

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 22/8/2024

Câu 1. (4.0 điểm) Với a là số thực, xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(ax + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Khi $a = 1$ và giả sử tồn tại f là hàm đơn ánh. Tìm hàm số f ?

b) Chứng minh với $a = 2$, nếu $f(0) = 0$ thì $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 2. (5.0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0, u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{6 - u_n}, \forall n \geq 1$.

a) Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Đặt $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - 4}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{8n + 2024}$.

Câu 3. (4.0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) với B, C cố định và A thay đổi. Gọi Y, Z lần lượt là hình chiếu của B, C trên AC và AB ; H là trực tâm tam giác ABC . Giả sử các điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh AC và AB sao cho $CE = CH, BF = BH$. Gọi T là hình chiếu vuông góc của H trên EF và N là trung điểm của EF .

a) Chứng minh các tứ giác $BZTY$ và $BCNT$ nội tiếp cùng một đường tròn.

b) Chứng minh đường thẳng HT luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 4. (3.0 điểm) Cho đa thức hệ số thực $P(x) = x^{2024} + a_1x^{2023} + a_2x^{2022} + \dots + a_{2023}x + a_{2024}$ có 2024 nghiệm thực phân biệt x_i với $i = \overline{1, 2024}$ thỏa mãn $x_1 < x_2 < \dots < x_{2024}$.

a) Biết $a_{2022} = 0$ và $\frac{a_{2023}}{a_{2024}} > 2025$, chứng minh đa thức luôn tồn tại hai nghiệm trái dấu.

b) Xét đa thức hệ số thực $Q(x)$ bậc 2023 có đúng 1 nghiệm trên mỗi khoảng $(x_i; x_{i+1})$ với $i = \overline{1, 2023}$. Chứng minh đa thức $Q(x) \cdot P'(x) - Q'(x) \cdot P(x)$ không có nghiệm thực.

Câu 5. (4.0 điểm) Cuối năm học 2023 - 2024, thầy Tú thưởng 209 quyển vở giống nhau cho 8 em học sinh đạt giải môn Toán trong Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, biết rằng em nào cũng có nhận được vở.

a) Đếm số cách tặng vở sao cho không có em nào có số lượng vở chia hết cho 3.

b) Giả sử số vở của 3 em bất kỳ có tích là số chính phương, hỏi có ít nhất bao nhiêu em học sinh nhận được số quyển vở là số chẵn?

----- Hết -----

Họ tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

CBCTh 1:.....Ký tên:..... CBCTh 2:Ký tên: