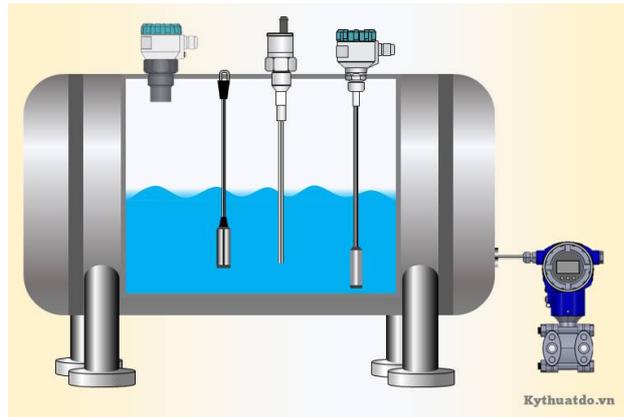
$$\text{Suy ra } v(t) = 3\ln|t+1| + 6 \quad (m/s).$$

$$\text{Tại thời điểm } t=10s \Rightarrow v(10) = 3\ln 11 + 6 \approx 13(m/s).$$

Câu 36. Gọi $h(t)$ (đơn vị: mét) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng

$$h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t} \quad (m/s) \text{ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây}$$

(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1,64

$$\text{Ta có : } h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$$

$$\Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{5}\sqrt[3]{t} dx = \frac{1}{5} \int t^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{20} t\sqrt[3]{t} + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20} t\sqrt[3]{t} + C$$

$$\text{Chọn } t=0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20} t\sqrt[3]{t}$$

$$\text{Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây: } h(6) = \frac{3}{20} \cdot 6\sqrt[3]{6} \approx 1,64m$$

Câu 37. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên

cây cao $\frac{4}{3}(m)$, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao

nhiều năm cây cao được $\frac{16}{3}$ mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của năm)?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 6,35

$$\text{Ta có } h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$$

$$\Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} + C$$

$$\text{Năm đầu tiên cây cao } \frac{4}{3}(m) \text{ nên } h(1) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{1} + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3}$$

$$\text{cây cao được } \frac{16}{3}(m) \text{ nên } h(t) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \sqrt[4]{t^3} = 4 \Rightarrow t \approx 6,35 \text{ (năm)}$$

Câu 38. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây cao su (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao su cao $3(m)$. Trong 15 năm tiếp theo cây cao su phát triển với tốc độ

$h'(x) = \frac{2}{x}$ (mét/năm). Xác định chiều cao của cây cao su sau 12 năm trồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 8

Chiều cao của cây sau x năm là $h(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| + C = 2 \ln x + C$, do $x > 0$

Sau năm đầu tiên cây cao $3(m)$ do đó ta có $h(1) = 3 \Leftrightarrow 2 \ln 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 3$.

Vậy $h(x) = 2 \ln x + 3 \Rightarrow h(12) = 2 \ln 12 + 3 \approx 8(m)$

Câu 39. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t) = \frac{34}{t^2 + 4t + 4}$ (nghìn người/năm) biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần chục của nghìn người) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 19,3

Ta có: $f'(t) = \frac{34}{t^2 + 4t + 4} = \frac{34}{(t+2)^2} \Rightarrow f(t) = -\frac{34}{t+2} + C$

Chọn mốc thời gian là năm 1990. Dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người nên ta có $f(0) = 3$

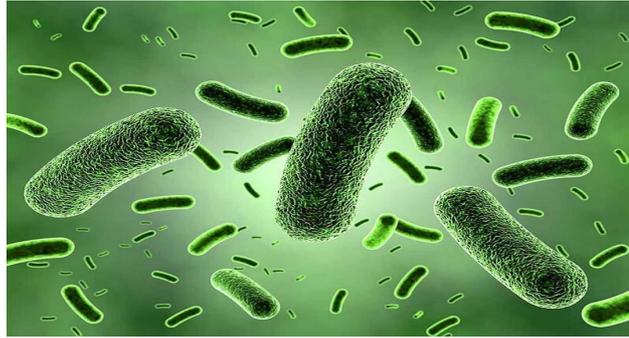
Khi đó $-\frac{34}{2} + C = 3 \Leftrightarrow C = 20$ nên $f(t) = -\frac{34}{t+2} + 20$

Từ năm 1990 đến năm 2035 là 45 năm nên dân số của thị trấn năm 2035 là

$f(45) = -\frac{34}{47} + 20 = \frac{906}{47} \approx 19,3$ (nghìn người).

Câu 40. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t , trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi

khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 3200

Ta có: $P(t) = \int P'(t)dt = \int k\sqrt{t}dt = \int kt^{\frac{1}{2}}dt = k \cdot \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C$.

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } \begin{cases} P(0) = 500 \\ P(1) = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot \frac{2}{3} \cdot 0\sqrt{0} + C = 500 \\ k \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\sqrt{1} + C = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 500 \\ \frac{2}{3}k = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 500 \\ k = 150 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(t) = 100t\sqrt{t} + 500.$$

Do đó, số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày là: $P(9) = 100 \cdot 9\sqrt{9} + 500 = 3200$.

Câu 41. Một đàn con trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t) = \frac{800}{t}$ và ngày đầu tiên, đàn côn trùng có 500 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2342

Số lượng côn trùng ngày thứ t là $K(t) = \int \frac{800}{t} dt = 800 \ln|t| + C$.

Vì ngày đầu tiên, đàn côn trùng có 500 con nên $K(1) = 500 \Leftrightarrow 800 \ln|1| + C = 500 \Leftrightarrow C = 500$

$$\Rightarrow K(t) = 800 \ln|t| + 500$$

Số lượng côn trùng ngày thứ 10 là $K(10) = 800 \ln|10| + 500 \approx 2342$ con.

Câu 42. Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C . Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút ($0 \leq t \leq 5$) được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ ($^\circ\text{C}/\text{phút}$). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt bằng bao nhiêu $^\circ\text{C}$?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 28

Ta có nhiệt độ của bình là $F(t) = \int f(t) dt = \int 3t^2 dt = t^3 + C$.

Vì người ta bắt đầu truyền nhiệt cho bình nuôi cấy từ 1°C nên ta có:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(t) = t^3 + 1 (^\circ\text{C})$$

Vậy nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt là $F(3) = 3^3 + 1 = 28 (^\circ\text{C})$.

Câu 43. Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.



Trả lời:

Lời giải**Đáp án:** 226Số lượng cá thể trong đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng là

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int (8t + 30) dt = 4t^2 + 30t + C \text{ (con)}$$

Vì ban đầu thả 100 cá thể gấu mèo nên $P(0) = 100 \Leftrightarrow C = 100 \Rightarrow P(t) = 4t^2 + 30t + 100$ (con).

Suy ra số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3) = 4.3^2 + 30.3 + 100 = 226 \text{ (con)}$$

Câu 44. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số

$$B'(t) = \frac{1000}{(1 + 0,3t)^2} \text{ với } t \geq 0, \text{ trong đó } B(t) \text{ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ } t. \text{ Số}$$

lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.



Trả lời:

Lời giải**Đáp án:** 10

Theo giả thiết thì số lượng vi khuẩn tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$ nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

$$\text{Khi đó: } B(t) = \int B'(t) dt = \int \frac{1000}{(1 + 0,3t)^2} dt = 1000 \int (1 + 0,3t)^{-2} dt = -\frac{1000}{0,3(1 + 0,3t)} + C$$

Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước nên:

$$B(0) = 500 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1 + 0,3.0)} + C = 500 \Leftrightarrow C = \frac{11500}{3}$$

Suy ra hàm số biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t là: $B(t) = -\frac{1000}{0,3(1 + 0,3t)} + \frac{11500}{3}$.

Số lượng vi khuẩn dưới 3000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn, ta có:

$$B(t) < 3000 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3} < 3000$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} < -\frac{2500}{3} \Leftrightarrow 1+0,3t < 4 \Leftrightarrow t < 10.$$

Vậy vào ngày thứ 10 hồ bơi không còn an toàn, cần phải thay nước mới.

Câu 45. Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$. Trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 0,4 triệu đồng. Chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành) bằng bao nhiêu tỉ đồng?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 64

Ta có $M'(t) = m(t)$ nên $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t) = 800 - 2t$.

Do đó: $M(t) = \int (800 - 2t) dt = 800t - t^2 + C$.

Suy ra: $M(t) = 800t - t^2 + C$, $0 \leq t \leq 400$. Vì $M(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $M(t) = 800t - t^2$.

Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 400 là: $M(400) = 800 \cdot 400 - 400^2 = 160000$.

Chi phí nhân công lao động của công trình đó là: $0,4 \cdot 160000 = 640000$ (triệu đồng) hay 64 (tỉ đồng)

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 46. Một xe gắn máy chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t) = \frac{2}{t+1}(m/s^2)$. Tính vận tốc của xe gắn máy tại giây thứ 20 (là tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét/giây).

**Lời giải**

Ta có vận tốc của xe gắn máy tại thời điểm t là $v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \ln|t+1| + C$.

Vì vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ nên $v(0) = 5 \Leftrightarrow 2 \ln|0+1| + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$.

Nên $v(t) = 2 \ln|t+1| + 5$.

Vậy vận tốc của xe gắn máy tại giây thứ 20 là $v(20) = 2 \ln|20+1| + 5 \approx 11(m/s)$.

Câu 47. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t) = 10t + 500(m^3/s)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu m^3 ?

**Lời giải**

Ta có :

$$h'(t) = 10t + 500$$

$$\Rightarrow h(t) = \int (10t + 500) dx = 5t^2 + 500t + C$$

$$\Rightarrow h(t) = 5t^2 + 500t + C$$

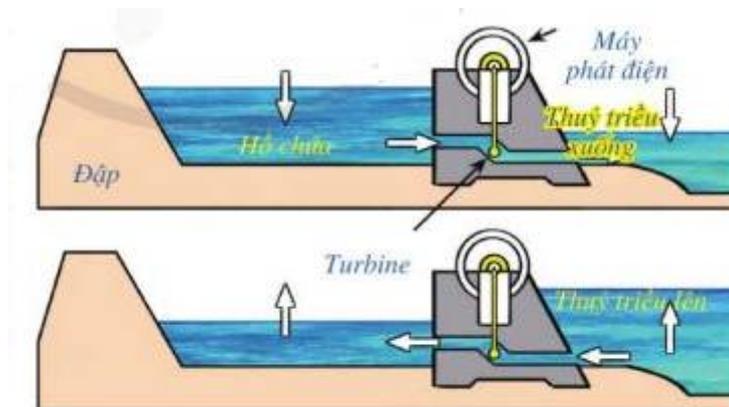
$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = 5t^2 + 500t$$

thủy điện đã xả lũ trong 40 phút = 2400 giây thì thoát đi một lượng nước là:

$$h(2400) = 5 \cdot 2400^2 + 500 \cdot 2400 = 3000(m^3)$$

Câu 48. Mức nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao 8m. Gọi $h_1(m)$ là mực nước trong hồ cao nhất và $h_2(m)$ là mực nước thấp nhất, tính giá trị $h_1 + h_2$.



Lời giải

Ta có

$$h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \int (t^2 - 17t + 60) dt = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + C$$

Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao 8m nên $h(0) = 8 \Rightarrow C = 8$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + 8 \quad (0 \leq t \leq 24)$$

$$\text{Ta có: } h'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 17t + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên:

t	0	5	12	24			
$h'(t)$		+	0	-	0	+	
$h(t)$	8	\nearrow	$\frac{1019}{108}$	\searrow	$\frac{44}{5}$	\nearrow	$\frac{104}{5}$

Mức nước trong hồ cao nhất : $h_1 = \frac{104}{5} = 20,8m$ và mức nước trong hồ thấp nhất $h_2 = 8m$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 = 20,8 + 8 = 28,8(m)$$

Câu 49. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu m^3 ?



Lời giải

Ta có :

$$h'(t) = 3at^2 + bt$$

$$\Rightarrow h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$$

$$\Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2$$

$$\text{Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là } 150m^3 : h(5) = 150 \Leftrightarrow 125a + \frac{25}{2}b = 150$$

$$\text{Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là } 1100m^3 : h(10) = 1100 \Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = t^3 + t^2$$

thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400m^3$

Câu 50. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích (m^3) nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



Lời giải

Từ giả thiết suy ra $h(t) = \int (6at^2 + 2bt) dx = 2at^3 + bt^2 + c$.

$$\text{Lại có } h(0) = 0; h(3) = 90; h(6) = 504 \text{ nên suy ra } \begin{cases} c = 0 \\ 54a + 9b = 90 \\ 432a + 36b = 504 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } h(t) = \frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \Rightarrow h(9) = 1458m^3.$$