CHỦ ĐỀ MŨ LÔGARIT CHỌN LỌC VD - VDC

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT VÀ BÌNH LUẬN

I. CÁC BÀI TOÁN CỦA BGD

Câu 1: (BGD - Đề thi thử nghiệm THPTQG 2017 C20)

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $6^x + (3-m).2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0; 1).

A. $[3;4]$ **B.** $[2;4]$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(3;4)$.

Hướng dẫn.

Biến đổi phương trình $m(1+2^x) = 6^x + 3.2^x \Rightarrow m = \dfrac{6^x + 3.2^x}{1+2^x} = f(x)$ là hàm số liên tục trên khoảng (0; 1); $f'(x) = \dfrac{12^x(\ln 6 - \ln 3) + 6^x \ln 6 + 3.2^x \ln 2}{(1+2^x)^2} > 0$ và $f(0) = 2, f(1) = 4$. **Chọn C.**

Lời bình.

Nhìn chung: các bài toán có tham số m nếu "cô lập được m" thì nên giải theo phương pháp trên. Trong nhiều trường hợp ta đặt ẩn phụ để đưa về phương trình bậc hai (hay phương trình đa thức), từ đó biện luận phương trình theo m.

Bằng máy tính Casio, ta vào **Mode 7** và nhập hàm $f(x)$ trên đoạn $[0;1]$ ta cũng khảo sát được các giá trị của $f(x)$.

Câu 2: (BGD - Đề thi thử nghiệm THPTQG 2017 C21)

Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \log^2_{\frac{a}{b}}(a^2) + 3\log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)$ bằng

A. 19 **B.** 13 **C.** 14 **D.** 15.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b = t \in (0;1) \Rightarrow P = \left(\dfrac{2}{1-t}\right)^2 + 3\left(\dfrac{1}{t} - 1\right) = \dfrac{4}{(1-t)^2} + \dfrac{3}{t} - 3$. Ta có:

$$P = -12 + \left(9 + \frac{4}{(1-t)^2}\right) + \frac{3}{t} \geq -12 + \frac{12}{1-t} + \frac{3}{t} = -12 + 6\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2t}\right)$$

$P \geq -12 + 6.\dfrac{9}{1-t+1-t+2t} = 15$. Dấu bằng có $\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \min P = 15$. **Chọn D.**

Lời bình.

Trong bài toán có cơ số là phân số thì ta tìm cách khử phân số này đi, bằng công thức đổi cơ số:

$\log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) = \left[\log_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right)\right]^2 = \left[2\log_{\frac{a}{b}}\left(a\right)\right]^2 = \left(\dfrac{2}{\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)}\right)^2 = \dfrac{4}{\left(1-\log_a b\right)^2}$. Cần chú ý đến bình phương của logarit mà nhiều học sinh dễ mắc sai lầm.

Ở đây ta dùng bất đẳng thức để giải toán, tuy nhiên ta có thể khảo sát hàm số ẩn t $P\left(t\right) = \dfrac{4}{\left(1-t\right)^2} + \dfrac{3\left(1-t\right)}{t}$ có dạng bậc hai trên bậc ba, đối với một số học sinh đạo hàm cũng tương đối phức tạp, ngoài ra còn phải tìm nghiệm của đạo hàm, lập bảng biến thiên . . .Như vậy xem như đây bài toán khó nằm ở độ phức tạp và kỹ năng đạo hàm và biến đổi logarit.

Câu 3: (BGD - Đề thi tham khảo THPTQG 2017 C33)

Cho các số thực $a,b>0$ thỏa mãn $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ bằng

A. $-5+3\sqrt{3}$ **B.** $1+\sqrt{3}$ **C.** $-1-\sqrt{3}$ **D.** $-5-3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn.

Từ giả thiết $\log_a b = \sqrt{3} \Rightarrow b = a^{\sqrt{3}}$, khi đó:

$P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \log_{\frac{a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{a}}\left(\sqrt{\dfrac{a}{a^{\sqrt{3}}}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}-2}.\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Lời bình.

Cách giải trên khá cơ bản, tức là dùng phép thế để biến đổi logarit theo a, kết quả không phụ thuộc vào $a,b>0$. Bằng máy tính Casio ta có thể chọn cặp $a,b>0, a\neq 1$ tùy ý để tính. Ở đây cần đòi hỏi kỹ năng biến đổi cơ số, hay là công thức $\log_{a^\beta}\left(b^\alpha\right) = \dfrac{\alpha}{\beta}\log_a b$. Bài toán ở mức VD.

Câu 4: (BGD - Đề thi tham khảo THPTQG 2017 C45)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-2017;2017\right]$ để phương trình $\log\left(mx\right) = 2\log\left(x+1\right)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2017. **B.** 4014. **C.** 2018. **D.** 4015.

Hướng dẫn.

Điều kiện $x>-1, x\neq 0$. Phương trình trở thành $mx = \left(x+1\right)^2 \Rightarrow m = x + \dfrac{1}{x} + 2 = f\left(x\right)$

$\Rightarrow f'\left(x\right) = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Ta có bảng biến thiên:

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m<0 \end{array}\right.$, và m nguyên thuộc $[-2017;2017]$ suy ra $m \in \{-2017;-2016;...;-1\} \cup \{4\}$. **Chọn C.**

Lời bình.

Trên đây ta "trung thành cô lập m" để khảo sát hàm số $f(x)$. Chúng ta có thể đưa về phương trình bậc hai để giải và biện luận theo m, tuy nhiên cũng xét các trường hợp một cách hợp lý nếu không sẽ bỏ sót nghiệm, ngoài ra cũng tương đối dài dòng. Cách giải bằng lập bảng biến thiên là tương đối "*tường minh*" và cũng thường hay sử dụng. Rất dễ bỏ qua trường hợp $m=4$.

Qua đây chúng ta có thể "lấy một số kết quả trung gian" để tạo ra bài toán mới cho học sinh các lớp 9, 10, 11, 12 giải trắc nghiệm hay tự luận, chẳng hạn: "*Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $-2020 \le m \le 2020$ để phương trình $mx=(x+1)^2$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x>-1, x \ne 0$?*"

Câu 5: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M101 C39)

Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$.

A. $m=-4$. **B.** $m=4$. **C.** $m=81$. **D.** $m=44$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_3 x = t$ ta có phương trình $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$. Theo yêu cầu bài toán và định lý Viet, ta có: $\log_3(x_1x_2) = \log_3(x_1) + \log_3(x_2) = t_1 + t_2 \Rightarrow m = \log_3(81) = 4$. **Chọn B.**

Lời bình.

Ta không cần kiểm tra lại xem $m=4$ có thỏa mãn bài toán hay không? Vì đáp án đã cho rõ ràng. Nếu trong đáp án có phương án lựa chọn $m \in \varnothing$ thì ta cần kiểm tra lại $m=4$ có thỏa mãn hay không, hoặc là điều kiện có nghiệm $\Delta > 0$. Bài toán khó hơn nếu đưa vào phương án lựa chọn $m \in \varnothing$.

Nói cách khác: khi dạy định lý Viet, cần chú ý nhấn mạnh là $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$ thì cần có $\Delta \ge 0$ trước đã!. Một ví dụ mà giáo viên hay lấy làm dẫn chứng là $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$ trong khi phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm!.

Câu 6: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M101 C42)

Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$ bằng

A. $P = \dfrac{7}{12}$. **B.** $P = \dfrac{1}{12}$. **C.** $P = 12$. **D.** $P = \dfrac{12}{7}$.

Hướng dẫn.

Biến đổi P theo giả thiết, ta có:

$$P = \log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b} = \frac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x}} = \frac{1}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}} = \frac{12}{7}.$$ **Chọn D.**

Lời bình.

Trên đây là bài toán dễ, tương tự câu **3**, chủ yếu là công thức đổi cơ số. Ta cũng có thể giải theo phương pháp thế theo a, chẳng hạn: $\log_a x = 3, \log_b x = 4 \Rightarrow x = a^3 = b^4 \Rightarrow b = a^{\frac{3}{4}}$,

khi đó $P = \log_{ab} x = \log_{a.a^{\frac{3}{4}}} a^3 = \log_{a^{\frac{7}{4}}} \left(a^3\right) = 3.\dfrac{4}{7} = \dfrac{12}{7}$.

Mặt khác để không phải biến đổi nhiều thì ta cho $a = m^4, b = m^3 \Rightarrow x = m^{12}$

(lấy các giá trị đổi làm số mũ cho nhau, $0 < m \neq 1$), khi đó $ab = m^7$ và dễ dàng có $P = \dfrac{12}{7}$.

Câu 7: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M101 C47)

Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{1 - xy}{x + 2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \dfrac{9\sqrt{11} - 19}{9}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{9\sqrt{11} + 19}{9}$.

C. $P_{\min} = \dfrac{18\sqrt{11} - 29}{21}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{11} - 3}{3}$.

Hướng dẫn.

Biến đổi $\log_3 \dfrac{1 - xy}{x + 2y} + 1 = -\left(3 - 3xy\right) + x + 2y \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{u}{v} = -u + v \Leftrightarrow u + \log_3 u = v + \log_3 v$

Hàm số $f\left(t\right) = t + \log_3 t$ đồng biến nên suy ra $u = v \Leftrightarrow 3 - 3xy = x + 2y$, dùng phép thế,

ta có: $3 - 3x\left(P - x\right) = x + 2\left(P - x\right) \Rightarrow 3x^2 - \left(3P - 1\right)x + 3 - 2P = 0$. Sử dụng điều kiện có

nghiệm $\left(3P - 1\right)^2 - 12\left(3 - 2P\right) \geq 0 \Rightarrow 9P^2 + 18P - 35 \geq 0 \Rightarrow P \geq \dfrac{2\sqrt{11} - 3}{3}$. **Chọn D.**

Lời bình.

Trên đây ta bỏ qua các điều kiện của x,y, nghiễm nhiên xem như chúng tồn tại và giải để có đáp số đúng là được. Nếu đáp án đưa ra một phương án lựa chọn khó hơn là: **Không tồn tại**, khi đó ta cần lập luận chặt chẽ để có kết luận đúng. Chẳng hạn cần có điều kiện $\begin{cases} x,y>0 \\ xy<1 \end{cases}$ và kiểm tra xem dấu bằng xảy ra khi nào? Có thỏa mãn điều kiện hay không?

Mặt khác: các bài toán cho *1 phương trình hai ẩn* thì thường xuyên giải theo PP đánh giá hay PP hàm số.

Cách khác là đưa về một biến để đánh giá hay khảo sát, chẳng hạn: $y=\dfrac{3-x}{3x+2}$ thế vào P, ta có $P=x+\dfrac{3-x}{3x+2}\Rightarrow 3P=3x+\dfrac{11-\left(3x+2\right)}{3x+2}=3x+2+\dfrac{11}{3x+2}-3\ge 2\sqrt{11}-3$, từ đó suy ra $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}\Leftrightarrow 3x+2=\sqrt{11}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{11}-2}{3}, y=\dfrac{\sqrt{11}-1}{3}$ (thỏa mãn $xy<1$) **Chọn D**.

Câu hỏi đặt ra là: Có thể giải bài toán trên bằng máy tính Casio được không? Câu trả lời là được. Vì yêu cầu tìm GTNN nên đầu tiên ta kiểm tra xem trong 4 phương án thì số nào nhỏ nhất? Và ta thử từ đáp án nhỏ nhất trước tiên, lần lượt là $A\approx 1{,}2<D\approx 1{,}22<C\approx 1{,}46$, nhập phương trình như sau: $\log_3\left(\dfrac{1-X\left(1.2-X\right)}{X+2\left(1.2-X\right)}\right)-\left(3X\left(1.2-X\right)+X+2\left(1.2-X\right)-4\right)$ rồi bấm Shift Solve, máy hỏi X ta nhập 0.5 và bấm Shift Solve máy báo lỗi. Sửa thành 1.22 rồi giải lại máy cho đáp số $X\approx 0.54$. Vậy **chọn D**. Tuy nhiên nếu có phương án **Không tồn tại** thì coi chừng!

Câu 8: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M102 C31)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in\left(-\infty;1\right)$. **B.** $m\in\left(0;+\infty\right)$. **C.** $m\in\left(0;1\right]$. **D.** $m\in\left(0;1\right)$.

Hướng dẫn.

Đặt $2^x=t>0$ ta có phương trình $t^2-2t+m=0$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt và dương thì $\begin{cases} \Delta'=1-m>0 \\ t_1t_2=m>0 \end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(0;1\right)$. **Chọn D.**

Lời bình.

Bài toán bậc hai khá đơn giản, bởi vậy không cần thiết "cô lập m" là $m=-t^2+2t$ rồi khảo sát hàm số $f\left(t\right)$, như thế lại trở nên phức tạp hơn. Nói cách khác: chúng ta có thể cô lập m để khảo sát hàm số nhưng không nhất định phải áp dụng "cứng nhắc" để làm cho vấn đề phức tạp hay rắc rối hơn. Đây là điều mà chúng ta có thể nhắc nhở cho học sinh về "sự linh hoạt" trong giải toán thông qua các ví dụ đơn giản, quan trọng hơn là: GV cần làm cho HS tự nhận xét và rút ra kinh nghiệm cho mình. *Không phải cả thầy và trò giải xong bài toán là xong*! Như thế giờ học có lẽ thành công hơn chăng?

Câu 9: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M102 C37)

Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn: $x^2+9y^2=6xy$. Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}\left(x+3y\right)}$.

A. $M=\dfrac{1}{4}$ **B.** $M=1$ **C.** $M=\dfrac{1}{2}$ **D.** $M=\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn.

Biến đổi giả thiết $x^2+9y^2=6xy \Leftrightarrow \left(x+3y\right)^2=12xy$ (*).

Và biến đổi $M=\dfrac{\log_{12}12xy}{\log_{12}\left(x+3y\right)^2}=1$. **Chọn B.**

Lời bình.

Cách giải trên tương đối khái quát, hướng giả thiết và kết luận đến "điểm chung".

Ngoài ra ta có thể nhìn nhận giả thiết ở tính đẳng cấp để rút ẩn và thế: $x^2-6xy+9y^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-3y\right)^2=0 \Leftrightarrow x=3y$, rồi thế vào M, ta có $M=\dfrac{1+\log_{12}3y+\log_{12}y}{2\log_{12}6y}=\dfrac{\log_{12}\left(6y\right)^2}{2\log_{12}6y}=1$.

Hoặc sử dụng máy tính **Casio**, cho $y=1, x=3$ là tính được M.

Câu 10: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M102 C46)

Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+2b$.

A. $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

B. $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{10}-7}{2}$.

C. $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$.

D. $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

Câu 11: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M103 C32)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập các định là $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

Hướng dẫn.

Yêu cầu bài toán là $x^2-2x-m+1>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2>m, \forall x\in\mathbb{R}$ (*). Dễ thấy (*) đúng khi và chỉ khi $m<0$. **Chọn B.**

Lời bình.

Bài toán trên là trường hợp "đặc biệt" của bất phương trình bậc hai.

Để giải ta cũng "đặc biệt" cho $x=1$ là được đáp án. Nói cách khái quát hơn: khi mà giả thiết đặc biệt hóa thì ta cũng đặc biệt hóa theo giả thiết để giải toán.

Câu 12: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M103 C42)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

A. $m<1$. **B.** $m<\frac{2}{3}$. **C.** $m<0$. **D.** $m\le 1$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_2 x = t \Rightarrow t^2 - 2t + 3m - 2 < 0 \Rightarrow \left(t-1\right)^2 < 3-3m$. Để bất phương trình có nghiệm thì ta có $3-3m>0 \Leftrightarrow m<1$. **Chọn A**.

Lời bình.

Đây là minh chứng cho nhận xét trong **câu 11**, khi cho $t=1$ ta sẽ có đáp án đúng. Ngoài ra ta cũng lưu ý là: hàm số logarit có tập giá trị $\mathbb{R}$ nên không cần điều kiện cho t trong trường hợp này, khi mà không có các điều kiện khác như mẫu thức, căn bậc chẵn, ... vì $\log_2 x = t$ $\Leftrightarrow x = 2^t > 0$, miễn sao tồn tại t sẽ cho ta x tương ứng và dương. Một số học sinh có thể sẽ đặt điều kiện cho x trước tiên $x>0$ là đúng nhưng không cần thiết.

Câu 13: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M103 C50)

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $f\left(x\right)+f\left(y\right)=1$ với mọi số thực x,y thỏa mãn $e^{x+y}\le e\left(x+y\right)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Hướng dẫn.

Trước hết ta xét hàm số $g\left(t\right)=e^t-et \Rightarrow g'\left(t\right)=e^t-e=0 \Leftrightarrow t=1; g''\left(t\right)=e^t>0$. Từ đó suy ra $t=1$ là điểm cực tiểu của $g\left(t\right)$, hay $g\left(t\right)\ge g\left(1\right)=0, \forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow e^t\ge et, \forall t\in\mathbb{R}$. Vậy giả thiết $e^{x+y}\le e\left(x+y\right)$ xảy ra khi và chỉ khi $x+y=1$.

Tiếp theo ta có phương trình: $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x+m^2}+\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+m^2}=1, \forall x\in\mathbb{R}$. Đặc biệt cho $x=1$, ta được $\frac{9}{9+m^2}+\frac{1}{1+m^2}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+m^2}=\frac{m^2}{9+m^2} \Rightarrow 9+m^2=m^4+m^2 \Rightarrow m=\pm\sqrt{3}$.

Thử lại với $m^2=3$ thì $\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{9}{9+3.9^x}=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{3}{3+9^x}=1, \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy $S=\left\{\sqrt{3};-\sqrt{3}\right\}$. **Chọn D**.

Lời bình.

Chúng ta chỉ có thể xuất phát từ giả thiết cuối $e^{x+y} \le e(x+y)$ để giải toán, mong tìm mối liên hệ giữa x và y vì hệ thức $f(x)+f(y)=1$ *là một phương trình hai ẩn và còn có tham số*. Trong quá trình giải toán có tham số thì nhiều khi ta đổi vài trò ngược lại: tham số là ẩn cần tìm, các ẩn chính lại xem như tham số thỏa mãn điều kiện nhất định.

Câu hỏi là: Chúng ta có thể giải (hay mò) bài toán bằng máy tính Casio hay không? Câu trả lời là được. Xuất phát từ điều kiện đặc biệt khi cho dấu bằng xảy ra $e^{X+Y}-e(X+Y)=0$, dùng Shift Solve khi máy hỏi Y, ta cho Y tùy ý, chẳng hạn Y = 1, tìm được X = 0. Sau đó nhập điều kiện $\dfrac{9^X}{9^X+M^2}+\dfrac{9^Y}{9^Y+M^2}-1\,\boxed{,}\,M$ Shift Solve nhập M = 0.5 tìm được M = 1,7320508...Và Shift Solve nhập M = - 0.5 tìm được M = -1,7320508...(nhớ là để X, Y cố định). Vậy $m=\pm\sqrt{3}$.

Câu 14: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M104 C31)

Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x-2.3^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=1$.

A. $m=6.$ **B.** $m=-3.$ **C.** $m=3.$ **D.** $m=1.$

Câu 15: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M104 C40)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log(x^2-2x+m+1)$ có tập các định là $\mathbb{R}$.

A. $m=0.$ **B.** $0<m<3.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right.$. **D.** $m>0.$

Câu 16: (Đề thi chính thức THPTQG 2017 M104 C46)

Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$.

A. $S_{\min}=30.$ **B.** $S_{\min}=25.$ **C.** $S_{\min}=33.$ **D.** $S_{\min}=17.$

Hướng dẫn.

Điều kiện để cả hai phương trình có các nghiệm phân biệt là $\Delta=b^2-20a>0 \Leftrightarrow b^2>20a$.

Đến đây ta sử dụng định lý Viet và giả thiết: $x_1x_2>x_3x_4 \Rightarrow \ln x_1+\ln x_2>\ln x_3+\ln x_4$ hay đổi cơ số vế phải là $\ln x_1+\ln x_2>\dfrac{\log x_3+\log x_4}{\log e} \Rightarrow -\dfrac{b}{a}>-\dfrac{b}{5}.\ln 10 \Leftrightarrow a>\dfrac{5}{\ln 10}\approx 2{,}17$.

Vì $a\in\mathbb{N}^*$ nên $a_{\min}=3$. Mà $b^2>20a=60$ nên $b_{\min}=8$. Suy ra $S_{\min}=30$. **Chọn A.**

Lời bình.

Vì thi trắc nghiệm nên ta bỏ qua một số lập luận là $a,b\in\mathbb{N}^*,\Delta>0$ nên các nghiệm x_1,x_2

khác nhau, x_3, x_4 khác nhau và cả 4 số đều dương. Do đó khi lấy logarit các vế thì đều thỏa mãn tồn tại. Nếu giải và lập luận quá đầy đủ và chặt chẽ thì không đủ thời gian cũng như giấy nháp (khoảng 20 trang cho một bài thi!). Tuy nhiên khi dạy học hay ôn tập cho học sinh thì chúng ta cũng cần nhắc nhở thêm hoặc lấy ví dụ phản chứng.

Qua đây và nhiều bài toán khác, chúng ta cũng thấy được và cũng *cần làm cho học sinh thấy được* sự mở rộng ứng dụng của định lý Viet ở chỗ: Định lý Viet có thể áp dụng khái quát hơn đối với các phương trình có ẩn $u(x)$ hay $u(x,y)$ dạng $au^2 + bu + c = 0$. Ý nghĩa là: không cần chuyển đổi trực tiếp giữa các biến, cụ thể hơn ta cũng hay áp dụng với $a^{u(x)}$ hoặc $\log_a u(x)$.

Câu 17: (BGD - Đề thi tham khảo THPTQG 2018 C27)

Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \frac{2}{3}$ là

A. $\frac{82}{9}$ **B.** $\frac{80}{9}$ **C.** 9 **D.** 0.

Hướng dẫn.

Viết lại phương trình $\frac{1}{24}(\log_3 x)^4 = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_3 x = \pm 2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}, x = 9$. **Chọn A.**

Câu 18: (BGD - Đề thi tham khảo THPTQG 2018 C34)

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2.12^x + (m-2).9^x = 0$ có nghiệm dương?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3.

Hướng dẫn.

Viết lại phương trình thành $\left(\frac{16}{9}\right)^x - 2.\left(\frac{12}{9}\right)^x + m - 2 = 0 \Rightarrow 3 - m = (t-1)^2, t = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 1$. Từ đó suy ra $3 - m > 0 \Rightarrow m < 3 \Rightarrow m \in \{1;2\}$. **Chọn B.**

Lời bình.

Bài toán yêu cầu "có nghiệm dương" chứ không phải "cả hai nghiệm đều dương". Bởi vậy nếu $m < 3$ thì ít nhất $t = 1 + \sqrt{3-m} > 1$ thỏa mãn bài toán.

Câu 19: (BGD - Đề thi tham khảo THPTQG 2018 C42)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247 **B.** 248 **C.** 229 **D.** 290.

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = t \geq 0$, ta được phương trình $t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$. Mặt khác $u_{n+1} = 2u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân công bội q = 2. Khi đó ta có:

$2+\log u_1-2\log u_{10}=1\Rightarrow \log\left(10u_1\right)-\log\left(u_1.2^9\right)^2=0\Rightarrow 10u_1=2^{18}.u_1^{\,2}\Rightarrow u_1=10.2^{-18}$.

Suy ra $u_n=10.2^{-18}.2^{n-1}>5^{100}\Leftrightarrow 2^{n-18}>5^{99}\Rightarrow n>18+99\log_2 5\approx 247,87$.

Vậy số n nhỏ nhất là 248. **Chọn B.**

Lời bình.

Đối với một số học sinh thấy "biểu thức cồng kềnh" có thể sinh ra tâm lí "e ngại" trong giải toán. Vì thế để tránh tâm lí này thì giáo viên có thể lấy bài trên hay các bài tương tự để rèn luyện cho các em, điều quan tâm hơn là: chúng ta nhấn mạnh các bước giải một cách "*tường minh*" thì các em không còn "đáng ngại" với dạng toán trên:

- Đầu tiên là "giải phương trình vô tỉ như bình thường" ta vẫn làm đấy thôi!

- Thứ hai là "dãy số đã cho là gì?" suy ra số hạng tổng quát?

- Cuối cùng "cho dãy thỏa mãn điều kiện".

Trên đây cũng là các kiến thức và kỹ năng có liên quan được phối hợp trong bài toán. Để rèn luyện cho HS, ta có thể lấy các dãy đơn giản, phương trình vô tỉ nhẹ nhàng, giảm bớt điều kiện.

Câu 20 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M101 C34).

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn.

Đặt $4^x=t>0$ ta có phương trình bậc hai $t^2-4mt+5m^2-45=0$, để có hai nghiệm dương phân biệt thì ta có thể sử dụng các điều kiện về tổng, tích và delta dương, tuy nhiên ta biến đổi tiếp: $\left(t-2m\right)^2=45-m^2$ suy ra điều kiện $\begin{cases}45-m^2>0\\5m^2-45>0,4m>0\end{cases}\Rightarrow m\in\left\{4;5;6\right\}$. **Chọn B.**

Câu 21 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M101 C44).

Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn.

Để cho gọn ta ký hiệu $m=3a+2b+1>1$ và có $\log_m\left(9a^2+b^2+1\right)+\dfrac{1}{\log_m\left(6ab+1\right)}=2$. Đây là phương trình hai ẩn nên ta đánh giá: $\left(9a^2+b^2\right)+1\ge 6ab+1$ từ đó ta có:

$2=\log_m\left(9a^2+b^2+1\right)+\dfrac{1}{\log_m\left(6ab+1\right)}\ge\log_m\left(6ab+1\right)+\dfrac{1}{\log_m\left(6ab+1\right)}\ge 2$, dấu bằng có khi và chỉ khi $\begin{cases}9a^2=b^2\\\log_m\left(6ab+1\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=b\\6ab+1=m=3a+2b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{3}{2}\end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 22 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M101 C46).

Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 21.

Hướng dẫn.

Nhận xét phương trình vừa chứa logarit, vừa chứa mũ nên ta chuyển về biến trung gian:
Đặt $\log_5(x-m) = t \Leftrightarrow x - m = 5^t \Leftrightarrow x = m + 5^t$. Thay vào phương trình ta có $5^x + m = t$ và ta được hệ phương trình $\begin{cases} x = m + 5^t \\ t = m + 5^x \end{cases} \Rightarrow x - t = 5^t - 5^x \Rightarrow x + 5^x = t + 5^t$. Mà hàm số $f(x) = x + 5^x$ đồng biến (vì $f'(x) = 1 + 5^x \ln 5 > 0$) suy ra $x = t \Rightarrow x = m + 5^x$ hay ta có $m = x - 5^x = g(x)$. Ta có $g'(x) = 1 - 5^x \ln 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_5(\ln 5) = \alpha$, $g''(x) = -5^x(\ln 5)^2$ nên α là điểm cực đại của $g(x)$. Từ đó ta có $m \le g(\alpha) \approx -0{,}9$ suy ra $m \in \{-19;-18;...;-1\}$.
Vậy **chọn B**.

Lời bình

Đây là bài toán khá dài, ta phải chuyển về hệ đối xứng loại II. Sau đó sử dụng PP hàm số để giải vòng quanh hai lần. Các câu khác của các mã đề thi năm 2018 giải tương tự.

Câu 23 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M102 C35).

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m.5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử ?

A. 7. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M102 C37).

Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 6. **C.** 22. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 25 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M102 C45).

Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x-m)$ với là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 16. **B.** 9. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 26 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M103 C33).

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao chho phương trình
$4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 27 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M103 C37).

Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 9. **B.** 6. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Câu 28 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M103 C42).

Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25;25)$ để phương trình đã ch có nghiệm?

A. 9. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 26.

Câu 29 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M104 C28).

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử ?

A. 8. **B.** 4. **C.** 19. **D.** 5.

Câu 30 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M104 C48).

Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18;18)$ để phương trình đã cho có nghiệm ?

A. 9. **B.** 19. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 31 (Đề thi chính thức THPTQG 2018 M104 C50).

Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2+b^2+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1) = 2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. $\frac{15}{4}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 32: (BGD - Đề thi tham khảo THPTQG 2019 M001 C31)

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x) = 2-x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Hướng dẫn.

Mũ hóa ta được phương trình $7-3^x = 3^{2-x} = \frac{9}{3^x} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 7.3^x + 9 = 0$. Ta có:

$x_1 + x_2 = \log_3 3^{x_1+x_2} = \log_3(3^{x_1}3^{x_2}) = \log_3 9 = 2$. **Chọn A.**

Câu 33: (BGD - Đề thi tham khảo THPTQG 2019 M001 C39)

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \ge f(1) - e$. **B.** $m > f(-1) - \frac{1}{e}$. **C.** $m \ge f(-1) - \frac{1}{e}$. **D.** $m > f(1) - e$.

Hướng dẫn.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^x, x \in (-1;1)$ có $g'(x) = f'(x) - e^x < 0, \forall x \in (-1;1)$ nên suy ra $\max\limits_{(-1;1)} g(x) < g(-1) = f(-1) - \frac{1}{e}$, từ đó $g(x) < m, \forall x \in (-1;1) \Rightarrow m \geq f(-1) - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Vậy **chọn C**.

Lời bình:

Có thể nhiều học sinh sẽ chọn đáp án **B**, vì giả thiết $x \in (-1;1)$ không có dấu bằng. Chúng ta cần phân tích và chỉ ra cho các em thấy được là: m có thể bằng a, nhưng $g(x) < a$ thì bất đẳng thức $g(x) < m$ vẫn đúng .

Câu 34 (Đề thi chính thức THPTQG 2019 M101 C39).

Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Hướng dẫn.

Điều kiện $x > \frac{1}{3}$. Khi đó ta có $-\log_3 m = \log_3 x - \log_3(3x-1) = \log_3 \frac{x}{3x-1}$ hay là $\frac{1}{m} = \frac{x}{3x-1} \Leftrightarrow m = \frac{3x-1}{x} = 3 - \frac{1}{x}, x > \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < m < 3$. Vì m nguyên nên **chọn A**.

Câu 35 (Đề thi chính thức THPTQG 2019 M101 C50).

Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5\right)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt

A. 49. **B.** 47. **C.** Vô số. **D.** 48.

Hướng dẫn.

Trước hết ta xét phương trình: $4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -\frac{5}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} = \alpha \end{array}\right.$ (*).

Và $\sqrt{7^x - m} = 0 \Rightarrow x = \log_7 m, m \in \mathbb{N}^*$. Đến đây theo yêu cầu bài toán ta xét:

$\left\{\begin{array}{l} x = \log_7 m = 2 \\ 7^\alpha - m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 49$ Hoặc $\left\{\begin{array}{l} 0 < x = \log_7 m < 2 \\ 7^\alpha - m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \{3;4;5;...;48\}$.

Vậy $m \in \{3;4;5;...;48;49\}$. **Chọn B.**

Nhận xét:

Các câu khác của các mã đề thi năm 2019 ta giải tương tự.

Câu 36 (Đề thi chính thức THPTQG 2019 M102 C37).

Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 6. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 7.

Câu 37 (Đề thi chính thức THPTQG 2019 M102 C47).

Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 79. **B.** 80. **C.** Vô số. **D.** 81.

Câu 38 (Đề thi chính thức THPTQG 2019 M103 C36).

Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

A. Vô số. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 39 (Đề thi chính thức THPTQG 2019 M103 C46).

Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt?

A. 123. **B.** 125. **C.** Vô số. **D.** 124.

Câu 40 (Đề thi chính thức THPTQG 2019 M104 C36).

Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3\left(4x-1\right)=-\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 5. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 41 (Đề thi chính thức THPTQG 2019 M104 C48).

Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt

A. Vô số. **B.** 62. **C.** 63. **D.** 64.

II. CÁC BÀI TOÁN CỦA CÁC TRƯỜNG THPT

Câu 42: Cho $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}\left(x+y\right)$. Giá trị của tỉ số $\dfrac{x}{y}$ là

A. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}\left(x+y\right)=t\Rightarrow x=9^t, y=12^t, x+y=16^t$. Ta cần tính $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^t$.

Mà ta có $9^t+12^t=16^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^t-1=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 43: Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_9 a=\log_{12} b=\log_{15}\left(a+b\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}\in\left(3;9\right)$. **B.** $\dfrac{a}{b}\in\left(0;2\right)$. **C.** $\dfrac{a}{b}\in\left(2;3\right)$. **D.** $\dfrac{a}{b}\in\left(9;16\right)$.

Hướng dẫn.

Giải tương tự câu 42.

Câu 44: (THTT – 477)

Nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 2^{18}. **C.** 8. **D.** 2.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_2 a=x,\log_2 b=y\Rightarrow ab=2^{x+y}$. Mặt khác ta có hệ: $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+y=5\\ x+\dfrac{1}{3}y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 45: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(x+y\right)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$

A. 11 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8.

Hướng dẫn.

Giải tương tự câu **42**.

Câu 46: (**THPT Triệu Sơn 3 Thanh Hóa**)

Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn.

Giải tương tự câu **42**.

Câu 47: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $A = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ là:

A. 519. **B.** 729. **C.** 469 **D.** 129.

Hướng dẫn.

Biến đổi $a^{(\log_3 7)^2} = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} = 27^{\log_3 7} = 7^3$. Tương tự: $b^{(\log_7 11)^2} = 49^{\log_7 11} = 11^2$ và

$c^{(\log_{11} 25)^2} = \sqrt{11}^{\log_{11} 25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$. Vậy $A = 7^3 + 11^2 + 5 = 469$. **Chọn C.**

Lời bình.

Trên đây ta đã sử dụng các công thức lũy thừa của lũy thừa và công thức logarit

$$a^{mn} = \left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m; \quad a^{\log_a x} = x.$$

Câu 48: Cho $a > 0, a \neq 1; b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = m$. Giá trị của biểu thức $A = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$ tính theo m là:

A. $\dfrac{2m+3}{3m+6}$. **B.** $\dfrac{2m+3}{3m-6}$. **C.** $\dfrac{2m-3}{3m+6}$. **D.** $\dfrac{2m-3}{3m-6}$.

Hướng dẫn.

Bài này chúng ta giải tương tự như các câu **3** và câu **6**. Chúng ta có thể làm như sau:

Ta thấy trong biểu thức logarit có căn bậc hai và bậc ba nên chọn $a = n^6, 0 < n \neq 1$ ta có

$b = a^m = n^{6m} \Rightarrow A = \log_{\frac{n^{3m}}{n^6}}\left(\dfrac{n^{2m}}{n^3}\right) = \log_{n^{3m-6}}\left(n^{2m-3}\right) = \dfrac{2m-3}{3m-6}$. **Chọn D.**

Câu 49: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(11 - 2^x\right) = 3 - x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 50: Biết phương trình $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$ có hai nghiệm x_1, x_2. Hãy tính tổng $S = 27^{x_1} + 27^{x_2}$.

A. $S = 252$ **B.** $S = 45$ **C.** $S = 9$ **D.** $S = 180$.

Hướng dẫn.

Phương trình tương đương với $3^{x+1} - 1 = 3^{2x - \log_3 2} \Leftrightarrow 3.3^x - 1 = 3^{2x}.\dfrac{1}{2}$. Đặt $3^x = t > 0$

$\Rightarrow 3t - 1 = \dfrac{1}{2}t^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 2 = 0$. Ta có $27^{x_1} + 27^{x_2} = t_1^3 + t_2^3 = \left(t_1 + t_2\right)^3 - 3t_1t_2\left(t_1 + t_2\right)$

Nên $S = 6^3 - 3.6.2 = 180$. **Chọn D.**

Câu 51. Biết phương trình $\log_3(3^{2x-1}-3^{x-1}+1)=x$ có hai nghiệm x_1, x_2 (với $x_1<x_2$). Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{3^{x_1}}-\sqrt{3^{x_2}}$.

A. $1-\sqrt{3}$ **B.** $1+\sqrt{3}$ **C.** $2-\sqrt{3}$ **D.** $2+\sqrt{3}$.

Hướng dẫn.

Phương trình tương đương với $\frac{1}{3}.3^{2x}-\frac{1}{3}.3^{x}+1=3^{x}\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^{x}+3=0$. Đặt $3^{x}=t>0$

$\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow t_1=1,t_2=3$. Ta có $P=\sqrt{3^{x_1}}-\sqrt{3^{x_2}}=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}=1-\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 52. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2\left(\log_9 x\right)^2=\log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 5.

Hướng dẫn.

Biến đổi phương trình tương đương với $\frac{1}{2}\left(\log_3 x\right)^2=\log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=0\\ \log_3 x=\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2,x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ 2\sqrt{2x+1}=x+2,x>0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-4x=0,x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.$$. **Chọn D.**

Câu 53. Cho phương trình $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 11. **D.** 9.

Hướng dẫn.

Đặt $3^{\sqrt{x^2-3}}=a>0,\sqrt{x}=b\Rightarrow b\left(a^2-a\right)=3a^2-3a+6b-18\Leftrightarrow\left(a^2-a-6\right)\left(b-3\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\ b=3\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-3}=1,x>0\\ x=9\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=9\end{array}\right.$$. **Chọn C.**

Câu 54. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $9^{x}-2\left(x+5\right).3^{x}+9\left(2x+1\right)=0$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 5.

Hướng dẫn.

Đặt $3^{x}=a>0,2x+1=b\Rightarrow a^2-\left(b+9\right)a+9b=0\Leftrightarrow\left(a-9\right)\left(a-b\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=9\\ a=b\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ 2x+1=3^{x}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0,x=1\end{array}\right.$$. **Chọn A.**

Lưu ý:

Để giải phương trình $2x+1=3^x$ ta cần khảo sát hàm số $f\left(x\right)=3^x-2x-1$.

Câu 55. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x^3-x+2}-3^{x^3+2x}+x^3-3x+2=0$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -2.

Hướng dẫn.

Biến đổi phương trình tương đương với $3^u-3^v+u-v=0\Leftrightarrow 3^u+u=3^v+v\Leftrightarrow u=v$

$\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 56. Phương trình $\log_2^2\left(3^x-1\right)+2\log_2\left(3^x-1\right)-3=0$ có 2 nghiệm x_1 ; x_2 $(x_1<\ x_2)$ và $x_1-x_2=\log_3\left(\dfrac{a}{b}\right)$ với a,$b\in\mathbb{Z}$, $b>0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b$.

A. $a-b=-5$. **B.** $a-b=5$. **C.** $a-b=-20$. **D.** $a-b=-1$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_2\left(3^x-1\right)=t\Rightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=-3\\t_2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=1+\dfrac{1}{8}\\3^x=1+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\log_3\left(\dfrac{9}{8}\right)\\x_2=\log_3 3\end{array}\right.$

Suy ra $x_1-x_2=\log_3\left(\dfrac{9}{8.3}\right)=\log_3\left(\dfrac{3}{8}\right)\Rightarrow a-b=-5$. **Chọn A.**

Câu 57. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $7^{x-1}-2\log_7\left(6x-5\right)^3=1$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 7.

Hướng dẫn.

Biến đổi phương trình tương đương với $7^{x-1}-6\log_7\left(6x-5\right)=1$.

Đặt $x-1=u,\log_7\left(6x-5\right)=v\Rightarrow 6x-5=7^v\Leftrightarrow 6\left(x-1\right)+1=7^v\Rightarrow 1=7^v-6u$ ta có phương trình $7^u-6v=7^v-6u\Leftrightarrow 7^u+6u=7^v+6v$. Hàm số $f\left(t\right)=7^t+6t$ đồng biến

trên $\mathbb{R}$ nên từ $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow 1=7^u-6u$. Hàm số $g\left(t\right)=7^t-6t$ có

$g'\left(t\right)=7^t\ln 7-6=0\Leftrightarrow t_0=\log_7\left(\dfrac{6}{\ln 7}\right);g''\left(t\right)=7^t\left(\ln 7\right)^2>0$ do đó t_0 là điểm cực tiểu,

ngoài ra $g\left(0\right)=g\left(1\right)=1$ nên phương trình $1=7^u-6u$ có đúng hai nghiệm $u=0,u=1$

$\Leftrightarrow x=1,x=2$. **Chọn A.**

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $\left(-40;40\right)$ để hàm số sau

$y=\dfrac{x}{\left(x+2m\right)\log_2\left[x^2-\left(4m-2\right)x+4m^2\right]}$ xác định với mọi $x\in\left(2;+\infty\right)$?

A. 50. **B.** 40. **C.** 21. **D.** 41.

Hướng dẫn.

+ Trước hết $x+2m\neq 0,\forall x>2\Rightarrow m\geq -1$.

+ Mặt khác $x^2-\left(4m-2\right)x+4m^2>0,\forall x>2\Leftrightarrow\left(x+2m\right)^2>-2x,\forall x>2$ (luôn đúng).

Vậy ta có $m\in\left\{-1;0;1;2;...;39\right\}$. **Chọn D.**

Câu 59: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ qua điểm $I\left(1;1\right)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B.** -2016. **C.** 2020. **D.** -2020.

Hướng dẫn.

Lấy điểm $M\left(x;a^x\right)$ bất kì thuộc đồ thị $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$, khi đó tọa độ $M'\left(2-x;2-a^x\right)$ sẽ thuộc đồ thị $y=f\left(x\right)$. Nói cách khác: nếu ta lấy $X=2-x$ thì $f\left(X\right)=2-a^x$. Đặt $t=\log_a 2018\Rightarrow\log_a\dfrac{1}{2018}=-t$ thì giá trị $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)=f\left(X\right)$ với $X=2-t$, do vậy:

$f\left(X\right)=2-a^t=2-a^{\log_a 2018}=2-2018=-2016$. **Chọn B.**

Câu 60: Gọi $S=\left(-\infty;a+\sqrt{b}\right],a,b\in\mathbb{Q}$ là tập các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=x^2+\ln\left(x+m+2\right)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Tính tổng $K=a+b$ là

A. $K=-5$. **B.** $K=0$. **C.** $K=5$. **D.** $K=2$.

Hướng dẫn.

Tính đạo hàm $y'=2x+\dfrac{1}{x+m+2},x\in\left(-m-2;+\infty\right)$. Yêu cầu bài toán tương đương với:

$2x\left(x+m+2\right)+1\geq 0\Leftrightarrow 2x^2+2\left(m+2\right)x+1\geq 0,\forall x>-m-2$ (1).

+ Trường hợp 1: $\Delta'=\left(m+2\right)^2-2\leq 0\Leftrightarrow -2-\sqrt{2}\leq m\leq -2+\sqrt{2}$. Khi đó (1) luôn đúng.

+ Trường hợp 2: Không cần xét vì tìm được $m\leq -2+\sqrt{2}$.

Ta có ngay $a=-2,b=2\Rightarrow K=a+b=0$. **Chọn B.**

Câu 61: Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

A. $m\geq\dfrac{1}{4}$ **B.** $m>0$ **C.** $m<\dfrac{1}{4}$ **D.** $m>\dfrac{1}{4}$.

Câu 62: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\log_{2020}(2020^x-x-\dfrac{x^2}{2}-m)$ xác định với mọi x thuộc $\left[0;+\infty\right)$

A. $m > 2019$. **B.** $m < 1$. **C.** $0 < m < 2019$. **D.** $m < 2020$.

Hướng dẫn.

Xét hàm số $f\left(x\right) = 2020^x - x - \dfrac{x^2}{2} - m, x \in \left[0;+\infty\right) \Rightarrow f'\left(x\right) = 2020^x \ln 2020 - 1 - x$ và

$f''\left(x\right) = 2020^x\left(\ln 2020\right)^2 - 1 > 0, \forall x \ge 0$ nên hàm số $f'\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$, suy ra: $f'\left(x\right) \ge f'\left(0\right) > 0$ do đó $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$. Do đó $\min f\left(x\right) = f\left(0\right) = 1 - m$.

Vậy $y = \log_{2020}\left(f\left(x\right)\right)$ xác định với mọi x thuộc $\left[0;+\infty\right)$ khi $1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$. **Chọn B.**

Lời bình:

Bài toán trên ta dùng đạo hàm cấp cao để xét dấu đạo hàm cấp thấp, trong đó là xét tính đơn điệu của hàm số.

Câu 63: Cho hàm số $f\left(x\right) = 2e^{-x} - \log\left(m\sqrt{x^2+1} - mx\right)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $f\left(x\right) + f\left(-x\right) \ge 0$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. 21. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 22.

Hướng dẫn.

Xét bất phương trình: $f\left(x\right) + f\left(-x\right) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2e^{-x} + 2e^{x} - \log\left(m\sqrt{x^2+1} - mx\right)^3 - \log\left(m\sqrt{x^2+1} + mx\right)^3 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1).

+ Ta phải có điều kiện $\begin{cases} m\sqrt{x^2+1} - mx > 0 \\ m\sqrt{x^2+1} + mx > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) > 0 \\ m\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$ (*).

+ Ta có $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = \left|x\right|, \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ (*) suy ra $m > 0$.

Khi đó (1) $\Rightarrow 2\left(e^{-x} + e^{x}\right) - 3\log\left(m\sqrt{x^2+1} - mx\right)\left(m\sqrt{x^2+1} + mx\right) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

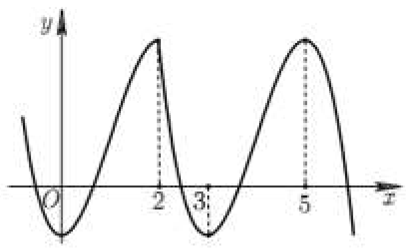
$\Rightarrow 2\left(e^{-x} + e^{x}\right) - 3\log\left(m^2\right) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \log m \le \dfrac{1}{3}\left(e^{-x} + e^{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}$ (2).

Mà ta có $\left(e^{-x} + e^{x}\right) \ge 2\sqrt{e^{-x}.e^{x}} = 2$ nên để (2) đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $\log m \le \dfrac{2}{3} \Rightarrow 0 < m \le \sqrt[3]{100}$.

Yêu cầu m nguyên nên ta được $m \in \left\{1;2;3;4\right\}$. **Chọn B.**

Câu 64: (THPT Chuyên ĐH Vinh)

Cho số thực m và hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(2^x + 2^{-x}\right) = m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$?



A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 5.

Hướng dẫn.

Trước hết ta đặt $2^x = u; x \in [-1;2] \Rightarrow u \in \left[\frac{1}{2};4\right]$, tiếp theo ta đặt $t = 2^x + 2^{-x} = u + \frac{1}{u}$, ta có:

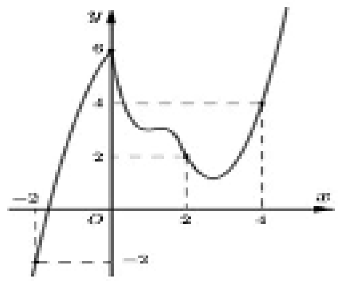
$t'(u) = 1 - \frac{1}{u^2} = 0 \Leftrightarrow u = 1$, suy ra $t \in \left[2;\frac{17}{4}\right]$. Bây giờ xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Từ đồ thị suy ra phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm t. Trở về ẩn x ta có phương trình

$t = 2^x + \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 - t.2^x + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2} \\ 2^x = \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2} \end{array}\right.$ suy ra có nhiều nhất 4 nghiệm x.

Chọn C.

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2};2\right)$.



A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Hướng dẫn.

Đặt $2\log_2 x = t; x \in \left[\frac{1}{2};2\right) \Rightarrow t \in [-2;2)$ và với mỗi t cho ta một giá trị duy nhất $x = \sqrt{2^t}$. Bây giờ ta xét $f(t) = m, t \in [-2;2)$ có nghiệm t duy nhất khi $\left[\begin{array}{l} m = 6 \\ -2 \le m \le 2 \end{array}\right.$

Suy ra các giá trị nguyên của m là $m \in \{-2;-1;0;1;2;6\}$. **Chọn B.**

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = f(2x-4) - e^{\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $\left(1;\frac{7}{2}\right)$.

Hướng dẫn.

Đạo hàm $g'(x) = 2f'(2x-4) - (x^2 - 4x + 3)e^{\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1}$ mục tiêu là tìm khoảng mà trong đó cả $f'(2x-4)$ và $-(x^2 - 4x + 3)$ đều dương. Trong đó $-(x^2 - 4x + 3) > 0 \Leftrightarrow x \in (1;3)$ và kiểm tra thêm $f'(2x-4) > 0, x \in (1;3) \Leftrightarrow f'(t) > 0, t \in (-2;2)$ đúng. Vậy **chọn A**.

Lời bình

Cách giải cũng rất tự nhiên bởi lẽ khi xét dấu một tích dương của hai số thì hai thừa số cùng dấu, còn khi xét dấu của tổng thì ta thử tương tự, ngoài ra chỉ có 4 khoảng cho trong bài toán nên ta cũng dễ thử. Tuy nhiên còn tùy trường hợp, chẳng hạn: nếu $a = 5, b = -2$ trái dấu nhưng tổng $a + b = 3 > 0$. Cách tốt nhất vẫn là tìm nghiệm của các biểu thức rồi lập bảng xét dấu.

Câu 67:

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Có bao nhiêu số m nguyên để phương trình $\log_6[2f(x) + m] = \log_4[f(x)]$ có 4 nghiệm phân biệt?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	4	$\nearrow$	12

A. 1. **B.** 3.
C. 16. **D.** 15.

Hướng dẫn.

Đặt $f(x) = y$ và $\log_6(2y + m) = \log_4 y = t$ suy ra: $2y + m = 6^t, y = 4^t \Leftrightarrow m = 6^t - 2.4^t$. Mà từ bảng biến thiên ta có $0 < y = 4^t \le 16 \Rightarrow t \le 2$ do đó ta xét $g(t) = 6^t - 2.4^t, t \le 2$ có:

$g'(t) = 6^t \ln 6 - 2.4^t \ln 4 = 0 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\ln 16}{\ln 6}\right) = \alpha \approx 1,08$. Suy ra bảng biến thiên:

t	$-\infty$		α		2
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	$20,14$
$g(t)$	0	$\searrow$	$-2,01$	$\nearrow$	4

Với mỗi giá trị của t cho ta một giá trị của y, rồi từ y ta suy ra số nghiệm. Vì $m \in \mathbb{Z}$ ta xét

+ Nếu $m = -2 \Rightarrow t = 1, t = 1,14 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y \approx 4,9 \end{array}\right.$ thì phương trình $f(x) = y$ có 5 nghiệm x.

+ Nếu $m = -1 \Rightarrow t = 0, t = 1,56 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y \approx 8,7 \end{array}\right.$ thì phương trình $f(x) = y$ có 4 nghiệm x.

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow t = 1,7 \Rightarrow y \approx 10,56$ thì phương trình $f(x) = y$ có 3 nghiệm x.

+ Nếu $m = 1 \Rightarrow t = 1,8 \Rightarrow y \approx 12,13$ thì phương trình $f(x) = y$ có 2 nghiệm x.

Tương tự khi $m \in \{2;3;4\}$ thì phương trình $f(x) = y$ có không quá 2 nghiệm x.

Vậy chỉ có $m = -1$ thỏa mãn bài toán. **Chọn A**.

Câu 68: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\frac{1}{3^{|x-1|}}=2m-1$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=1$. **B.** $m\geq 1$. **C.** $m>\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}<m\leq 1$.

Hướng dẫn.

Nhận xét được nếu x là một nghiệm thì $2-x$ cũng là một nghiệm, nên ta phải có $x=2-x$ hay là $x=1$ là nghiệm duy nhất, suy ra $2m-1=1\Leftrightarrow m=1$. **Chọn A**.

Lời bình.

Ta có thể giải theo cách thông thường như sau: Trước hết để phương trình có nghiệm thì $2m-1>0$. Khi đó ta có: $3^{|x-1|}=\frac{1}{2m-1}\Leftrightarrow |x-1|=\log_3\frac{1}{2m-1}\Leftrightarrow x=1\pm\log_3\frac{1}{2m-1}$ sau đó là cho hai nghiệm trùng nhau: $1+\log_3\frac{1}{2m-1}=1-\log_3\frac{1}{2m-1}\Leftrightarrow \log_2\frac{1}{2m-1}=0\Leftrightarrow m=1$.

Giá trị $m=1$ thỏa mãn điều kiện. Vậy **chọn A.**

Câu 69: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2^x+x=m$ có nghiệm duy nhất

A. $m=3$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m>0$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 70: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\log_3\left(x^2-4x+6\right)=m$ có nghiệm kép.

A. $m=\log_2 3$. **B.** $m=\frac{2}{3}$. **C.** $m=\log_3 2$. **D.** $m\in\varnothing$.

Hướng dẫn.

Viết lại $\log_3\left(x^2-4x+6\right)=m\Leftrightarrow\log_3\left[\left(x-2\right)^2+2\right]=m$, khi đó nghiệm kép là $x=2$ nên ta có $m=\log_3 2$. **Chọn C**.

Câu 71: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\log_2 x+\log_2\left(x+1\right)=m$ có nghiệm duy nhất.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m>0$. **D.** $m>1$.

Câu 72: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\log_3\left(x+1\right)+\log_3\left(x-3\right)=m$ có nghiệm kép

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m>0$. **D.** $m=-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn.

Điều kiện: $x>3$. Viết lại $m=\log_3\left(x+1\right)\left(x-3\right)=\log_3\left(x^2-2x-3\right)$ suy ra nghiệm kép là $x=1$ không thỏa mãn. **Chọn A**.

Câu 73: Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thoả mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.

Câu 74: Cho phương trình $\log_2{}^2 x - \left(m^2 - 3m\right)\log_2 x + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 16$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 4 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \end{array}\right.$.

Câu 75: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực $x_1; x_2$ thỏa mãn $\left(x_1 + 3\right)\left(x_2 + 3\right) = 72$.

A. $m = \dfrac{61}{2}$. **B.** $m = 3$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $m = \dfrac{9}{2}$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_3 x = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2m - 7 = 0$. Giả sử bài toán được thỏa mãn và $x_1 < x_2$, khi đó viết lại điều kiện $\Leftrightarrow x_1x_2 + 3\left(x_1 + x_2\right) = 63$, trong đó $x_1x_2 = 3^{t_1}.3^{t_2} = 3^{t_1+t_2} = 3^3 = 27$, suy ra:

$x_1 + x_2 = 12$ và suy ra $x_1 = 3, x_2 = 9$. Cuối cùng $2m - 7 = t_1t_2 = \log_3 3.\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$.

Vậy **chọn D**.

Lời bình.

Ta có thể giải cách khác như sau: Giả sử tồn tại m thỏa mãn bài toán. Viết lại $\left(\log_3 x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{37}{4} - 2m = a \Rightarrow \log_3 x = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{a}$ hay ta có $x_1 = 3^{\frac{3}{2}-\sqrt{a}}, x_2 = 3^{\frac{3}{2}+\sqrt{a}}$. Viết lại điều kiện $\Leftrightarrow x_1x_2 + 3\left(x_1 + x_2\right) = 63$ và khi đó ta có:

$3^3 + 3\left(3^{\frac{3}{2}-\sqrt{a}} + 3^{\frac{3}{2}+\sqrt{a}}\right) = 63 \Leftrightarrow 3^{\frac{3}{2}-\sqrt{a}} + 3^{\frac{3}{2}+\sqrt{a}} = 12$. Hay ta có $\begin{cases} x_1x_2 = 27 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow x_1 = 3^{\frac{3}{2}-\sqrt{a}} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} - \sqrt{a} = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$. Trở về ẩn m ta có $\dfrac{37}{4} - 2m = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$.

Câu 76: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x - \dfrac{2}{\log_3\left(x + 1\right)} = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $-1 < m \neq 0$. **B.** $m > -1$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $-1 < m < 0$.

Hướng dẫn.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x-\dfrac{2}{\log_3\left(x+1\right)}, x>-1, x\neq 0 \Rightarrow f'\left(x\right)=1+\dfrac{2}{\left(x+1\right)\ln 3.\left[\log_3\left(x+1\right)\right]^2}$

do đó $f'\left(x\right)>0, \forall x>-1, x\neq 0$ suy ra $f\left(x\right)$ đồng biến. Bảng biến thiên:

x	-1		0		$+\infty$
$f\left(x\right)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m>-1$. **Chọn B.**

Lời bình.

Bài toán cho dạng đa thức và logarit và đã cô lập m, nên ta chỉ việc khảo sát hàm số.

Xin lỗi quý thầy cô và bạn đọc vì ban đầu tôi nhầm được đạo hàm thấy nó dương mà quên cho rằng $f\left(x\right)$ dương và đơn điệu trên tập xác định, do đó không thể cắt $y=m$ tại hai điểm và chọn đáp án **C**.

Ngoài cách giải trên chúng ta cũng có thể biến đổi và khảo sát sự tương giao của các đồ thị khác nhau, tuy nhiên độ phức tạp cũng không giảm hơn bao nhiêu.

Câu 77: Cho phương trình $x^2-ax+b=0$. Biết a,b thuộc đoạn $\left[2;10\right]$ và phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^{\log_a x_2}=x_2^{\log_b x_1}$. Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(a;b\right)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 14.

Hướng dẫn.

Từ điều kiện suy ra $\log_a x_1.\log_a x_2=\log_a x_2.\log_b x_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a x_2=0\\ \log_a x_1=\log_b x_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_2=1\\ a=b\end{array}\right.$.

+ Nếu $a=b$ thì ta có phương trình $x^2-ax+a=0$ và có hai nghiệm khi $a^2-4a>0 \Rightarrow a>4$.

Khi đó các cặp $\left(a;a\right)\in\left\{\left(5;5\right),\left(6;6\right),\left(7;7\right),\left(8,8\right),\left(9;9\right),\left(10;10\right)\right\}$. Có 6 cặp loại này.

+ Nếu $x_2=1$ thì $x_1=b$ & $a=b+1$. Khi đó các cặp $\left(b+1;b\right), b\in\left\{2;3;...;9\right\}$. Có 8 cặp loại này.

Vậy tất cả có 14 cặp $\left(a;b\right)$ thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 78: Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(mx-6x^3\right)+2\log_{\frac{1}{2}}\left(14x^2+29x-2\right)=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt?

A. 0 **B.** 4 **C.** 18 **D.** 15.

Hướng dẫn.

Điều kiện $14x^2+29x-2>0 \Rightarrow x<\dfrac{-29-\sqrt{953}}{28} \cup x>\dfrac{-29+\sqrt{953}}{28}$. Ta có phương trình:

$mx-6x^3=14x^2+29x-2 \Rightarrow m=6x^2+14x+29-\dfrac{2}{x}=f\left(x\right)$. Ta có $f'\left(x\right)=12x+14+\dfrac{2}{x^2}$

Suy ra $f'\left(x\right)<0, \forall x<a=\dfrac{-29-\sqrt{953}}{28} \cup f'\left(x\right)>0, \forall x>b=\dfrac{-29+\sqrt{953}}{28}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
$f'\left(x\right)$	$-$			$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$ ↘	$f\left(a\right)$		$f\left(b\right)$ ↗	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $f\left(x\right)=m$ không thể có ba nghiệm phân biệt. **Chọn A**.

Câu 79: (THPT Chuyên ĐH Vinh)

Cho phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right)3^x+1=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. Vô số **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn.

Biến đổi PT $\Leftrightarrow 3^{x+2}+\dfrac{1}{3^x}-m\left(4\sqrt{\left|x+1\right|}+3m+3\right)=0$. Đặt $x+1=t \Leftrightarrow x=t-1$ ta có phương trình: $3^{t+1}+3^{1-t}-m\left(4\sqrt{\left|t\right|}+3m+3\right)=0$ (1).

Nhận xét: nếu phương trình (1) có nghiệm t_0 thì cũng có nghiệm $-t_0$ do đó nếu phương trình có đúng 3 nghiệm thì trước hết phải có nghiệm $t_0=-t_0$ còn lại hai nghiệm khác là a và $-a$ (với $a\neq 0$). Khi đó $t_0=0$ và suy ra: $6-m\left(3m+3\right)=0 \Rightarrow -m^2-m+2=0 \Rightarrow m=1, m=-2$.

Ngược lại

Với $m=-2$, ta có phương trình: $3^{t+1}+3^{1-t}+2\left(4\sqrt{\left|t\right|}-3\right)=0 \Leftrightarrow 3^{t+1}+3^{1-t}-6+8\sqrt{\left|t\right|}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3^{t+1}}-\sqrt{3^{1-t}}\right)^2+8\sqrt{\left|t\right|}=0 \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow x=-1$ là nghiệm duy nhất, nên $m=-2$ loại.

Như thế kết hợp đáp án thì chỉ có $m=1$ thỏa mãn bài toán. **Chọn C**.

Lời bình.

Chúng ta kết hợp điều kiện cần và phương pháp loại trừ để đưa ra đáp án **C** là đúng (vì thi trắc nghiệm). Tuy nhiên nếu tự luận thì chúng ta còn phải chứng minh điều kiện đủ, có thể làm như sau:

Với $m = 1$ ta có phương trình $f\left(t\right) = 3^{t+1} + 3^{1-t} - \left(4\sqrt{\left|t\right|} + 6\right) = 0\ (2)$. Ta thấy $f\left(t\right)$ là hàm số chẵn mà đồ thị có trục đối xứng là trục tung nên ta chỉ cần xét trên $\left[0;+\infty\right)$. Khi đó ta có $f'\left(t\right) = \left(3^{1+t} - 3^{1-t}\right)\ln 3 - \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ và có $\lim\limits_{t \to 0^+} f'\left(t\right) = -\infty; f'\left(1\right) = 8\ln 3 - 2 > 0$ nên tồn tại $\alpha \in \left(0;1\right)$ sao cho $f'\left(\alpha\right) = 0$. Ngoài ra $f''\left(t\right) = \left(3^{1+t} + 3^{1-t}\right)\left(\ln 3\right)^2 + \dfrac{1}{t\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$ nên $f'\left(t\right) = 0$ có nghiệm α duy nhất và α là điểm cực tiểu của $f\left(t\right)$. Bảng biến thiên:

t	0		α		1	$+\infty$
$f'\left(t\right)$		$-$	0		$+$	
$f\left(t\right)$	0	$\searrow$	$f\left(\alpha\right)$	$\nearrow$	0	$+\infty$

Suy ra phương trình $f\left(t\right) = 0$ có đúng hai nghiệm $t = 0, t = 1$ trên $\left[0;+\infty\right)$. Suy ra trên $\mathbb{R}$ phương trình $f\left(t\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $t = 0, t = 1, t = -1 \Leftrightarrow x = -1, x = 0; x = -2$.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán này có lẽ ra cho học sinh để "hạn chế 10 điểm tròn". Trường Chuyên mà! (chẳng lẽ là thi Olimpic hay sao nhỉ - Thi trắc nghiệm mà làm tóm tắt cả một trang lận!)

Câu 80: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m\left(\log_4 x^2 - 3\right)$ có nghiệm thuộc $\left[32;+\infty\right)$?

A. $m \in \left(1;\sqrt{3}\right]$. **B.** $m \in \left[1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $m \in \left[-1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $m \in \left(-\sqrt{3};1\right]$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_2 x = t; x \geq 32 \Rightarrow t \geq 5$, ta có phương trình $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m\left(t - 3\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(t+1\right)\left(t-3\right)} = m\left(t-3\right) \Rightarrow m = \sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}} = \sqrt{1 + \dfrac{4}{t-3}}$ (vì $t \geq 5$). Từ đó suy ra:

$1 < m \leq \sqrt{1 + \dfrac{4}{5-3}} = \sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 81: (THPT Chuyên ĐH Vinh)

Cho phương trình $2^x = \sqrt{m.2^x\cos\left(\pi x\right) - 4}$, với m là tham số thực. Gọi m_0 là giá trị của m để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in \left[-1;0\right)$. **B.** $m_0 \in \left[-5;-1\right)$. **C.** $m_0 > 0$. **D.** $m_0 < -5$.

Hướng dẫn.

Bình phương hai vế, biến đổi ta có phương trình $2^x + \dfrac{4}{2^x} = m\cos\left(\pi x\right)$ (1). Ta có:

$\cos\pi(2-x)=\cos(2\pi-\pi x)=\cos(-\pi x)=\cos\pi x$ từ đó ta có nhận xét nếu phương trình (1) có nghiệm x_0 thì cũng có nghiệm $2-x_0$ cho nên để phương trình có đúng một nghiệm thì trước hết ta phải có $x_0=2-x_0 \Rightarrow x_0=1$, khi đó $4=m\cos(\pi)=-m \Rightarrow m=-4$. **Chọn B**.

Lời bình.

Khi thi tự luận ta còn phải thực hiện điều kiện đủ, với $m=-4$ thì ta có:

$$\left|\cos(\pi x)\right|=\frac{1}{4}\left(2^x+\frac{4}{2^x}\right)\ge\frac{1}{4}.2\sqrt{4}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(\pi x)=\pm1\\ 2^x=2\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy $m=-4$ thỏa mãn bài toán.

Câu 82: Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ sao cho bất phương trình:

$\log_2\left(\dfrac{x^2-2x+m}{x^2+x+1}\right)\le x^2+4x+3-m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;4]$?

A. 2023. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 2022.

Hướng dẫn.

Vì $x^2+x+1>0,\forall x\in[0;4]$ nên phải có $x^2-2x+m>0,\forall x\in[0;4] \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1$.

Biến đổi $\log_2\left(\dfrac{x^2-2x+m}{2x^2+2x+2}\right)\le\left(2x^2+2x+2\right)-\left(x^2-2x+m\right) \Leftrightarrow \log_2 u+u\le\log_2 v+v$

$\Leftrightarrow u\le v \Leftrightarrow x^2-2x+m\le 2x^2+2x+2 \Leftrightarrow x^2+4x+2-m\ge0,\forall x\in[0;4]$

$\Rightarrow 2-m\ge0 \Rightarrow m\le2$. Kết hợp ta chỉ có $m=2$ thỏa mãn bài toán. **Chọn B**.

Lời bình.

Ta gặp khá nhiều các hàm số dạng $f(t)=a^t+t, a>1, t\in\mathbb{R}$ hoặc $f(t)=\log_a t+t, a>1, t>0$ đều là các hàm số đồng biến trên tập xác định nên từ đây về sau ta không trình bày lại. Tuy nhiên khi giải tự luận thì bắt buộc các em học sinh phải nêu ra, cho dù đạo hàm chỉ một dòng. Mặc dù cả thầy và trò đều hiểu được nhưng trình bày cho chặt chẽ theo nghĩa toán học mà không bắt bẻ các em làm gì.

Câu 83: (THPT CHUYÊN SƠN LA)

Cho phương trình $4\log_9^2 x+m\log_{\frac{1}{3}}x+\dfrac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}x+m-\dfrac{2}{9}=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $1<m<2$. **B.** $3<m<4$. **C.** $0<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $2<m<3$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_3 x=t$, ta có phương trình $t^2-\left(m+\dfrac{1}{3}\right)t+m-\dfrac{2}{9}=0$.

Từ $\log_3(x_1.x_2)=1 \Rightarrow t_1+t_2=1 \Rightarrow m+\dfrac{1}{3}=1 \Rightarrow m=\dfrac{2}{3}$, ngoài ra $\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{9}>0$ nên $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn bài toán. **Chọn C**.

Câu 84: Cho phương trình $3^{|x|}-\sqrt{a^2-2x^2}=0$, với a là tham số thực. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in[-25;25]$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 50. **C.** 24. **D.** 48.

Hướng dẫn.

Nhận xét nếu x là nghiệm thì $-x$ cũng là nghiệm nên ta xét với $x\in\left(0;\frac{|a|\sqrt{2}}{2}\right]$. Khi đó ta có:

$2a^2=2.3^{2x}+4x^2=2.3^t+t^2, 0<t\le|a|\sqrt{2}$. Hàm số $f(t)=2.3^t+t^2$ đồng biến nên suy ra:

$2<2a^2\le 2.3^{|a|\sqrt{2}}+2a^2\Leftrightarrow a^2>1\Rightarrow a<-1\cup a>1\Rightarrow a\in\{-25;-24;...;24;25\}\setminus\{0;\pm1\}$. **Chọn D.**

Câu 85: (CHUYÊN ĐH VINH)

Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)=t\Rightarrow\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=3^t, x^2-\sqrt{2}x+2=5^t$. Dùng phép thế ta có: $\left|5^t-2\right|=3^t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5^t=2+3^t\\5^t=2-3^t\end{array}\right.$. Ta có $x^2-\sqrt{2}x+2=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}$ do đó ta có điều kiện cho t là $t\ge\log_5\frac{3}{2}=\alpha$. Ta có $5^t\ge\frac{3}{2}$, trong khi đó $2-3^t<\frac{3}{2}$ như thế ta chỉ có phương trình $5^t=2+3^t$ có nghiệm $t\ge\alpha$ (nếu có). Ngoài ra $t=\alpha$ không phải là nghiệm và ta được

$f(t)=2.5^{-t}+\left(\frac{3}{5}\right)^t-1=0$ là hàm số nghịch biến nên chỉ có một nghiệm $t=1>\alpha$.

Suy ra phương trình có đúng hai nghiệm là $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{14}}{2}$. **Chọn B.**

Lời bình.
Phương pháp mũ hóa ẩn chung mới cũng gặp một số bài. Trong bài trên ta còn may mắn tìm được chính xác các nghiệm của phương trình. Nói chung là chỉ ra số nghiệm của phương trình là đáp ứng yêu cầu bài toán.

Câu 86: Nghiệm của phương trình $\ln\frac{\sqrt{x^2+9}}{2x}=6x-2\sqrt{x^2+9}+\ln\frac{3}{2}$ có dạng $x=\frac{a}{b\sqrt{c}}$ (a, b, c $\in\mathbb{N}$). Hỏi tổng a + b + c bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn.

Viết lại phương trình $\ln\frac{\sqrt{x^2+9}}{2x}-\ln\frac{3}{2}=6x-2\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow\ln\frac{2\sqrt{x^2+9}}{6x}=6x-2\sqrt{x^2+9}$

Đặt $2\sqrt{x^2+9}=u, 6x=v \Rightarrow u+\ln u = v+\ln v$. Hàm số $f(t)=t+\ln t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên suy ra $u=v \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=3x>0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}>0 \Rightarrow a+b+c=7$. **Chọn C**.

Lời bình.

Ở chế độ Mode 1, sử dụng máy tính **Casio** và chức năng **Shift Solve** ta tìm được nghiệm X, sau đó bấm X^2 kết quả cho ta $\dfrac{9}{8}$ khai căn bậc hai thì $x=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ từ đó suy ra a,b,c.

Câu 87 (**THPT Chu Văn An - Hà Nội**).

Biết phương trình $5^{2x+\sqrt{1-2x}}-m.5^{1-\sqrt{1-2x}}=4.5^x$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\in[a;b]$, với m là tham số. Tính giá trị $b-a$ bằng

A. $\dfrac{9}{5}$. **B.** 1. **C.** 9. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Hướng dẫn.

Biên đổi phương trình $\Leftrightarrow m=\dfrac{5^{2x+\sqrt{1-2x}}-4.5^x}{5^{1-\sqrt{1-2x}}}=5^{2x-2+2\sqrt{1-2x}+1}-4.5^{x-1+\sqrt{1-2x}}=5t^2-4t$, trong đó $t=5^{x-1+\sqrt{1-2x}}, x\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow t'(x)=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)5^{x-1+\sqrt{1-2x}}\ln 5=0\Leftrightarrow\sqrt{1-2x}=1\Leftrightarrow x=0$, từ đó suy ra $x=0$ là điểm cực đại của $t(x)$, và suy ra $t\in(0;1]$. Bây giờ ta xét $f(t)=5t^2-4t$ có

$f'(t)=10t-4=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{5}$, suy ra $m\in\left[f\left(\dfrac{2}{5}\right);f(1)\right]=\left[-\dfrac{4}{5};1\right]=[a;b]$ nên $b-a=\dfrac{9}{5}$. **Chọn A**.

Câu 88: Cho phương trình $4^x-(10m+1).2^x+32=0$. Biết rằng phương trình này có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1x_2}=1$. Khi đó giá trị của m thỏa mãn điều kiện nào?

A. $0<m<1$ **B.** $2<m<3$ **C.** $-1<m<0$ **D.** $1<m<2$.

Hướng dẫn.

Đặt $2^x=t>0$ ta có phương trình: $t^2-(10m+1)t+32=0$ và giả sử phương trình có hai nghiệm t_1,t_2 thì theo định lý Viet ta có: $t_1t_2=32\Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=2^5\Leftrightarrow x_1+x_2=5$ (1).

Biến đổi $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1x_2}=1\Leftrightarrow x_1+x_2+1=x_1x_2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $x_1=2, x_2=3$, vì thế ta có: $t_1+t_2=2^2+2^3=12$. Cũng theo định lý Viet ta được: $10m+1=t_1+t_2=12\Rightarrow m=\dfrac{11}{10}$.

Chọn D.

Câu 89: (CHUYÊN THÁI BÌNH)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0$.

A. $\frac{-1}{4}<m<0$. **B.** $5\le m\le\frac{21}{4}$. **C.** $5<m<\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{-1}{4}\le m\le 2$.

Hướng dẫn.

Điều kiện $1-x^2>0\Leftrightarrow x\in(-1;1)$. Khi đó ta có phương trình $x+m-4=1-x^2$ hay ta có $m=5-x-x^2$, vế phải là phần của Parabol, lập bảng biến thiên suy ra: để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1;1)$ thì $5<m<\frac{21}{4}$. **Chọn C.**

Câu 90: Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\ln\left(7x^2+7\right)\ge\ln\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tính S.

A. $S=14$. **B.** $S=0$. **C.** $S=12$. **D.** $S=35$.

Hướng dẫn.

Trước hết ta phải có điều kiện: $mx^2+4x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow m>2$.

Khi đó ta có bất phương trình: $7x^2+7\ge mx^2+4x+m,\forall x\in\mathbb{R}$

$(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}4-(7-m)^2\le 0\\7-m>0\end{cases}\Rightarrow 7-m\ge 2\Rightarrow m\le 5$.

Từ đó suy ra $2<m\le 5, m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{3;4;5\}\Rightarrow S=12$. **Chọn C.**

Câu 91: (**THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa**)

Cho phương trình $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|<15$?

A. 14. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Hướng dẫn.

Trước hết ta có điều kiện: $x^2-x+1-3m>0\,(*)$. Khi đó phương trình trở thành:

$2x^2-(m+3)x+1-m=x^2-x+1-3m\Rightarrow x^2-(m+2)x+2m=0\Rightarrow x_1=2,x_2=m$.

+ Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $m\ne 2$;

+ Thay các nghiệm $x_1=2,x_2=m$ vào $(*)$ ta có: $\begin{cases}3-3m>0\\m^2-4m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow m<2-\sqrt{3}$.

+ Các nghiệm $x_1 = 2, x_2 = m$ thỏa mãn $\left|x_1 - x_2\right| < 15 \Leftrightarrow \left|m-2\right| < 15 \Leftrightarrow -13 < m < 17$.

Kết hợp các điều kiện trên và $m \in \mathbb{Z}$ ta có $m \in \left\{-12;-11;...;-1;0\right\}$. **Chọn D.**

Câu 92: Cho phương trình $\left(x-2\right)\log_4\left(x+m\right) = x-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $\left[0;18\right]$ để phương trình đã cho có nghiệm dương duy nhất?

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 19.

Hướng dẫn.

Xét phương trình: $\left(x-2\right)\log_4\left(x+m\right) = x-1$. Dễ thấy $x = 2$ không thỏa mãn.

Đặt $\dfrac{x-1}{x-2} = t \neq 1 \Rightarrow x = 2 + \dfrac{1}{t-1}$, với mỗi giá trị t cho ta một giá trị x.

Vì $x > 0$ nên $\dfrac{1}{t-1} + 2 > 0 \Rightarrow t < \dfrac{1}{2} \cup t > 1$.

Khi đó ta có phương trình: $x + m = 4^t \Rightarrow m = 4^t - 2 - \dfrac{1}{t-1} = g\left(t\right), t \neq 1$.

$g'\left(t\right) = 4^t \ln 4 + \dfrac{1}{\left(t-1\right)^2} > 0, \forall t \neq 1$ như thế hàm $g\left(t\right)$ đồng biến. Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$g(t)$	$-2 \nearrow$	$0 \nearrow$	2		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Kết luận: $m \geq 2, m \in \left[0;18\right], m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \left\{2;3;4;...;18\right\}$. Vậy có 17 giá trị của m. **Chọn C.**

Câu 93. (THPT Chuyên Thái Bình)

Trong tất cả các cặp số thực $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+3}\left(2x+2y+5\right) \geq 1$, có bao nhiêu giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp $\left(x;y\right)$ sao cho $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - m = 0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn.

Vì $x^2 + y^2 + 3 > 1$ nên ta được $2x + 2y + 5 \geq x^2 + y^2 + 3 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + \left(y-1\right)^2 \leq 4$ (1).

Mặt khác $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - m = 0 \Leftrightarrow \left(x+2\right)^2 + \left(y+3\right)^2 = m$. Xét $\left(x;y\right)$ như các điểm trong hệ trục Oxy thì để tồn tại duy nhất cặp $\left(x;y\right)$ xem như hai đường tròn tiếp xúc nhau, mà do điểm $K\left(-2;-3\right)$ nằm ngoài hình tròn (1) như thế có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 94: [TT Tân Hồng Phong]

Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$.

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Hướng dẫn.

Bất phương trình có dạng $2^u-2^v+u-v<0 \Leftrightarrow 2^u+u<2^v+v \Leftrightarrow u<v$

$x^2-25x+150<0 \Leftrightarrow 10<x<15$, mà $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{11;12;13;14\}$. **Chọn B.**

Câu 95: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{2+\sqrt{5}}(2x^2-x-4m^2+2m)+\log_{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$.

A . 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 2.

Hướng dẫn.

Biến đổi cơ số $\sqrt{\sqrt{5}-2}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1/2}$ và $\sqrt{x^2+x-2m}=\left(x^2+x-2m\right)^{1/2}$ từ đó ta có phương trình: $2x^2-x-4m^2+2m=x^2+mx-2m^2>0 \Rightarrow x^2-\left(m+1\right)x-2m^2+2m=0$.

Giả sử $x_1^2+x_2^2=3 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3 \Rightarrow \left(m+1\right)^2-2\left(-2m^2+3m\right)=3$ hay ta có

$\Rightarrow 5m^2+8m-2=0 \Rightarrow m=\dfrac{-4\pm\sqrt{26}}{5}\in I$. Vậy không tồn tại $m\in\mathbb{Z}$. **Chọn B.**

Câu 96: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}=m\left(\log_4 x^2-3\right)$ có nghiệm thuộc $\left[32;+\infty\right)$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn.

Xem câu 80.

Câu 97: Cho phương trình $\left(4^x-10.2^x+16\right)\sqrt{\log_3 x^5-m}=0$. Tổng các giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 15. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 10.

Hướng dẫn.

Phương trình tương đương với: $\left[\begin{array}{ll}4^x-10.2^x+16=0 & (1)\\ 5\log_3 x-m=0 & (2)\end{array}\right.$. Giải (1): $\Leftrightarrow \begin{cases}2^x=2\\2^x=8\end{cases} \Leftrightarrow x=1, x=3$.

Vì $m\in\mathbb{N}^*$ nên (2) luôn có nghiệm $x=\sqrt[5]{3^m}$. Để phương trình có đúng hai nghiệm, ta xét

+ Trường hợp 1: $x=\sqrt[5]{3^m}=1 \Rightarrow m=0$ (loại).

+ Trường hợp 2: $x=\sqrt[5]{3^m}=2\Rightarrow m\in I$ (loại).

+ Trường hợp 3: Phương trình chỉ nhận $x=3$ của (1) làm nghiệm, một nghiệm từ (2):

$$\Rightarrow\begin{cases}m=5\log_3 x, x<3\\5\log_3 1<m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<m<5\\x=\sqrt[5]{3^m}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\in\{1;2;3;4\}\\x=\sqrt[5]{3^m}\end{cases}.$$

Kết luận: Với $m\in\{1;2;3;4\}$ thì phương trình có hai nghiệm $x=3, x=\sqrt[5]{3^m}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên dương của m là 10. **Chọn D.**

Câu 98: Cho phương trình $2x^2-6x+2=\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}\right)$ có nghiệm dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{N}^*$. Tính tổng $a+b+c$ bằng

A. 14. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Hướng dẫn.

Điều kiện: $x>-\dfrac{1}{2}, x\neq 1$. Phương trình tương đương với:

$$2x^2-6x+1=\log_2\left(\frac{2x+1}{x^2-2x+1}\right)-\log_2 2=\log_2\left(\frac{2x+1}{2x^2-4x+2}\right)=\log_2\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$\Leftrightarrow v-u=\log_2\left(\frac{u}{v}\right)=\log_2(u)-\log_2(v)\Leftrightarrow u+\log_2(u)=v+\log_2(v).$$

(Hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$) nên ta được: $v=u$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=2x+1>0\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-6x+1=0\\x>-\dfrac{1}{2}, x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{7}}{2}=\frac{a+\sqrt{b}}{c}.$$

Vậy $a+b+c=12$. **Chọn C.**

Câu 99: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM)

Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\leq 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì $b-2a$ bằng

A. 6 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 16 .

Hướng dẫn.

Chia cả hai vế cho 2^x ta có $50.\sqrt{\dfrac{25^x}{4^x}}+20\leq 133.\sqrt{\dfrac{10^x}{4^x}}\Rightarrow 50t^2-133t+20\leq 0, t=\sqrt{\dfrac{5^x}{2^x}}$ suy ra

$\dfrac{4}{25}\leq t=\sqrt{\dfrac{5^x}{2^x}}\leq\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-4}\leq\left(\dfrac{5}{2}\right)^x\leq\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\Leftrightarrow x\in[-4;2]$. Từ đó ta có $b-2a=10$. **Chọn B.**

Lời bình.

Đối với một số học sinh thì mặc dù các em hiểu được khi giải bất phương trình mũ cần chú ý đến cơ số, nhưng thường vẫn sai như: $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x > 4$ (Là do thói quen!!).

Để tránh việc này cũng như phải giải thích sau này về cơ số, ta thường chia cả hai vế cho lũy thừa có cơ số nhỏ nhất như bài toán trên chẳng hạn.

Câu 100: [THPT Tiên Lãng]

Với giá trị nào của m để bất phương trình $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$ có nghiệm đúng với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$?.

A. $m \in \varnothing$. **B.** $m \neq 2$. **C.** $m < -\frac{3}{2}$. **D.** $m \le -\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn.

Biến đổi $9^x - 2.3^x - 3 > 2m(1+3^x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m < \frac{9^x - 2.3^x - 3}{1+3^x} = 3^x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$ hay ta có

$2m + 3 < 3^x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m + 3 \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{3}{2}$. **Chọn D.**

Câu 101: (THPT Yên Phong)

Biết $[a;b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \le 5$ thỏa mãn với mọi x thuộc $[a;b]$. Tính $a+b$

A. 4 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 6.

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} = t \ge 0$ ta có bất phương trình: $t^2 + 4t \le 5 \Rightarrow 0 \le t \le 1$

$\Rightarrow 1 \le x^2 - 2x + m \le 4 \Leftrightarrow 2 - m \le (x-1)^2 \le 5 - m$.

+ Nếu $m \le 2$ thì tập nghiệm là hai đoạn

$1 - \sqrt{5-m} \le x \le 1 - \sqrt{2-m} \cup 1 + \sqrt{2-m} \le x \le 1 + \sqrt{5-m}$ không thỏa mãn trên $(-\infty;2]$.

+ Nếu $2 \le m \le 5$ thì tập nghiệm là $1 - \sqrt{5-m} \le x \le 1 + \sqrt{5-m}$

Ta có: $\begin{cases} 1 + \sqrt{5-m} \ge 5 \\ 1 - \sqrt{5-m} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$ (mâu thuẫn).

+ Xét $m = 2$ thì tập nghiệm là $1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}$. Khi đó đúng với $x = 2$.

Vậy $[a;b] = [2]$ là một điểm duy nhất. **Chọn B.**

Câu 102: [THPT NGUYỄN QUANG DIÊU]

Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4=0$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{4};4\right]$.

A. $-3\le m\le\frac{7}{3}$. **B.** $-3<m\le\frac{7}{3}$. **C.** $m<-3$. **D.** $m>\frac{7}{3}$.

Hướng dẫn.

Ta có điều kiện $x\in(2;4]$. Khi đó ta có $(m-1)\log_2^2(x-2)+(m-5)\log_2(x-2)+m-1=0$.

Đặt $\log_2(x-2)=t\le1$, ta được $(m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$

$$\Leftrightarrow m=\frac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}=1+\frac{4t}{t^2+t+1}\Leftrightarrow 3m=3+\frac{4.2t+4t}{t^2+t+1}\le3+\frac{4(t^2+1)+4t}{t^2+t+1}=7.$$

Suy ra $m\le\frac{7}{3}$. Mặt khác $m=-3+\frac{4t^2+8t+4}{t^2+t+1}=-3+\frac{4(t+1)^2}{t^2+t+1}\ge-3$.

Vậy $-3\le m\le\frac{7}{3}$. **Chọn A.**

Lời bình.

Ta có thể theo phương pháp chung khảo sát $f(t)=\frac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}, t\le1$ để giải toán. Khi biết "điểm rơi" thì ta có thể trình bầy thêm cách khác "để thay đổi không khí một tí".

Câu 103: [THPT Chuyên Thái Nguyên]

Cho phương trình: $\log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)+\log_{3-2\sqrt{2}}(mx+x^2)=0$. Tìm m để phương trình có nghiệm thực duy nhất.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=1\end{array}\right.$. **B.** $m>1$. **C.** $-3<m<1$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn.

Trước hết ta có điều kiện $x(m+x)>0$, nếu $m+x<0$ thì $m+x-1<0$ không thỏa mãn, nên ta có $\begin{cases}m+x>0\\x>0,x+m-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x>1-m\end{cases}$. Ngoài ra $3-2\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{-1}$ từ đó ta có phương trình: $m+x-1=mx+x^2\Leftrightarrow m=\frac{x^2-x+1}{1-x}=f(x), x>0, x\ne1$. Ta có:

$m>1-x\Rightarrow\frac{x}{1-x}>0\Rightarrow0<x<1$ và $f'(x)>0,\forall x\in(0;1)$, ta có bảng biến thiên:

x	0	1
$f(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra để phương trình có nghiệm duy nhất thì $m>1$. **Chọn B**.

Câu 104:

Số giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3.

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{\log_3^2 x+1}=t\in\left[1;2\right]\Rightarrow t^2+t-2=2m\Rightarrow 0\le 2m\le 4\Rightarrow 0\le m\le 2$. **Chọn D**.

Câu 105: Cho phương trình $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.\log_2\left(2\left|x-m\right|+2\right)$. Tập tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. $-1<m<\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}<m<1$. **D.** $\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn.

Phương trình có dạng $2^u.\log_2\left(u+2\right)=2^v.\log_2\left(v+2\right),u=\left(x-1\right)^2,v=2\left|x-m\right|$. Khi đó xét hàm số $f\left(t\right)=2^t.\log_2\left(t+2\right),t>0$ là tích của hai hàm số dương và đồng biến nên đồng biến, suy ra

$u=v\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=2\left|x-m\right|$. Thử thấy $m=\dfrac{3}{2}$ phương trình có 3 nghiệm $x=2,x=\pm\sqrt{2}$.

Chọn D.

Câu 106: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH)

Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $2^x+2^y=4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=\left(2x^2+y\right)\left(2y^2+x\right)+9xy$.

A. $P_{\max}=\dfrac{27}{2}$. **B.** $P_{\max}=18$. **C.** $P_{\max}=27$. **D.** $P_{\max}=12$.

Hướng dẫn.

Áp dụng bđt $4=2^x+2^y\ge 2\sqrt{2^x.2^y}\Rightarrow 2^{x+y}\le 4\Rightarrow x+y\le 2\Rightarrow xy\le\dfrac{1}{4}\left(x+y\right)^2=1$.

Ta có $P=4x^2y^2+2\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^2-3xy\right]+10xy\le 4x^2y^2+4\left[4-3xy\right]+10xy$

$P\le 16+2x^2y^2+2xy\left(xy-1\right)\le 18\Rightarrow P_{max}=18\Leftrightarrow x=y=1$. **Chọn B**.

Câu 107: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\log_9(a+3b)=0$ và $5^{2c+6d-1}=\frac{1}{25}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)$ là

A. $\frac{11}{40}$. **B.** $\frac{9}{40}$. **C.** $\frac{3\sqrt{10}}{20}$. **D.** $\frac{\sqrt{22}}{10}$.

Hướng dẫn.

Từ giả thiết: $\log_9(a+3b)=0 \Leftrightarrow a+3b=1$ và $5^{2c+6d-1}=\frac{1}{25} \Leftrightarrow c+3d=-\frac{1}{2}$.

Khi đó $P=a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)=(a-c)^2+(b-d)^2$ hay viết lại:

$$10P=(1^2+3^2)\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right]\geq\left[(a-c)+3(b-d)\right]^2=\left(1-\frac{-1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$\Rightarrow \min P=\frac{9}{40} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=1 \\ c+3d=-\frac{1}{2} \\ 3(a-c)=(b-d) \end{cases}$. Chẳng hạn tại: $a=\frac{23}{20}, b=-\frac{1}{20}, c=1, d=-\frac{1}{2}$.

Chọn B.

Câu 108: Cho các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1}+\log_3(x^2+y^2+1)=3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=|x-y|+|x^3-y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+2b$.

A. $T=25$. **B.** $T=34$. **C.** $T=32$. **D.** $T=41$.

Hướng dẫn.

Đặt $2^{x^2+y^2-1}=t\geq\frac{1}{2} \Rightarrow \log_3(x^2+y^2+1)=3-t \Leftrightarrow x^2+y^2+1=3^{3-t}=2+\log_2 t$.

$\Leftrightarrow f(t)=2+\log_2 t-3^{3-t}=0$. Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+3^{3-t}\ln 3>0, \forall t\geq\frac{1}{2}$ nên $f(t)$ đồng biến và suy ra phương trình $f(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=2$.

Lại đặt $|x-y|=t\geq 0 \Rightarrow xy=\frac{2-t^2}{2}$ khi đó $S=t\left(3+\frac{2-t^2}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+4t$.

$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+4=0 \Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{8}{3}}>0 \Rightarrow \max S=\frac{16\sqrt{6}}{9}$. Suy ra $T=a+2b=41$. **Chọn D.**

Câu 109: (THPT Triệu Sơn 3 Thanh Hóa)

Xét các số thực a,b thỏa mãn $1>a>b>\frac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_b a=t$. Từ điều kiện $1>a>b>\frac{1}{4}$ suy ra $t\in(0;1)$. Áp dụng bất đẳng thức:

$\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Rightarrow b^2\geq b-\frac{1}{4}\Rightarrow \log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)\geq \log_a b^2=\frac{2}{t}$ và $\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}=\frac{1}{2\left(\log_b\frac{a}{b}\right)}=\frac{1}{2(t-1)}$ ta có

$P\geq\frac{2}{t}+\frac{1}{2(1-t)}=\frac{4}{2t}+\frac{1}{2-2t}\geq\frac{(2+1)^2}{2t+2-2t}=\frac{9}{2}$. Đẳng thức có tại $\frac{2}{2t}=\frac{1}{2-2t}\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

Vậy $\min P=\frac{9}{2}\Leftrightarrow b=\frac{1}{2},a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. **Chọn D.**

Câu 110: [Sở GD Hải Dương]

Cho $m=\log_a\sqrt[3]{ab}$ với $a>1,b>1$ và $P=\log_a^2 b+16\log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=4$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b=x>0\Rightarrow P=x^2+\frac{16}{x}=x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\geq 3\sqrt[3]{8.8}=12\Rightarrow P_{\min}=12$ tại $x=2$.

Khi đó $m=\log_a\sqrt[3]{ab}=\frac{1}{3}(1+\log_a b)=\frac{1}{3}(1+x)=1$. **Chọn C.**

Câu 111: Cho hai số thực x,y không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$ là

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Hướng dẫn.

Biến đổi PT $\Leftrightarrow 2(x+1)^2-(2y+1)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2y+1}-\log_{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}(x+1)\right]$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\log_{\sqrt{2}} t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, với $u=\sqrt{2}(x+1), v=\sqrt{2y+1}$ thì phương trình đã cho trở thành $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow 2y+1=2(x+1)^2$

$\Rightarrow 2y=2x^2+4x+1$ thế vào P, ta có: $P=e^{2x-1}+4x^2-(2x^2+4x+1)+1=e^{2x-1}+2x^2-4x$

Hay viết lại $P=e^t+\frac{1}{2}t^2-t-\frac{3}{2}, t=2x-1$. Ta có $P'=e^t+t-1; P'=0\Leftrightarrow t=0$

$P''=e^t+1>0, \forall t\Rightarrow P'$ đồng biến, ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
P'		-	0	+	
P	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min P=-\frac{1}{2}$. **Chọn A**.

Câu 112:

Xét các số thực a,b thỏa mãn $1>a>b>\frac{1}{3}$ và $P=\log_a\left(\frac{4b-1}{4a^3}\right)+\log^2_{\frac{a}{b}} a$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b=t$. Từ điều kiện $1>a>b>\frac{1}{3}$ suy ra $t>1$. Áp dụng bất đẳng thức:

$\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\Rightarrow b^2\ge\frac{4b-1}{4}\Rightarrow \log_a\left(\frac{4b-1}{4}\right)\ge\log_a b^2=2t$ và $\log^2_{\frac{a}{b}} a=\frac{1}{\left(\log_a\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{1}{(t-1)^2}$

Khi đó $P=\log_a\left(\frac{4b-1}{4}\right)+\log^2_{\frac{a}{b}} a-\log_a a^3\ge 2t+\frac{1}{(t-1)^2}-3=t-1+t-1+\frac{1}{(t-1)^2}-1$

$P\ge 3\sqrt[3]{(t-1)(t-1)\frac{1}{(t-1)^2}}-1=2$. Đẳng thức có tại $t-1=\frac{1}{(t-1)^2}\Leftrightarrow t=2$

Hay tại $\frac{1}{2}=b=a^2\Rightarrow\frac{a}{b}=2a=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. **Chọn C**.

Câu 113: Cho các số dương $\sqrt{b} > a > 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \left(\log_a b^2\right)^2 + 6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2$ là

A. 30. **B.** 40. **C.** 18. **D.** 60.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b = x, (x > 2) \Rightarrow b = a^x$ và $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \log_{\frac{a^{x/2}}{a}} \frac{a^{x/2}}{a^{1/2}} = \log_{a^{x/2-1}}\left(a^{x/2-1/2}\right) = \frac{x-1}{x-2}$

Ta có $P = (2x)^2 + 6\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = 4(t+2)^2 + 6\left(\frac{t+1}{t}\right)^2, t = x - 2 > 0$

$P = 4\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 12\left(t + \frac{1}{t}\right) + 2\left(t + t + \frac{1}{t^2}\right) + 22 \geq 8 + 24 + 6 + 22 = 60$.

Vậy $P_{\min} = 60 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow b = a^3, (a > 1)$. **Chọn D.**

Câu 114: (THPT Yên Phong)

Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln\frac{x+2y}{y}$ là $a + \ln b$. Giá trị của tích ab là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Hướng dẫn.

Đặt $x = ty, t > 0 \Rightarrow xy \leq 4y - 1 \Leftrightarrow ty^2 - 4y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{4-t}}{t} \leq y \leq \frac{2+\sqrt{4-t}}{t}, t \in (0;4]$.

Và $S = \frac{6}{t} + \ln(2+t), t \in (0;4] \Rightarrow S'(t) = \frac{-6}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)} < 0, \forall t \in (0;4]$ nên $S(t)$ nghịch biến $\Rightarrow \min S = S(4) = \frac{3}{2} + \ln 6 \Rightarrow P = 12 + \frac{3}{2} + \ln 6 = \frac{27}{2} + \ln 6$ và $ab = 81$. **Chọn B.**

Lời bình.

Xin lỗi quý thầy cô và bạn đọc vì ban đầu tôi tính $\frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2} = a$ và $b = 6$ nên cho kết quả là 45.

Câu 115: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $3 + \ln\frac{x+y+1}{3xy} = 9xy - 3x - 3y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 9.

Hướng dẫn.

Biến đổi PT $\Leftrightarrow \ln\frac{x+y+1}{3xy} = 3(3xy) - 3(x+y+1) \Leftrightarrow \ln\frac{u}{v} = 3v - 3u \Leftrightarrow 3u + \ln u = 3v + \ln v$

$\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x + y + 1 = 3xy \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{3x-1}, x > \dfrac{1}{3} \Rightarrow P = \dfrac{x^2 + x}{3x-1}, x > \dfrac{1}{3}$.

Hay ta có $9P = \dfrac{9x^2 + 9x}{3x-1} = 3x + 4 + \dfrac{4}{3x-1} = (3x-1) + \dfrac{4}{3x-1} + 5 \geq 2\sqrt{4} + 5 = 9$.

Suy ra $P \geq 1 \Rightarrow P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$. **Chọn C.**

Câu 116: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \dfrac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} + x^2 + 2y^2 + 1 \leq 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x^2 - xy + 2y^2}{2xy - y^2}$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn.

Đặt $2x^2 + 2y^2 = u > 0, 3xy + x^2 = v > 0$, khi đó từ giả thiết ta có $\log_2 \dfrac{u}{v} + u \leq v$ hay

$\log_2 u + u \leq \log_2 v + v \Leftrightarrow u \leq v \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq 3xy + x^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\dfrac{x}{y}\right) + 2 \leq 0$. Đặt $\dfrac{x}{y} = t > 0$

Ta có $t \in [1;2]$ và $P = \dfrac{2t^2 - t + 2}{2t-1} = t + \dfrac{2}{2t-1} = \left(t - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{t - \dfrac{1}{2}}\right) + \dfrac{1}{2} \geq 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Vậy $\min P = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2x = 3y$. **Chọn D.**

Câu 117: Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c)$ là?

A. $-3 - \log_5 3$. **B.** -4. **C.** $-2 - \sqrt{3}$. **D.** $-2 - \log_3 5$.

Hướng dẫn.

Từ $3^a = 5^b = 15^{-c} \Rightarrow a = -c(1 + \log_3 5), b = -c(1 + \log_5 3) \Rightarrow a = -c(1+m), b = \dfrac{-c(1+m)}{m}$ thay vào P ta được

$P = c^2\left(m + \dfrac{1}{m} + 1\right)^2 + 4c(m + \dfrac{1}{m} + 1) = T^2c^2 + 4Tc = (Tc + 2)^2 - 4 \geq -4$. **Chọn B.**

Câu 118: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2x - y$.

A. $P_{\min} = 4$. **B.** $P_{\min} = -4$. **C.** $P_{\min} = 2\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn.

Điều kiện $\begin{cases} x > y \\ x > -y \end{cases} \Rightarrow x > |y| \geq 0$. Khi đó ta có $\log_4(x^2 - y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 - y^2 \geq 4$. Dùng phép thế ta có $x^2 - (2x - P)^2 \geq 4 \Rightarrow 3x^2 - 4Px + P^2 + 4 \leq 0$. Trước hết ta có $\Delta' = 4P^2 - 3(P^2 + 4) \geq 0$

Hay $P^2 \geq 12 \Rightarrow P \geq 2\sqrt{3}$ (vì $P = x + (x - y) > |y| + (x - y) > 0$). Dấu bằng có khi:

$x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}, y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ thỏa mãn điều kiện. Vậy $P_{\min} = 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 119: Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm:

$1 + \log_2(2 - x) \leq 2\log_2\left(m - \dfrac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + 2}\right)\right) - \log_2(x + 1)$. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $m_0 \in (9;10)$. **B.** $m_0 \in (8;9)$. **C.** $m_0 \in (-10;-9)$. **D.** $m_0 \in (-9;-8)$.

Hướng dẫn.

Điều kiện $-1 < x < 2$. Biến đổi bất phương trình tương đương với

$$\log_2(2 - x) + \log_2(2x + 2) \leq 2\log_2\left(m - \frac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + 2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{(2 - x)(2x + 2)} \leq \log_2\left(m - \frac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + 2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2 - x)(2x + 2)} \leq m - \frac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + 2}\right).$$

$$\Leftrightarrow x + 4 + 2\sqrt{(2 - x)(2x + 2)} - 8\left(\sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + 2}\right) - 4 \leq 2m \quad (*).$$

Đặt $\sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + 2} = t; x \in (-1;2) \Rightarrow t \in \left(\sqrt{3};3\right]$, khi đó (*) trở thành:

$f(t) = t^2 - 8t - 4 \leq 2m$ (**), mà $f(t)$ nghịch biến trên $\left(\sqrt{3};3\right]$ nên (**) có nghiệm khi và chỉ khi có ít nhất một phần đồ thị $f(t)$ nằm dưới đường thẳng $y = 2m$ hay:

$$\min_{\left(\sqrt{3};3\right]} f(t) \leq 2m \Leftrightarrow f(3) = -19 \leq 2m \Leftrightarrow m \geq -\frac{19}{2} \Rightarrow m_0 = -\frac{19}{2}.$$ **Chọn C.**

Câu 120: Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2\dfrac{1 - ab}{a + b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

A. $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10} - 3}{2}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10} - 5}{2}$.

C. $P_{\min} = \dfrac{3\sqrt{10}-7}{2}$.

D. $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$.

Hướng dẫn.

Biến đổi PT $\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1-ab}{a+b} + 1 = -2\left(1-ab\right) + \left(a+b\right) \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{u}{v} = -u + v$

Hay $u + \log_2 u = v + \log_2 v \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2 - 2ab = a + b \Rightarrow b = \dfrac{2-a}{2a+1}, a \in \left(0;2\right)$. Khi đó ta có

$2P = 2a + 4b = 2a + \dfrac{8-4a}{2a+1} = 2a + 1 + \dfrac{10}{2a+1} - 3 \geq 2\sqrt{10} - 3 \Rightarrow P \geq \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Dấu bằng có tại $a = \dfrac{\sqrt{10}-1}{2}, b = \dfrac{\sqrt{10}-2}{4}$. Vậy $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 121: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x^3 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2x + y$ là?

A. $2\sqrt{2} - 2$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $4 + 2\sqrt{2}$. **D.** $3 + 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn.

Từ giả thiết suy ra $y \geq \dfrac{x^3}{x-1}, x > 1$. Nên $S = 2x + y \geq 2x + \dfrac{x^3}{x-1} = x^2 + 3x + 1 + \dfrac{1}{x-1} = f\left(x\right)$.

Đặt $x - 1 = t > 0 \Rightarrow f\left(t\right) = t^2 + 5t + 5 + \dfrac{1}{t} \Rightarrow f'\left(t\right) = 2t + 5 - \dfrac{1}{t^2}$.

$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t^2\left(2t+5\right) - 1 = 0 \Rightarrow 2t^3 + 5t^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(2t+1\right)\left(t^2 + 2t - 1\right) = 0 \Rightarrow t = -1 + \sqrt{2}$

Suy ra $\min f\left(t\right) = f\left(-1+\sqrt{2}\right) = 4 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}, y = 4 + 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 122: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $xy = 4, x \geq \dfrac{1}{2}, y \geq 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2^2 x + (\log_2 y - 1)^2$. Tính $S = M + m$.

A. $S = 6$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = \dfrac{21}{2}$. **D.** $S = \dfrac{11}{2}$.

Hướng dẫn.

Rút $y = \dfrac{4}{x}, x \in \left[\dfrac{1}{2};4\right]$ thế vào P, ta có: $P = \log_2^2 x + (1 - \log_2 x)^2 = 2t^2 - 2t + 1 = f\left(t\right)$;

Với $\log_2 x = t \in \left[-1;2\right]$, $f'\left(t\right) = 4t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow m = \min P = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ tại $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}$, và $M = \max P = 5 = f\left(2\right) = f\left(-1\right)$

tại $x=4, y=1$ hoặc tại $x=\frac{1}{2}, y=8$. Suy ra $S=M+m=\frac{11}{2}$. **Chọn D.**

Câu 123: Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left(1+\log_a \frac{b}{a}\right)^3+\left(4-2\log^2_a \sqrt{b}\right)^3+3$ là bao nhiêu? Biết a, b là các số thực thỏa mãn $a^3>b\geq 1$.

A. 67. **B.** $\frac{31455}{512}$. **C.** 27. **D.** $\frac{455}{8}$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b=x,\left(0\leq x<3\right)\Rightarrow b=a^x$ và $\log_a \frac{b}{a}=x-1; \log^2_a \sqrt{b}=\left(\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{4}x^2$.

Khi đó $P=2\left(1+x-1\right)^3+\left(4-\frac{1}{2}x^2\right)^3+3=2x^3+3+\frac{1}{8}\left(8-x^2\right)^3$.

Ta có $P'=6x^2-\frac{6x}{8}\left(8-x^2\right)^2=\frac{6x}{8}\left[8x-\left(8-x^2\right)^2\right]=\frac{3x}{4}\left(2-x\right)\left(x^3+2x^2-12x-32\right)$

Xét $g\left(x\right)=x^3+2x^2-12x-32, x\in\left[0;3\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=3x^2+4x-12=0\Leftrightarrow x=\frac{-2+2\sqrt{10}}{3}$

Lập bảng biến thiên suy ra $g\left(x\right)<0, \forall x\in\left[0;3\right)$, từ đó suy ra $P'=0\Leftrightarrow x=0, x=2\in\left[0;3\right)$

Suy ra $P_{\max}=67\Leftrightarrow x=0\Leftrightarrow b=1, a>1$. **Chọn A.**

Câu 124:

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $b\geq a^{10}>1, c>1$ và $\log_a b+2\log_b c+5\log_c a=12$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathrm{P}=2\log_a c+5\log_c b+10\log_b a$ là

A. $\frac{15}{2}$. **B.** 15. **C.** 21. **D.** 25.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b=x, \log_b c=y, \log_c a=z\Rightarrow x, y, z>0, xyz=1$ và $x+2y+5z=12$. Khi đó ta có:

$\mathrm{P}=2\log_a c+5\log_c b+10\log_b a=\frac{10}{x}+\frac{5}{y}+\frac{2}{z}$ hay $P=\frac{10}{x}+\frac{5}{y}+2xy$.

Đặt $x=10m, 2y=n$, vì $x\geq 10\Rightarrow m\geq 1$, ta có:

$P=\frac{1}{m}+\left(\frac{10}{n}+10mn\right)\geq\frac{1}{m}+20\sqrt{m}=\left(\frac{1}{m}+\sqrt{m}+\sqrt{m}\right)+18\sqrt{m}\geq 3+18=21$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=n=1\Leftrightarrow x=10, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{5}$ hay là $b=a^{10}, c=a^5,\left(a>1\right)$.

Vậy $P_{\min}=21$. **Chọn C.**

Lời bình:

Một số học sinh có thể đưa về: $P=\frac{10}{x}+\frac{5}{y}+\frac{2}{z}$ và tiếp tục biến đổi

$$P=\frac{10}{x}+\frac{10}{2y}+\frac{10}{5z}=10\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{5z}\right)\geq 10.\frac{\left(1+1+1\right)^2}{x+2y+5z}=\frac{90}{12}=\frac{15}{2}\text{ nên } P_{\min}=\frac{15}{2}.$$

Và kết luận: chọn đáp án **A**. Nhưng quên chú ý đến điều kiện $xyz=1$.

Câu 125: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $1<a<b<c$ và $6\log_a^2 b-\log_b^2 c=\log_a\frac{c}{b}-2\log_b\frac{c}{b}-1$. Đặt $T=\log_b c-2\log_a b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $T\in(-3;-1)$. **B.** $T\in(-1;2)$. **C.** $T\in(2;5)$. **D.** $T\in(5;10)$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b=x,\log_b c=y\Rightarrow x,y>1\Rightarrow T=y-2x$. Ta có $\log_a c=xy$ và khi đó giả thiết là:

$$6x^2-y^2=xy-x-2\left(y-1\right)-1\Leftrightarrow 6x^2-\left(T+2x\right)^2=x\left(T+2x\right)-x-2\left(T+2x\right)+1$$

$$\Leftrightarrow -T^2-4Tx=Tx-5x-2T+1\Leftrightarrow 5x\left(1-T\right)=\left(T-1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}T=1\\ x=\frac{1-T}{5}>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}T=1\\ T<-4\end{array}\right..$$

So sánh đáp án ta **chọn B**.

Câu 126: Cho các số thực $a,b,c>1$ và $S=\log_a(bc)+2\log_b(ca)+9\log_c(ab)$. Tính $\log_b(ca)$ khi biểu thức S đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{8(2\sqrt{2}-1)}{7}$. **C.** $3+\sqrt{2}$. **D.** $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b=x>0,\log_b c=y>0,\log_c a=z>0\Rightarrow xyz=1$. Khi đó ta có:

$$S=x+\frac{1}{z}+2y+\frac{2}{x}+9z+\frac{9}{y}=x+xy+\frac{2}{x}+\frac{9}{xy}+2y+\frac{9}{y}.$$

$$S=x\left(y+1\right)+\frac{2y+9}{xy}+2y+\frac{9}{y}\geq 2\sqrt{\frac{\left(y+1\right)\left(2y+9\right)}{y}}+2y+\frac{9}{y}=2\sqrt{2y+\frac{9}{y}+11}+2y+\frac{9}{y}$$

$$S\geq 2\sqrt{2\sqrt{18}+11}+2\sqrt{18}=2\sqrt{6\sqrt{2}+11}+6\sqrt{2}=2\left(\sqrt{2}+3\right)+6\sqrt{2}\Rightarrow \min S=6+8\sqrt{2}.$$

Khi đó $\begin{cases}2y=\frac{9}{y}\\ x^2=\frac{2y+9}{y\left(y+1\right)}\\ xyz=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ x=\sqrt{2}\\ z=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow c=a^3,b=a^{\sqrt{2}},a>1\Rightarrow\log_b\left(ca\right)=\log_{a^{\sqrt{2}}}\left(a^4\right)=2\sqrt{2}$.

Câu 127: Cho các số thực $a,b,c>1$ và các số thực dương thay đổi x,y,z thỏa mãn $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{16}{x}+\dfrac{16}{y}-z^2$.

A. 20. **B.** $20-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **C.** 24. **D.** $24-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Hướng dẫn.

Ta có $a^x=b^y=c^z\Rightarrow y=x\log_b a, z=x\log_c a$. Mà ta có:

$$a^{2x}=abc\Rightarrow a^{2x-1}=bc\Rightarrow 2x-1=\log_a b+\log_a c\Leftrightarrow 2x=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$$

Suy ra $P=\dfrac{16}{x}+\dfrac{16}{y}-z^2=16\left(2-\dfrac{1}{z}\right)-z^2=32-\left(\dfrac{8}{z}+\dfrac{8}{z}+z^2\right)\le 32-3\sqrt[3]{64}=20$.

Vậy $P_{max}=20\Leftrightarrow z^2=\dfrac{8}{z}\Leftrightarrow z=2,\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 128: Cho hai số thực x,y thay đổi thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}}-e^{y^2+\sqrt{1-x^2}}-y=\dfrac{y^2-x}{4}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^3+2y^2-2x^2+8y-x+2$ là $\dfrac{a}{b}$ với a,b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=a+b$.

A. $S=85$. **B.** $S=31$. **C.** $S=75$. **D.** $S=41$.

Hướng dẫn.

Viết lại $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}}-e^{y^2+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{y^2+\sqrt{1-x^2}-\left(x-4y+\sqrt{1-x^2}\right)}{4}\Leftrightarrow e^u+\dfrac{1}{4}u=e^v+\dfrac{1}{4}v$ và dễ dàng suy ra $u=v\Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2}=y^2+\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow y^2+4y=x, x\in[-1;1]$.

Biến đổi $P=x^3-2x^2-x+2+2\left(y^2+4y\right)=x^3-2x^2+x+2, x\in[-1;1]$.

Ta có $P'(x)=3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow x=1, x=\dfrac{1}{3}$. Suy ra $P_{max}=\dfrac{58}{27}$. Vậy $S=a+b=85$. **Chọn A.**

Câu 129: Cho hai số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x+y+1=2(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3(x^2+y^2)$ là $\dfrac{a}{b}$ với a,b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b$.

A. $T=8$. **B.** $T=141$. **C.** $T=148$. **D.** $T=151$.

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x-2}=m\ge 0, \sqrt{y+3}=n\ge 0\Rightarrow m^2+n^2=2(m+n)\Leftrightarrow (m-1)^2+(n-1)^2=2$ (*).

Biến đổi $S=3^{2m+2n-5}+2(m+n)2^{8-2m-2n}-3\left[\left(m^2+2\right)^2+\left(n^2-3\right)^2\right]$.

Mà $\dfrac{a}{b}$ là số hữu tỉ nên ta phải có $3^{2m+2n-5};2^{8-2m-2n}$ là các số hữu tỉ suy ra $m+n$ là số tự nhiên.

Từ (*) thì ta tìm được các cặp số tự nhiên là $\left(m;n\right)\in\left\{\left(0;0\right),\left(2;0\right),\left(0;2\right)\right\}$, thử vào S ta có

GTLN tại $m=0,n=2$ và: $S_{\max}=\dfrac{1}{3}+64-15=\dfrac{148}{3}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow T=151$. **Chọn D**.

Lời bình.

Trên đây là bài toán lấy từ ý tưởng bài toán thi **THPTQG năm 2016** của BGD. Bài toán chủ yếu rèn luyện kỹ năng biến đổi và biện luận là chính, không có tác dụng rèn luyện về chủ đề mũ và loogarit bao nhiêu. Như thế về chủ đề mũ logarit tôi đánh giá ở mức trung bình thấp.

Câu 130:

Cho các số thực dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a\dfrac{c}{b}-2\log_b\dfrac{c}{b}-3$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a b-\log_b c$. Tính $S=3M+2m$.

A. $S=\dfrac{2}{3}$. **B.** $S=\dfrac{1}{3}$. **C.** $S=3$. **D.** $S=2$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_a b=x,\log_b c=y\Rightarrow\log_a c=xy$. Khi đó ta có:

$x^2+y^2=xy-x-2y+2-3\Leftrightarrow x^2+y^2=xy-x-2y-1$

Hay ta có: $x^2+\left(x-P\right)^2=x\left(x-P\right)-x-2\left(x-P\right)-1\Leftrightarrow x^2-\left(P-3\right)x+P^2-2P+1=0$.

PT có nghiệm khi $\left(P-3\right)^2-4\left(P^2-2P+1\right)\ge 0\Leftrightarrow -3P^2+2P+5\ge 0\Leftrightarrow -1\le P\le\dfrac{5}{3}$.

Từ đó suy ra $S=3M+2m=3$. **Chọn C**.

Câu 131:

Cho các số thực dương x,y thay đổi thỏa mãn $\log(x+2y)=\log x+\log y$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}$ là $e^{\frac{a}{b}}$ với a,b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=9$. **C.** $S=13$. **D.** $S=2$.

Hướng dẫn.

Viết lại giả thiết $\log(x+2y)=\log x+\log y\Rightarrow x+2y=xy\Rightarrow x=\dfrac{2y}{y-1},y>1$. Thế vào P ta có:

$$P=\sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}=e^{\frac{x^2}{4\left(1+2y\right)}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}=e^{\frac{x^2}{4\left(1+2y\right)}+\frac{y^2}{1+x}}=e^{f\left(y\right)},\text{ với } f\left(y\right)=\frac{y^2}{\left(y-1\right)^2\left(1+2y\right)}+\frac{y^2\left(y-1\right)}{3y-1},y>1$$

$f\left(y\right)=\dfrac{y^2\left[3y-1+\left(y-1\right)^3\left(1+2y\right)\right]}{\left(y-1\right)^2\left(1+2y\right)\left(3y-1\right)}$. Với $y>1\Rightarrow\left(3y-1\right)\left(1+2y\right)\le\dfrac{1}{4}\left(3y-1+1+2y\right)^2=\dfrac{25y^2}{4}$ suy ra

$f\left(y\right)\ge\dfrac{4\left[3y-1+\left(y-1\right)^3\left(1+2y\right)\right]}{25\left(y-1\right)^2}$. Đặt $y=1+t\Rightarrow Q=\dfrac{4\left[3t+2+t^3\left(2t+3\right)\right]}{25t^2}$, ta viết lại

$Q=\dfrac{4}{25}\left(2t^2+\dfrac{2}{t^2}+3t+\dfrac{3}{t}\right)\ge\dfrac{4}{25}\left(4+6\right)=\dfrac{8}{5}$. Dấu bằng có khi $t=1\Leftrightarrow y=2$. Vậy $\min f\left(y\right)=\dfrac{8}{5}$

suy ra $\min P=e^{\frac{8}{5}}=e^{\frac{a}{b}}\Rightarrow S=13$. **Chọn C.**

Lời bình.

Đây là bài toán khó vì số mũ của lũy thừa là biểu thức phức tạp. Nếu để nguyên để khảo sát thì gặp khó khăn lớn khi phải đạo hàm và tìm nghiệm, rồi còn phải lập bảng biến thiên... do đó gặp tình huống này thì chúng ta nghĩ đến phương pháp đánh giá để giảm độ phức tạp. Nói như vậy: phương pháp đạo hàm là công cụ mạnh để giải toán hàm số, nhưng trong trường hợp này chưa chắc tỏ ra là "mạnh". Bài toán trên là thi Olimpic hay sao nhỉ? Ra đề thi kiểu như vậy thì bó tay!

Câu 132: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $4+3^{x^2-2y+2}=(4+9^{x^2-2y}).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+2y$.

A. $-\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{7}{4}$. **C.** $-\dfrac{33}{8}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn.

Đặt $x^2-2y=t\Rightarrow 4+3^{t+2}=\left(4+9^t\right).7^{2-t}\Rightarrow\dfrac{4+3^{t+2}}{4+9^t}=7^{2-t}$. Xét hàm $f\left(u\right)=\dfrac{4+9u}{4+u^2},u>0$

$f'\left(u\right)=\dfrac{9\left(4+u^2\right)-2u\left(4+9u\right)}{\left(4+u^2\right)^2}\Rightarrow f'\left(u\right)=0\Leftrightarrow -9u^2-8u+36=0,u>0\Leftrightarrow u_0=\dfrac{-4+2\sqrt{85}}{9}$.

Ta có u_0 là điểm cực đại, và $\lim\limits_{u\to 0}f\left(u\right)=1,\ \lim\limits_{u\to+\infty}f\left(u\right)=0$.

Hàm số $g\left(u\right)=7^{2-\log_3 u},u>0$ nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$. Và $\lim\limits_{u\to 0}g\left(u\right)=+\infty,\ \lim\limits_{u\to+\infty}g\left(u\right)=0$.

Ta có bảng biến thiên

u	0	u_0	$+\infty$
$f\left(u\right)$	1	$f\left(u_0\right)$	0
$g\left(u\right)$	$+\infty$		0

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(u) = g(u)$ có nghiệm duy nhất tại $f(9) = g(9) = 1$, và khi đó: $u = 3^t = 9 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2y + 2$.

$\Rightarrow x^2 = S - x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 - S = 0$. Phương trình có nghiệm khi:

$1 - 4(2 - S) \geq 0 \Rightarrow S \geq \frac{7}{4} \Rightarrow \min S = \frac{7}{4}$. **Chọn B.**

Câu 133:

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $(x+y)^3 + x + y + \log_2 \frac{x+y}{1-xy} = 8(1-xy)^3 - 2xy + 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$. **C.** $\sqrt{15} - 2$. **D.** $\frac{2\sqrt{15}+3}{6}$.

Hướng dẫn.

Đặt $x + y = u > 0, 1 - xy = v > 0 \Rightarrow u^3 + u + \log_2 u = (2v)^3 + \log_2 (2v) + 2v$ Xét hàm

$f(t) = t^3 + t + \log_2 t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến. Từ đó ta được:

$u = 2v \Leftrightarrow x + y = 2(1 - xy), xy < 1 \Rightarrow x = \frac{2-y}{1+2y}$. Khi đó ta có:

$2P = 2x + 6y = \frac{4-2y}{1+2y} + 6y = 6y + \frac{5}{1+2y} - 1 = 3(2y+1) + \frac{5}{1+2y} - 4 \geq 2\sqrt{15} - 4$.

Suy ra $\min P = \sqrt{15} - 2 \Leftrightarrow y = \frac{-3+\sqrt{15}}{6}, x = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$ (thỏa mãn $xy < 1$). **Chọn C.**

Câu 134: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM)

Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2 \sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2(2017a)$.

A. 14. **B.** 22. **C.** 16. **D.** 19.

Hướng dẫn.

Đặt $x = \sqrt[6]{a}; a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \geq 1$. Khi đó ta có $3\log_3\left(1 + x^3 + x^2\right) > 2\log_2 x^3$

Hay $\frac{\ln\left(1+x^3+x^2\right)}{\ln 3} > \frac{2\ln x}{\ln 2} \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(1+x^3+x^2\right) - \frac{2\ln 3}{\ln 2}\ln x > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{3x^2+2x}{1+x^3+x^2} - \frac{b}{x}; b = \frac{2\ln 3}{\ln 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - b\left(1+x^3+x^2\right)}{x\left(1+x^3+x^2\right)}$.

Lại xét $g(x) = 3x^3 + 2x^2 - b\left(1+x^3+x^2\right) \Rightarrow g'(x) = 3(3-b)x^2 + 2(2-b)x$, ta có

$b=\dfrac{2\ln 3}{\ln 2}=2\log_2 3\approx 3{,}16\Rightarrow 3-b<0\ \&\ 2-b<0\Rightarrow g'(x)<0,\forall x\ge 1$, suy ra $g(x)$ nghịch biến và $g(x)\le g(1)=5-3b<0$ từ đó suy ra $f'(x)<0,\forall x\ge 1$ và suy ra $f(x)$ nghịch biến nên ta được $f(x)>0=f(4)\Leftrightarrow x<4\Rightarrow a<4^6\Rightarrow a_{max}=4095$.

Vậy $\log_2(2017a_{max})=\log_2(2017.4095)\approx 22,98\Rightarrow\left[\log_2(2017a_{max})\right]=22$. **Chọn B.**

Lời bình.

Bài toán trên khá phức tạp, là bài toán khó. Để xét dấu $f'(x)$ ta phải đi xét hàm số phụ $g(x)$ là tử của $f'(x)$, ta kí hiệu $b=\dfrac{2\ln 3}{\ln 2}$, đổi $\log_2 x$ sang $\ln x$ trước để gọn nhẹ trong biến đổi.

Câu 135: Cho $x=2019!$. Tính $A=\dfrac{1}{\log_{2^{2019}} x}+\dfrac{1}{\log_{3^{2019}} x}+...+\dfrac{1}{\log_{2018^{2019}} x}+\dfrac{1}{\log_{2019^{2019}} x}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2019}$. **B.** $\dfrac{1}{2018}$. **C.** 2019. **D.** 2018.

Hướng dẫn.

Biến đổi $A=\log_x(2.3.4...2019)^{2019}=2019\log_x x=2019$.

Câu 136: Cho $f(x)=\dfrac{x^2}{1+2019^x}$. Tính $B=f(\cos 1^o)+f(\cos 2^o)+...+f(\cos 178^o)+f(\cos 179^o)$ bằng

A. 45. **B.** $45,5$. **C.** $-44,5$. **D.** $44,5$.

Hướng dẫn.

Tính $f(x)+f(-x)=\dfrac{x^2}{1+2019^x}+\dfrac{(-x)^2}{1+2019^{-x}}=\dfrac{x^2+x^2.2019^x}{1+2019^x}=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$ (1).

Ta có $f(0)=0$ và nhận xét $\cos 179^o=-\cos 1^o=-x$. Từ đó tổng B có dạng trong (1) nên ta có

$B=f(\cos 90^o)+\left[f(\cos 1^o)+f(\cos 179^o)\right]+\left[f(\cos 2^o)++f(\cos 178^o)\right]+...=$

$B=\cos^2 1^o+\cos^2 2^o+...+\cos^2 89^o=\left[\cos^2 1^o+\cos^2 89^o\right]+\left[\cos^2 2^o+\cos^2 88^o\right]+...+\cos^2 45^o.$

Suy ra $B=44+\dfrac{1}{2}=44,5$. **Chọn D.**

Lời bình.

Xin lỗi quý thầy cô và bạn đọc vì lỗi trước đây hàm $f(x)$ bị sai, do đó bài toán cần sửa lại.

Đề bài được biên soạn từ đề thi **Trường THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc** năm 2019 2020.

Câu 137: Cho $f(x)=10^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1).f(2).f(3)...f(2021)=10^{\frac{a}{b}}$ với a,b là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $\frac{a+1}{b^2}$.

A. $\frac{2022}{2021}$. **B.** 2022. **C.** 1. **D.** $\frac{2021}{2022}$.

Hướng dẫn.

Biến đổi $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=1+\frac{2x(x+1)+1}{x^2(x+1)^2}=1+\frac{2}{x(x+1)}+\frac{1}{x^2(x+1)^2}=\left[1+\frac{1}{x(x+1)}\right]^2$

Suy ra $S(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=1+\frac{1}{x(x+1)}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

Khi cho x nguyên chạy từ 1 đến n và lấy tổng ta có: $\sum_{x=1}^{n}S(x)=n+\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$.

Suy ra $\log f(x)=S(x)\Rightarrow \log\left[\prod_{x=1}^{n}f(x)\right]=\sum_{x=1}^{n}\left[\log f(x)\right]=\sum_{x=1}^{n}\left[S(x)\right]=\frac{a}{b}=\frac{n^2+2n}{n+1}$.

Cuối cùng ta có $\frac{a}{b}=n+\frac{n}{n+1}$ là tối giản và $\frac{a+1}{b^2}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2}=1$. **Chọn C.**

Câu 138 (THPT Chuyên Thái Bình).

Cho hàm số $f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng $f'(2)+f'(3)+...+f'(2019)+f'(2020)=\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $S=2a-b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Hướng dẫn.

Đạo hàm $f'(x)=\left[\ln(x^2-1)-2\ln x\right]'=\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x},\forall x>1$ hay ta có

$f'(x)=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=S(x)-S(x+1),\forall x>1$, khi cho x nguyên dương từ 2 đến n, ta được:

$\sum_{x=2}^{n}S(x)=1-\frac{1}{n};\sum_{x=2}^{n}S(x+1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$ và do đó:

$\sum_{x=2}^{n}f'(x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2+n}=\frac{n^2+n-2}{2n^2+2n}=\frac{a}{b}$.

Vậy $S=2a-b=-4$. **Chọn D.**

Câu 139: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)

Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính giá trị biểu thức $A=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+...+f\left(\dfrac{100}{100}\right)$?

A. 50. **B.** 49. **C.** $\dfrac{149}{3}$. **D.** $\dfrac{301}{6}$.

Hướng dẫn.

Sử dụng tính chất $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{2}{2+4^x}=1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $2A=\left[f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{99}{100}\right)\right]+\left[f\left(\dfrac{2}{100}\right)+f\left(\dfrac{98}{100}\right)\right]...+\left[f\left(\dfrac{99}{100}\right)+f\left(\dfrac{1}{100}\right)\right]+2f\left(\dfrac{100}{100}\right)$

Suy ra $2A=99+2.\dfrac{4}{6}=\dfrac{301}{3}\Rightarrow A=\dfrac{301}{6}$. **Chọn D.**

Câu 140:

Cho hàm số $f\left(x\right)=2019\ln\left(e^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{e}\right)$. Giá trị của $M=f'\left(1\right)+f'\left(2\right)+...+f'\left(2018\right)$ là

A. 2018 **B.** $\dfrac{2019}{2}$ **C.** 1009 **D.** $\dfrac{2017}{2}$.

Hướng dẫn.

Tính $f'\left(x\right)=\dfrac{e^{\frac{x}{2019}}}{e^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{e}}\Rightarrow f'\left(2019-x\right)=\dfrac{e^{\frac{2019-x}{2019}}}{e^{\frac{2019-x}{2019}}+\sqrt{e}}=\dfrac{e}{e+e^{\frac{x}{2019}}.\sqrt{e}}=\dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+e^{\frac{x}{2019}}}$

Do đó $f'\left(x\right)+f'\left(2019-x\right)=\dfrac{e^{\frac{x}{2019}}}{e^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{e}}+\dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+e^{\frac{x}{2019}}}=1$.

Áp dụng đẳng thức trên khi cho x nhận giá trị nguyên dương từ 1 đến 2018 và ghép các cặp ta có: $2M=\left[f'\left(1\right)+f'\left(2018\right)\right]+\left[f'\left(2\right)+f'\left(2017\right)\right]+...+\left[f'\left(2018\right)+f'\left(1\right)\right]=2018$

Do đó $M=1009$. **Chọn C.**

Câu 141: (THPT Thiệu Hóa Thanh Hóa)

Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ và cấp số nhân $\left(b_n\right)$ thỏa mãn $b_2>b_1\geq 1$ sao cho $f\left(\log_2 b_2\right)+2=f\left(\log_2 b_1\right)$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để $b_n>5^{100}$?

A. 333. **B.** 299. **C.** 234. **D.** 292.

Hướng dẫn.

Gọi $q>1$ là công bội của $\left(b_n\right)$, khi đó $b_2=qb_1$ và đặt $\log_2 b_1=t>0$, ta có:

$\log_2 b_2=t+\log_2 q=t+a$, từ đó: $\left(t+a\right)^3-3\left(t+a\right)+2=t^3-3t$ hay

$3at^2+3a^2t+a^3-3a+2=0$ có nghiệm $t=0,a=1$ hay $b_1=1,q=2$ và cấp số nhân là $b_n=2^{n-1}$ do đó: $b_n>5^{100}\Leftrightarrow 2^{n-1}>5^{100}\Rightarrow n>1+100\log_2 5\approx 233,19\Rightarrow n=234$. **Chọn C.**

Câu 142:

Cho dãy (u_n) thỏa mãn $u_{n+1}=u_n+3,\forall n\ge 1$ và $e^{u_{18}}+5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=e^{4u_1}$.

Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho $\log_2(u_n)<\ln(2020)$?

A. 58. **B.** 60. **C.** 59. **D.** 61.

Hướng dẫn.

+ Từ $u_{n+1}=u_n+3,\forall n\ge 1$ suy ra (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=3$.

+ Từ $e^{u_{18}}-e^{4u_1}+5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=0\Leftrightarrow\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}\left(\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}+5\right)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=0\Leftrightarrow u_{18}=4u_1$. Kết hợp CSC suy ra: $u_1+17.3=4u_1\Rightarrow u_1=17,u_n=3n+14$.

+ Ta có $\log_2(u_n)<\ln(2020)\Leftrightarrow u_n<e^{\ln 2.\ln 2020}\Leftrightarrow n<\frac{1}{3}\left(e^{\ln 2.\ln 2020}-14\right)\approx 60,5$.

Vậy số tự nhiên n lớn nhất thỏa mãn bài toán là $n=60$. **Chọn B.**

Câu 143:

Cho các phương trình $x^{2018}+x^{2017}+x^{2016}+...+x-1=0$ và $x^{2019}+x^{2018}+x^{2017}+...+x-1=0$. Gọi a, b lần lượt là các nghiệm dương của các phương trình đã cho. Khẳng định nào sau đây là đúng

A . b > a + 1 **B.** a > b + 1 **C.** alnb > blna **D.** blna > alnb.

Hướng dẫn.

Phương trình thứ nhất là $x^{2018}+x^{2017}+x^{2016}+...+x=1\Rightarrow 0<x<1$ hay ta có:

$1=x\left(1+x^2+x^3+...+x^{2017}\right)=x.\frac{1-x^{2108}}{1-x}\Leftrightarrow 1-x=x-x^{2019}\Leftrightarrow x^{2019}=2x-1$.

Mà a là nghiệm của phương trình nên $a^{2019}=2a-1\Rightarrow\frac{1}{2}<a<1$.

Hoàn toàn tương tự b là nghiệm của phương trình $x^{2020}=2x-1$ nên $b^{2020}=2b-1$.

Nói cách khác a và b là các hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=2x-1$ lần lượt với các đồ thị $y=f(x)=x^{2019}$ và $y=g(x)=x^{2020}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Dễ thấy $\frac{1}{2}<b<a<1$.

Xét hàm số $y=h(x)=\frac{\ln x}{x},x\in\left(\frac{1}{2};1\right)\Rightarrow h'(x)=\frac{1-\frac{\ln x}{x^2}}{x^2}=\frac{x^2+\ln x^{-1}}{x^4}>0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$, suy ra $h\left(x\right)$ đồng biến, do đó: $h\left(a\right) > h\left(b\right) \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} > \dfrac{\ln b}{b} \Leftrightarrow b\ln a > a\ln b$. **Chọn D.**

Câu 144: Cho các số thực $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ thuộc khoảng $\left(\dfrac{1}{4};1\right)$. Với mỗi n, kí hiệu u_n là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_{x_1}\left(x_2 - \dfrac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \dfrac{1}{4}\right) + ... + \log_{x_n}\left(x_1 - \dfrac{1}{4}\right)$. Tìm $\lim \dfrac{u_n}{n+1}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn.

Với các số tùy ý $a, b \in \left(\dfrac{1}{4};1\right)$, ta có: $\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq b - \dfrac{1}{4} \Rightarrow \log_a\left(b - \dfrac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2 = 2\log_a b$.

Áp dụng tính chất trên ta có:

$S \geq 2\left(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + ... + \log_{x_n} x_1\right) \geq 2n\sqrt[n]{\log_{x_1} x_2 . \log_{x_2} x_3 ... \log_{x_n} x_1} = 2n$. Dấu bằng có khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $u_n = S_{\min} = 2n \Rightarrow \lim \dfrac{u_n}{n+1} = \lim \dfrac{2n}{n+1} = 2$. **Chọn A.**

BẠN ĐỌC CÓ THỂ THAM KHẢO THÊM CÁC CÂU SAU

Câu 145:

Cho hàm số $f\left(x\right) = \log x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}$. Tổng các bình phương các giá trị của m sao cho phương trình $f\left(\dfrac{1}{2\left|x-m\right|+1}\right) + f\left(x^2 - 2x + 2\right) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn.

Ta có $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \log\dfrac{1}{x} + 3^{\frac{1}{x}} - 3^x = -\left(\log x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}\right) = -f\left(x\right), \forall x > 0$. Từ đó suy ra phương trình: $f\left(x^2 - 2x + 2\right) = f\left(2\left|x-m\right| + 1\right)$ (1).

Mặt khác $f'\left(x\right) = \dfrac{1}{x\ln 10} + \left(3^x + 3^{\frac{1}{x}}.\dfrac{1}{x^2}\right)\ln 3 > 0, \forall x > 0$ nên $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

nên từ (1) ta được: $x^2-2x+2=2\left|x-m\right|+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-4x+1+2m=0,x\geq m & (2)\\ x^2=2m-1,x\leq m & (3)\end{array}\right.$.

+ **Trường hợp 1**: (2) có nghiệm kép khác với hai nghiệm của (3). Khi đó

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-8+1+2m=0,2\geq m\\ 2m-1>0,2m-1\neq 4;\sqrt{2m-1}\leq m\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}.$$

+ **Trường hợp 2**: (3) có nghiệm kép khác với hai nghiệm của (2). Khi đó

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-\left(1+2m\right)>0,\frac{1}{4}-2+1+2m\neq 0;2\pm\sqrt{3-2m}\geq m\\ 2m-1=0;0\leq m\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

+ **Trường hợp 3**: Hai phương trình có đúng một nghiệm trùng nhau. Khi đó:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-\sqrt{3-2m}=\sqrt{2m-1}\\ \frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$$ Vậy ta có $S=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=\frac{7}{2}$. **Chọn B.**

Câu 146: (**THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa**)

Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị a nguyên thuộc khoảng $\left(1;2018\right)$ sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3?

A. 2015. **B.** 2016. **C.** 18. **D.** 19.

Hướng dẫn.

Biến đổi phương trình thành $\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

Đặt $t=x+\sqrt{x^2-1}\Rightarrow t'\left(x\right)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0,\forall x>3$ nên $t\left(x\right)$ đồng biến, do đó với $x>3$ suy ra $t>3+\sqrt{8}$. Vì a là cơ số và nguyên nên ta phải có $a\geq 2$. Từ đó ta có:

$$\log_a t=\log_2 t.\log_{2017} t\Leftrightarrow 1=\log_2 t.\log_t a.\log_{2017} t=\log_2 a.\log_{2107} t\Leftrightarrow\log_2 a=\frac{1}{\log_{2017} t}$$

$$\Rightarrow\log_2 a<\frac{1}{\log_{2017}\left(3+\sqrt{8}\right)}=\log_{3+\sqrt{8}}2017=\alpha\Rightarrow a<2^{\alpha}\approx 19,92.$$

Kết hợp ta có $a\in\left\{2;3;4;...;19\right\}$. **Chọn C.**

Câu X: Có bao nhiêu số tự nhiên m không vượt quá 2020 sao cho phương trình sau $\left(x^2-1\right)\log^2\left(x^2+1\right)+m+4=m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\log\left(x^2+1\right)$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $1\leq\left|x\right|\leq 3$?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2017.

Câu X (THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội):

Cho các số thực $a,b>1$ thỏa mãn $a^{\log_b a}+16b^{\log_a\left(\frac{b^8}{a^3}\right)}=12b^2$ giá trị của biểu thức $P=a^3+b^3$ là

A. $P=20$ **B.** $P=39$ **C.** $P=125$ **D.** $P=72$

Câu X: (THPT CHUYÊN KHTN):

Cho hai số thực $a>1,\ b>1$. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $a^x b^{x^2-1}=1$. Trong trường hợp biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $a<b$ **B.** $a\ge b$ **C.** $ab=4$ **D.** $ab=2$.

Câu X: (THPT TRẦN NGUYÊN HÃN)

Xét các số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. $\max P=1$ **B.** $\max P=4$ **C.** $\max P=2$ **D.** $\max P=3$

Câu X (THPT Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa):

Cho x,y là các số thực thỏa mãn $\log_3\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x\left(x-9\right)+y\left(y-9\right)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x,y thay đổi.

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Câu X [THPT NGUYỄN QUANG DIÊU - ĐỒNG THÁP]:

Cho $x,\ y$ là hai số thực dương thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+18}{x}$ bằng

A. 9 **B.** $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ **C.** $1+9\sqrt{2}$ **D.** 17

Câu X: (THPT CHUYÊN HƯNG YÊN)

Cho hàm số $f\left(x\right)=3^{x-4}+\left(x+1\right).2^{7-x}-6x+3$. Giả sử $m_0=\dfrac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{Z},\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+2m-1=0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b^2$

A. $P=-1$ **B.** $P=7$ **C.** $P=11$ **D.** $P=9$.

CHÚC CÁC BẠN VUI VẺVÀ THÀNH CÔNG!