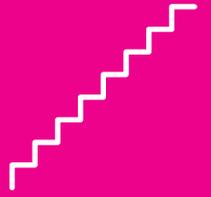




SUU TẦM VÀ BIÊN SOẠN

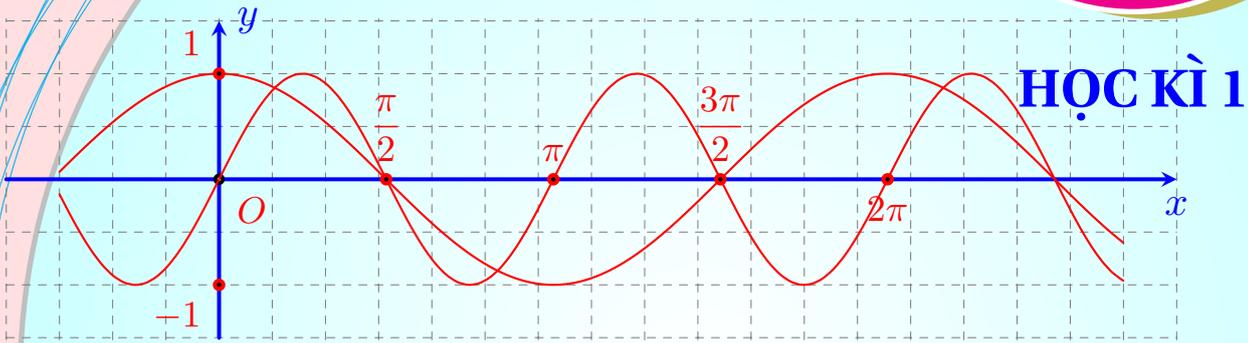
NGÔ ĐỨC TÀI

SĐT: 0889 971 004



TOÁN 11

CHƯƠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



ĐỒNG THÁP 2025

MỤC LỤC

Chương I. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

3

- 🍏 Chuyên đề 1. Góc lượng giác 3
- 🍏 Chuyên đề 2. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác 18
- 🍏 Chuyên đề 3. Các công thức lượng giác 31
- 🍏 Chuyên đề 4. Hàm số lượng giác và đồ thị 46
- 🍏 Chuyên đề 5. Phương trình lượng giác cơ bản 61
- 🍏 Chuyên đề 6. Ôn tập chương 1 81

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

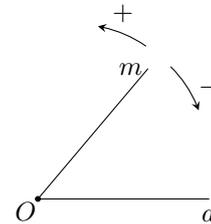
Mục lục của chương

| | |
|---|----|
| Chuyên đề 1. Góc lượng giác..... | 3 |
| Chuyên đề 2. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác..... | 18 |
| Chuyên đề 3. Các công thức lượng giác..... | 31 |
| Chuyên đề 4. Hàm số lượng giác và đồ thị..... | 46 |
| Chuyên đề 5. Phương trình lượng giác cơ bản..... | 61 |
| Chuyên đề 6. Ôn tập chương 1..... | 81 |

1 GÓC LƯỢNG GIÁC

I. GÓC LƯỢNG GIÁC

Khi xét chuyển động quay của một tia Om quanh góc O của nó tính từ vị trí ban đầu Oa theo chiều cố định, người ta quy ước chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.



Một vòng quay theo chiều dương tương ứng góc quay 360° , một vòng quay theo chiều âm tương ứng với góc quay -360° . Khi tia Om quay:

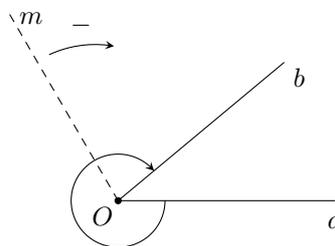
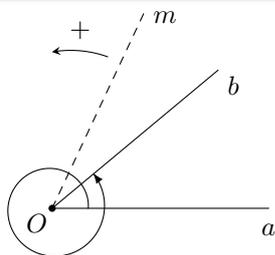
- nửa vòng theo chiều dương, ta nói Om quay góc $\frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.
- $\frac{1}{6}$ vòng theo chiều dương, ta nói Om quay góc $\frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$.
- $\frac{5}{4}$ vòng theo chiều âm, ta nói Om quay góc $\frac{5}{4} \cdot (-360^\circ) = -450^\circ$.

1) Khái niệm góc lượng giác



Cho hai tia Oa, Ob :

- Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một góc lượng giác có tia đầu Oa , tia cuối Ob , kí hiệu $(Oa, Ob) = \alpha$.
- Khi tia Om quay một góc α , ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α , kí hiệu $sđ(Oa, Ob) = \alpha$.



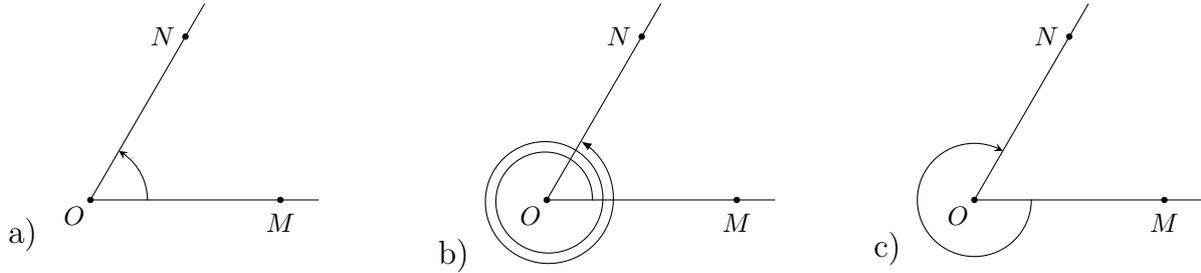
LƯU Ý. Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác tia đầu Oa và tia cuối Ob . Ta dùng chung kí hiệu (Oa, Ob) cho tất cả các góc lượng giác này.

Nhận xét: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là:

$$\text{sđ}(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ thường viết là } (Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ$$

với α° là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob .

Ví dụ 1 Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



Hướng dẫn giải.

- ☞ Số đo góc lượng giác (OM, ON) trong a) là 60° .
- ☞ Số đo góc lượng giác (OM, ON) trong Hình b) là $60^\circ + 2.360^\circ = 780^\circ$.
- ☞ Số đo góc lượng giác (OM, ON) trong Hình c) là $60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$.

Công thức tổng quát là $(OM, ON) = 60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

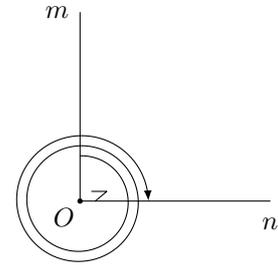
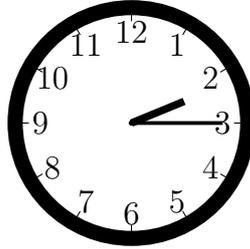
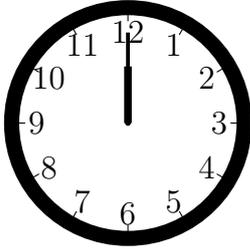
1 Cho góc hình học $uOv = 45^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Ou, Ov) .

2 Cho góc hình học uOv có số đo 60° . Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) và (Ov, Ou) .

Ví dụ 2

Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác bao nhiêu độ?

Hướng dẫn giải.



Gọi Om, On là các tia biểu diễn cho vị trí của kim phút lần lượt tại 0 giờ và 2 giờ 15 phút. Khi đó kim phút đã quay hết 2 vòng và đi tiếp $\frac{1}{4}$ vòng của đồng hồ. Mà kim phút chuyển động theo chiều âm nên ta có

$$(Om, On) = \frac{1}{4} \cdot (-360^\circ) + 2 \cdot (-360^\circ) = -810^\circ.$$

Vậy kim phút đã quét hết một góc lượng giác là -810° .

2) Hệ thức Chasles (Sa-lơ)



Với ba tia Oa, Ob, Oc bất kì ta có

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét: Từ hệ thức Chasles, với ba tia Oa, Ob, Oc bất kì, ta có

$$(Ob, Oc) = (Oa, Oc) - (Oa, Ob) \pm 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3

Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo -270° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo 135° . Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) .

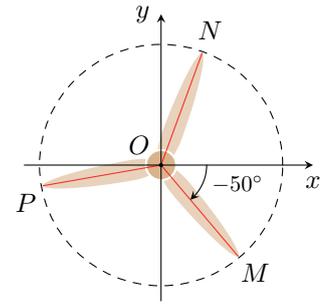
Hướng dẫn giải. Số đo của các góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov là

$$\begin{aligned} (Ou, Ov) &= (Ox, Ov) - (Ox, Ou) - k360^\circ \\ &= 135^\circ - (-270^\circ) - k360^\circ = 405^\circ - k360^\circ \\ &= 45^\circ + (1 - k)360^\circ = 45^\circ + m360^\circ \quad (m = 1 - k, m \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vậy các góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $45^\circ + m360^\circ \quad (m \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 4

Trong hình bên, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau. Viết công thức tổng quát số đo của góc lượng giác (Ox, ON) và (Ox, OP) .



Hướng dẫn giải. Chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau nên

$$\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{POM} = 120^\circ.$$

• Với ba tia OM, Ox và ON , ta có:

$$\begin{aligned} (Ox, ON) &= (Ox, OM) + (OM, ON) - k_1 360^\circ \\ &= -50^\circ + 120^\circ - k_1 360^\circ = 70^\circ - k_1 360^\circ \quad (k_1 \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

• Với ba tia Ox, ON, OP , ta có:

$$\begin{aligned} (Ox, OP) &= (Ox, ON) + (ON, OP) - k_2 360^\circ \\ &= 70^\circ + 120^\circ - k_2 360^\circ = 190^\circ - k_2 360^\circ \quad (k_2 \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$



③ Cho một góc lượng giác Ox, Ou có số đo 240° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo -270° . Tính số đo góc lượng giác (Ou, Ov) .

II. ĐƠN VỊ RADIAN

1) Đơn vị radian



Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian (đọc là ra-đi-an, viết tắt là 1 rad).

Ta có công thức chuyển đổi số đo góc từ đơn vị radian sang độ và ngược lại như sau:



$$\bullet a^\circ = \frac{\pi a}{180} \text{ rad}$$

$$\bullet \alpha \text{ rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi} \right)^\circ.$$

Ví dụ 5

Đổi số đo các góc sau đây từ đơn vị radian sang đơn vị độ hoặc ngược lại:

a) -30°

b) $\frac{\pi}{12}$ rad.

c) 12 rad.

Hướng dẫn giải.

a) $-30^\circ = -\frac{30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6}$ rad.

b) $\frac{\pi}{12}$ rad = $\left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 15^\circ$.

c) 12 rad = $\left(12 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{2160}{\pi}\right)^\circ \approx 687,55^\circ$.

LƯU Ý.

a) Khi ghi số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo. Ví dụ, $\frac{\pi}{2}$ rad được viết là $\frac{\pi}{2}$, 2 rad được viết là 2.

b) Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Oa, Ob) là

$$(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob . Lưu ý không được viết $\alpha + k360^\circ$ hay $\alpha^\circ + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).



Dưới đây là bảng tương ứng giữa số đo bằng độ và số đo bằng radian của các góc đặc biệt trong phạm vi từ 0° đến 180° .

| | | | | | | | | | |
|---------------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------------|
| Độ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
| Radian | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |

4

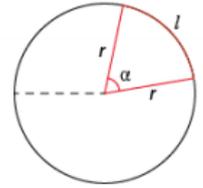
a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau $360^\circ; -450^\circ$.

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau $3\pi, -\frac{11\pi}{5}$.

2) Độ dài cung tròn



Một cung tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = \alpha R$.



Ví dụ 6



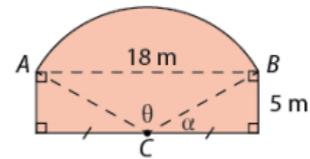
Trên một đường tròn có bán kính 7,2 m. Tìm độ dài của cung có số đo $\frac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải. Độ dài của cung $l = \frac{2\pi}{3} \cdot 7,2 = 4,8\pi$ (m).

Ví dụ 7



Một bức tường của một ngôi nhà có dạng như Hình bên, trong đó cung AB là một cung của đường tròn tâm C , bán kính AC . Tính chu vi của bức tường.



Hướng dẫn giải.

Gọi điểm H, K như trên hình.

Ta có $AB = 18m, HK = 18m, CK = 9m$.

Do đó $R = AC = BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106}$ m.

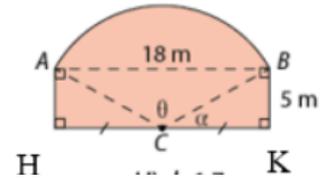
Xét tam giác BKH vuông tại K có:

$$\tan \alpha = \frac{BK}{KC} = \frac{5}{9} \Rightarrow \alpha \approx 0,507 \text{ (rad)}$$

Suy ra $\theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \cdot 0,507 \approx 2,218$ rad.

Cung AB có độ dài là $l = \theta \cdot R = 2,218 \cdot \sqrt{106} \approx 21,91$ (m).

Vậy chu vi bức tường là $C = 21,91 + 5 + 5 + 18 = 49,91$ (m).



5

Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184 cm, bánh xe trước có đường kính là 92 cm, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.

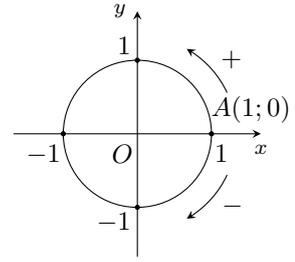


- Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.
- Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).
- Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

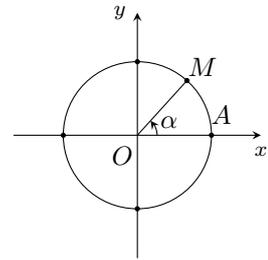
III. ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm $A(1; 0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ. Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là **đường tròn lượng giác**.



Cho số đo góc α bất kì. Trên đường tròn lượng giác, ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$. Khi đó M được gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



LƯU Ý. Hệ trục tọa độ Oxy chia mặt phẳng tọa độ thành bốn "góc phần tư" kí hiệu lần lượt là I, II, III và IV như hình bên.

☛ Ví dụ 8



Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là:

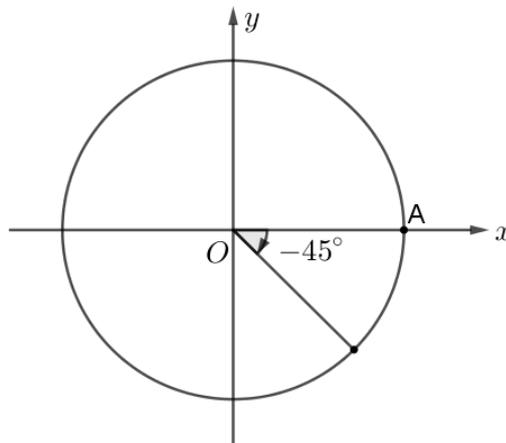
a) -1485°

b) $\frac{19\pi}{4}$.

🔗 Hướng dẫn giải.

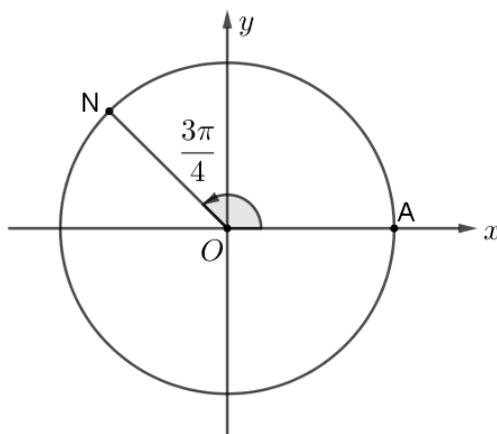
a) Ta có $-1485^\circ = -45^\circ + (-4) \cdot 360^\circ$.

Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác ta được:



b) Ta có $\frac{19\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$.

Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác ta được:



BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian

- (A) $\frac{3\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{10}$. (C) $\frac{3\pi}{5}$. (D) $\frac{\pi}{4}$.

❖ **Câu 2.** Nếu một cung tròn có số đo là α° thì số đo radian của nó là

- (A) $180\pi\alpha$. (B) $\frac{180\pi}{\alpha}$. (C) $\frac{\alpha\pi}{180}$. (D) $\frac{\pi}{180\alpha}$.

❖ **Câu 3.** Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là

- (A) Cung có độ dài bằng nửa đường kính.
 (B) Cung có độ dài bằng đường kính.
 (C) Cung có độ dài bằng 1.
 (D) Cung có độ dài tương ứng với góc ở tâm 60° .

❖ **Câu 4.** Góc có số đo $-\frac{7\pi}{4}$ thì có số đo là

- (A) -315° . (B) -630° . (C) 315° . (D) -135° .

❖ **Câu 5.** Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ sang đơn vị độ

- (A) 6° . (B) 15° . (C) 10° . (D) 5° .

❖ **Câu 6.** Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo bằng $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow) .

- (A) $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 7.** Tính độ dài l của cung trên đường tròn có số đo $\frac{\pi}{16}$ và bán kính bằng 20cm.

(A) $l = 2,94\text{cm}$.

(B) $l = 3,39\text{cm}$.

(C) $l = 1,49\text{cm}$.

(D) $l = 3,93\text{cm}$.

❖ **Câu 8.** Góc lượng giác có số đo α rad thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu và tia cuối với nó có số đo dạng nào trong các dạng sau?

(A) $\alpha + k180^\circ$.

(B) $\alpha + k360^\circ$.

(C) $\alpha + k2\pi$.

(D) $\alpha + k\pi$.

❖ **Câu 9.** Trên đường tròn lượng giác, cho góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2}$ thì mọi góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác trên đều có số đo dạng:

(A) $\frac{\pi}{2}$.

(B) $\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 10.** Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo theo radian là $\frac{\pi}{3}$. Các góc lượng giác sau đây có cùng tia đầu Ou , hỏi góc nào có tia cuối Ov ?

(A) $\frac{2\pi}{3}$.

(B) $-\frac{2\pi}{3}$.

(C) $\frac{5\pi}{3}$.

(D) $-\frac{5\pi}{3}$.

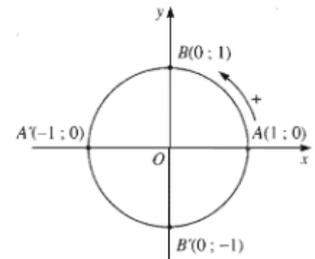
❖ **Câu 11.** Trên đường tròn lượng giác, số đo của góc lượng giác (OA, OB') là

(A) $-\frac{\pi}{4}$.

(B) $-\frac{\pi}{2}$.

(C) $\frac{\pi}{4}$.

(D) $\frac{\pi}{2}$.



❖ **Câu 12.** Góc lượng giác (Ox, Ot) có một số đo là $\frac{\pi}{2} + 2017\pi$, số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, Ot) là

(A) $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 13.** Cho góc lượng giác $\alpha = (OA, OB) = \frac{\pi}{5}$. Trong các góc lượng giác sau, góc nào có tia đầu và tia cuối lần lượt trùng với OA, OB ?

(A) $\frac{6\pi}{5}$.

(B) $-\frac{11\pi}{5}$.

(C) $\frac{31\pi}{5}$.

(D) $\frac{9\pi}{5}$.

❖ **Câu 14.** Nếu số đo góc lượng giác $(Os, Ot) = \frac{2006\pi}{5}$ thì số đo góc hình học \widehat{sOt} bằng

(A) $\frac{\pi}{5}$.

(B) $\frac{4\pi}{5}$.

(C) $\frac{6\pi}{5}$.

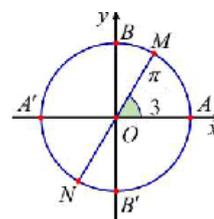
(D) $\frac{9\pi}{5}$.

❖ **Câu 15.** Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được một góc bao nhiêu độ?

- (A) $\frac{5}{8}\pi$. (B) $\frac{8}{5}\pi$. (C) $\frac{5}{3}\pi$. (D) $\frac{3}{5}\pi$.

❖ **Câu 16.** Trên hình vẽ hai điểm M, N biểu diễn các cung có số đo là:

- (A) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$. (B) $-\frac{\pi}{3} + k\pi$. (C) $\frac{\pi}{3} + k\pi$. (D) $\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$.



❖ **Câu 17.** Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về “đường tròn định hướng”?

- (A) Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
 (B) Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
 (C) Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
 (D) Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

❖ **Câu 18.** Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:

- (A) Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.
 (B) Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.
 (C) Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.
 (D) Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

❖ **Câu 19.** Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về “đường tròn lượng giác”?

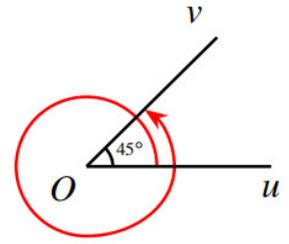
- (A) Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.
 (B) Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$ là một đường tròn lượng giác.
 (C) Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
 (D) Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

❖ **Câu 20.** Trên đường tròn lượng giác gốc A , cho điểm M xác định bởi $s\widehat{AM} = \frac{\pi}{3}$. Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua trục Ox . Tìm số đo cung lượng giác \widehat{AM}_1 .

- (A) $-\frac{5\pi}{3} + k2\pi$. (B) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.
 (C) $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$. (D) $\frac{\pi}{3} + k\pi$.

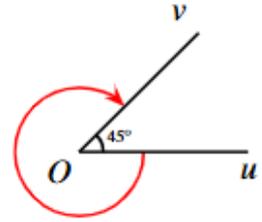
❖ **Câu 21.** Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- (A) 405° . (B) 385° . (C) -405° . (D) 45° .



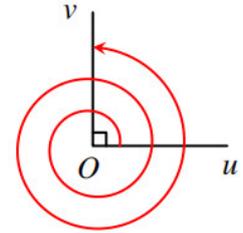
❖ **Câu 22.** Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- (A) 45° . (B) -315° . (C) 405° . (D) 315° .



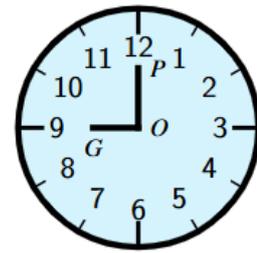
❖ **Câu 23.** Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- (A) 450° . (B) -450° . (C) 810° . (D) 90° .



❖ **Câu 24.** Một chiếc đồng hồ có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo các góc lượng giác (OG, OP)

- (A) $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. (B) $-90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. (D) $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



❖ **Câu 25.** Trên đường tròn lượng giác gốc A cho các cung có số đo:

- (I) $\frac{\pi}{4}$ (II) $-\frac{7\pi}{4}$ (III) $\frac{13\pi}{4}$ (IV) $-\frac{71\pi}{4}$

Hỏi các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

- (A) (I) và (II) . (B) (I), (II) và (III) .
 (C) (II), (III) và (IV) . (D) (I), (II) và (IV) .

❖ **Câu 26.** Một chiếc bánh xe có 72 răng, số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

- (A) 50° . (B) 60° . (C) 70° . (D) 120° .

❖ **Câu 27.** Sau khoảng thời gian 4 giờ kim giờ sẽ quay được một góc là

- (A) $\frac{\pi}{3}$. (B) $\frac{2\pi}{3}$. (C) $\frac{3\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{4}$.

❖ **Câu 28.** Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng 6,5 cm (lấy $\pi = 3,1416$).

- (A) 22043 cm. (B) 22055 cm. (C) 22042 cm. (D) 22054 cm.

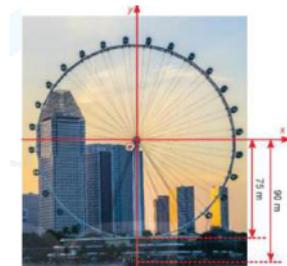
❖ **Câu 29.** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng 340 mm. (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm.)

- (A) 314,5 m. (B) 753,04 m. (C) 514,8 m. (D) 437,8 m.

❖ **Câu 30.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển. Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là bao nhiêu km?

- (A) 28902,65. (B) 29802,65. (C) 32102,65. (D) 28905.

❖ **Câu 31.** Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



- (A) 127,5 m. (B) 154,3 m. (C) 87,7 m. (D) 57,5 m.

❖ **Câu 32.** Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

- (A) $\frac{k2\pi}{3}$. (B) $k\pi$. (C) $\frac{k\pi}{2}$. (D) $\frac{k\pi}{3}$.

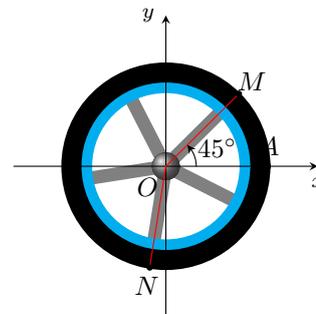
❖ **Câu 33.** Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

- (A) $\frac{k2\pi}{3}$. (B) $k\pi$. (C) $\frac{k\pi}{2}$. (D) $\frac{k\pi}{3}$.

❖ **Câu 34.** Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) Biểu diễn góc lượng giác 125° trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II .
 (B) Biểu diễn góc lượng giác 125° trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ III .
 (C) Biểu diễn góc lượng giác 125° trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV .
 (D) Biểu diễn góc lượng giác 125° trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I .

Bài 7. Trong hình bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .

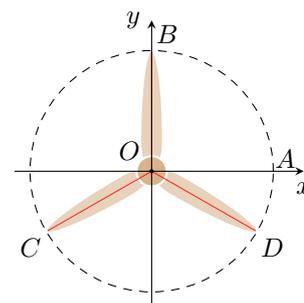


Bài 8. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng:

- a) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) b) $k\frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$) c) $\frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). d) $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 9. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình bên có thể biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$



Bài 10.

- a) Góc lượng giác -245° có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$$-605^\circ; \quad -65^\circ; \quad 115^\circ; \quad 205^\circ; \quad 475^\circ$$

- b) Góc lượng giác $\frac{24\pi}{5}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{16\pi}{5}; \quad \frac{\pi}{5}; \quad \frac{14\pi}{5}; \quad \frac{29\pi}{5}; \quad \frac{53\pi}{10}$$

Bài 11. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

- a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?
b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Bài 12. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

- a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.
b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

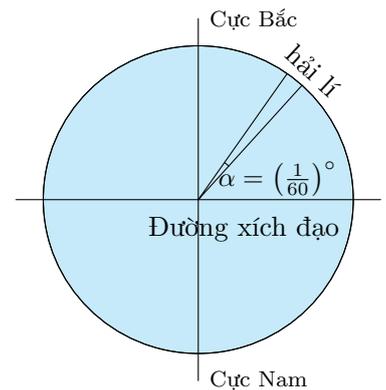
Bài 13. Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Bài 14. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây



- Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo là bao nhiêu radian?
- Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong một phút là bao nhiêu mét?

Bài 15. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình bên). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu km, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6 371 km. Làm tròn kết quả hàng phần trăm.



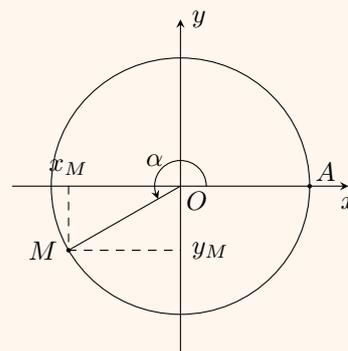
2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC



Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo α . Khi đó:

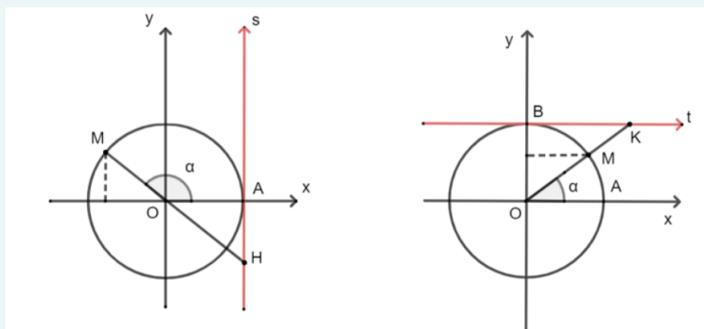
- Tung độ y_M của M gọi là **sin** của α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Tung độ x_M của M gọi là **côsin** của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Nếu $x_M \neq 0$ tỉ số $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là **tang** của α , kí hiệu là $\tan \alpha$.
- Nếu $y_M \neq 0$ tỉ số $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là **côtang** của α , kí hiệu là $\cot \alpha$.
- Các giá trị $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là *các giá trị lượng giác của góc lượng giác α*



🔔 LƯU Ý.

a) Ta gọi trục hoành là **trục côsin**, còn trục tung là **trục sin**.

Trục As có gốc ở điểm $A(1; 0)$ và song song với trục sin (hình a) gọi là **trục tang**. Nếu đường thẳng OM cắt trục tang thì tung độ của giao điểm đó chính là $\tan \alpha$. Trục Bt có gốc ở điểm $B(0; 1)$ và song song với trục côsin (hình b) gọi là **trục côtang**. Nếu đường thẳng OM cắt trục côtang thì hoành độ của giao điểm đó chính là $\cot \alpha$.



b) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$; và $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
 $\tan \alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; $\cot \alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k ta có

$$\diamond \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha.$$

$$\diamond \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$$

$$\diamond \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha.$$

$$\diamond \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$$

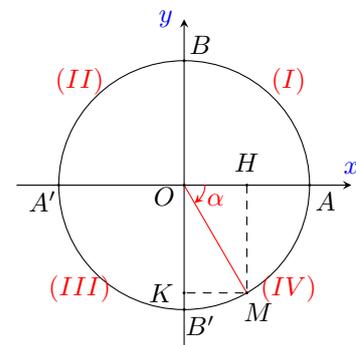


Ta có bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ như sau:

| | | | | | |
|---------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| Góc α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan \alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | |
| $\cot \alpha$ | | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác.

| Giá trị lượng giác | Góc phần tư | | | |
|--------------------|-------------|----|-----|----|
| | I | II | III | IV |
| $\sin \alpha$ | + | + | - | - |
| $\cos \alpha$ | + | - | - | + |
| $\tan \alpha$ | + | - | + | - |
| $\cot \alpha$ | + | - | + | - |



☞ **Cách ghi nhớ:** Nhất cả, nhì sin, tam tang, côtang, tứ cos.

Ví dụ 1

Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\frac{13\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải.

- $\sin \frac{13\pi}{6} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + 4\pi \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos \frac{13\pi}{6} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + 4\pi \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- $\tan \frac{13\pi}{6} = \frac{\sin \frac{13\pi}{6}}{\cos \frac{13\pi}{6}} = \sqrt{3}$ và $\cot \frac{13\pi}{6} = \frac{\cos \frac{13\pi}{6}}{\sin \frac{13\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2

Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \implies \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5}$.

Mặt khác, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ tức cung α thuộc góc phần tư thứ 2 nên $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Khi đó $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ và $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$.

- ① Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

II. HỆ THỨC CƠ BẢN GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Ta có các hệ thức sau liên hệ giữa các giá trị lượng giác của góc lượng giác α :

- ◇ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- ◇ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$
- ◇ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$
- ◇ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$.

Ví dụ 3

Cho $\tan x = \frac{3}{4}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải.

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{4}{3}. \text{ Ta có } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{16}}} = \pm \frac{4}{5}.$$

Mặt khác $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x > 0$ do đó $\cos x = \frac{4}{5}$.

$$\text{Mà } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \implies \sin x = \frac{\cos x}{\cot x} = \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 4

Cho $\tan \beta = 2$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{3 \sin \beta + \cos \beta}{\sin \beta - \cos \beta}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } T = \frac{\frac{3 \sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{3 \tan \beta + \cot \beta}{\tan \beta - \cot \beta} = \frac{3 \cdot 2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{13}{3}.$$

Ví dụ 5

Cho $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng: $\frac{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} \\ &= 2 \tan^2 \alpha + 1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha + 1 + 1 + \tan^2 \alpha \\ &= 3 \tan^2 \alpha + 2 = VP. \end{aligned}$$

② Cho $\cot \alpha = \frac{7}{3}$ thỏa $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

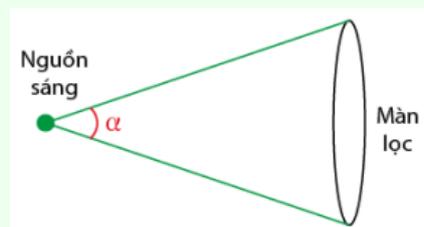
③

Cường độ ánh sáng I đi xuyên qua một màn lọc ánh sáng được tính bởi công thức:

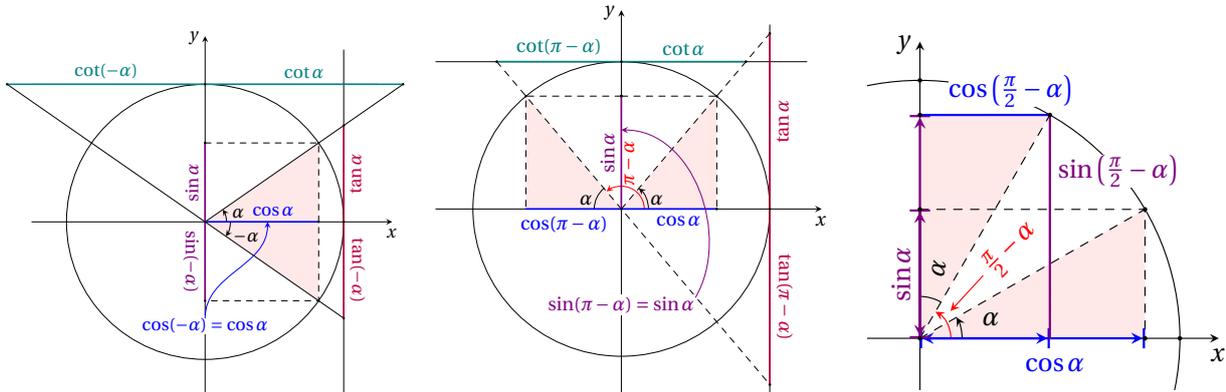
$$I = I_m - \frac{I_m}{1 + \cot^2 \alpha}, \text{ trong đó } I_m \text{ là cường độ ánh}$$

sáng đã chiếu lên màn lọc ánh sáng và α là góc như hình vẽ (nguồn: [http://www.vedantu.com/iit-gee/malus-law](http://www.vedantu.com/iit-jee/malus-law)).

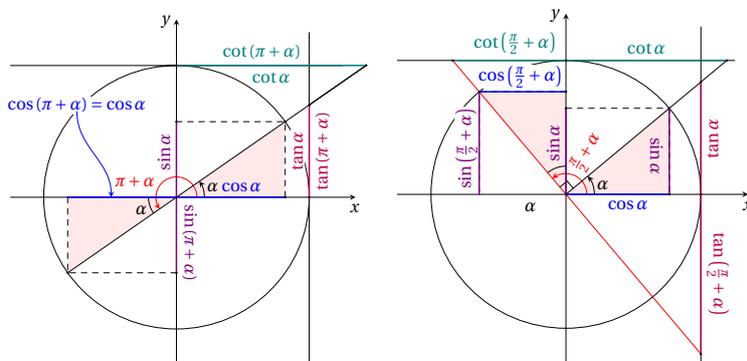
Chứng minh rằng: $I = I_m \cos^2 \alpha$.



III. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC LƯỢNG GIÁC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT



| Cung đối nhau | Cung bù nhau | Cung phụ nhau |
|--------------------------------|-------------------------------------|---|
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ | $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ |
| $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ |
| $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ |
| $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$ |



| Hơn kém π | Hơn kém $\frac{\pi}{2}$ |
|-------------------------------------|--|
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ |
| $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ |
| $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ |
| $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$ |



cos đối, sin bù, phụ chéo! khác pi tan, khác pi/2 thì sin!

Ví dụ 6

- a) Biểu diễn $\cos 638^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45° .
 b) Biểu diễn $\cot \frac{19\pi}{5}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải.

- a) $\cos 638^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + (-82^\circ)) = \cos(-82^\circ) = \cos 82^\circ = \cos(90^\circ - 8^\circ) = \sin 8^\circ$.
 b) $\cot \frac{19\pi}{5} = \cot \left(4\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cot \left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\cot \frac{\pi}{5}$.

Ví dụ 7

Rút gọn biểu thức $A = \cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cot(-\alpha)$ (giả thiết các biểu thức điều xác định).

Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= -\cos \alpha + \cos \alpha + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cot \alpha \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cot \alpha \\ &= \cot \alpha - \cot \alpha = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 8

Tính:

- a) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ$ (17 số hạng).
 b) $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 175^\circ$ (35 số hạng).

Hướng dẫn giải.

- a) Vận dụng $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, ta có:

$$\sin 85^\circ = \cos 5^\circ, \quad \sin 80^\circ = \cos 10^\circ, \quad \sin 75^\circ = \cos 15^\circ, \dots, \quad \sin 5^\circ = \cos 40^\circ$$

Vậy:

$$\begin{aligned} A &= (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + \dots + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{8 \text{ số } 1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

b) Vận dụng $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, ta có:

$$\cos 175^\circ = -\cos 5^\circ, \quad \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ, \quad \cos 165^\circ = -\cos 15^\circ, \dots, \quad \cos 95^\circ = -\cos 85^\circ$$

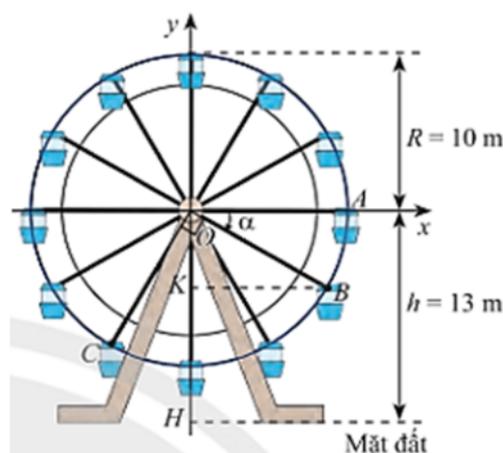
Vậy:

$$\begin{aligned} B &= (\cos 5^\circ + \cos 175^\circ) + (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + \dots + (\cos 85^\circ + \cos 95^\circ) + \cos 90^\circ \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 9

Trong hình bên, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu bởi điểm B và điểm C :

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10 \sin \alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB . Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.



b) Khi điểm B cách mặt đất 4m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Hướng dẫn giải.

a) Điểm B là điểm biểu diễn cho góc lượng giác có số đo góc là α trên đường tròn lượng giác có bán kính bằng 10 nên tọa độ điểm $B(10 \cos \alpha; 10 \sin \alpha)$.

Vì tung độ điểm B có giá trị âm nên $OK = -10 \sin \alpha$.

Do đó $HK = OH - OK = 13 + 10 \sin \alpha$.

Vì vậy, chiều cao từ điểm B đến mặt đất là: $13 + 10 \sin \alpha$ (m).

Với $\alpha = -30^\circ$ suy ra chiều cao từ điểm B đến mặt đất là: $13 + 10 \sin(-30^\circ) = 8$ (mét).

b) Nếu điểm B cách mặt đất 4m thì $13 + 10 \sin \alpha = 4 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{9}{10}$.

$$\text{Suy ra } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{9}{10}\right)^2} = -\frac{\sqrt{19}}{10}.$$

Gọi M là hình chiếu vuông góc C lên OH . Ta có: $\cos \widehat{COH} = \cos \alpha$.

$$\text{Mà } \cos \widehat{COH} = \frac{OM}{OC} \Rightarrow OM = -\frac{\sqrt{19}}{10} \cdot OC = -\frac{\sqrt{19}}{10} \cdot 10 = -\sqrt{19}.$$

Suy ra $MH = OH - OM = 13 - \sqrt{19} \approx 8,64$ m.

Vậy điểm C cách mặt đất 8,64 m.

4

- a) Biểu diễn $\tan 973^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45° .
 b) Biểu diễn $\sin -\frac{29\pi}{3}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.

5 Chứng minh giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$$\sin^2(x + \pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) + \cos(\pi - x).$$

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- (A) $\sin \alpha > 0$. (B) $\cos \alpha < 0$. (C) $\tan \alpha < 0$. (D) $\cot \alpha < 0$.

❖ **Câu 2.** Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khẳng định đúng là

- (A) $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$. (B) $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$.
 (C) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$. (D) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$.

❖ **Câu 3.** Cho $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào dưới đây đúng

- (A) $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$. (B) $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$.
 (C) $\sin(\alpha - \pi) < 0$. (D) $\sin(\alpha - \pi) > 0$.

❖ **Câu 4.** Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- (A) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. (B) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.
 (C) $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$. (D) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

❖ **Câu 5.** Đẳng thức nào dưới đây sai?

- (A) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. (B) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.
 (C) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. (D) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

❖ **Câu 6.** Tính giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) 1. (D) 3.

❖ **Câu 7.** Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ ta được:

- (A) $\cos \alpha$. (B) $\sin \alpha$. (C) $-\cos \alpha$. (D) $-\sin \alpha$.

❖ **Câu 8.** Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

- (A) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. (B) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
 (C) $\sin \alpha = \frac{4}{5}; \cos \alpha = -\frac{3}{5}$. (D) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}; \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

❖ **Câu 9.** Cho $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$. Chọn khẳng định đúng?

- (A) $\tan x > 0, \cot x > 0$. (B) $\tan x > 0, \cot x < 0$.
 (C) $\tan x < 0, \cot x > 0$. (D) $\tan x < 0, \cot x < 0$.

❖ **Câu 10.** Cho $3\pi < x < \frac{10\pi}{3}$. Chọn khẳng định đúng?

- (A) $\cos x > 0$. (B) $\sin x < 0$. (C) $\tan x < 0$. (D) $\cot x < 0$.

❖ **Câu 11.** Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\sin \alpha = -\cos \beta$. (B) $\cos \alpha = \sin \beta$.
 (C) $\sin \alpha = \cos \beta$. (D) $\cot \alpha = \tan \beta$.

❖ **Câu 12.** Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\cot \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) > 0$. (B) $\cot \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \geq 0$.
 (C) $\tan(\alpha + \pi) < 0$. (D) $\tan(\alpha + \pi) > 0$.

❖ **Câu 13.** Tính giá trị của $\cos \left[\frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi \right]$.

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 14.** Biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- (A) 2 . (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 15.** Biết $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

- (A) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

❖ **Câu 16.** Biết $\tan \alpha = -3$. Tính $\tan \left(\alpha - \frac{7\pi}{2} \right)$.

- (A) $-\frac{1}{3}$. (B) 3 . (C) -3 . (D) $\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 17.** Cho $\cos \gamma = \frac{4}{5}$ và $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \gamma$.

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $-\frac{1}{5}$. (C) $-\frac{3}{5}$. (D) $\frac{3}{5}$.

❖ **Câu 18.** Cho $\sin x = \frac{3}{5}$ và $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Giá trị $\cos x$ là:

- (A) $-\frac{4}{5}$. (B) $\frac{4}{5}$. (C) $\frac{16}{25}$. (D) $-\frac{16}{25}$.

❖ **Câu 19.** Đẳng thức nào dưới đây **sai**?

- (A) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
 (B) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$).
 (C) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$).
 (D) $\tan \alpha + \cot \alpha = 1$ ($\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$).

❖ **Câu 20.** Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{9\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{\pi}{6}$.

- (A) $P = 2$. (B) $P = 4$. (C) $P = 3$. (D) $P = 1$.

❖ **Câu 21.** Trên đường tròn đơn vị cho góc α sao cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ và $\cos \alpha < 0$. Tính $\tan \alpha$

- (A) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) 1. (D) $\frac{2}{5}$.

❖ **Câu 22.** Với mọi số thực α ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

- (A) $\sin \alpha$. (B) $\cos \alpha$. (C) $-\sin \alpha$. (D) $-\cos \alpha$.

❖ **Câu 23.** Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

- (A) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. (B) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.
 (C) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. (D) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

❖ **Câu 24.** Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\sin(A + C) = -\sin B$. (B) $\cos(A + C) = -\cos B$.
 (C) $\tan(A + C) = \tan B$. (D) $\cot(A + C) = \tan B$.

❖ **Câu 25.** Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

- (A) $P = -\frac{15}{13}$. (B) $P = \frac{15}{13}$. (C) $P = -13$. (D) $P = 13$.

❖ **Câu 26.** Biết $\tan x = \frac{1}{2}$. Tính $M = \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x}{5 \cos^2 x - \sin^2 x}$.

- (A) $\frac{8}{19}$. (B) $\frac{2}{19}$. (C) $-\frac{2}{19}$. (D) $-\frac{8}{19}$.

❖ **Câu 27.** Nếu $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$ thì $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

❖ **Câu 28.** Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $-\sqrt{3}$.

❖ **Câu 29.** Thu gọn biểu thức

$$P = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

ta được kết quả là:

- (A) $-2 \cot x$. (B) $2 \tan x$. (C) $2 \sin x$. (D) $-2 \sin x$.

❖ **Câu 30.** Cho $\cot \alpha = 4 \tan \alpha$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Khi đó $\sin \alpha$ bằng

- (A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2 Tự luận

❖ **Bài 1.** Các đẳng thức sau có đồng thời xảy ra không?

- a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. b) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. c) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ và $\cot \alpha = 3$.

❖ **Bài 2.** Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$ hoặc từ 0° đến 45° và tính:

- a) $\cos \frac{31\pi}{6}$. c) $\tan 1020^\circ$. e) $\cos \frac{1000\pi}{3}$.
b) $\sin \frac{129\pi}{4}$. d) $\sin(-1693^\circ)$. f) $\cot\left(-\frac{53\pi}{10}\right)$.

❖ **Bài 3.** Cho $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

❖ **Bài 4.** Tính các giá trị lượng giác của góc α nếu:

- a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. d) $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

❖ **Bài 5.** Biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = \frac{3 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - \tan \alpha}$. b) $B = \frac{\cot^2 \alpha - \sin \alpha}{\tan \alpha + 2 \cos \alpha}$.

❖ **Bài 6.** Cho $\sin x + \cos x = m$. Hãy tính các giá trị sau theo m .

- a) $\sin x \cos x$. b) $\sin x - \cos x$. c) $\sin^3 x + \cos^3 x$. d) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

❖ **Bài 7.** Cho $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ và $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $S = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$.

Gợi ý: Tính S^2 .

Bài 8. Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{5 \sin x + 2 \cos x}$. b) $\frac{\sin^3 x + 2 \cos^3 x}{2 \sin x + 3 \cos x}$. c) $\frac{\sin^4 x - 3 \sin^3 x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x}$.

Bài 9. Cho $\tan \beta + \cot \beta = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\tan^3 \beta + \cot^3 \beta$.

Bài 10. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$; b) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Bài 11. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$. c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.
 b) $\frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$. d) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

Bài 12. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$. d) $\frac{\tan^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1} = \tan^6 \alpha$.
 b) $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$ e) $4 \cos^2 x - 3 = (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x)$.
 c) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{1 - \cot^4 \alpha}{1 - \cot \alpha}$. f) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

Bài 13. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^2 605^\circ + \sin^2 1645^\circ + \cot^2 25^\circ = \frac{1}{\cos^2 65^\circ}$.
 b) $\frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ + \cot 10^\circ}$.

Bài 14. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$. b) $2 \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x$.

Bài 15. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $M = \cos(\alpha + \pi) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) - \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \tan(\pi - \alpha)$.
 b) $N = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\beta + \pi) - \sin(2\pi - \alpha) \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$.
 c) $P = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(2017\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$.
 d) $Q = \left[\tan(\pi - x) \cdot \tan\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sin(\pi - x)} \right] \sin^2(2\pi - x)$.

Bài 16. Tính giá trị biểu thức:

a) $\sin 17^\circ \sin 197^\circ + \sin 73^\circ \cos 163^\circ$. b) $\frac{1}{1 - \tan 145^\circ} + \frac{1}{1 + \tan 55^\circ}$.

3 CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. CÔNG THỨC CỘNG



- $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$



sin thì sin cos cos sin
 cos thì cos cos sin sin
 cos thì đổi dấu hỏi nàng
 sin thì giữ dấu xin chàng nhớ cho!

 tan tổng thì lấy tổng tan
 chia một trừ với tích tan, dễ òm.

👉 Ví dụ 1

Tính $\sin \frac{\pi}{12}$ và $\tan \frac{\pi}{12}$.

👉 *Hướng dẫn giải.*

- $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- $\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = 2 - \sqrt{3}$.

👉 Ví dụ 2

Chứng minh rằng $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

👉 *Hướng dẫn giải.* Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sin x - \cos x. \end{aligned}$$



① Tính

a) $\cos \frac{13\pi}{42} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{13\pi}{42} \sin \frac{\pi}{7}$. b) $\tan \frac{7\pi}{12}$.



② Chứng minh rằng:

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. b) $\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$.



③ Một dòng điện xoay chiều có cường độ dòng điện i (ampe) tại thời điểm t (giây) được tính bởi công thức: $i = 4 \cos \frac{131\pi}{12} t$. Tính giá trị chính xác của cường độ dòng điện i tại thời điểm $t = 1$ giây.

II. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

Công thức tính các giá trị lượng giác của góc $2a$ qua các giá trị lượng giác của góc a gọi là công thức nhân đôi.



a) $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$.
 b) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$.
 c) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.



⚠ **LƯU Ý.** Từ các công thức góc nhân đôi, ta có các công thức sau (gọi là công thức hạ bậc):

a) $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$. b) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$. c) $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$.

👉 Ví dụ 3

Tính $\cos \frac{\pi}{8}$ và $\tan \frac{\pi}{8}$.

👉 Hướng dẫn giải.

• Ta có $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

Mà $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \frac{\pi}{8} > 0$. Vậy $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

• Ta có $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$.

Suy ra $1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Rightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$ (vì $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$).

Ví dụ 4

Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$ với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính $\sin 2x$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5}$.

Vì $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\sin x > 0$ do đó $\sin x = \frac{4}{5}$.

Khi đó $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Ví dụ 5

Cho $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$. Tính:

a) $\sin 2a$;

b) $\cos 4a$.

Hướng dẫn giải.

a) Do $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ nên $(\sin a + \cos a)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2 \sin a \cos a = \frac{1}{4}$.

Hay $1 + 2 \sin a \cos a = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin a \cos a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$. Suy ra $\sin 2a = 2 \sin a \cos a = -\frac{3}{4}$.

b) Áp dụng công thức nhân đôi:

$$\cos 4a = \cos(2 \cdot 2a) = 1 - 2 \sin^2 2a = 1 - 2 \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{9}{16} = 1 - \frac{18}{16} = -\frac{1}{8}.$$

4 Không dùng máy tính hãy tính $\cos \frac{\pi}{12}$ và $\cos 112,5^\circ$.

5

a) Cho $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

b) Cho $\tan \frac{\alpha}{2} = -2$, tính $\tan \alpha$.

6

Một quả bóng golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng cách d (m) theo phương nằm ngang.



Biết rằng $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$, trong đó v_0 (m/s) là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và θ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang. Tính

giá trị của $\cos 2\theta$ và $\sin \theta$ khi $v_0 = 15 \text{ m/s}$, $d = 12,5 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ và $0^\circ < \theta < 45^\circ$.

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG



- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) + \cos (a + b)]$.
- $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)]$.
- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a - b) + \sin (a + b)]$.

Ví dụ 6

Tính $\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải. Ta có :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \sin \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{8} &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} \right) - \cos \left(\frac{7\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 7

Cho $\sin 2x = -\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Hướng dẫn giải.

$$\begin{aligned} A &= \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin 2x + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



7 Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức:

a) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$.

b) $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.



8 Cho $\cos x = \frac{2}{3}$. Tính $Q = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH



• $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

• $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

• $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$

• $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.



cos cộng cos=2cos cos

cos trừ cos=trừ 2 sin sin

sin cộng sin=2sin cos

sin trừ sin=2 cos sin.

☛ Ví dụ 8



Tính $\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$.

☛ *Hướng dẫn giải.* Ta có:

$$\begin{aligned} \cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} &= 2 \cos \left(\frac{\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

☛ Ví dụ 9



Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi:

$$u = 40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t) \quad (\text{V}); \quad i = 4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \quad (\text{A}).$$

Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u \cdot i$ (W). Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có lũy thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

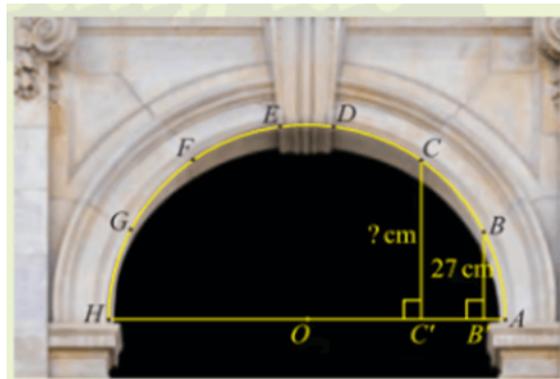
Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= u \cdot i = [40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t)] \cdot [4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)] \\
 &= 160 \sin^2(120\pi t) + 10 \sin^2(360\pi t) + 80 \sin(120\pi t) \sin(360\pi t) \\
 &= 80[1 - \cos(240\pi t)] + 5[1 - \cos(720\pi t)] + 40[\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)] \\
 &= 85 - 80 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) + 40 \cos(240\pi t) - 40 \cos(480\pi t) \\
 &= 85 - 40 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) - 40 \cos(480\pi t) (W).
 \end{aligned}$$

Ví dụ 10



Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chót ở đỉnh, cho biết vòm cổng rộng 120 cm và khoảng cách từ B đến đường kính AH là 27 cm. Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH . Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hướng dẫn giải. Ta có: $OA = OB = 120 : 2 = 60$

Xét tam giác OBB' có: $\sin \widehat{BOB'} = \frac{BB'}{OB} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20}$.

Ta có: $\widehat{AOC} = 2\widehat{BOB'}$ (Vì số đo cung AC gấp 2 lần số đo cung AB)

Xét tam giác OCC' vuông tại C' có:

$$\sin \widehat{COC'} = \frac{CC'}{OC} \Leftrightarrow CC' = OC \cdot \sin \widehat{COC'} = OC \cdot \sin (2\widehat{BOB'})$$

Mà:

$$\sin (2\widehat{BOB'}) = 2 \cdot \sin \widehat{BOB'} \cdot \cos \widehat{BOB'} = 2 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{\sqrt{319}}{20} = \frac{9\sqrt{319}}{200}$$

Suy ra $CC' = 60 \cdot \frac{9\sqrt{319}}{200} \approx 48,2$ cm.

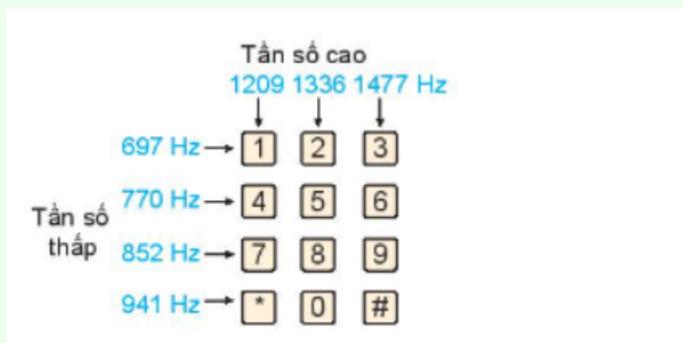


9 Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức $B = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{9}$.



10 Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình bên cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).

- Tìm hàm số mô hình hóa âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.
- Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số cosin.



BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ Câu 1. Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

❖ Câu 2. Công thức nào dưới đây đúng?

- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$.
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$.
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$.
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

❖ Câu 3. Biểu thức $\sin x \cos y - \cos x \sin y$ bằng

- $\cos(x - y)$.
- $\cos(x + y)$.
- $\sin(x - y)$.
- $\sin(y - x)$.

❖ Câu 4. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- (A) $-\frac{1}{3}$. (B) 1. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 5.** Tính $\sin 105^\circ$.

- (A) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. (B) $-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
 (C) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. (D) $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

❖ **Câu 6.** Rút gọn biểu thức $P = \cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ$, ta được:

- (A) $\cos 50^\circ$. (B) $\cos 58^\circ$. (C) $\sin 50^\circ$. (D) $\sin 58^\circ$.

❖ **Câu 7.** Khẳng định nào sai?

- (A) $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. (B) $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$.
 (C) $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$. (D) $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.

❖ **Câu 8.** Khẳng định nào sai?

- (A) $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.
 (B) $\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
 (C) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
 (D) $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.

❖ **Câu 9.** Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau:

- (A) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 - \cos 4x}{4}$. (B) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$.
 (C) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 - \cos 4x}{2}$. (D) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{2}$.

❖ **Câu 10.** Cho hai góc α và β thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ và $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Tính giá trị của $\cos(\alpha - \beta)$.

- (A) $-\frac{16}{65}$. (B) $-\frac{18}{65}$. (C) $\frac{18}{65}$. (D) $\frac{16}{65}$.

❖ **Câu 11.** Cho $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Biết giá trị của $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{a\sqrt{5} - b\sqrt{15}}{10}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

- (A) 4. (B) 10. (C) 7. (D) 3.

❖ **Câu 12.** Với a là số thực bất kì, biểu thức $A = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(\alpha - \pi)$ bằng:

- (A) 0. (B) 1. (C) $2 \sin \alpha$. (D) $2 \cos \alpha$.

❖ **Câu 13.** Cho hai góc a và b với $\tan a = \frac{1}{7}$ và $\tan b = \frac{3}{4}$. Khi đó, $\tan(a + b)$ bằng

- (A) -1. (B) 1. (C) $\frac{17}{31}$. (D) $-\frac{17}{31}$.

❖ **Câu 14.** Nếu $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì giá trị $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{2}$. (B) $\sqrt{6} - 3$. (C) $\frac{\sqrt{6}}{6} - 3$. (D) $\sqrt{6} - \frac{1}{2}$.

❖ **Câu 15.** Nếu $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ thì giá trị của biểu thức $P = (1 - 3 \cos 2\alpha)(2 + 3 \cos 2\alpha)$ bằng:

- (A) $\frac{11}{9}$. (B) $\frac{12}{9}$. (C) $\frac{13}{9}$. (D) $\frac{14}{9}$.

❖ **Câu 16.** Rút gọn biểu thức $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là:

- (A) $-2 \cos x$. (B) 0 .
(C) $-\cos x$. (D) $\sin x - \cos x$.

❖ **Câu 17.** Cho $\cos x = \frac{4}{5}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ bằng

- (A) $-\frac{24}{25}$. (B) $-\frac{1}{5}$. (C) $\frac{24}{25}$. (D) $\frac{1}{5}$.

❖ **Câu 18.** Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của $\cos 2\alpha$ bằng

- (A) $-\frac{1}{9}$. (B) $-\frac{4}{3}$. (C) $\frac{4}{3}$. (D) $-\frac{2}{3}$.

❖ **Câu 19.** Biết $\sin 18^\circ = \frac{a + b\sqrt{5}}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$ và $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. giá trị của biểu thức $S = a + b + c$ là

- (A) $S = 2$. (B) $S = 4$. (C) $S = 3$. (D) $S = 1$.

❖ **Câu 20.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- (A) $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$. (B) $\cos 3x - \cos x = 2 \sin 2x \sin x$.
(C) $\sin 3x - \sin x = 2 \cos 2x \sin x$. (D) $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$.

❖ **Câu 21.** Số khẳng định đúng trong các khẳng định sau là:

- ① $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$ ③ $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$
② $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$ ④ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$
(A) 0 . (B) 1 . (C) 2 . (D) 3 .

❖ **Câu 22.** Nếu $\cos a = \frac{3}{4}$ thì $\cos^2 \frac{a}{2}$ bằng:

- (A) $\frac{23}{16}$. (B) $\frac{7}{8}$. (C) $\frac{7}{16}$. (D) $\frac{23}{8}$.

❖ **Câu 23.** Nếu $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$ thì giá trị của biểu thức $A = 4 \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(a - \frac{\pi}{3}\right)$ bằng

- (A) $-\frac{11}{9}$. (B) $\frac{11}{9}$. (C) $-\frac{1}{9}$. (D) $\frac{1}{9}$.

Bài 5.

- a) Cho $\sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính $\cos 2a, \cos 4a$.
 b) Cho $\cos 2a = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\sin a, \cos a, \tan a$.
 c) Cho $\tan \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tính $\sin a, \cos a, \tan a$.

Bài 6. Tính $\sin 2a, \cos 2a, \tan 2a$, biết:

- a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$.
 b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$.

Bài 7. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức:

- a) $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24}$.
 b) $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.
 c) $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}}$.
 d) $\frac{\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}}$.
 e) $\sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{8}$.
 f) $\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$.

Bài 8. Tính giá trị lượng giác của góc 2α , biết:

- a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
 b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < 2\pi$.

Bài 9. Tính giá trị lượng giác của góc α , biết:

- a) $\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.
 b) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$.

Bài 10. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \alpha$.
 b) $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha$.
 c) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$.

Bài 11. Cho $\cos(a + 2b) = 2 \cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a + b) \tan b = -\frac{1}{3}$.

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x$.
 b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x}$.
 c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$.
 d) $\frac{2 \sin(x + y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} - \tan y$.

Bài 13. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$.
 b) $\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}$.
 c) $\frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.
 d) $\frac{\sin^2 4\alpha - \sin^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha}$.

Bài 14. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

Bài 15. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(60^\circ + a) - \sin(60^\circ - a) &= \sin a. & \text{c) } \sin a(2 \cos 4a + 2 \cos 2a + 1) &= \sin 5a. \\ \text{b) } \sin^4 a + \cos^4 a &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a. & \text{d) } \frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} &= \frac{1 + \tan a \tan b}{1 - \tan a \tan b}. \end{aligned}$$

Bài 16. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } 4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) &= \cos 3x. \\ \text{b) } \frac{\sin 2x \cos x}{(1 + \cos x)(1 + \cos 2x)} &= \tan \frac{x}{2}. \\ \text{c) } \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} &= \tan x. \\ \text{d) } \sin x(1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) &= \sin 7x. \\ \text{e) } \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} &= 8 \cos 2x. \\ \text{f) } \cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x &= \frac{3}{4} \sin 4x. \end{aligned}$$

Bài 17. Chứng minh đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến x .

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right). \\ \text{b) } \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Bài 18. Chứng minh đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến x .

$$\text{a) } A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right). \quad \text{b) } B = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x.$$

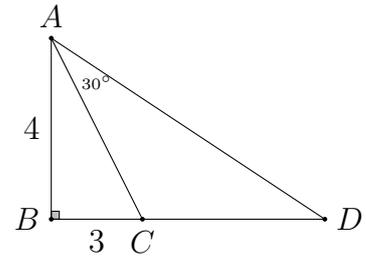
Bài 19. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin A &= \sin B \cos C + \sin C \cos B. \\ \text{b) } \cos A \cos B - \sin A \sin B &= 0. \\ \text{c) } \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \cos \frac{A}{2}. \\ \text{d) } \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \\ \text{e) } \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \text{ (với điều kiện tam giác } ABC \text{ không vuông)}. \\ \text{f) } \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Bài 20. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tìm m để $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

Bài 21. Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$?

Bài 22. Trong hình bên, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD .



Bài 23. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ$; $\widehat{C} = 45^\circ$ và $a = BC = 12$ cm.

a) Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ và định lí sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC cho bởi công thức

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

b) Sử dụng kết quả ở câu 1 và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC .

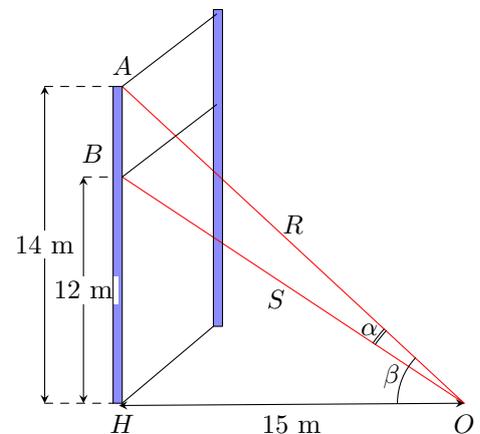
Bài 24. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

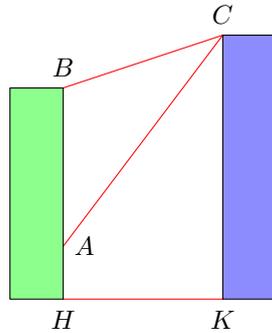
Bài 25. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



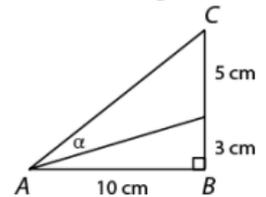
a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Bài 26. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20$ m. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C . Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32$ m, $AH = 6$ m, $BH = 24$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



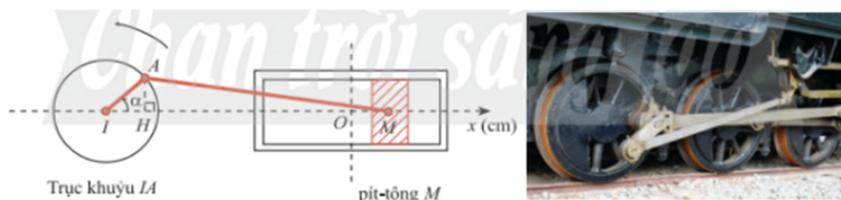
Bài 27. Cho góc α như hình bên. Tính $\tan \alpha$.



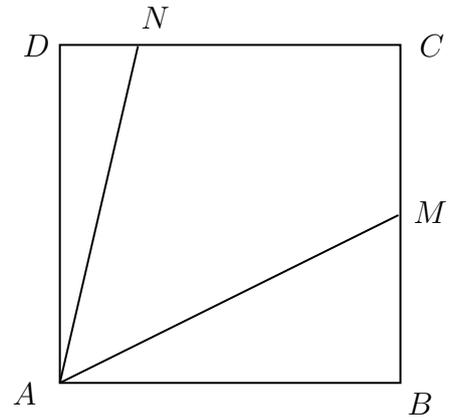
Bài 28. Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 20 m tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương bắn và phương ngang). Nếu tăng góc ngắm đó lên hai lần thì vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 45 m. Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường.

Bài 29. Trong hình bên, pít – tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít – tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .

- Biết $IA = 8$ cm, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .
- Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Bài 30. Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$.



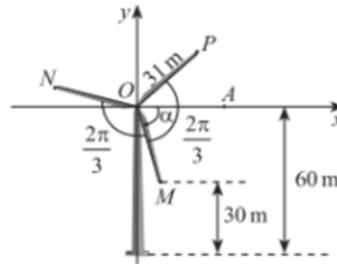
a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.

b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Bài 31. Trong Hình bên, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua bin gió. Biết các cánh quạt dài 31m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α .

a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



4 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



- Hàm số sin là quy tắc đặc tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$, kí hiệu $y = \sin x$.
- Hàm số cosin là quy tắc đặc tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$, kí hiệu $y = \cos x$.
- Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \tan x.$$

- Hàm số cotang là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{với } x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \cot x.$$



🔔 LƯU Ý.

- Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là \mathbb{R} .
- Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

II. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

1) Hàm số chẵn, hàm số lẻ



- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là \mathcal{D} được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là \mathcal{D} được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.



🔔 **LƯU Ý.** Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1

Chứng minh rằng hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Hướng dẫn giải.

Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $\sin(-x) = -\sin x$. Do đó hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $-x = -\frac{\pi}{2} - k = -\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathcal{D}$.

Mặt khác, $\cot(-x) = -\cot x$ nên hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 2

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = |x|$.

b) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Hướng dẫn giải.

a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathcal{D}$ suy ra $-x \in \mathcal{D}$.

Mặt khác, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ xác định khi và chỉ khi $x + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tức là $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Suy ra hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $-x \neq -k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cũng có nghĩa là $-x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, hay $-x \in \mathcal{D}$.

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} \tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) \\ &= -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Do đó hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ.

c) Hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathcal{D}$ suy ra $-x \in \mathcal{D}$.

Đặt $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Xét hai giá trị $\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \in \mathcal{D}$, ta thấy rằng:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ và $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ không phải là hàm chẵn cũng không phải là hàm lẻ.



① Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

- a) $y = 2x^2 - 6$. b) $y = x^3 - 3x$. c) $y = \cos 2x$. d) $y = \sin^3 x$.

2) Hàm số tuần hoàn



- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định \mathcal{D} được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $x \pm T \in \mathcal{D}$ và $f(x+T) = f(x)$.
- Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.



🔔 **LƯU Ý.** Đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kỳ T được lặp lại trên từng đoạn giá trị của x có độ dài T .

🔑 Ví dụ 3



Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \cos x$ và hàm số $y = \cot x$.

🔑 *Hướng dẫn giải.* Ta có $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\cot(x + \pi) = \cot x$ với mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Do đó hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π và hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .



🔔 **LƯU Ý.** Người ta chứng minh được rằng:

- Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .
- Các hàm số $y = A \sin \omega x$ và $y = A \cos \omega x, (\omega > 0)$ là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

🔑 **Nhận xét:** Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T , ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a + T]$, sau đó dịch chuyển song song với trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là $T, 2T, 3T, \dots$ ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.



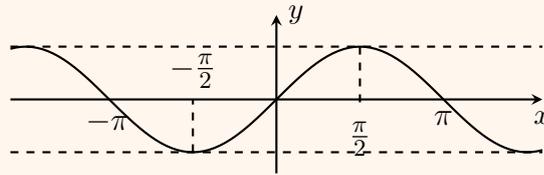
② Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \tan 2x$.

III. ĐỒ THỊ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1) Hàm số $y = \sin x$



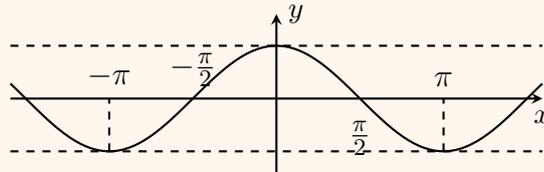
- ◇ Có tập xác định là \mathbb{R} và tập giá trị là $[-1; 1]$;
- ◇ Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ 2π ;
- ◇ Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.



2) Hàm số $y = \cos x$



- ◇ Có tập xác định là \mathbb{R} và tập giá trị là $[-1; 1]$;
- ◇ Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kỳ 2π ;
- ◇ Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;



☛ Ví dụ 4

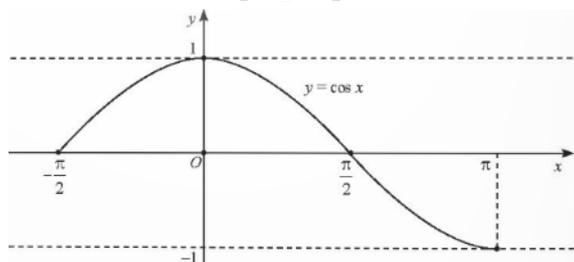


Cho hàm số $y = \cos x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

- a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho.
- b) Tại các điểm nào thì giá trị của hàm số lớn nhất.
- c) Tìm các giá trị $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ sao cho $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$.

☛ Hướng dẫn giải.

a) Ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ như sau:



b) Tại $x = 0$ thì giá trị hàm số lớn nhất.

c) Do $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Để $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ thì $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ suy ra $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

🔥 Ví dụ 5



Tìm tập giá trị của hàm số $y = -3 \cos x$.

Hướng dẫn giải. Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên suy ra $-3 \leq -3 \cos x \leq 3$ hay $-3 \leq y \leq 3$.

Vậy tập giá trị của hàm số $y = -3 \cos x$ là $[-3; 3]$.

🔥 Ví dụ 6



Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = 5 \cos x + 1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5 \cos x \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq 5 \cos x + 1 \leq 6 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 6$. Vậy $\min y = -4$, $\max y = 6$.

3) Tính giá trị của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ khi $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = -\frac{11\pi}{4}$; $x = \frac{14\pi}{3}$.

4) Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$), $\omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần). Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5 \cos(4\pi t)$ (cm).

a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.

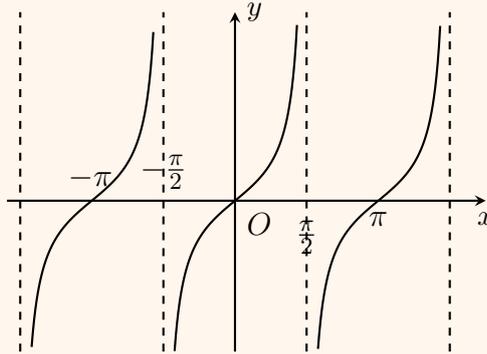
b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

3) Hàm số $y = \tan x$



Hàm số $y = \tan x$:

- ◇ Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tập giá trị là \mathbb{R} ;
- ◇ Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ π ;
- ◇ Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$;
- ◇ Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

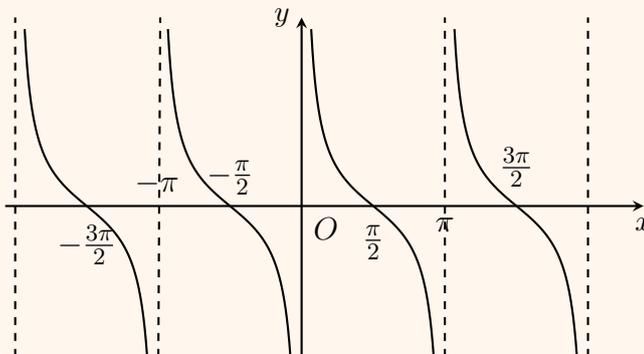


4) Hàm số $y = \cot x$



Hàm số $y = \cot x$:

- ◇ Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là \mathbb{R} ;
- ◇ Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ π ;
- ◇ Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- ◇ Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.



👉 Ví dụ 7



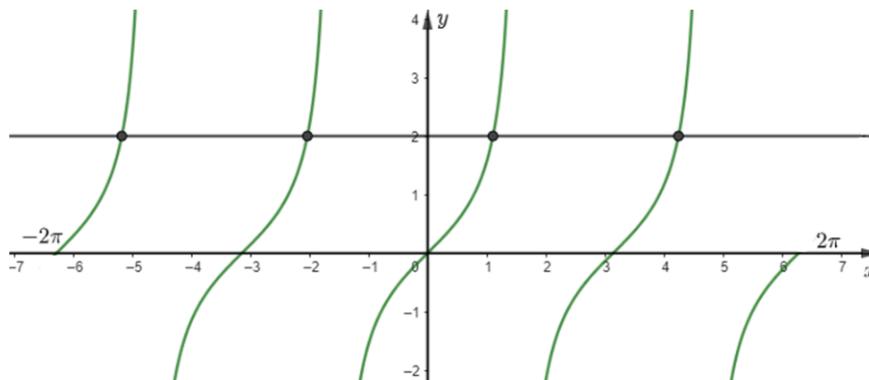
Cho hàm số $y = \cot x$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ và $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Có bao nhiêu giá trị x mà tại đó giá trị của hàm số bằng 2?

Hướng dẫn giải.

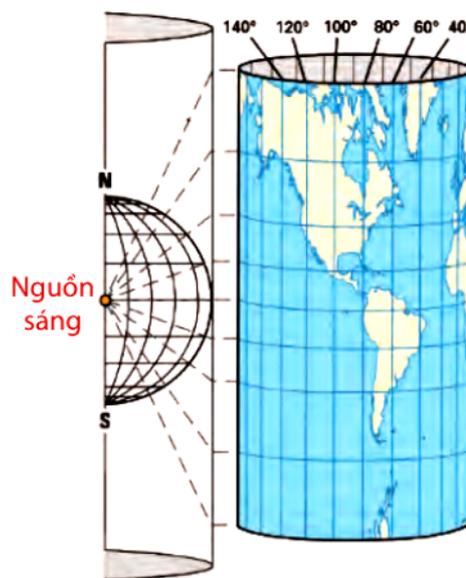
a) Đồ thị hàm số đã cho trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là:



b) Dựa vào sự tương giao hàm số $y = \cot x$ và $y = 2$ có 4 giá trị thỏa mãn.

Ví dụ 8

Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong hình vẽ. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ φ° ($-90 < \varphi < 90$) được cho bởi hàm số $y = 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)$ (cm). Sử dụng đồ thị hàm số tan, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ.



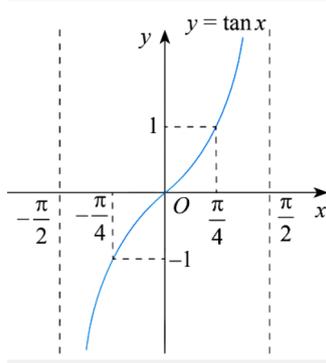
Hướng dẫn giải. Vì điểm nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ nên ta có:

$$-20 \leq y \leq 20.$$

$$\text{Khi đó } -20 \leq 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 20 \text{ hay } -1 \leq \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 1.$$

$$\text{Ta có: } -90 < \varphi < 90^\circ \text{ khi và chỉ khi } -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{180}\varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Xét đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



Ta thấy $-1 \leq \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 1$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{180}\varphi \leq \frac{\pi}{4}$ hay $-45 \leq \varphi \leq 45$.

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá 20 cm nằm ở vị độ từ -45° đến 45° .

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là

- (A) $[-1; 1]$. (B) $(-1; 1)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) \mathbb{R} .

❖ **Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 (C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

❖ **Câu 3.** Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- (A) Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là \mathbb{R} .
 (B) Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.
 (C) Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.
 (D) Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

❖ **Câu 4.** Tập xác định của hàm số $y = \sin 2x$ là

- (A) $[-2; 2]$. (B) $[-1; 1]$. (C) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. (D) \mathbb{R} .

❖ **Câu 5.** Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

- (A) $[-2; 2]$. (B) $[-1; 1]$. (C) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. (D) \mathbb{R} .

❖ **Câu 6.** Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 D $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 7.** Tập xác định của hàm số $y = \tan \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ là

A $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 8.** Trong các hàm số sau, đâu là hàm số tuần hoàn?

A $y = x \sin x$.
 B $y = \sin x$.

C $y = x - \sin x$.
 D $y = \frac{2}{\sin x}$.

❖ **Câu 9.** Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là

A $T = [-1; 1]$.
 B $T = (-1; 1)$.

C $T = [0; +\infty)$.
 D $T = (-\infty; 0]$.

❖ **Câu 10.** Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn .
- B Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn .
- C Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn .
- D Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn .

❖ **Câu 11.** Trong các hàm số sau, đâu là hàm số lẻ?

A $y = \sin^2 x$.
 B $y = x \cos 2x$.

C $y = x \sin x$.
 D $y = \cos x$.

❖ **Câu 12.** Tập xác định của hàm số $y = \sin \sqrt{x}$ là

A \mathbb{R} .
 B $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 C $(0; +\infty)$.
 D $[0; +\infty)$.

❖ **Câu 13.** Trong các hàm số sau, đâu là hàm số lẻ?

A $y = \cos x + \sin^2 x$.
 B $y = \sin x + \cos x$.

C $y = -\cos x$.
 D $y = \sin x \cos 3x$.

❖ **Câu 14.** Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A Hàm số $y = \sin x$ có tuần hoàn với chu kì 2π .
- B Hàm số $y = \cos x$ có tuần hoàn với chu kì 2π .
- C Hàm số $y = \tan x$ có tuần hoàn với chu kì 2π .
- D Hàm số $y = \cot x$ có tuần hoàn với chu kì 2π .

❖ **Câu 15.** Tính chu kì T của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- (A) $T = \frac{2\pi}{5}$. (B) $T = \frac{5\pi}{2}$. (C) $T = \frac{\pi}{2}$. (D) $T = \frac{\pi}{8}$.

❖ **Câu 16.** Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 2}$.

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 (C) $\mathcal{D} = [-1; 1]$. (D) $\mathcal{D} = \emptyset$.

❖ **Câu 17.** Cho hàm số $y = \sin x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
 (B) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
 (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

❖ **Câu 18.** Với $x \in \left(\frac{31\pi}{4}; \frac{33\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến. (B) Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến.
 (C) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến. (D) Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.

❖ **Câu 19.** Hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- (A) $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. (B) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. (C) $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. (D) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

❖ **Câu 20.** Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3 \sin x$.

- (A) $T = [-1; 1]$. (B) $T = [-3; 3]$. (C) $T = [2; 8]$. (D) $T = [5; 8]$.

❖ **Câu 21.** Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A) Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O .
 (B) Đồ thị hàm số $y = \cos x$ đối xứng qua trục Oy .
 (C) Đồ thị hàm số $y = |\tan x|$ đối xứng qua trục Oy .
 (D) Đồ thị hàm số $y = \tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

❖ **Câu 22.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$ là:

- (A) \emptyset . (B) \mathbb{R} .
 (C) $[-1; +\infty)$. (D) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

❖ **Câu 23.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}}$ là:

- (A) \emptyset . (B) \mathbb{R} .

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 24.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ là:

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (C) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

❖ **Câu 25.** Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \frac{1}{1 + \cot^2 x}$ là:

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (C) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 26.** Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

(A) $y = -2 \cos x$. (B) $y = -2 \sin x$.
 (C) $y = \tan x - \cos x$. (D) $y = -2 \sin x + 2$.

❖ **Câu 27.** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

(A) $y = \cos x + 5$. (B) $y = \tan x + \cot x$.
 (C) $y = \sin(-x)$. (D) $y = \sin x - \cos x$.

❖ **Câu 28.** Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng:

(A) $(0; \pi)$. (B) $(\pi; 2\pi)$. (C) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. (D) $(-\pi; 0)$.

❖ **Câu 29.** Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng:

(A) $\left(\frac{9\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$. (B) $\left(\frac{11\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}\right)$.
 (C) $(10; \pi; 11\pi)$. (D) $(9\pi; 10\pi)$.

❖ **Câu 30.** Số các giá trị $\alpha \in [-\pi; 2\pi]$ sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ là

(A) 1 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 4 .

2 Tự luận

❖ **Bài 1.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 5 \sin^2 x + 1$. c) $y = \sin 2x + \tan 2x$. e) $y = \sin x \cos 2x$.
 b) $y = \cos x + \sin x$. d) $y = \cos x + \sin^2 x$. f) $y = \sin x + \cos x$.

❖ **Bài 2.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{\cos x}$. c) $y = \cot 3x$. e) $y = \sqrt{\cos x - 1}$.
 b) $y = \tan \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. d) $y = \frac{1}{1 + \sin x \cos x}$. f) $y = \frac{1}{2 - \sin^2 x}$.

g) $y = \sqrt{1 + \sin 3x}$.

h) $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$.

i) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}}$.

Bài 3. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 5 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

c) $y = 2 \tan x + 3$.

b) $y = |\sin 3x| - 1$.

d) $y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2 + 3|\cos x|$.

c) $y = \sqrt{1 + \cos 2x} + 3$.

e) $y = 3 \cos^2 x + 4 \cos 2x$.

b) $y = 2\sqrt{\sin x} + 1$.

d) $y = \frac{1}{4 - \sin x}$.

f) $y = \sin x + \cos x$.

Bài 5. Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ để

a) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng -1 ;

c) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 1 ;

b) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng 0 ;

d) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 0 .

Bài 6. Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

a) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$;

b) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$;

c) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$;

d) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in (0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.

Bài 7. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

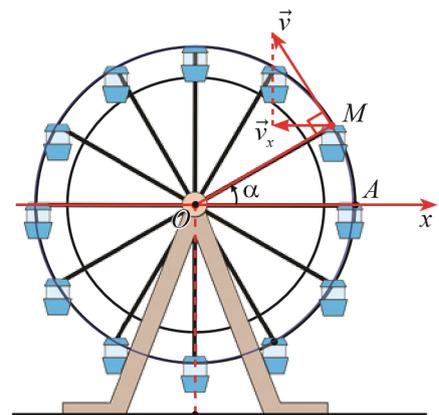
a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Bài 8. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình vẽ bên).

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .

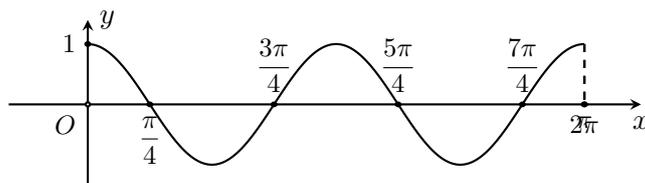
b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng?



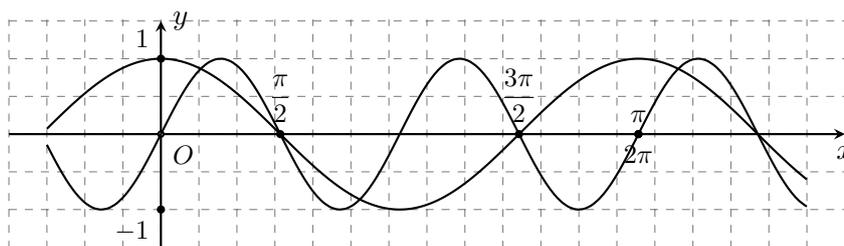
Bài 9. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp

- a) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = 0;$ b) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2};$ c) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}.$

Bài 10. Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên tập hợp $\mathcal{D} = [0; 2\pi]$ và có đồ thị cho ở hình vẽ. Tìm số giao điểm tối đa của đường thẳng $y = m$ với $m \in \mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$.



Bài 11. Cho các hàm số $y = \sin 2x$ và $y = \cos x$ có đồ thị trong cùng hệ tọa độ như sau

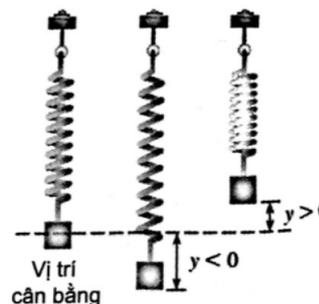


Hỏi hai đồ thị cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0; 2018)$?

Bài 12. Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình:

$$y = 25 \sin 4\pi t,$$

ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.



- Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.
- Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.
- Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Bài 13. Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

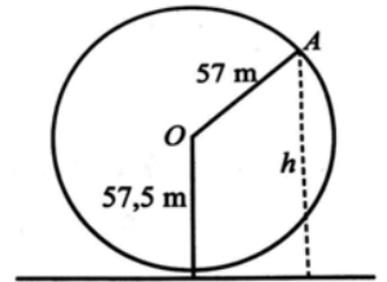
Bài 14. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức: $p(t) = 120 + 15 \cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

- Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.
- Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Bài 15. Giả sử độ sâu $D(t)$ (m) của nước của một cảng biển sau t giờ kể từ nửa đêm được tính bằng công thức: $D(t) = 4 \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) + 6$ (m), $0 \leq t \leq 24$.

- Tìm độ sâu lớn nhất và độ sâu nhỏ nhất của nước ở cảng này theo công thức trên.
- Một chiếc thuyền chỉ đi được vào cảng khi độ sâu của nước không nhỏ hơn 5 mét. Hỏi theo công thức trên, chiếc thuyền này có thể vào cảng lúc 8 giờ tối hay không?

Bài 16. Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57 \sin \left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2} \right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) (hình vẽ).

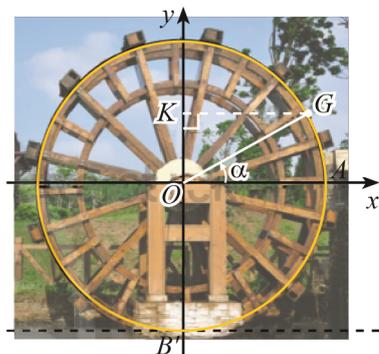


- Tính chu kỳ của hàm số $h(t)$?
- Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?
- Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là 86 m?

Bài 17. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12}t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

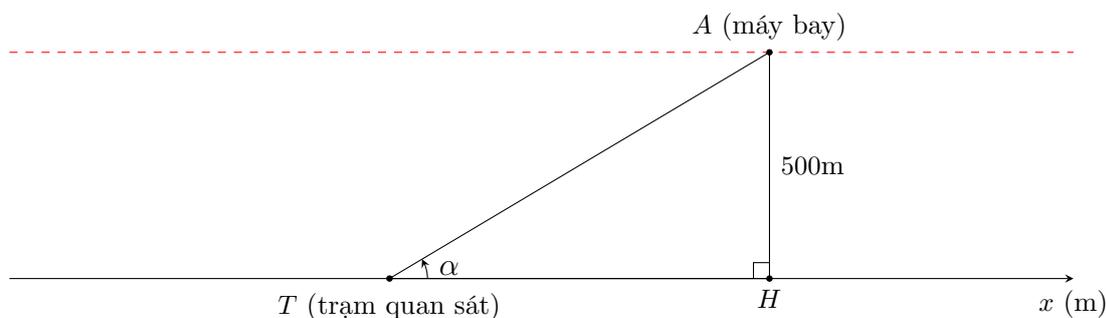
- Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 17 giờ 45 phút.
- Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?
- Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Bài 18. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình vẽ bên).



- Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OG})$.
- Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 mét?

Bài 19. Trong hình vẽ bên dưới, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



- Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .
- Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

5 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG



Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.



🔔 LƯU Ý.

◇ Để giải phương trình, ta thường biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương. Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau

★ Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng một số hoặc cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

★ Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

◇ Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu “ \Leftrightarrow ”.



Hai phương trình $x - 1 = 0$ và $x^2 - 1 = 0$ có tương đương không? Vì sao?

II. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$



Xét phương trình $\sin x = m$.

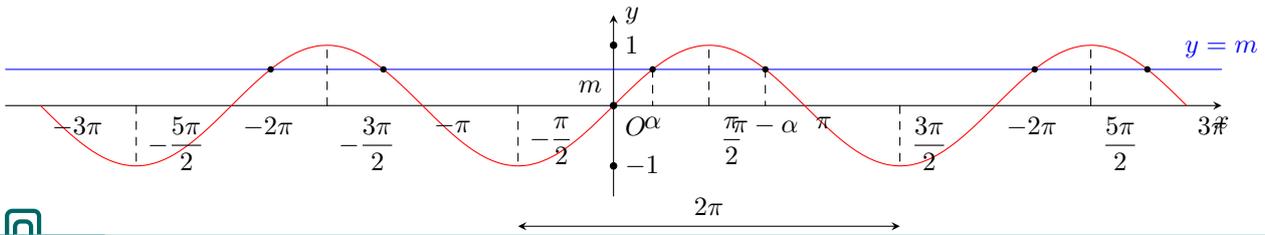
◇ Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

◇ Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.



LƯU Ý.

◇ Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

◇ $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = \pi - v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

◇ $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1



Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\sin x = \cos 3x$.

b) $\sin x = -3$.

f) $\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$.

c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

g) $\sin 3x = 0$.

d) $\sin 3x = \sin 2x$.

h) $\sin x = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải.

a) Vì $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ nên

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Vì $|-3| = 3 > 1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Vì $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên:

$$\begin{aligned} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$d) \sin 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x + k2\pi \\ 3x = \pi - 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$e) \sin x = \cos 3x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ -2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} - k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $\left\{-\frac{\pi}{4} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ nên ta có thể viết như sau:

$$\sin x = \cos 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

f)

$$\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = x + 60^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = 180^\circ - (x - 60^\circ) + k360^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 210^\circ + k360^\circ \Leftrightarrow x = 105^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

$$g) \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

h) Gọi α là góc thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.

$$\text{Khi đó } \sin x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2



Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = \cos x$ trên $[0; 2\pi]$.

 *Hướng dẫn giải.* Ta có $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq k\pi \leq \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}$.

Mặt khác, vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình trên đoạn $[0; 2\pi]$ là $x = -\frac{\pi}{4}; x = \frac{5\pi}{4}$.

Ví dụ 3

Giả sử huyết áp của một người A được xác định bởi công thức $p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$, trong đó $p(t)$ (đơn vị: mmHg) là huyết áp của người đó tại thời điểm t (đơn vị: phút). Xác định tất cả các thời điểm người này có huyết áp thấp nhất theo công thức trên.

Lời giải. Người này có huyết áp thấp nhất khi $\sin(160\pi t) = -1$.

Giải phương trình trên ta được: $160\pi t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 1$ (do $t \geq 0$) hay

$$t = -\frac{1}{320} + \frac{k}{80}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } k \geq 1.$$

Vậy người này có huyết áp thấp nhất khi

$$t = -\frac{1}{320} + \frac{k}{80}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } k \geq 1.$$



① Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. c) $\sin(x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. e) $\sin 4x = -\sin(\pi - x)$.
 b) $\sin 2x = -1$. d) $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. f) $\sin 3x = -\sin 5x$.



② Số nghiệm của phương trình $\sin 4x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là bao nhiêu?



③ Giả sử số lượng N của một loài hươu sau t năm được xác định bởi công thức:

$$N = 30\,000 + 20\,000 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right).$$

Xác định năm đầu tiên mà số lượng của loài hươu này bằng 50 nghìn con theo công thức trên.

III. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$



Xét phương trình $\cos x = m$.

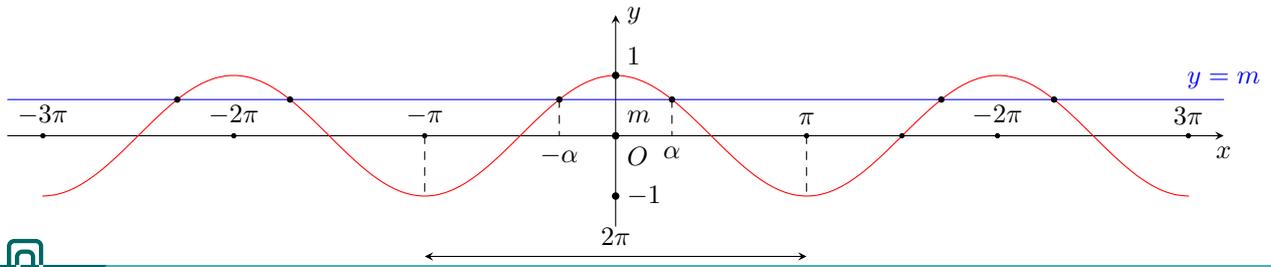
◇ Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

◇ Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.



LƯU Ý.

◇ Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

◇ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

◇ $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4



Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\cos 2x = \cos(45^\circ - x)$.

b) $\cos x = 0, 1$.

d) $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$.

Hướng dẫn giải.

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi $\alpha \in [0; \pi]$ là góc thoả mãn $\cos \alpha = 0, 1$. Khi đó,

$$\cos x = 0, 1 \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c)

$$\begin{aligned} \cos 2x = \cos(45^\circ - x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 45^\circ - x + k360^\circ \\ 2x = -(45^\circ - x) + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k120^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

d)

$$2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos \frac{5\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ví dụ 5



Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = 8 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ (sau t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định tất cả các thời điểm vật có li độ lớn nhất (kể từ thời điểm ban đầu).

Lời giải. Vật có li độ lớn nhất là 8 cm khi $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = 1$.

Phương trình trên có các nghiệm là: $\frac{\pi t}{12} = k2\pi, k \in \mathbb{N}$ (do $t \geq 0$) $\Rightarrow t = 24k, k \in \mathbb{N}$.

Vậy các thời điểm vật có li độ lớn nhất là: $t = 24k, k \in \mathbb{N}$.



4) Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

e) $\sin x + \cos 2x = 0$.

b) $\cos x = 3$.

d) $\cos(x - 10^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

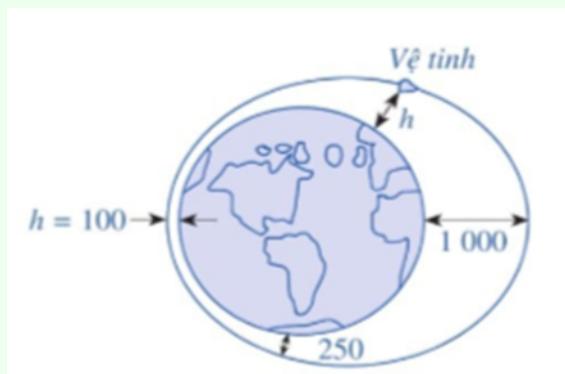
f) $\sin 2x + 2 \cos x = 0$.



5)

Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là đường elip (Hình bên). Độ cao h (km) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức

$$h = 550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t$$



(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021), trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Tại thời điểm t bằng bao nhiêu thì vệ tinh cách mặt đất 1 000 km; 250 km; 100 km?



⑥ Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ)$ thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$$

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

- a) $F = 0$ (trăng mới);
- b) $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm);
- c) $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);
- d) $F = 1$ (trăng tròn).



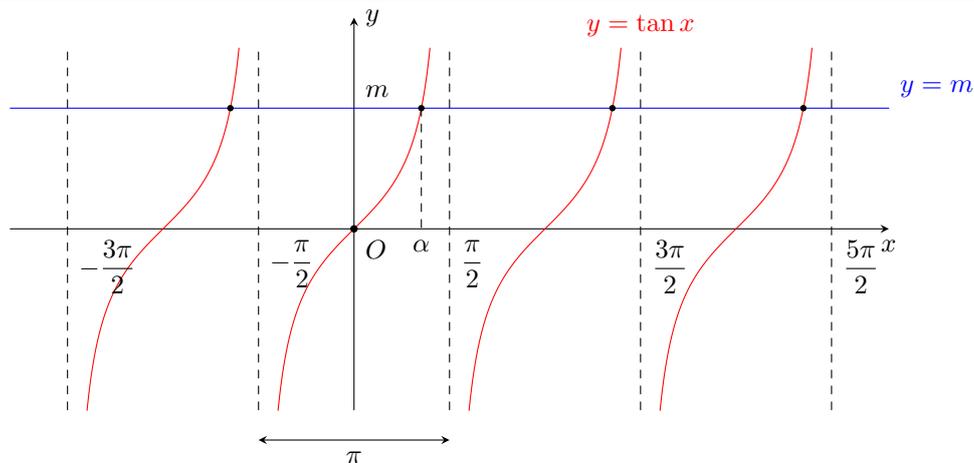
IV. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$



Với mọi số thực m , phương trình $\tan x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ sao cho $\tan \alpha = m$.



🔔 **LƯU Ý.** $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 6

Giải các phương trình sau:

a) $\tan 2x = \frac{2025}{2024}$.

c) $\tan(2x + 15^\circ) = -1$.

b) $3 \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

d) $(3 \tan x - \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Gọi α thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là góc thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{2025}{2024}$. Khi đó, ta có:

$$\tan 2x = \frac{2025}{2024} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan \alpha \Leftrightarrow 2x = \alpha + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b)

$$\begin{aligned} 3 \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

c) Ta có: $\tan(2x + 15^\circ) = -1 = \tan(-45^\circ) \Leftrightarrow 2x + 15^\circ = -45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = -30^\circ + k90^\circ$.

d) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ta có:

$$\begin{aligned} (3 \tan x - \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \\ \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{và} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



7 Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

d) $\tan x = \tan 67^\circ$.

b) $\tan x = -1$.

e) $\sqrt{3} \tan 2x = -1$.

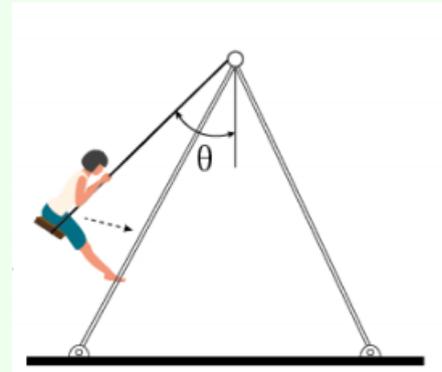
c) $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$.

f) $\tan 3x + \tan 5x = 0$.



8

Một người dẫn em gái của mình đến công viên để chơi xích đu. Lực đẩy theo phương ngang F (N) mà người đó dùng để đẩy em gái trong trò chơi này được xác định bởi công thức $F = mg \tan \theta$, trong đó m (kg) là khối lượng của em gái, g là gia tốc trọng trường và θ là góc tạo bởi xích đu khi bắt đầu được đẩy với phương thẳng đứng (Hình bên). Xác định góc θ khi $F = 400\sqrt{3}$ N, $m = 40$ kg và $g = 10 \text{ m/s}^2$.



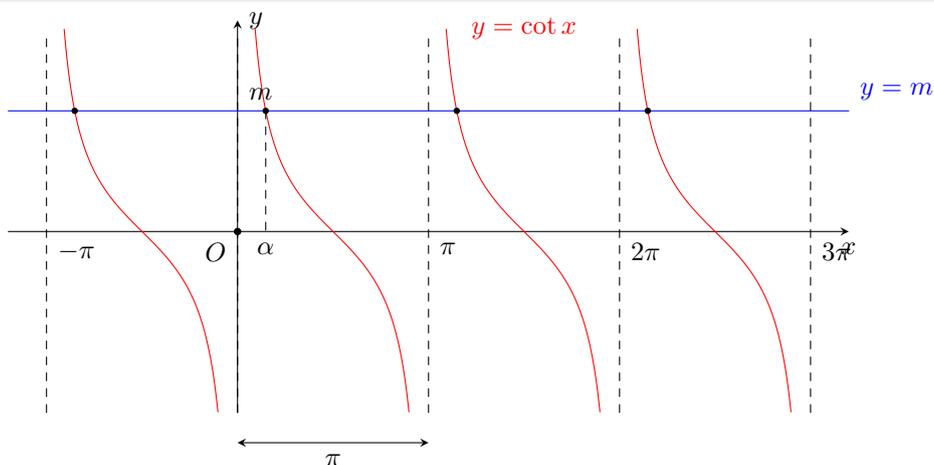
V. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$



Với mọi số thực m , phương trình $\cot x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

với α là góc thuộc $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.



LƯU Ý. $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

☞ Ví dụ 7



Giải các phương trình sau:

a) $\cot 2x = -\sqrt{3}.$

b) $\sqrt{3} \cot x + 1 = 0.$

c) $\cot(3x + 30^\circ) = \cot 75^\circ.$

🔗 Hướng dẫn giải.

a) $\cot 2x = -\sqrt{3} = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

b) $\sqrt{3} \cot x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

c) $\cot(3x + 30^\circ) = \cot 75^\circ \Leftrightarrow 3x + 30^\circ = 75^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$



9 Giải các phương trình sau:

a) $\cot 2x = -1.$

b) $\cot 6x = 4.$

c) $\cot(x - 45^\circ) = \sqrt{3}.$

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ Câu 1. Phương trình nào dưới đây vô nghiệm?

(A) $\sin x = \frac{1}{2}.$

(B) $\tan x = 3.$

(C) $\cos x = 4.$

(D) $\cos x = -\frac{1}{2}.$

❖ Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

(A) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

❖ Câu 3. Phương trình $2 \sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

(A) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

(B) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

(C) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

(D) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

❖ Câu 4. Phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(B) $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(C) $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

(D) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

❖ Câu 5. Nghiệm của phương trình $2 \cos x + 1 = 0$ là

(A) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

❖ **Câu 6.** Họ nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

- (A) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 7.** Với $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ có tập nghiệm là

- (A) $\left\{k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$. (B) $\left\{k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.
 (C) $\left\{k\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$. (D) $\left\{k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

❖ **Câu 8.** Với $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $2 \sin x + 1 = 0$ có tập nghiệm là

- (A) $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{7\pi}{6} + k\pi\right\}$. (B) $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}$.
 (C) $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi\right\}$. (D) $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{7\pi}{6} + k\pi\right\}$.

❖ **Câu 9.** Với $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là

- (A) $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}$. (B) $\left\{\pm \frac{\pi}{6} + k2\pi\right\}$.
 (C) $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right\}$. (D) $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi\right\}$.

❖ **Câu 10.** Phương trình $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ có họ nghiệm là

- (A) $-\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $-\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 11.** Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

- (A) $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 (C) $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

❖ **Câu 12.** Phương trình nào dưới đây có nghiệm?

- (A) $\cos x = 5$. (B) $\sin x = -5$.
 (C) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $\cos 3x = 2025$.

❖ **Câu 13.** Phương trình nào dưới đây có nghiệm?

- (A) $\cos x = 5$. (B) $\sin x = -5$.
 (C) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $\cos 3x = 2025$.

❖ **Câu 14.** Tất cả các nghiệm của phương trình $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ là

- (A) $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 15.** Nghiệm của phương trình $2 \cos(x + 15^\circ) - 1 = 0$ là

(A)
$$\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

(B)
$$\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

(C)
$$\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

(D)
$$\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

❖ **Câu 16.** Phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ có các nghiệm là:

(A)
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

(B)
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

(C)
$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

(D)
$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

❖ **Câu 17.** Phương trình $\cos x = 0$ có nghiệm là:

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(B) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(C) $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(D) $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

❖ **Câu 18.** Phương trình $\tan x = -1$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(B) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(C) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(D) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

❖ **Câu 19.** Phương trình $\cot x = 0$ có các nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(B) $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(D) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

❖ **Câu 20.** Phương trình $\sin x - \cos x = 0$ có các nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(B) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(C) $x = \frac{4\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

(D) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

❖ **Câu 21.** Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0,3$ trên khoảng $(0; 4\pi)$ là

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 6.

❖ **Câu 22.** Giá trị m để phương trình $\cos x = m$ có nghiệm trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ là:

(A) $0 \leq m < 1.$

(B) $0 \leq m \leq 1.$

(C) $m \geq 0.$

(D) $m \leq 1.$

❖ **Câu 23.** Số nghiệm của phương trình $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$.

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

❖ **Câu 24.** Phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ có tập nghiệm là

- (A) $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) \emptyset .
 (C) $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 25.** Phương trình $\cot \frac{2x}{3} = \sqrt{3}$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. (B) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.
 (C) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. (D) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

❖ **Câu 26.** Tổng các nghiệm của phương trình $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên $(-180^\circ; 180^\circ)$ là

- (A) 20° . (B) 100° . (C) 80° . (D) 120° .

❖ **Câu 27.** Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin 2x = 0$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 28.** Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$?

- (A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 7.

❖ **Câu 29.** Tập nghiệm của phương trình $(1 - \sqrt{2} \cos x)(2024 + \sin^2 x) = 0$ là

- (A) $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (C) $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin x = m + 1$ có nghiệm

- (A) $m \geq 1$. (B) $0 \leq m \leq 1$.
 (C) $m \leq 0$. (D) $-2 \leq m \leq 0$.

❖ **Câu 31.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3 \sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

- (A) 6. (B) 2. (C) 1. (D) 7.

❖ **Câu 32.** Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

- (A) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. (B) $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
 (C) $m \in (1; +\infty)$. (D) $m \in (-\infty; -1)$.

❖ **Câu 33.** Phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ có số nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$ là

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

❖ **Câu 34.** Phương trình $\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x$ có các nghiệm là:

- (A) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. (B) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 (C) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. (D) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

❖ **Câu 35.** Phương trình $\cos 2x = \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có nghiệm là:

- (A) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. (B) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
 (C) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. (D) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

❖ **Câu 36.** Phương trình $\sin 3x = \cos x$ có các nghiệm là:

- (A) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. (B) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
 (C) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. (D) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

❖ **Câu 37.** Tính tổng các nghiệm của phương trình $\cos \left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

- (A) $\frac{47\pi}{18}$. (B) $\frac{4\pi}{18}$. (C) $\frac{45\pi}{18}$. (D) $\frac{7\pi}{18}$.

❖ **Câu 38.** Phương trình $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm nhỏ nhất bằng

- (A) $\frac{4\pi}{3}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) 2π . (D) π .

❖ **Câu 39.** Tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$ là?

- (A) $x = -\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = -\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 40.** Phương trình $\sin 5x - \sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- (A) 20179. (B) 20181. (C) 16144. (D) 16145.

❖ **Câu 41.** Tìm tất cả các nghiệm phương trình:

$$\sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \cos \frac{\pi}{4}$$

(A)
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(B)
$$\begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(C)
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(D)
$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{36} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❖ **Câu 42.** Phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 1.

(D) 4.

❖ **Câu 43.** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$ là

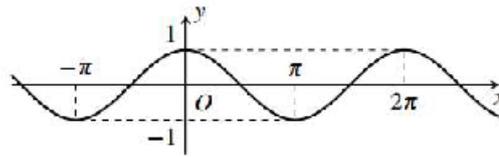
(A) $-\frac{35}{36}\pi$.

(B) $-\frac{11}{36}\pi$.

(C) $-\frac{11}{12}\pi$.

(D) $-\frac{1}{12}\pi$.

❖ **Câu 44.** Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là

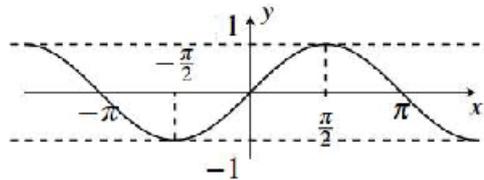
(A) $x = 0$.

(B) $x = \pi$.

(C) $x = 2\pi$.

(D) $x = \frac{\pi}{2}$.

❖ **Câu 45.** Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là

(A) $x = 0$.

(B) $x = \pi$.

(C) $x = -\frac{\pi}{2}$.

(D) $x = \frac{\pi}{2}$.

❖ **Câu 46.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{180}(t - 80)\right) + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

(A) 170.

(B) 171.

(C) 172.

(D) 173.

2 Tự luận

Bài 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

c) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{2\pi}{7}$.

d) $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Bài 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos 4x = \cos \frac{\pi}{12}$.

c) $\cos^2 x = 1$.

Bài 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan x = \tan 55^\circ$.

d) $\cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

b) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

e) $\cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\tan\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{1}{3}$.

f) $\cot x - 3 = \sqrt{3}(1 - \cot x)$.

Bài 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos(2x + 10^\circ) = \sin(50^\circ - x)$.

f) $\tan(x - 30^\circ) - \cot 50^\circ = 0$.

b) $8 \sin^3 x + 1 = 0$.

g) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $\sin 2x + \cos 4x = 0$.

h) $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

d) $\cos 3x = -\cos 7x$.

i) $\sin x + \cos x = 0$.

e) $(\sin x + 3)(\cot x - 1) = 0$.

j) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

Bài 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan x + \cot x = 0$.

e) $\tan 2x \cot x = 1$.

b) $\sin x + \tan x = 0$.

f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$.

c) $2 \sin 2x - \sin 4x = 0$.

g) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$.

d) $\cos^6 x - \sin^6 x = 0$.

h) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin^2 x - 1 = 0$.

Bài 6. Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

b) $2 \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

c) $\tan\left(x + \frac{\pi}{9}\right) = \tan \frac{4\pi}{9}$.

Bài 7. Tìm hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ và $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

b) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Bài 8. Tìm hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số $y = \sin 3x - \cos \left(\frac{3\pi}{4} - x \right)$ với trục hoành.

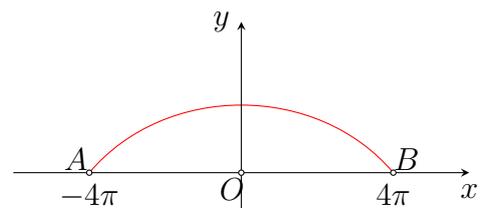
Bài 9. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác $y = \frac{\sin x - 2 \cos 3x}{\sin x + \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)}$.

Bài 10. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 9,8$ m/s² là gia tốc trọng trường.

- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.
- Tìm góc bắn α để quả đạn bay xa nhất.

Bài 11. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$. Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Bài 12. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos \frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 38. Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



Hình 38

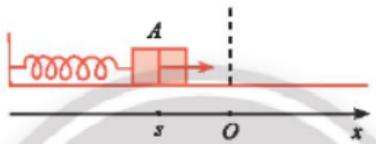
Bài 13. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Bài 14. Trong Hình bên, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Tọa độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?



Bài 15. Trong Hình 10, ngọn đèn hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)

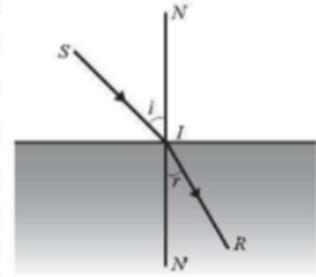


- Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .
- Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Bài 16. Huyết áp của con người thay đổi liên tục theo thời gian. Giả sử huyết áp tâm trương (huyết áp trong động mạch khi tim nghỉ ngơi giữa hai lần co bóp) của người A trong một ngày được tính bởi công thức $B(t) = 80 + 6 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ trong đó t là số giờ kể từ nửa đêm và $B(t)$ (mmHg) là huyết áp tâm trương.

- Tìm huyết áp tâm trương của người này lúc 6 giờ sáng và 12 giờ trưa.
- Theo công thức trên, người này có huyết áp tâm trương thấp nhất vào thời điểm nào trong ngày?

Bài 17. Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30° . Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Bài 18. Một quả bóng được ném xiên một góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) từ mặt đất với tốc độ v_0 (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

- (a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu 10 m/s và góc ném là 30° so với phương ngang.
- (b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là 10 m/s thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là 5 m?

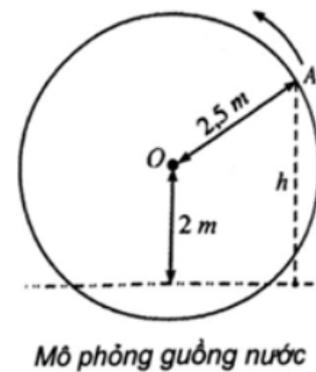
Bài 19. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- (a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?
- (b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

Bài 20. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó

$$y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.



- a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?
- b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

Bài 21. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hóa bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] \quad \text{với } t \in \mathbb{Z} \quad \text{và } 0 < t \leq 365.$$

- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Bài 22. Hội Lim (Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu.

Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình vẽ). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) với hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t - 1) \right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2022). Vào thời điểm t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m?

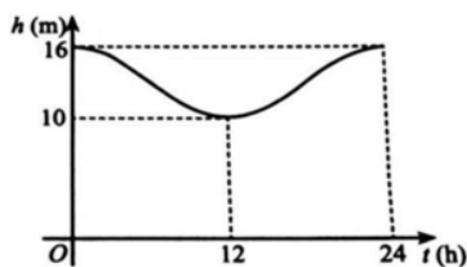


Bài 23. Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở Hình bên mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) với ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức

$$h = m + a \cos \left(\frac{\pi}{12}t \right)$$

với m, a là các số thực dương cho trước.

- Tìm m, a .
- Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là 11,5 m.



6 ÔN TẬP CHƯƠNG 1

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

❖ **Câu 1.** Biết $\sin a = -\frac{1}{2}$, giá trị của $\sin(\pi - a)$ là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 2.** Công thức nào sau đây đúng?

- (A) $\cos 2a = 2 \cos a$. (B) $\cos 2a = \cos a - \sin a$.
 (C) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$. (D) $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$.

❖ **Câu 3.** Phương trình $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ có nghiệm là

- (A) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 4.** Rút gọn biểu thức $T = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ ta được kết quả là

- (A) $T = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $T = \sin x$.
 (C) $T = \sqrt{3} \cos x$. (D) $T = \sin 2x$.

❖ **Câu 5.** Góc lượng giác $\frac{24\pi}{5}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

- (A) $\frac{13\pi}{5}$. (B) $-\frac{16\pi}{5}$. (C) $-\frac{\pi}{5}$. (D) $\frac{29\pi}{5}$.

❖ **Câu 6.** Hàm số $y = \cos x$ là hàm số

- (A) lẻ và tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 (B) chẵn và tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 (C) lẻ và tuần hoàn với chu kỳ π .
 (D) chẵn và tuần hoàn với chu kỳ π .

❖ **Câu 7.** Công thức nào sau đây đúng?

- (A) $\cos(\pi + \alpha) = \cos \alpha$. (B) $\cos \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.
 (C) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. (D) $\sin^2 2025\alpha + \cos^2 2025\alpha = 1$.

❖ **Câu 8.** Khẳng định nào dưới đây là sai?

- (A) $\sin(a - b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
 (B) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.
 (C) $\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a + b}{2} \right) \cos \left(\frac{a - b}{2} \right)$.
 (D) $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

❖ **Câu 9.** Góc lượng giác nào tương ứng với chuyển động quay $3\frac{1}{5}$ vòng ngược chiều kim đồng hồ?

- (A) $\frac{16\pi}{5}$. (B) $\left(\frac{16}{5}\right)^\circ$. (C) 1152° . (D) 1152π .

❖ **Câu 10.** Trong trường hợp nào dưới đây $\cos \alpha = \cos \beta$ và $\sin \alpha = -\sin \beta$?

- (A) $\beta = -\alpha$. (B) $\beta = \pi - \alpha$.
 (C) $\beta = \pi + \alpha$. (D) $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

❖ **Câu 11.** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos 2x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

- (A) $-\frac{\pi}{9}$. (B) $-\frac{5\pi}{3}$. (C) $-\frac{7\pi}{9}$. (D) $-\frac{13\pi}{9}$.

❖ **Câu 12.** Số nghiệm của phương trình $\tan x = 3$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là

- (A) 1 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 4 .

❖ **Câu 13.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 - \sin x$ lần lượt là

- (A) 3 và 1 . (B) 1 và 3 . (C) 4 và -4 . (D) 4 và 2 .

❖ **Câu 14.** Cho $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$. Khẳng định nào đúng?

- (A) $\cot \alpha > 0$. (B) $\cos \alpha > 0$. (C) $\sin \alpha > 0$. (D) $\tan \alpha > 0$.

❖ **Câu 15.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ là

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.
 (C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 16.** Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

- (A) $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$. (B) $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$.
 (C) $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$. (D) $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$.

❖ **Câu 17.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$ là

- (A) $y = \sin x$. (B) $y = \cos x$. (C) $y = \tan x$. (D) $y = \cot x$.

❖ **Câu 18.** Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng:

- (A) $(0; \pi)$. (B) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.
 (C) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. (D) $(-\pi; 0)$.

❖ **Câu 19.** Nghiệm của phương trình $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$ là

- (A) $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 20.** Nếu $\tan(a + b) = 3, \tan(a - b) = -3$ thì $\tan 2a$ bằng

- (A) 0. (B) $\frac{3}{5}$. (C) 1. (D) $-\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 21.** Nếu $\cos a = \frac{1}{4}$ thì $\cos 2a$ bằng:

- (A) $\frac{15}{16}$. (B) $\frac{7}{8}$. (C) $-\frac{15}{16}$. (D) $-\frac{7}{8}$.

❖ **Câu 22.** Nếu $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = -\frac{4}{5}$ thì $\cos(a + b) \cos(a - b)$ bằng:

- (A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

❖ **Câu 23.** Nếu $\sin a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ thì $\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $-\frac{2}{3}$. (D) $-\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 24.** Số nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là:

- (A) 5. (B) 9. (C) 10. (D) 11.

❖ **Câu 25.** Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là:

- (A) 10. (B) 6. (C) 5. (D) 11.

❖ **Câu 26.** Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là:

- (A) $-\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. (B) $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 (C) $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. (D) $-\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

❖ **Câu 27.** Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ trên đoạn $[0; \pi]$ là:

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

❖ **Câu 28.** Biểu diễn các góc lượng giác $\alpha = -\frac{5\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{25\pi}{3}, \delta = \frac{17\pi}{6}$ trên đường tròn lượng giác. Các góc nào có điểm biểu diễn trùng nhau?

- (A) β và γ . (B) α, β, γ . (C) β, γ, δ . (D) α và β .

❖ **Câu 29.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

- (A) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$ (B) $\cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha.$
 (C) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha.$ (D) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha.$

❖ **Câu 30.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

- (A) $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$
 (B) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$
 (C) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$
 (D) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

❖ **Câu 31.** Rút gọn biểu thức $M = \cos(a + b) \cos(a - b) - \sin(a + b) \sin(a - b)$, ta được:

- (A) $M = \sin 4a.$ (B) $M = 1 - 2 \cos^2 a.$
 (C) $M = 1 - 2 \sin^2 a.$ (D) $M = \cos 4a.$

❖ **Câu 32.** Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}.$
 (B) Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1].$
 (C) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ..
 (D) Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $2\pi.$

❖ **Câu 33.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm tuần hoàn?

- (A) $y = \tan x + x.$ (B) $y = x^2 + 1.$
 (C) $y = \cot x.$ (D) $y = \frac{\sin x}{x}.$

❖ **Câu 34.** Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-2\pi; \frac{5\pi}{2}]$?

- (A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 7.

❖ **Câu 35.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$ là:

- (A) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$
 (C) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

❖ **Câu 36.** Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \tan x.$

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$ (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$
 (C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$ (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

❖ **Câu 44.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- (A) $\sin(180^\circ - a) = -\cos a.$ (B) $\sin(180^\circ - a) = -\sin a.$
 (C) $\sin(180^\circ - a) = \sin a.$ (D) $\sin(180^\circ - a) = \cos a.$

❖ **Câu 45.** Biết $\sin x = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\cos^2 x$ bằng:

- (A) $\cos^2 x = \frac{1}{2}.$ (B) $\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
 (C) $\cos^2 x = \frac{1}{4}.$ (D) $\cos^2 x = \frac{3}{4}.$

❖ **Câu 46.** Biết $\cot x = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $\frac{4 \sin x + 5 \cos x}{2 \sin x - 3 \cos x}$ bằng:

- (A) $\frac{1}{17}.$ (B) $\frac{5}{9}.$ (C) 13. (D) $\frac{2}{9}.$

❖ **Câu 47.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

- (A) $\cos u + \cos v = 2 \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \cos \left(\frac{u-v}{2} \right).$
 (B) $\cos u - \cos v = 2 \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{v-u}{2} \right).$
 (C) $\sin u + \sin v = 2 \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) \cos \left(\frac{u-v}{2} \right).$
 (D) $\sin u - \sin v = 2 \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{u-v}{2} \right).$

❖ **Câu 48.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

- (A) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$ (B) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$
 (C) $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a.$ (D) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}.$

❖ **Câu 49.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos x}$ là:

- (A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$
 (C) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$ (D) $\mathbb{R}.$

❖ **Câu 50.** Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$
 (B) Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}.$
 (C) Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$
 (D) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\pi.$

❖ **Câu 51.** Hàm số nào dưới đây có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

- (A) $y = \cos x.$ (B) $y = \sin^3 x.$ (C) $y = \sin x.$ (D) $y = \tan x.$

❖ **Câu 52.** Giá trị của biểu thức $A = (2 \sin x - \cos x)^2 + (2 \cos x + \sin x)^2$ bằng

- (A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

❖ **Câu 53.** Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
 (B) Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
 (C) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
 (D) Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .

❖ **Câu 54.** Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số tuần hoàn.
 (B) Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số lẻ.
 (C) Hàm số $y = x \sin x$ là hàm số tuần hoàn.
 (D) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

❖ **Câu 55.** Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 (B) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 (C) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 (D) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

❖ **Câu 56.** Số nghiệm của phương trình $2 \cos x = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là:

- (A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

❖ **Câu 57.** Điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác của góc lượng giác có số đo -830° thuộc góc phần tư thứ mấy?

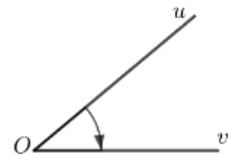
- (A) Góc phần tư thứ I. (B) Góc phần tư thứ II.
 (C) Góc phần tư thứ III. (D) Góc phần tư thứ IV.

❖ **Câu 58.** Tất cả các nghiệm của phương trình $\cot(x - 15^\circ) - \sqrt{3} = 0$ là

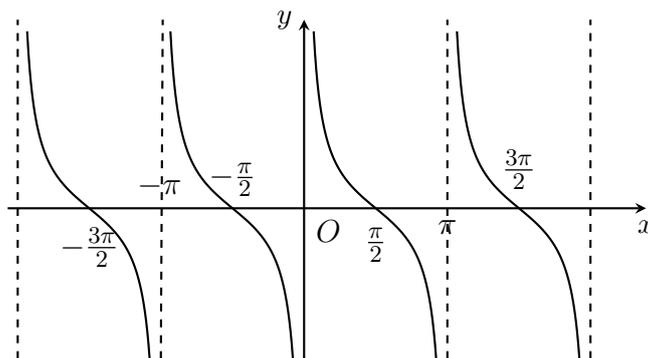
- (A) $x = 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = 75^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = 45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 59.** Cho góc hình học $\widehat{uOv} = 40^\circ$. Số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) như hình vẽ bên dưới bằng

- (A) -40° . (B) -140° . (C) 140° . (D) 40° .



❖ **Câu 60.** Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- (A) $y = \cot x$. (B) $y = \cos x$. (C) $y = \sin x$. (D) $y = \tan x$.

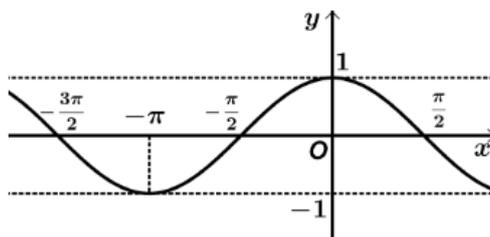
❖ **Câu 61.** Phương trình $\cos x = \cos \alpha^\circ$ có nghiệm là

- (A) $x = \alpha^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \alpha^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = \pm \alpha^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \pm \alpha^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

❖ **Câu 62.** Hàm số $y = \frac{\sin 2x}{\cot x - \sqrt{3}}$ có tập xác định là

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

❖ **Câu 63.** Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ trông hình vẽ, suy ra hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị dương khi

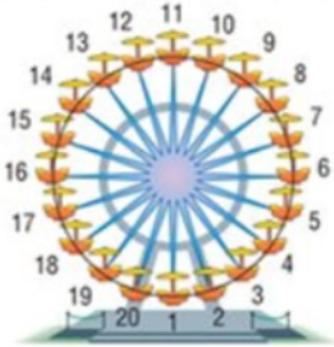


- (A) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. (B) $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
 (C) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$. (D) $x \in (-\pi; 0)$.

❖ **Câu 64.** Rút gọn biểu thức $\sin(a - 19^\circ) \cos(a + 11^\circ) - \sin(a + 11^\circ) \cos(a - 19^\circ)$ ta được

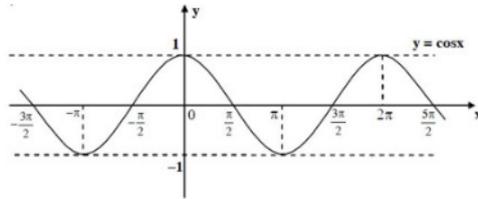
- (A) $\sin 2a$. (B) $\cos 2a$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 65.** Một trò chơi đu quay bánh xe có 20 ô xe chở khách (xem hình vẽ), khoảng cách từ tâm đu quay đến ô xe bằng 50 m. Các ô xe được thiết kế cân đối và đều nhau trên đường tròn, vòng quay ngược kim đồng hồ. Hỏi ô xe số 2 di chuyển đến vị trí ô xe số 8 thì đã di chuyển được quãng đường (đơn vị mét) gần nhất với số nào sau đây ?



- (A) 102 m . (B) 92, 45 m . (C) 96,5 m . (D) 94, 25 .

❖ **Câu 66.** Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- (A) $(0; \pi)$. (B) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 (C) $(\pi; 2\pi)$. (D) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$.

❖ **Câu 67.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Để tìm thời điểm mực nước trong kênh lớn nhất ta giải phương trình nào trong các phương trình sau đây:

- (A) $\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 12$. (B) $\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
 (C) $\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = -1$. (D) $\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

❖ **Câu 68.** Khẳng định nào **sai**?

- (A) $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. (B) $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$.
 (C) $\cos 6a = 1 - 6 \sin^2 a$. (D) $\cos 6a = 2 \cos^2 3a - 1$.

❖ **Câu 76.** Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- (A) $\cot \alpha = 2$. (B) $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. (C) $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$. (D) $\cot \alpha = \sqrt{2}$.

❖ **Câu 77.** Chiều cao $h(t)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$. Tại các thời điểm nào thì cabin đạt độ cao 40m?

- (A) $\begin{cases} t = -\frac{5}{6} + 20k & (k \in \mathbb{Z}, k \geq 1) \\ t = \frac{25}{3} + 50k & (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \end{cases}$
- (B) $\begin{cases} t = -\frac{25}{6} + 50k & (k \in \mathbb{Z}, k \geq 1) \\ t = \frac{25}{2} + 50k & (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} t = -\frac{15}{6} + 20k & (k \in \mathbb{Z}, k \geq 1) \\ t = \frac{25}{3} + 50k & (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \end{cases}$
- (D) $\begin{cases} t = -\frac{35}{6} + 20k & (k \in \mathbb{Z}) \\ t = \frac{25}{3} + 30k & \end{cases}$

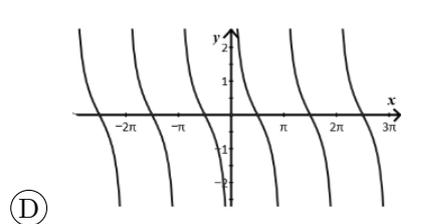
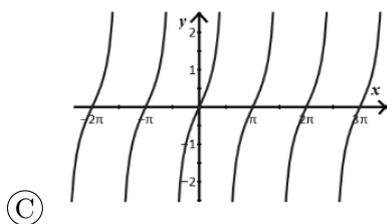
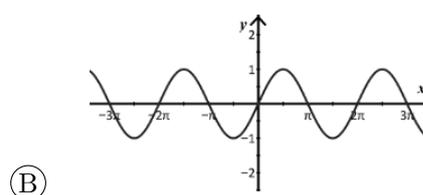
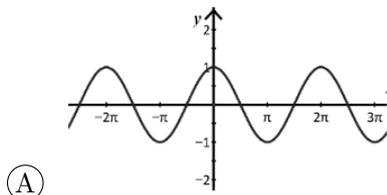
❖ **Câu 78.** Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là:

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- (C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

❖ **Câu 79.** Rút gọn biểu thức $y = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\sin x \cos x}$ ta được kết quả là:

- (A) $\cot 2x$. (B) $\tan 2x$. (C) $\cos 2x$. (D) $\cot x$.

❖ **Câu 80.** Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ là hình nào dưới đây?



2 Trắc nghiệm đúng sai

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $f(x) = \tan 2x - 1$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{8}$ bằng 0 . | | |
| B Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn . | | |
| C Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tập giá trị là $T = \mathbb{R}$. | | |
| D Hàm số $f(x)$ là hàm số tuần hoàn . | | |

❖ **Câu 2.** Cho phương trình lượng giác: $2 \sin x = \sqrt{2}$ (*).

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Phương trình tương đương với phương trình (*) là $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$. | | |
| B Phương trình (*) có nghiệm là $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. | | |
| C Phương trình (*) có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{4}$. | | |
| D Số nghiệm của phương trình (*) trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm . | | |

❖ **Câu 3.** Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S | Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|--|---|---|
| A $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. | | | C $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. | | |
| B $\tan \alpha = -\sqrt{3}$. | | | D $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. | | |

❖ **Câu 4.** Cho phương trình lượng giác: $\sin x = -\frac{1}{2}$ (*).

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A Phương trình tương đương với phương trình (*) là $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$. | | |
| B Phương trình (*) có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. | | |
| C Phương trình (*) có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$. | | |
| D Số nghiệm của phương trình (*) trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là ba nghiệm . | | |

❖ **Câu 5.** Cho hàm số $f(x) = \tan x + 2$. Khi đó

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi k \in \mathbb{Z}\}$. | | |
| B Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ. | | |
| C Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 1. | | |
| D $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$. | | |

❖ **Câu 6.** Cho phương trình $\cos\left(4x - \frac{3\pi}{8}\right) = -1$.

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A $x = \frac{11\pi}{32}$ là một nghiệm của phương trình đã cho. | | |
| B Tất cả nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi 4 điểm trên đường tròn lượng giác. | | |
| C Tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $\frac{\pi}{4}$. | | |
| D Phương trình đã cho có đúng 33 nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{19\pi}{2}\right)$. | | |

❖ **Câu 7.** Cho α, β là hai góc thoả mãn $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ và $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$.

| Phát biểu | Đ | S | Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|---|---|---|
| A $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. | | | C $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$. | | |
| B $\tan(\alpha - \beta) < \frac{1}{2}$. | | | D $\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{1}{64}$. | | |

❖ **Câu 8.** Số lượng (đơn vị: nghìn con) của một loài bướm ở một khu bảo tồn thiên nhiên được biểu diễn theo hàm số $P(t) = 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, $0 \leq t \leq 12$, với t tính theo tuần kể từ khi các nhà khoa học ước tính số lượng.

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Số lượng bướm ban đầu là 5 nghìn con. | | |
| B Số lượng bướm nhỏ nhất là 3 nghìn con. | | |
| C Số lượng bướm luôn dao động từ 1 nghìn con đến 5 nghìn con. | | |
| D Số lượng bướm lần đầu tiên chạm mức 4 nghìn con khi $t = 5$ tuần. | | |

❖ **Câu 9.** Cho phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = m + 1$ (*)

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Điều kiện có nghiệm của phương trình (*) là $-1 \leq m \leq 1$. | | |
| B Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm là -3 . | | |
| C Phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. | | |
| D Nghiệm dương bé nhất của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ là $\frac{\pi}{3}$. | | |

❖ **Câu 10.** Biết $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$, khi đó:

| Phát biểu | Đ | S | Phát biểu | Đ | S |
|------------------------------------|---|---|---|---|---|
| A $\tan x = \frac{12}{5}$. | | | C $\sin x < 0$. | | |
| B $\cot x = \frac{5}{12}$. | | | D $\sin x - \cos x = -\frac{12}{13}$. | | |

❖ **Câu 11.** Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$.

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. | | |
| B $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 2$. | | |
| C $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 3 \sin \alpha$. | | |
| D Biểu thức $E = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \tan(90^\circ - \alpha)} = \frac{-a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $a + b = 55$. | | |

❖ **Câu 12.** Cho phương trình $\frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} = 0$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Điều kiện xác định của phương trình là: $1 + \sin 3x \neq 0$. | | |
| B Với điều kiện phương trình có nghĩa: $\frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0$. | | |
| C Phương trình có một nghiệm $x = \frac{5\pi}{6}$. | | |
| D Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình có dạng $\frac{a\pi}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$; $(a; b) = 1$. Khi đó $a^2 + 2b = 12$. | | |

❖ **Câu 13.** Biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, khi đó:

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A $\cos x < 0$ và $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. | | |
| B $\sin(\pi - x) = -\sin x$. | | |
| C $\sin 2x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. | | |
| D Giá trị của biểu thức $A = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(13\pi + x) - 3\tan(x - 5\pi) = \frac{3}{\sqrt{2}}$. | | |

❖ **Câu 14.** Cho hàm số $y = \sin x$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A Chu kì tuần hoàn của hàm số là $\mathcal{T} = 2\pi$. | | |
| B Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ là $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. | | |
| C Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. | | |
| D Tập giá trị của hàm số là $T = [-2; 2]$. | | |

❖ **Câu 15.** Cho hàm số $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Tập xác định của hàm số đã cho là $[-1; 1]$. | | |
| B Hàm số đã cho là hàm số lẻ. | | |
| C Hàm số đã cho là hàm tuần hoàn với chu kì $T = \pi$. | | |
| D Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$ bằng 1. | | |

❖ **Câu 16.** Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. | | |
| B $\sin 31^\circ \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \sin 31^\circ = \sin 19^\circ$. | | |
| C Cho $\cos x = \frac{4}{5}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ là $-\frac{24}{25}$. | | |

| | | |
|--|--|--|
| <p>D Cho $\frac{\sin^4 a}{a} + \frac{\cos^4 a}{a} = \frac{1}{a+b}$. Giá trị của biểu thức $Q = \frac{\sin^8 a}{a^3} + \frac{\cos^8 a}{a^3} = \frac{1}{a^3+b^3}$</p> | | |
|--|--|--|

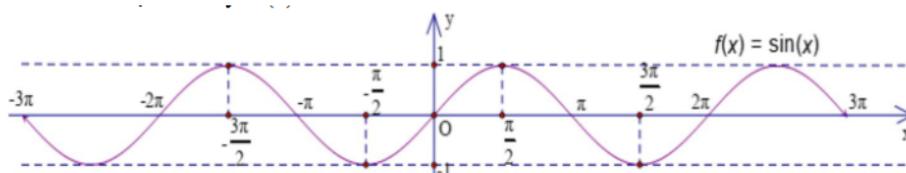
❖ **Câu 17.** Xét hàm số $f(x) = \tan x$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng . | | |
| B Hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì π . | | |
| C Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. | | |
| D Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$. | | |

❖ **Câu 18.** Mỗi mệnh đề sau đúng hay sai?

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Hàm số $y = x + \cos x$ là hàm số chẵn . | | |
| B Hàm số $y = 3 \sin x$ có tập giá trị là $T = [-3; 3]$. | | |
| C Hàm số $y = \frac{\tan x + 2}{\sin x}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. | | |
| D Hàm số $y = -2 \cos^2 x + \sin x + 1$ có GTNN là $-\frac{9}{8}$ và GTLN là 2 . | | |

❖ **Câu 19.** Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ



| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1$. | | |
| B Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-3\pi; \pi]$. | | |
| C Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. | | |
| D Trên đoạn $[-3\pi; 3\pi]$ phương trình $\sin x = -\frac{1}{3}$ có 6 nghiệm phân biệt . | | |

❖ **Câu 20.** Cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

| Phát biểu | Đ | S | Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|---|---|---|
| A $1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{1}{9}$. | | | C $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$. | | |
| B $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. | | | D $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$. | | |

❖ **Câu 21.** Một người đi xe đạp với vận tốc không đổi, biết rằng bánh xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây, đường kính của bánh xe đạp là 860 (mm).

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Trong 1 giây bánh xe quay được 2 vòng. | | |
| B Góc mà bánh xe quay được 1 giây là 792° . | | |
| C Trong 60 giây bánh xe quay được số vòng là 120 vòng. | | |
| D Quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút là 103 200 (mm). | | |

❖ **Câu 22.** Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Với mọi số thực α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó: $\cos \alpha > 0$. | | |
| B Biết $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5 + 12\sqrt{3}}{26}$. | | |
| C Với mọi số thực α , ta có $\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$. | | |
| D Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Ta tính được $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$. | | |

❖ **Câu 23.** Cho biểu thức $P = \frac{\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x}{\cos x + 1}$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A Rút gọn P ta được $P = \sin 2x$. | | |
| B Tại $x = \frac{\pi}{4}$ thì $P = 2$. | | |
| C Điều kiện xác định của biểu thức P là $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. | | |
| D Tồn tại 3 giá trị của $x \in [0; 2\pi]$ để $P = 0$. | | |

❖ **Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3} \tan 2x$.

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. | | |
| B Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn. | | |
| C Phương trình $f(x) = 3$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. | | |
| D Trên đường tròn lượng giác có 4 điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $f(x) = 3$. | | |

❖ **Câu 25.** Cho $\tan x = \frac{5}{12}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A $\cos x = \frac{12}{13}$. | | |
| B $\cos 2x = \frac{119}{169}$. | | |
| C $\tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{7}{17}$. | | |
| D Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 3m. Từ vị trí quan sát A cao 1m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc α . Biết chiều cao của tòa nhà là 19m, khoảng cách từ vị trí quan sát A đến tòa nhà là 5m. Khi đó $\tan \alpha = \frac{7}{17}$. | | |

❖ **Câu 26.** Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 3$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A Giá trị $f(0) = 4; f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2$. | | |
| B $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. | | |
| C $f(x) = \cos 2x + 3$. | | |
| D Tập giá trị của hàm số đã cho là $T = [2; 4]$. | | |

❖ **Câu 27.** Cho các hàm số lượng giác $f(x) = 2 \cot x$ và $g(x) = \cos 2x$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A Hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\mathcal{T} = \pi$. | | |
| B Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. | | |

| | | |
|--|--|--|
| C Hàm số $g(x)$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy . | | |
| D Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. | | |

❖ **Câu 28.** Cho hai hàm số $f(x) = \frac{3}{2} + 3 \cos x$ và $g(x) = \sin x + \cos x$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). | | |
| B Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\frac{9}{2}$. | | |
| C Hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ. | | |
| D Có 4 giá trị $x \in [0; 2\pi]$ sao cho $f(x) = 3g(x)$. | | |

❖ **Câu 29.** Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,6 \cos(0,5\pi t) + 3$.

| Phát biểu | Đ | S |
|--|---|---|
| A Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là 3 m. | | |
| B Độ sâu lớn nhất của nước là 3,6 m. | | |
| C Chu kì của hàm số $h(t)$ là 4π . | | |
| D Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,3 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn thì cần di chuyển trong khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ. | | |

❖ **Câu 30.** Cho phương trình $\sin 2x + \cos 3x = 0$.

| Phát biểu | Đ | S |
|---|---|---|
| A $x = \frac{3\pi}{10}$ là một nghiệm của phương trình. | | |
| B Phương trình tương đương với $\sin 2x = \cos(-3x)$. | | |
| C Phương trình tương đương với $\sin 2x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. | | |
| D Tổng các nghiệm của phương trình trong $[-3\pi; 3\pi]$ bằng 0. | | |

❖ **Câu 31.** Cho phương trình lượng giác $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

| Phát biểu | Đ | S |
|-----------|---|---|
|-----------|---|---|

| | | | |
|----------|---|--|--|
| A | Phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right)$. | | |
| B | Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}; x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$. | | |
| C | Trên $[0; \pi]$ phương trình có 4 nghiệm. | | |
| D | Tổng các nghiệm của phương trình trên $[0; \pi]$ bằng $\frac{49\pi}{18}$. | | |

3 Tự luận

Bài 1. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\sin \alpha > 0$; $\sin \beta = \frac{3}{5}$, $\beta \in \left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$.

Hãy tính: $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\sin 2\beta$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$.

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

- $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$
- $\frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$
- $\frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha}$
- $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$

Bài 3. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

- $A = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
- $B = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$
- $C = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$
- $D = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

- $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
- $\sin x + \sin 2x = 0$.
- $\cot 3x = \tan \frac{2\pi}{7}$.
- $\tan 3x \tan x = 1$.
- $\sin 5x + \cos 5x = 0$.
- $\cos 3x - \cos 5x = \sin x$.
- $2 \cos^2 x + \cos 2x = 2$.
- $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- $y = \sin x - \cos x$.
- $y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.
- $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.
- $y = \cos 2x + 2 \cos x - 1$.

Bài 6. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos \frac{2x}{x-1}$.

c) $y = \frac{1}{\cos x + \sin 2x}$.

b) $y = \frac{1}{\cos x - \cos 3x}$.

d) $y = \tan x + \cot x$.

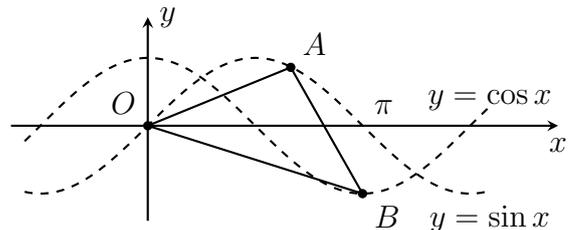
Bài 7. Tìm các giá trị của m để phương trình $(\sin x - 1)(2 \cos^2 x - (2m + 1) \cos x + m) = 0$ có đúng 4 nghiệm thực thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

Bài 8. Cho phương trình $\cos 3x = 2m^2 - 3m + 1$ (*). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

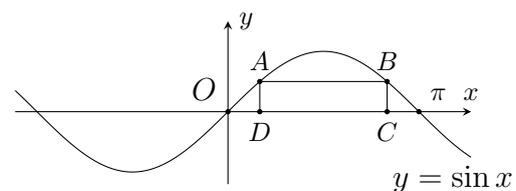
Bài 9. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x - \cos 2x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ có dạng $-\frac{a\pi}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.

Bài 10. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều, độ sâu L (tính theo đơn vị mét) của mực nước trong kênh theo thời gian t (giờ) được cho bởi công thức: $L = 3 \sin \left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + 14$. Thời gian ngắn nhất để mực nước của kênh cao nhất là $t = \frac{a}{b}$ (giờ) với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P = ab$.

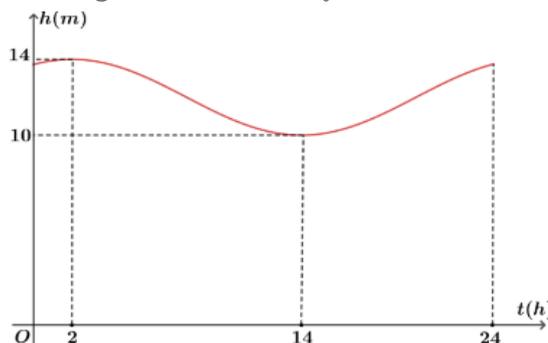
Bài 11. Giả sử A, B là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ sao cho tam giác OAB nhận điểm $G \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ làm trọng tâm. Tính diện tích S của tam giác OAB , biết $x_A \in [0; 2\pi]$.



Bài 12. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC .



Bài 13. Sự thay đổi chiều cao của mực nước tại một cảng biển trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm được mô tả bằng đồ thị dưới đây.



Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) với $0 \leq t \leq 24$ được cho bởi công thức $h(t) = a + b \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{6}\right)$ với a, b là các số thực dương cho trước. Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là 11 m.

Bài 14. Cho phương trình $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4$ (*). Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình (*) trên đoạn $[0; \pi]$, khi đó $\frac{4S}{\pi}$ bằng bao nhiêu?

Bài 15. Cho hai góc α và β thỏa mãn $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$ và $\tan \alpha = 2 \tan \beta$. Tính $\sin(\alpha - \beta)$, kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Bài 16 (THPT Hà Huy Giáp - Cần Thơ). Để dệt nên một tấm vải thổ cẩm truyền thống của người phụ nữ dân tộc Thái phải trải qua nhiều công đoạn. Trong đó có công đoạn quay tơ kéo sợi. Trung bình một người quay được 5 vòng trong 36 giây. Chọn chiều quay của vòng kéo sợi là chiều dương. Biết rằng bán kính của vòng quay là 10 cm và tốc độ quay mỗi vòng bằng nhau. Chiều dài sợi dây mà người đó làm được trong 5 phút là bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 17. Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng 60 cm, ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm A, B, C lần lượt tương ứng với vị trí các số 2, 9, 4. Độ dài cung nhỏ AB bằng bao nhiêu centimét (làm tròn đến hàng phần mười).



Bài 18 (THPT Việt Nam - Ba Lan). Tổng các nghiệm của phương trình $\frac{\cos 3x}{\sqrt{3} \tan x + 1}$ trên đoạn $[-50\pi; 100\pi]$ là $m\pi$. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

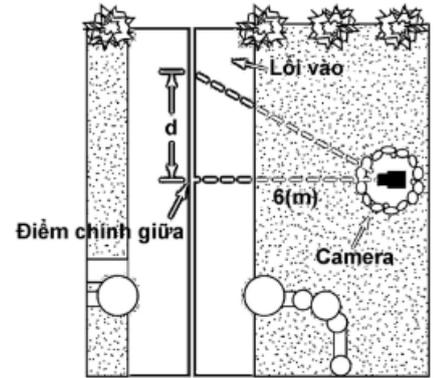
Bài 19 (THPT Việt Nam - Ba Lan). Cho $\sin a + \cos a = \frac{1}{3}$ với $-\frac{\pi}{2} < a < 0$. Biết $A = \sin a - \cos a = -\frac{\sqrt{m}}{n}$ (n là số nguyên tố). Tính $m + n$.

Bài 20 (THPT Việt Nam - Ba Lan). Tính tổng các giá trị của m để phương trình $(2 \cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Bài 21 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai). Biết rằng tổng các nghiệm của phương trình lượng giác: $\sin 2x + \cos 2x - \sin x + 3 \cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0; 6\pi]$ là $\frac{a\pi}{b}$, với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Hãy tính $a + b$.

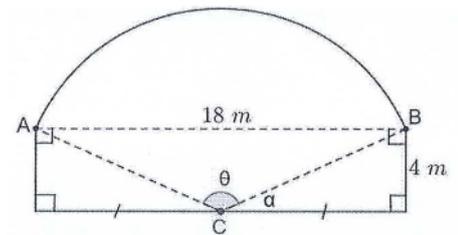
Bài 22. Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C \sin \omega t$ và $f_2(t) = C \sin (\omega t + \alpha)$. Hai sóng này giao thoa với nhau tạo nên một âm kết hợp có phương trình $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Khi $C = 30, \alpha = \frac{\pi}{3}$ thì phương trình của sóng âm kết hợp là $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$, trong đó k là biên độ dao động, φ là pha ban đầu. Biên độ dao động của sóng âm kết hợp có dạng $k = a\sqrt{b}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

Bài 23 (THPT Nguyễn Văn Trỗi - Khánh Hòa). Một camera an ninh giám sát lối vào một tòa nhà. Giả sử vẽ một đường thẳng ở trung tâm của lối vào, camera được đặt bên tay phải và cách đường thẳng 6 (m) như hình vẽ. Tại thời điểm $t = 0$ (s), camera hướng về điểm chính giữa. Gọi d (tính bằng mét) là khoảng cách từ điểm chính giữa đến điểm camera đang quét dọc lối đi ở giây thứ t thì khoảng cách này được mô phỏng bởi công thức $d = 6 \tan \left(\frac{\pi}{30} t \right)$. Xét $-15 \leq t \leq 15$ tìm vị trí camera quét sau 5 giây. Điều gì xảy ra khi $t = 15$?

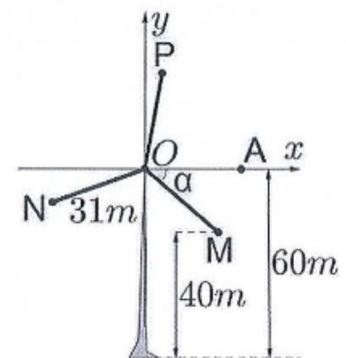


Bài 24 (THPT Dĩ An). Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 14 m tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương bắn và phương ngang). Nếu tăng góc ngắm đó lên hai lần thì vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 29 m. Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường theo đơn vị mét.

Bài 25 (THPT Dĩ An). Một bức tường của một ngôi nhà có dạng như Hình bên, trong đó cung AB là một cung của đường tròn tâm C , bán kính AC . Tính diện tích của bức tường theo đơn vị mét vuông (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Bài 26 (THPT Dĩ An). Trong Hình bên, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 40 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc lượng giác $(\widehat{OA, OM})$ là α . Tính chiều cao của điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Bài 27. Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

- Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?
- Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Bài 28. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3 \sin \left(1,5t + \frac{\pi}{3} \right)$.

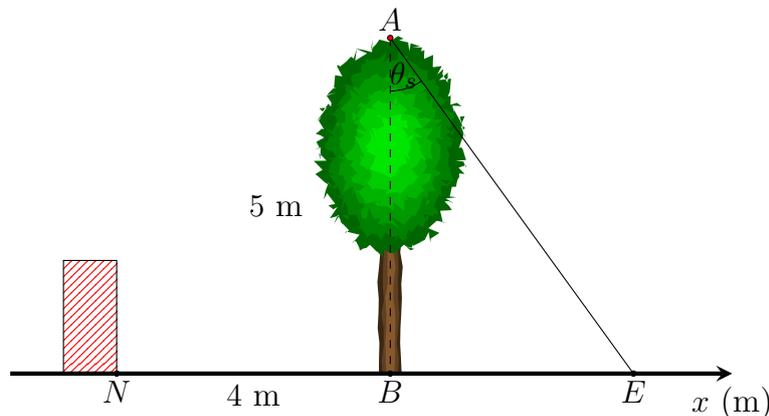
Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
- Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.

Bài 29. Trong hình vẽ, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12) \text{ rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

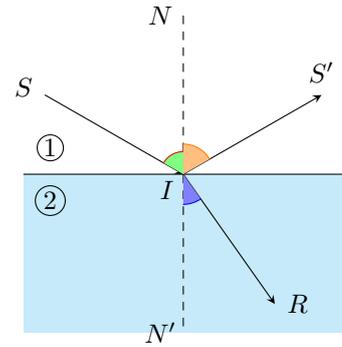


- Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .
- Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài 30. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như hình bên. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng với chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.



Bài 31. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/ huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hóa bởi hàm số

$$p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$$

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimet thủy ngân) và thời gian t tính theo phút.

- Tìm chu kỳ của hàm số $p(t)$.
- Tìm số nhịp tim mỗi phút.
- Tìm số chỉ huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Bài 32. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức

$$P(t) = 38 + 12 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right],$$

trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên.

- Tính số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí vào các ngày thứ Hai và thứ Năm của tuần thứ hai.
- Ngày nào trong tháng mà số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 50 mg?

tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường.

Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$$

trong đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

- a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 mmHg.
- b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 mmHg.