

CHUYÊN ĐỀ 6: MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

BÀI 1: MẶT NÓN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được định nghĩa mặt nón tròn xoay, hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay.
- + Nắm được các công thức tính diện tích xung quanh của hình nón, diện tích đáy của hình nón, diện tích toàn phần của hình nón, thể tích của khối nón.

❖ Kỹ năng

- + Nhận biết được một khối tròn xoay là khối nón.
- + Tính được các yếu tố liên quan đến khối nón như độ dài đường sinh, chiều cao, góc ở đỉnh, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thiết diện, thể tích của khối nón...
- + Giải được các bài toán nâng cao liên quan đến khối nón như bài toán cực trị, bài toán thực tế...

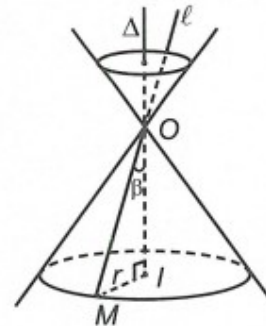
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

MẶT NÓN TRÒN XOAY

Trong mặt phẳng (P) . Cho hai đường thẳng Δ và ℓ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay đỉnh O gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản là mặt nón). Khi đó:

- Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt nón.
- Đường thẳng ℓ được gọi là đường sinh của mặt nón.
- Góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.

Nhận xét: Nếu M là một điểm tùy ý của mặt nón (N) khác với điểm O thì đường thẳng OM là đường sinh của mặt nón đó.

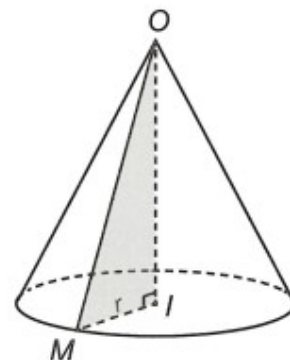


HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Cho $\triangle OIM$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

Khi đó:

- Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.
- Hình tròn tâm I , bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.



Chú ý: Nếu cắt mặt nón (N) bởi hai mặt phẳng song song (P) và (Q) với (P) qua O và vuông góc với Δ thì phần mặt nón (N) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) và hình tròn giao tuyến của (Q) và mặt nón (N) là hình nón.

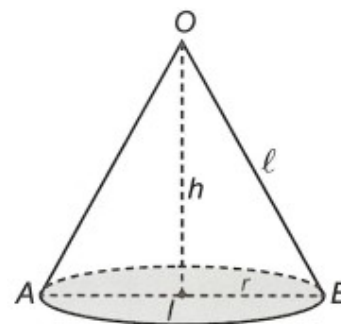
KHỐI NÓN TRÒN XOAY

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó ta gọi là khối nón tròn xoay hay ngắn gọn là khối nón.

Các khái niệm tương tự như hình nón.

Xét khối nón có hình biểu diễn là hình bên thì ta có nhận xét:

- Nếu mp (P) chứa OI thì thiết diện của mp (P) và khối nón là một hình tam giác cân tại O .
- Nếu mp (P) vuông góc với OI (không chứa O) thì thiết diện của mp (P) và khối nón (nếu có) là một hình tròn. Hình tròn thiết diện này có diện tích lớn nhất khi mp (P) đi qua I .



Chú ý: Vẽ hình biểu diễn hình nón hay khối nón ta thường vẽ như hình bên.

CÔNG THỨC CẦN NHỚ

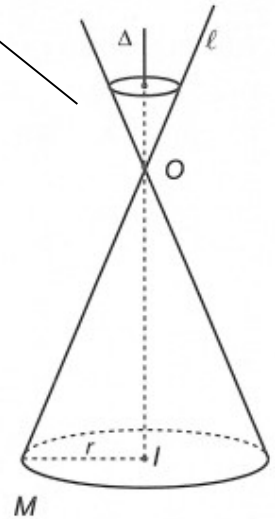
Hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và độ dài đường sinh là ℓ thì có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi r \ell$.
- Diện tích đáy (hình tròn): $S_{ht} = \pi r^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$.
- Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

MẶT NÓN

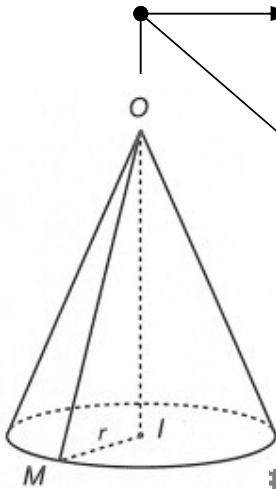
MẶT NÓN TRÒN XOAY

Trong mặt phẳng (P) . Cho hai đường thẳng Δ và ℓ cắt nhau tại O và tạo thành góc β . Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay đỉnh O gọi là mặt nón tròn xoay.



HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Cho $\triangle OMI$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay.



KHOẢNG NÓN TRÒN XOAY

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó ta gọi là khối nón tròn xoay hay ngắn gọn là khối nón.

CÁC CÔNG THỨC

Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = \pi r l$$

Diện tích đáy

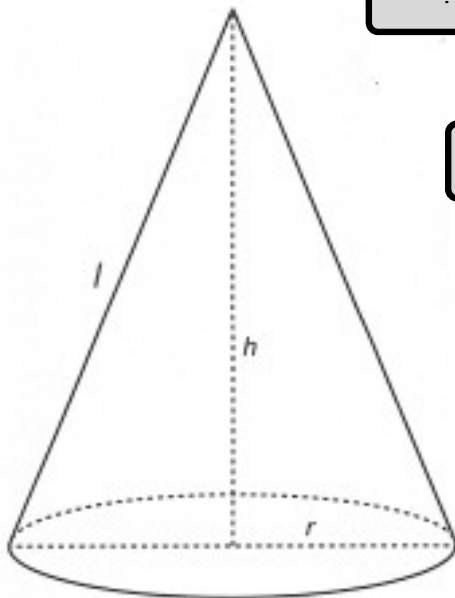
$$S_{ht} = \pi r^2$$

Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$$

Thể tích

$$V = \frac{1}{3} S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Câu hỏi lý thuyết về mặt nón, hình nón, khối nón

Phương pháp giải

Cần nắm vững lý thuyết trọng tâm về mặt nón, hình nón, khối nón ở trên.

Ví dụ: Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính r là

A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $\pi r^2 h$. C. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. D. $2\pi r^2 h$.

Hướng dẫn giải

Vì thể tích khối nón $V_n = \frac{1}{3}S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(S_{ht} : diện tích hình tròn đáy).

Chọn A.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho đường thẳng l cắt và không vuông góc với Δ quay quanh Δ thì ta được

- A. khối nón tròn xoay. B. mặt trụ tròn xoay.
C. mặt nón tròn xoay. D. hình nón tròn xoay.

Hướng dẫn giải

Cho đường thẳng l cắt và không vuông góc với Δ quay quanh Δ thì ta được mặt nón tròn xoay.

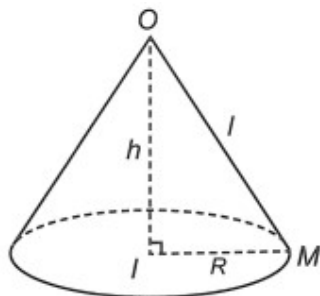
Chọn C.

Nếu không nắm kỹ lý thuyết thì dễ nhầm với đáp án A hoặc đáp án D.

Ví dụ 2: Gọi l , h , R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của một hình nón. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $l^2 = hR$. B. $\frac{1}{l^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}$. C. $l^2 = h^2 + R^2$. D. $R^2 = h^2 + l^2$.

Hướng dẫn giải



Lưu ý: Tam giác OIM vuông tại I nên ta sử dụng định lý Pitago suy ra đáp án.

Theo định nghĩa hình nón, ta có tam giác OIM vuông tại I.

Do đó $OM^2 = OI^2 + IM^2$, suy ra $l^2 = h^2 + R^2$.

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho hình nón (N) có chiều cao h , độ dài đường sinh ℓ , bán kính đáy r . Kí hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh của khối nón (N). Công thức nào sau đây là đúng?

- A. $S_{xq} = \pi r h$. B. $S_{xq} = 2\pi r \ell$. C. $S_{xq} = 2\pi r^2 h$. D. $S_{xq} = \pi r \ell$.

Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$. Khi quay tứ diện đó quanh trục AB có bao nhiêu hình nón khác nhau được tạo thành?

- A. Một. B. Hai.
C. Không có hình nón nào. D. Ba.

Câu 3: Cho hình nón có diện tích xung quanh là S_{xq} và bán kính r . Công thức nào sau đây dùng để tính đường sinh ℓ của hình nón đã cho.

- A. $\ell = \frac{S_{xq}}{\pi r}$. B. $\ell = \frac{2S_{xq}}{\pi r}$. C. $\ell = 2\pi S_{xq} r$. D. $\ell = \frac{S_{xq}}{2\pi r}$.

Câu 4: Cho hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng R , chiều cao bằng h , độ dài đường sinh bằng ℓ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\ell = \sqrt{R^2 - h^2}$. B. $R = \ell^2 + h^2$. C. $h = \sqrt{R^2 - \ell^2}$. D. $\ell = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Dạng 2: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện của hình nón

Phương pháp giải

Nắm vững các công thức về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, diện tích đáy. Biết sử dụng các kết quả của phần kiến thức quan hệ song song, quan hệ vuông góc, các hệ thức lượng trong tam giác... để áp dụng vào tính toán.

Ví dụ: Tính diện tích xung quanh của khối nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân diện tích bằng 2?

- A. $S = 2\sqrt{2}\pi$. B. $S = 4\pi$.
C. $S = 2\pi$. D. $S = 4\sqrt{2}\pi$.

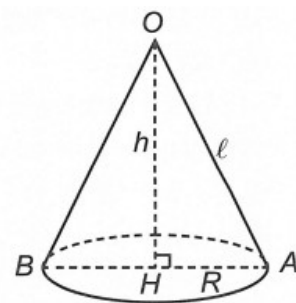
Hướng dẫn giải

Tam giác OAB vuông cân diện tích bằng 2

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} OA^2 &= 2 \\ \Rightarrow OA &= OB = 2 \\ AB &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ \Rightarrow h &= R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Suy ra $S_{xq} = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}\pi$.

Chọn A.



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cắt một hình nón bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích toàn phần của hình nón đó.

- A. $6\pi a^2$. B. $24\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. $12\pi a^2$.

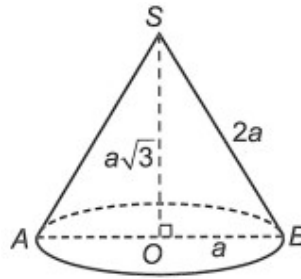
Hướng dẫn giải

Ta có $h = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $\ell = 2a$, $r = a$.

Diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{\text{tp}} = \pi r \ell + \pi r^2 = \pi a \cdot 2a + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

Chọn C.



Lưu ý: Diện tích tam giác

đều cạnh x là: $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ và

độ dài chiều cao là:

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Ở bài toán này $x = 2a$.

Ví dụ 2: Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy, diện tích đáy của hình nón bằng 9π . Độ dài đường cao của hình nón bằng

- A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

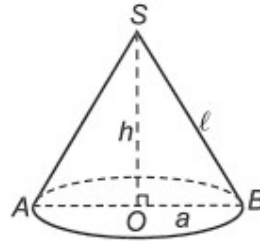
Hướng dẫn giải

Gọi r, ℓ, h lần lượt là bán kính đường tròn đáy, đường sinh, chiều cao của hình nón đã cho.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \pi r^2 = 9\pi \\ \ell = 2r \end{cases}$ nên $\begin{cases} r = 3 \\ \ell = 6 \end{cases}$.

Lại có $h = \sqrt{\ell^2 - r^2}$ do đó $h = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$.

Chọn A.



Ví dụ 3: Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng 1. Mặt phẳng (α) qua đỉnh S của hình nón đó cắt đường tròn đáy tại M, N . Tính diện tích tam giác SMN , biết góc giữa (α) và đáy hình nón bằng 60° .

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

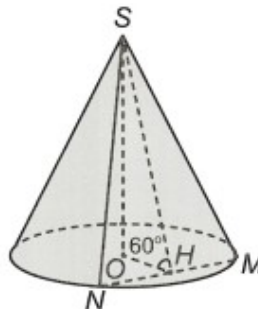
Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm đường tròn đáy, H là trung điểm của MN .

Ta có MN là giao tuyến của đường tròn đáy và mặt phẳng (α) , lại có $OH \perp MN, SH \perp MN$.

Do đó góc giữa (α) và đáy hình nón là

$$\widehat{SHO} = 60^\circ.$$



Lưu ý: Tam giác SMN là tam giác cân tại S và

$$SM = SN = 1.$$

Vì thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông có cạnh góc

$$\text{vuông bằng } 1 \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SOH \text{ vuông tại } O \text{ có } \sin 60^\circ = \frac{SO}{SH} \Rightarrow SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Khi đó } MN = 2\sqrt{SN^2 - SH^2} = 2\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } SMN \text{ là } S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn C.

Ví dụ 4: Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO , A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } \widehat{SAO} = 30^\circ, \widehat{SAB} = 60^\circ. \text{ Độ dài đường sinh của hình nón theo } a$$

bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AB , dựng $OH \perp SI$.

$$\text{Ta có } OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Do $\widehat{SAB} = 60^\circ$ nên tam giác SAB đều.

Suy ra $SA = SB = AB$.

Mặt khác

$$\widehat{SAO} = 30^\circ \Rightarrow SO = SA \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} SA$$

$$\text{và } OA = SA \cdot \cos 30^\circ = \frac{SA\sqrt{3}}{2}.$$

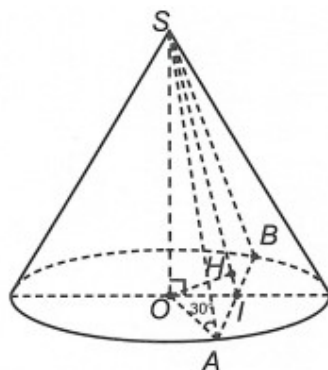
Xét tam giác SOI ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA^2 - AI^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)SA^2} + \frac{1}{\left(\frac{SA\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}SA\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{6}{SA^2} \Leftrightarrow SA = OH\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{6} = a\sqrt{2}.$$

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O bán kính bằng $2a$



Lưu ý:

• Ta có: $OH \perp SI$ (1)

$$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI)$$

$$\Rightarrow AB \perp OH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$OH \perp (SAB)$, do đó

$$d(O; (SAB)) = OH.$$

• Có thể đặt $SA = x$.

và độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có chu vi bằng $2(1+\sqrt{5})a$. Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (P) là

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $d = \frac{a}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử thiết diện là tam giác SAB , khi đó ta có

$$SA + SB + AB = 2(1 + \sqrt{5})a$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{5} + a\sqrt{5} + AB = 2(1 + \sqrt{5})a$$

$$\Leftrightarrow AB = 2a.$$

Gọi E là trung điểm AB , ta có $AB \perp SE$, mặt khác $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SOE)$.

Kẻ $OH \perp SE$ tại H , ($H \in SE$).

Ta thấy $OH \perp AB$ vì $OH \subset (SOE) \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

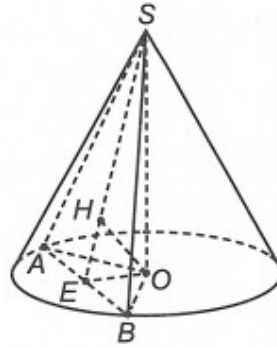
Vậy khoảng cách từ S đến (P) là OH (hay $d(O; (P)) = OH$).

$$EB = \frac{1}{2}AB = a, OB = R = 2a, OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a,$$

$$OH = \frac{OS \cdot OE}{\sqrt{OS^2 + OE^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

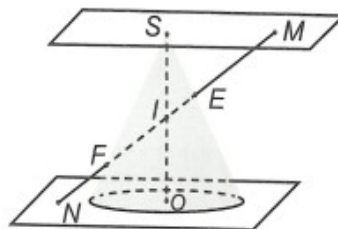
Vậy $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**



$$\text{Do: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OS \cdot OE}{\sqrt{OS^2 + OE^2}}$$

Ví dụ 6: Cho hình nón tròn xoay nằm giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) như hình vẽ. Kẻ đường cao SO của hình nón và gọi I là trung điểm của SO . Lấy $M \in (P), N \in (Q), MN = a$ và đi qua I cắt mặt nón tại E và F đồng thời tạo với SO một góc β . Biết góc giữa đường cao và đường sinh của hình nón bằng 45° . Độ dài đoạn EF là



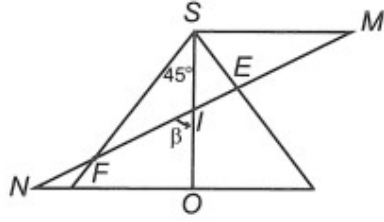
A. $EF = 2a$.

B. $EF = -\frac{a}{2} \tan 2\beta$.

C. $EF = -a \tan 2\beta$.

D. $EF = -2a \tan 2\beta$.

Hướng dẫn giải



Lưu ý:

$$S_{\Delta SFI} + S_{\Delta SEI} = S_{\Delta SFE} \quad (*)$$

$$S_{\Delta SFI} = \frac{1}{2} SF \cdot SI \cdot \sin 45^\circ$$

$$S_{\Delta SEI} = \frac{1}{2} SE \cdot SI \cdot \sin 45^\circ$$

$$S_{\Delta SFE} = \frac{1}{2} SF \cdot SE \cdot \sin 90^\circ$$

Thay vào (*) ta được

$$SI = \sqrt{2} \frac{SE \cdot SF}{SE + SF}.$$

Xét tam giác NIO có $OI = NI \cdot \cos \beta = \frac{a}{2} \cos \beta$, $NO = NI \cdot \sin \beta = \frac{a}{2} \sin \beta$

Xét tam giác SEF vuông tại S có

$$\widehat{SEF} = \widehat{ESM} + \widehat{SME} = 45^\circ + 90^\circ - \beta = 135^\circ - \beta.$$

$$SF = SE \cdot \tan \widehat{SEF} = SE \cdot \tan (135^\circ - \beta) = SE \cdot \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1}.$$

Vì SI là độ dài đường phân giác trong góc $\widehat{FSE}$ nên

$$SI = \sqrt{2} \cdot \frac{SE \cdot SF}{SE + SF} \Leftrightarrow \frac{a}{2} \cos \beta = \sqrt{2} \frac{SE \tan (135^\circ - \beta)}{1 + \tan (135^\circ - \beta)}$$

$$\Leftrightarrow SE = \frac{a \left[1 + \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1} \right] \cos \beta}{2\sqrt{2} \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1}} = \frac{a \sin \beta}{\sqrt{2} (1 + \tan \beta)}$$

Do đó

$$EF = \frac{SE}{\cos \widehat{SEF}} = \frac{SE}{\cos (135^\circ - \beta)} = \frac{a \sin \beta}{(1 + \tan \beta)(-\cos \beta + \sin \beta)} = -\frac{a}{2} \tan 2\beta.$$

Chọn B.

Ví dụ 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S , có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$.

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của tam giác ABC , khi đó $SO \perp (ABC)$.

Hình nón đỉnh S , có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường sinh là SA , bán kính đường tròn đáy là OA .

Gọi H là trung điểm của BC thì

$$\widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{SHO} = 60^\circ.$$

Tam giác ABC đều và O là tâm của tam giác đều nên

$$OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$OA = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác SOH vuông tại O và có $\widehat{SHO} = 60^\circ$ nên

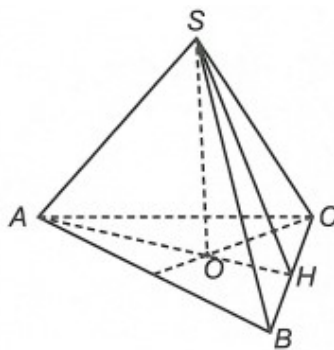
$$SO = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác SOA vuông tại O nên $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$

Diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{xq} = \pi r \ell = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}.$$

Chọn D.



Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối

nón đó có dạng bằng $\frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{b} + c)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b > 1$. Giá trị của bc là

- A. $bc = 5$. B. $bc = 8$. C. $bc = 15$. D. $bc = 7$.

Câu 2: Một tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2$. D. $\sqrt{3}\pi a^2$.

Câu 3: Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình nón đã cho là

- A. $a\sqrt{5}$. B. $3a\sqrt{2}$. C. $3a$. D. $5a$.

Câu 4: Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó là

- A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{6}$. D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 5: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50 cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy bằng

A. $10\sqrt{2}$ cm.

B. $50\sqrt{2}$ cm.

C. 20 cm.

D. 25 cm.

Câu 6: Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

B. a .

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 7: Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là

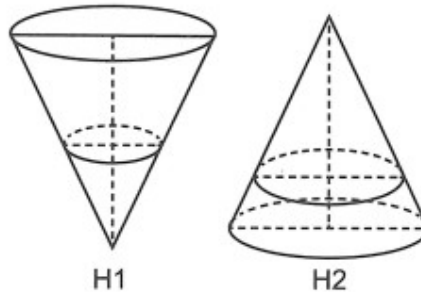
A. $\sqrt{5}a$.

B. $3a$.

C. $2\sqrt{2}a$.

D. $\frac{8a}{3}$.

Câu 8: Một cái phễu có dạng hình nón chiều cao của phễu là 30 cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 15 cm (hình H1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình H2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần với giá trị nào sau đây?



A. 1,553 cm.

B. 1,306 cm.

C. 1,233 cm.

D. 15 cm.

Dạng 3: Tính thể tích khối nón, bài toán cực trị

Phương pháp giải

Ví dụ: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Thể tích V của khối nón đã cho là

A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$.

B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$.

C. $V = 3\pi a^3$.

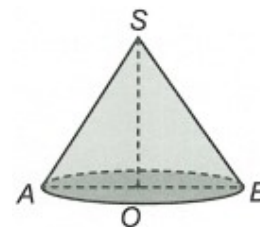
D. $V = \pi a^3$.

Hướng dẫn giải

Nhìn vào công thức tính thể tích khối nón

$$V_n = \frac{1}{3} S_{xt} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

ta thấy cần xác định chiều cao và diện tích đáy (bán kính đáy) của khối nón. Đối với bài toán cực trị ta thường tính toán đưa đại lượng cần tìm cực trị phụ thuộc vào một biến sau đó dùng đánh giá (sử dụng



$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO.$$

bất đẳng thức, khảo sát hàm số...) để tìm ra kết quả.

Ta có $\widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$
 $\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO = OA\sqrt{3}.$

Lại có

$$S_{xq} = \pi R \ell = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi OA \cdot \sqrt{OA^2 + SO^2} = 6\pi a^2$$

$$\Rightarrow OA\sqrt{OA^2 + 3OA^2} = 6a^2 \Rightarrow 2OA^2 = 6a^2$$

$$\Rightarrow OA = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = 3a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3.$$

Chọn C.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 45^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ, AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quay

tam giác ABC xung quanh cạnh BC ta được khối tròn xoay có thể tích V bằng

A. $V = \frac{\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}$

B. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$

C. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{8}$

D. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 105^\circ}$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = 1 \\ BC = \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A .

Ta có $AH \cdot BC = AB \cdot AC \cdot \sin 105^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2}.$

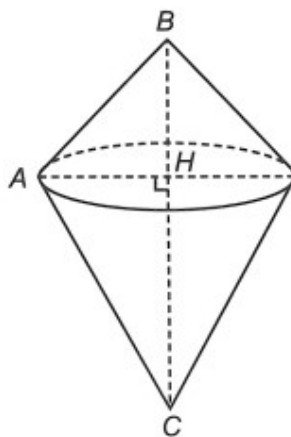
Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}.$$

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Hình nón (N) có đỉnh

A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Thể tích V của khối nón (N) là



Lưu ý: V chính là tổng thể tích của hai khối nón: Khối nón có chiều cao BH đường sinh AB và khối nón có chiều cao CH và đường sinh AC .

A. $V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{27}$ B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{27}$ C. $V = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{9}$ D. $V = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$

Hướng dẫn giải

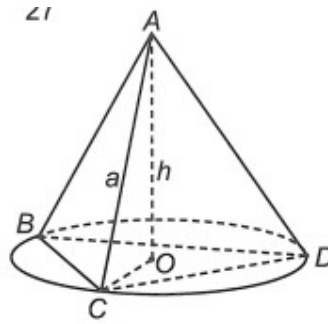
Gọi O là tâm của tam giác đều BCD .

Ta có $AO = h, OC = r$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra

$$h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}.$$



Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}.$

Chọn D.

Ví dụ 3: Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng 60° . Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) theo một thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2. Thể tích khối nón (N) là

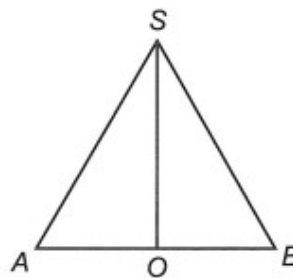
A. $V = 3\sqrt{3}\pi.$ B. $V = 4\sqrt{3}\pi.$ C. $V = 3\pi.$ D. $V = 6\pi.$

Hướng dẫn giải

Tam giác SAB đều vì có $SA = SB$ và

$\widehat{ASB} = 60^\circ$. Tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle SAB$ là trọng tâm tam giác. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là

$$r = \frac{2}{3}SO = 2 \Leftrightarrow SO = 3.$$



Mà $SO = SA \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow SA = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.$

Vậy bán kính đường tròn của khối nón là $R = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 3\pi.$

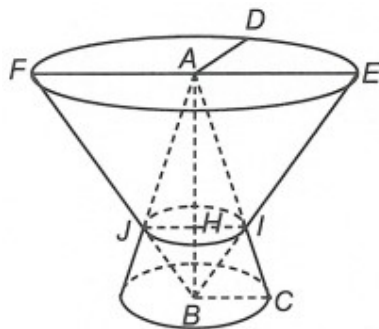
Chọn C.

Ví dụ 4: Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B . Biết $BC = a, AB = a\sqrt{3}, AD = 3a$. Quay các tam giác ABC

và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của hai khối tròn xoay đó bằng:

- A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. B. $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. D. $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$

Hướng dẫn giải



Khi quay tam giác ABD quanh AB ta được khối nón đỉnh B có đường cao BA , đáy là đường tròn bán kính $AE = 3$ cm. Gọi $I = AC \cap BE$, $IH \perp AB$, tại H .

Phần chung của 2 khối nón khi quay tam giác ABC và tam giác ABD quanh AB là 2 khối nón đỉnh A và đỉnh B có đáy là đường tròn bán kính IH .

Ta có $\triangle IBC$ đồng dạng với $\triangle IEA \Rightarrow \frac{IC}{IA} = \frac{BC}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow IA = 3IC$.

Mặt khác $IH \parallel BC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{IH}{BC} = \frac{AI}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow IH = \frac{3}{4}BC = \frac{3a}{4}$.

Gọi V_1 ; V_2 lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A và B có đáy là hình tròn tâm H .

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi IH^2 \cdot AH; \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi IH^2 \cdot BH$$

$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} IH^2 \cdot AB \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9a^2}{16} \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16} \pi.$$

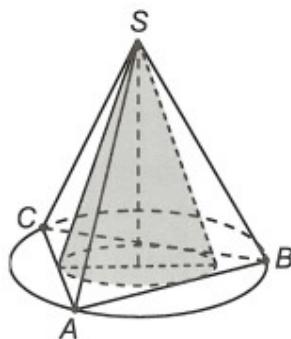
Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

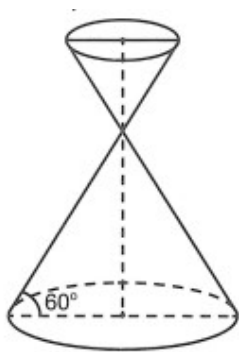
Hai hình nón có cùng chiều cao nên tỉ số thể tích bằng tỉ số diện tích mặt đáy. Vì tam giác ABC đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{2}{3}$ đường cao của tam giác, bán kính đường tròn nội tiếp bằng $\frac{1}{3}$ đường cao của tam giác.



$$\text{Suy ra } \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}.$$

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho một đồng hồ cát gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° như hình bên dưới. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi (cm^3)$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần dưới là bao nhiêu?



- A. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{27}$. D. $\frac{1}{64}$.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là x, y ($x > y$).

Suy ra chiều cao của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là $x\sqrt{3}, y\sqrt{3}$.

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \begin{cases} x\sqrt{3} + y\sqrt{3} = 30 \\ \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot x\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi y^2 \cdot y\sqrt{3} = 1000\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10\sqrt{3} \\ x^3+y^3=1000\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{20\sqrt{3}}{3}, y=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Do hai hình nón đồng dạng nên tỉ số cần tính bằng $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Chọn B.

Ví dụ 7: Trong tất cả các hình nón có độ dài đường sinh bằng ℓ . Hình nón có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi\ell^3\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{2\pi\ell^3\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{\pi\ell^3\sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{2\pi\ell^3\sqrt{3}}{27}$.

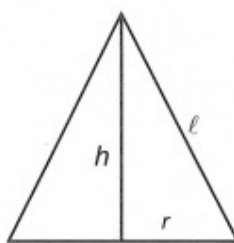
Hướng dẫn giải

Gọi h ($0 < h < \ell$) là chiều cao hình nón, suy ra

$$\text{bán kính } r = \sqrt{\ell^2 - h^2}.$$

Suy ra thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\ell^2 h - h^3) = \frac{1}{3}\pi f(h).$$



Xét hàm $f(h) = \ell^2 h - h^3$ trên $(0; \ell)$.

$$f'(h) = \ell^2 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{\ell}{\sqrt{3}} \\ h = -\frac{\ell}{\sqrt{3}} (\text{không thỏa mãn}) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta được

h	0	$\frac{\ell}{\sqrt{3}}$	ℓ
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$			

Ta thấy $\max f(h) = f\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\ell^3}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{2\pi\ell^3\sqrt{3}}{27}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow h = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$.

Chọn D.

Ví dụ 8: Trong các hình nón cùng có diện tích toàn phần bằng S . Hình nón có thể tích lớn nhất khi (r, ℓ) lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón)

- A. $\ell = 3r$. B. $\ell = 2\sqrt{2}r$. C. $\ell = r$. D. $\ell = 2r$.

Hướng dẫn giải

Ta có $S = \pi r \ell + \pi r^2 \rightarrow \ell = \frac{S - \pi r^2}{\pi r}$.

Thể tích

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{\ell^2 - r^2} = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{\frac{(S - \pi r^2)^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = \frac{1}{3} \sqrt{S(Sr^2 - 2\pi r^4)}.$$

Lập bảng biến thiên cho hàm $f(r) = Sr^2 - 2\pi r^4$ trên $(0; +\infty)$, ta thấy

hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \rightarrow \ell = 3r$.

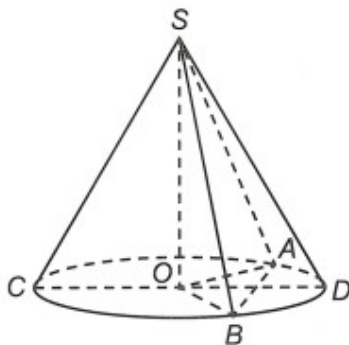
Lưu ý: điều kiện của biến khi khảo sát hàm.

Chọn A.

Ví dụ 9: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O . Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân với cạnh đáy bằng a và có diện tích là a^2 . Gọi A, B là hai điểm bất kỳ trên đường tròn (O) . Thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{12}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Hướng dẫn giải



Tam giác cân SCD , có $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CD \cdot SO \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} a \cdot SO \rightarrow SO = 2a$.

Khối chóp $S.OAB$ có chiều cao $SO = 2a$ không đổi nên để thể tích lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác OAB lớn nhất.

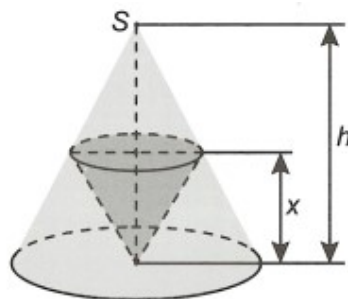
Mà $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \widehat{AOB}$ (với r là bán kính đường

tròn mặt đáy hình nón). Do đó để $S_{\Delta OAB}$ lớn nhất khi $\sin \widehat{AOB} = 1$. Khi đó

$$V_{\max} = \frac{a^3}{12}.$$

Chọn C.

Ví dụ 10: Cho hình nón (N_1) có đỉnh S , chiều cao h . Một hình nón (N_2) có đỉnh là tâm của đáy (N_1) và có đáy là một thiết diện song song với đáy của (N_2) như hình vẽ.

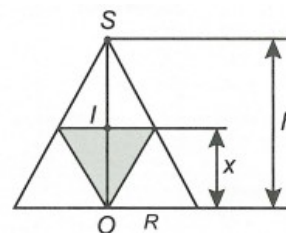


Khối nón (N_2) có thể tích lớn nhất khi chiều cao x bằng

- A. $\frac{h}{2}$. B. $\frac{h}{3}$. C. $\frac{2h}{3}$. D. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Xét mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình vẽ. Với O, I lần lượt là tâm đáy của hình nón $(N_1), (N_2)$; R, r lần lượt là các bán kính của hai đường tròn đáy của $(N_1), (N_2)$.



Ta có $\frac{SI}{SO} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{r}{R} \rightarrow r = \frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón (N_2) là

$$V_{(N_2)} = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 (h-x)^2}{h^2} x = \frac{\pi R^2}{3h^2} \cdot x(h-x)^2.$$

Xét hàm $f(x) = x(h-x)^2 = x^3 - 2hx^2 + h^2x$ trên $(0; h)$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 4hx + h^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = h \\ x = \frac{h}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có

x	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; h)$ tại $x = \frac{h}{3}$.

Chọn B.

Ví dụ 11: Xét các hình nón có đường sinh với độ dài đều bằng 10cm.

Chiều cao của hình nón có thể tích lớn nhất là

- A. $5\sqrt{3}$ cm. B. $10\sqrt{3}$ cm. C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm. D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Hướng dẫn giải

Xét hình nón có chiều cao là x cm và bán

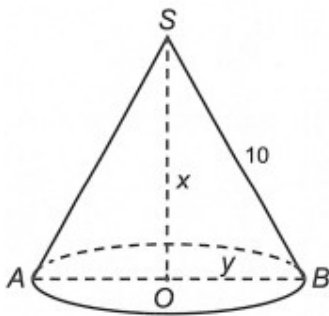
kinh đáy là y cm (x, y dương).

Ta có $x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2$, ta có

điều kiện $x, y \in (0; 10)$.

Thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (100 - x^2) x.$$



Xét hàm số $f(x) = (100 - x^2)x = 100x - x^3$, $x \in (0; 10)$;

$$f'(x) = 100 - 3x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Ta thấy V lớn nhất khi $f(x)$ lớn nhất tại $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Chọn D.

Ví dụ 12: Giả sử đồ thị hàm số $y = (m^2 + 1)x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$ có 3 điểm

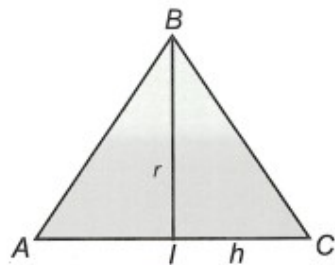
cực trị là A, B, C mà $x_A < x_B < x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh

AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn

xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(4; 6)$. B. $(2; 4)$. C. $(-2; 0)$. D. $(0; 2)$.

Hướng dẫn giải



$$y' = 4(m^2 + 1)x^3 - 4mx = 4x[(m^2 + 1)x^2 - m].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x[(m^2 + 1)x^2 - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}} (m > 0) \end{cases}.$$

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A < x_B < x_C$) là

$$A\left(-\sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}}; -\frac{m^2}{m^2 + 1} + m^2 + 1\right); B(0; m^2 + 1);$$

$$C\left(\sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}}; -\frac{m^2}{m^2 + 1} + m^2 + 1\right).$$

Quay $\triangle ABC$ quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích là

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi BI^2 \cdot IC = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{m^2}{m^2 + 1}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{\frac{m^9}{(m^2 + 1)^5}}.$$

Xét hàm $f(m) = \frac{m^9}{(m^2 + 1)^5}.$

Ta có $f'(m) = \frac{m^8(9 - m^2)}{(m^2 + 1)^6}; f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 3 (m > 0).$

Ta có bảng biến thiên

m	0	3	$+\infty$
$f'(m)$	+	0	-
$f(m)$			

Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m = 3$.

Chọn B.

Ví dụ 13: Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6$ cm, $AC = 3$ cm. Gọi M điểm di động trên cạnh BC sao cho MH vuông góc với AB tại H . Cho tam giác AHM quay quanh cạnh AH tạo nên một hình nón, thể tích lớn nhất của hình nón được tạo thành là

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{8\pi}{3}$. D. 4π .

Hướng dẫn giải

Đặt $AH = x(cm)$, $0 < x < 6$.

Khi đó $BH = 6 - x(cm)$.

Xét tam giác BHM vuông tại H .

Ta có $\tan \widehat{HBM} = \frac{HM}{BH}$

$\Rightarrow HM = BH \cdot \tan \widehat{HBM} = (6 - x) \cdot \tan \widehat{HBM}$.

Mà $\tan \widehat{HBM} = \tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Do đó $HM = (6 - x) \cdot \frac{1}{2}$.

Thể tích của khối nón tạo thành khi tam giác AHM quay quanh cạnh AH

là $V = \frac{1}{3} AH \cdot \pi \cdot HM^2 = \frac{\pi}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{4} (6 - x)^2 = \frac{\pi}{12} (x^3 - 12x^2 + 36x)$ (1).

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ với $0 < x < 6$, ta có

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ với $0 < x < 6$

x	0	2	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		32	

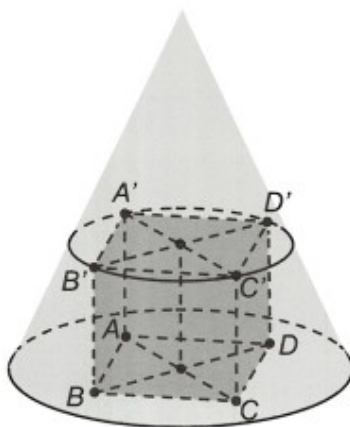
Từ (1) và bảng biến thiên ta có thể tích lớn nhất của khối nón tạo thành là

$V = \frac{\pi}{12} \cdot 32 = \frac{8\pi}{3}$.

Chọn C.

Ví dụ 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1.

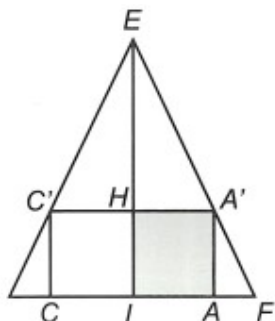
Gọi (N) là một hình nón có tâm đường tròn đáy trùng với tâm của hình vuông $ABCD$, đồng thời các điểm A', B', C', D' nằm trên các



đường sinh của hình nón như hình vẽ. Thể tích khối nón (N) có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{9\pi}{8}$. D. $\frac{9\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải



Xét phần mặt cắt qua trục hình nón và đi qua mặt phẳng $(AA'C'C)$, kí hiệu như hình vẽ. Với I, H lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$ và đỉnh A' nằm trên đường sinh EF của hình nón.

Hình lập phương có thể tích bằng 1 nên $AA' = HI = 1, A'H = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $EH = x (x > 0)$. Khi đó, ta có

$$\frac{EH}{EI} = \frac{A'H}{FI} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2FI} \rightarrow FI = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x+1}{x} \right) = r.$$

Thể tích khối nón (N) là

$$V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 EI = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 (x+1) = \frac{\pi (x+1)^3}{6x^2}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x^3}$.

Lập bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$			

Ta được $\min_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{27}{4}$ tại $x = 2$. Suy ra $\min V_{(N)} = \frac{9\pi}{8}$.

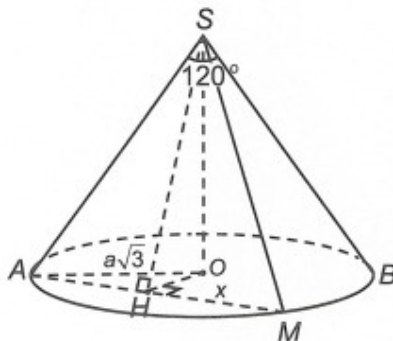
Chọn C.

Ví dụ 15: Một hình nón đỉnh S bán kính đáy $R = a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là

120° . Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác. Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

- A. $\sqrt{3}a^2$. B. $2a^2$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. D. $2\sqrt{3}a^2$.

Hướng dẫn giải



Giả sử ΔSAM là thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình nón.

Gọi $AM = x$ ($0 < x \leq 2a\sqrt{3}$).

Gọi H là trung điểm của AM

$\Rightarrow OH \perp AM \Rightarrow AM \perp (SOH) \Rightarrow AM \perp SH$.

$$\text{Vì } \widehat{ASB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} SA = \frac{AO}{\sin 60^\circ} = 2a \\ SO = \frac{AO}{\tan 60^\circ} = a \end{cases}.$$

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

$$S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2} AM \cdot SH = \frac{1}{2} x \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Ta có

$$S' = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \right] = \frac{16a^2 - 2x^2}{8\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}.$$

x	0	$2a\sqrt{2}$	$+\infty$
S'	+	0	-
S		$2a^2$	

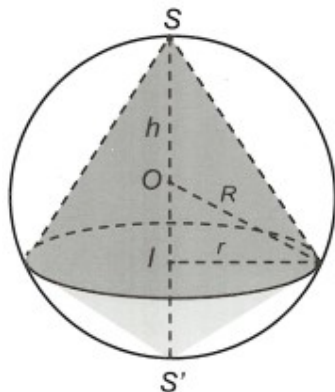
$\Rightarrow S_{\max} = 2a^2$. **Chọn B.**

Ví dụ 16: Cho mặt cầu (S) bán kính R . Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S) . Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là

- A. $\frac{32\pi R^3}{81}$. B. $\frac{32R^3}{81}$. C. $\frac{32\pi R^3}{27}$. D. $\frac{32R^3}{27}$.

Hướng dẫn giải

Ta có thể tích khối nón đỉnh S lớn hơn hoặc bằng thể tích khối nón đỉnh S' . Do đó chỉ cần xét khối nón đỉnh S có bán kính đường tròn đáy là r và đường cao là $SI = h$ với $h \geq R$. Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} h S_{(C)} = \frac{1}{3} h \cdot \pi \cdot r^2 \\ &= \frac{1}{3} h \cdot \pi \left[R^2 - (h - R)^2 \right] \\ &= \frac{1}{3} \pi (-h^3 + 2h^2 R). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(h) = -h^3 + 2h^2 R$ với $h \in [R; 2R]$.

Ta có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.

$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0 \text{ (loại) hoặc } h = \frac{4R}{3}.$$

Bảng biến thiên

h	R	$\frac{4R}{3}$	$2R$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$	R^3	$\frac{32R^3}{27}$	0

Ta có $\max f(h) = \frac{32}{27} R^3$ tại $h = \frac{4R}{3}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{32}{27} R^3 = \frac{32}{81} \pi R^3 \text{ khi } h = \frac{4R}{3}.$$

Chọn A.

Chú ý: Sau khi tính được

$$V = \frac{1}{3} \pi (-h^3 + 2h^2 R) \text{ ta có}$$

thể làm như sau:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi (-h^3 + 2h^2 R) \\ &= \frac{1}{3} \pi h^2 (2R - h) \\ &= \frac{\pi}{6} h h (4R - 2h) \\ &\leq \frac{\pi}{6} \left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3} \right)^3 \\ &= \frac{32\pi R^3}{81}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ

$$\text{Khi } h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}.$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho một hình nón đỉnh S có chiều cao bằng 8 cm bán kính đáy bằng 6 cm. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa đáy được một hình nón (N) đỉnh S có đường sinh bằng 4 cm. Thể tích của khối nón (N) là

A. $V = \frac{768}{125} \pi \text{ cm}^3$. B. $V = \frac{786}{125} \pi \text{ cm}^3$. C. $V = \frac{2304}{125} \pi \text{ cm}^3$. D. $V = \frac{2358}{125} \pi \text{ cm}^3$

Câu 2: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng a và diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi a^2$. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ nội tiếp đáy của khối nón (N) và đỉnh S trùng với đỉnh của khối nón (N) .

A. $V = \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$. B. $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $V = 2\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 3: Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết rằng $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° . Thể tích V của khối nón đã cho là

A. $V = 3\pi a^3$. B. $V = 9\pi a^3$. C. $V = 27\pi a^3$. D. $V = 12\pi a^3$.

Câu 4: Cắt hình nón S bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân, cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón bằng

A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Câu 5: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Thể tích V của khối nón đã cho là

A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. C. $V = 3\pi a^3$. D. $V = \pi a^3$.

Câu 6: Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng 60° . Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) theo một thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2. Tính thể tích khối nón (N) .

A. $V = 3\sqrt{3}\pi$. B. $V = 4\sqrt{3}\pi$. C. $V = 3\pi$. D. $V = 6\pi$.

Câu 7: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Thể tích V của khối nón (N) là

A. $V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{27}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{27}$. C. $V = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{9}$. D. $V = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$.

Câu 8: Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Gọi V_1 , V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu nội tiếp ngoại tiếp và nội tiếp hình nón đã cho. Tính $\frac{V_1}{V_2}$

A. 4. B. 2. C. 8. D. 16.

Câu 9: Với một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính R , phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón. Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là x . Tìm x để thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất.

- A. $x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$. B. $x = \frac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$. C. $x = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$. D. $x = \frac{\pi R\sqrt{6}}{3}$.

Câu 10: Hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu có bán kính R cho trước.

- A. $h = \frac{3R}{2}$. B. $h = \frac{5R}{2}$. C. $h = \frac{5R}{4}$. D. $\frac{4R}{3}$.

Câu 11: Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S) . Thể tích khối nón (H) là V_1 ; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2 . Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

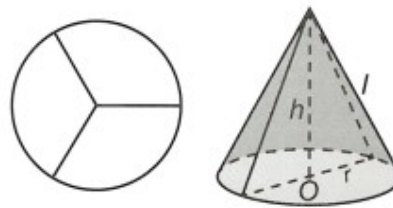
- A. $\frac{81}{32}$. B. $\frac{76}{32}$. C. $\frac{32}{81}$. D. $\frac{8}{19}$.

Dạng 4: Bài toán thực tế về hình nón, khối nón

Phương pháp giải

Sử dụng tổng hợp các kiến thức từ các dạng toán 1, 2, và 3 để giải các bài toán thực tế về hình nón hay khối nón.

Ví dụ: Người thợ gia công của một cơ sở chế tạo lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



- A. $V = \frac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. B. $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.
C. $V = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. D. $V = \frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít

Hướng dẫn giải

Đổi 60 cm = 6 dm.

Đường sinh của hình nón tạo thành là $\ell = 6$ dm.

Chu vi đường tròn ban đầu là $C = 2\pi R = 12\pi$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón tạo thành.

Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành là

$$2\pi r = \frac{2\pi \cdot 6}{3} = 4\pi \text{ (dm)} \Rightarrow r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \text{ (dm)}.$$

Đường cao của khối nón tạo thành là

$$h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}.$$

Thể tích của mỗi phễu là

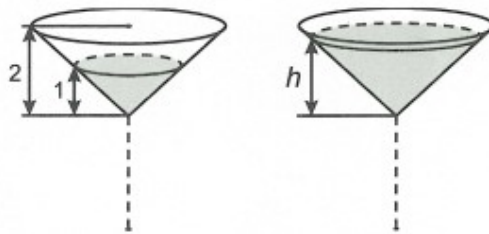
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}$$

$$= \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \text{ (lít)}.$$

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 2dm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 1dm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01dm).



- A. $h \approx 1,73$ dm. B. $h \approx 1,89$ dm. C. $h \approx 1,91$ dm. D. $h \approx 1,41$ dm.

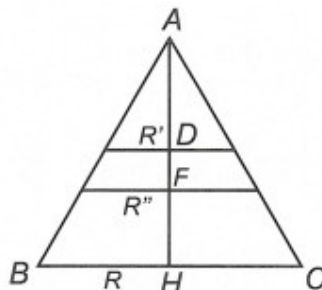
Hướng dẫn giải

Có chiều cao hình nón khi đựng đầy nước ở ly thứ nhất $AH = 2$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ nhất sau khi đổ sang ly thứ hai $AD = 1$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ hai sau khi đổ sang ly thứ hai $AF = h$.

Theo Ta-lét ta có



$$\frac{R'}{R} = \frac{AD}{AH} = \frac{1}{2}, \quad \frac{R''}{R} = \frac{AF}{AH} = \frac{h}{2} \text{ suy ra } R' = \frac{R}{2}, \quad R'' = \frac{Rh}{2}.$$

Thể tích phần nước ban đầu ở ly thứ nhất $V = 2\pi R^2$.

Thể tích phần nước ở ly thứ hai $V_1 = \pi R''^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{4}$.

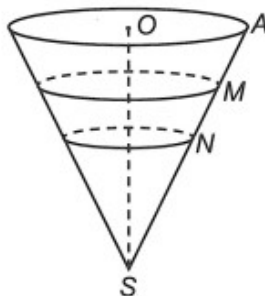
Thể tích phần nước còn lại ở ly thứ nhất $V_2 = \frac{\pi R^2}{4}$.

$$\text{Mà } V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2 h^3}{4} + \frac{\pi R^2}{4} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow \frac{h^3}{4} + \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7} = 1,91.$$

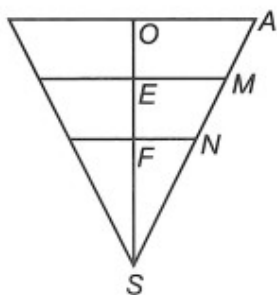
Chọn C.

Ví dụ 2: Một bể nước lớn của khu công nghiệp có phần chứa nước là một khối nón đỉnh S phía dưới (hình vẽ), đường sinh $SA = 27$ mét. Có một lần lúc bể chứa đầy nước, người ta phát hiện nước trong bể không đạt yêu cầu về vệ sinh nên lãnh đạo khu công nghiệp cho thoát hết nước để làm vệ sinh bể chứa. Công nhân cho thoát nước ba lần qua một lỗ ở đỉnh S . Lần thứ nhất khi mực nước tới điểm M thuộc SA thì dừng, lần thứ hai khi mực nước tới điểm N thuộc SA thì dừng, lần thứ ba mới thoát hết nước. Biết rằng lượng nước mỗi lần thoát bằng nhau. Tính độ dài đoạn MN .

- A. $27(\sqrt[3]{2} - 1)$ m.
- B. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{4} - 1)$ m.
- C. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2} - 1)$ m.
- D. $9\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2} - 1)$ m.



Hướng dẫn giải



Ta gọi V_1, V_2, V lần lượt là thể tích khối nón có đường sinh là SN, SM, SA .

Do $\triangle SEM$ đồng dạng với $\triangle SOA$ nên ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SE}{SO} = \frac{EM}{OA}$.

$$\text{Lại có } \frac{V_2}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot EM^2 \cdot SE}{\frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SA} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{SA}{SM}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{SM}{27}\right)^3 \Leftrightarrow SM = \sqrt[3]{13122}$$

$$\text{Tương tự } \frac{V_1}{V} = \left(\frac{SN}{SA}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{SN}{27}\right)^3 \Leftrightarrow SN = \sqrt[3]{6561}.$$

$$\text{Vậy } MN = SM - SN = \sqrt[3]{13122} - \sqrt[3]{6561}.$$

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 4

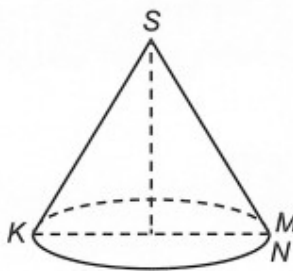
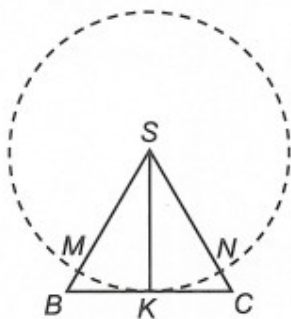
Câu 1: Cho một tấm bìa có hình dạng tam giác vuông, biết b và c là độ dài hai cạnh góc vuông của tấm bìa. Trên tấm bìa đó ta chọn cạnh huyền làm trục rồi quay xung quanh tấm bìa đó (kể cả điểm trong) với trục tạo thành một khối tròn xoay. Thể tích V khối tròn xoay sinh ra bởi tấm bìa đó là

$$\text{A. } V = \frac{b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}. \quad \text{B. } V = \frac{\pi b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}. \quad \text{C. } V = \frac{2\pi b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}. \quad \text{D. } V = \frac{\pi b^2 c^2}{3\sqrt{2(b^2 + c^2)}}.$$

Câu 2: Cho khối gỗ hình trụ có bán kính 3 cm và chiều cao 6 cm, đáy là hai hình tròn tâm O và O' . Đục khối gỗ này tạo ra hai khối nón có đỉnh nằm trên OO' và đáy trùng với hai đáy của khối gỗ sao cho góc ở đỉnh bằng 60° (như hình vẽ) và $OI = x$ ($3\sqrt{2} < x < 3\sqrt{3}$). Giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích xung quanh hai hình nón đã đục bằng

$$\text{A. } 12\pi \text{ cm}^2. \quad \text{B. } 14\pi \text{ cm}^2. \quad \text{C. } 44\pi \text{ cm}^2. \quad \text{D. } 72\pi \text{ cm}^2.$$

Câu 3: Một tấm tôn hình tam giác đều SBC có độ dài cạnh bằng 3. K là trung điểm BC . Người ta dùng compa vạch một cung tròn MN có tâm là S , bán kính SK . Lấy phần hình quạt gò thành hình nón không có mặt đáy với đỉnh là S , cung MN thành đường tròn đáy của hình nón (hình vẽ). Tính thể tích khối nón trên.



$$\text{A. } \frac{\pi\sqrt{105}}{64}.$$

$$\text{B. } \frac{3\pi}{32}.$$

$$\text{C. } \frac{3\pi\sqrt{3}}{32}.$$

$$\text{D. } \frac{\pi\sqrt{141}}{64}.$$

ĐÁP ÁN

Dạng 1: Câu hỏi lý thuyết về mặt nón, hình nón, khối nón

1 - D	2 - B	3 - A	4 - D						
-------	-------	-------	-------	--	--	--	--	--	--

Dạng 2: Bài toán tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện của hình nón

1 - A	2 - C	3 - D	4 - B	5 - D	6 - D	7 - C	8 - B		
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--	--

Dạng 3: Bài toán tính thể tích khối nón, bài toán cực trị

1 - A	2 - D	3 - B	4 - D	5 - C	6 - C	7 - D	8 - C	9 - A	10 - D
11 - D									

Dạng 4: Bài toán thực tế về hình nón, khối nón

1 - B	2 - A	3 - A							
-------	-------	-------	--	--	--	--	--	--	--