

TÀI LIỆU HỌC TẬP

12

GIẢI TÍCH

HỌC KỲ II



LƯU HÀNH NỘI BỘ

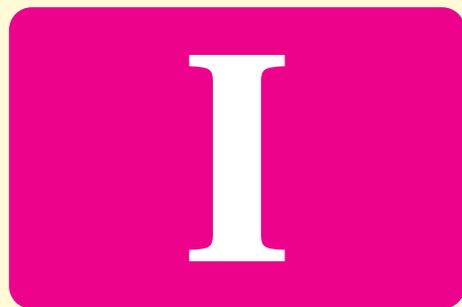
Mục lục

PHẦN I GIẢI TÍCH

Chương 3. NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	1
Bài 1. Nguyên hàm	1
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	1
(B) Các dạng toán.....	3
Dạng 1. Tính nguyên hàm bằng bảng nguyên hàm.....	3
Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số.....	9
Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần.....	14
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	18
Bài 2. Tích phân	28
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	28
(B) Các dạng toán.....	29
Dạng 1. Dùng định nghĩa tính tích phân.....	29
Dạng 2. Tính tích phân bằng bảng nguyên hàm.....	32
Dạng 3. Tích phân hàm số chứa trị tuyệt đối $\int_a^b f(x) dx$	37
Dạng 4. Phương pháp đổi biến số.....	39
Dạng 5. Phương pháp từng phần.....	47
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	52
Bài 3. Ứng dụng tích phân	69
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	69
(B) Các dạng toán.....	70
Dạng 1. Diện tích hình giới hạn bởi: đồ thị hàm số - trục hoành và hai cận.....	70
Dạng 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số.....	73
Dạng 3. Thể tích khối tròn xoay.....	77
Dạng 4. Thể tích của vật thể.....	79
Dạng 5. Bài toán thực tế: Tìm vận tốc, quãng đường.....	81
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	84

Chương 4. SỐ PHỨC	108
Bài 1. Số phức	108
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	108
(B) Các dạng toán.....	110
<i>Dạng 1.Xác định phần thực - phần ảo của số phức.....</i>	110
<i>Dạng 2.Xác định mô-đun của số phức.....</i>	110
<i>Dạng 3.Hai số phức bằng nhau.....</i>	111
<i>Dạng 4.Tìm tập hợp điểm biểu diễn.....</i>	112
<i>Dạng 5.Số phức liên hợp.....</i>	113
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	114
Bài 2. Cộng, trừ và nhân số phức	126
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	126
(B) Các dạng toán.....	127
<i>Dạng 1.Cộng trừ hai số phức.....</i>	127
<i>Dạng 2.Phép nhân hai số phức.....</i>	128
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	131
Bài 3. Phép chia số phức	140
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	140
(B) Các dạng bài tập.....	140
<i>Dạng 1.Phép chia số phức đơn giản.....</i>	140
<i>Dạng 2.Các bài toán tìm phần thực và phần ảo của số phức.....</i>	141
<i>Dạng 3.Một số bài toán xác định môđun của số phức.....</i>	143
<i>Dạng 4.Tìm tập hợp điểm-GTNN-GTLN.....</i>	145
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	148
Bài 4. Phương trình bậc hai với hệ số thực	157
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	157
(B) Các dạng toán.....	157
<i>Dạng 1.Giải phương trình bậc hai hệ số thực.....</i>	157
<i>Dạng 2.Phương trình bậc cao với hệ số thực.....</i>	159
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	162

PHẦN



GIẢI TÍCH

Chương 3

NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 1

NGUYÊN HÀM

A Tóm tắt lý thuyết

✦ **Định nghĩa 1.1.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathcal{K} . Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên \mathcal{K} nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{K}$.

✦ **Định lý 1.1.** Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathcal{K} thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathcal{K} .

✦ **Định lý 1.2.** Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathcal{K} thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathcal{K} đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

✦ **Định lý 1.3.** Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathcal{K} đều có nguyên hàm trên \mathcal{K} .

1. Tính chất của nguyên hàm

✦ **Tính chất 1.1.** $\int f'(x) dx = f(x) + C$

✦ **Tính chất 1.2.** $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là một hằng số khác 0).

✦ **Tính chất 1.3.** $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

2. Phương pháp tìm nguyên hàm

2.1. Phương pháp đổi biến số

✦ **Định lý 1.4.** Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

2.2. Phương pháp từng phần

✦ **Định lý 1.5.** Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathcal{K} thì

$$\int u(x).v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

⚠ Lưu ý: Vì $u'(x) dx = dv, u'(x) dx = du$ nên đẳng thức trên còn được viết ở dạng

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

🕒 **Bước 1.** Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$). Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' \cdot dx$.

🕒 **Bước 2.** Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

⚠ Lưu ý: Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ để tính hơn $\int u dv$.

Ta thường gặp các dạng sau:

📁 **Dạng 1.** $I = \int P(x) \left[\begin{matrix} \sin x \\ \cos x \end{matrix} \right] dx$. Với dạng này, ta đặt

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \left[\begin{matrix} \sin x \\ \cos x \end{matrix} \right] dx \end{cases}$$

📁 **Dạng 2.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$$

📁 **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt

$$\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$$

📁 **Dạng 4.** $I = \int \left[\begin{matrix} \sin x \\ \cos x \end{matrix} \right] e^x dx$. Với dạng này, ta đặt

$$\begin{cases} u = \left[\begin{matrix} \sin x \\ \cos x \end{matrix} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$$

BẢNG NGUYÊN HÀM

① $\int dx = x + C$

③ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

⑤ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

⑦ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

⑨ $\int e^x dx = e^x + C$

⑪ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

⑬ $\int \cos x dx = \sin x + C$

⑮ $\int \sin x dx = -\cos x + C$

② $\int k dx = kx + C$

④ $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$

⑥ $\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$

⑧ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$

⑩ $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

⑫ $\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$

⑭ $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

⑯ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$

$$\textcircled{17} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\textcircled{19} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\textcircled{21} \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\textcircled{23} \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\textcircled{25} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\textcircled{18} \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$$

$$\textcircled{20} \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$$

$$\textcircled{22} \int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + C$$

$$\textcircled{24} \int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + C$$

$$\textcircled{26} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

B Các dạng toán

Dạng 1. Tính nguyên hàm bằng bảng nguyên hàm

Phương pháp giải:

- 1 Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ khai triển.
- 2 Tích các hàm mũ $\xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ khai triển theo công thức mũ.
- 3 Chứa căn $\xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ chuyển về lũy thừa.
- 4 Tích lượng giác bậc một của sin và cos $\xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ sử dụng công thức tích thành tổng.

$$\textcircled{✓} \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\textcircled{✓} \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\textcircled{✓} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

- 5 Bậc chẵn của sin, cos $\xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ hạ bậc.

$$\textcircled{✓} \sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$$

$$\textcircled{✓} \cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$$

- 6 Nguyên hàm của hàm số hữu tỷ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ với $P(x), Q(x)$ là các đa thức.

✓ Nếu bậc của tử $P(x) \geq$ bậc của mẫu $Q(x) \xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ chia đa thức.

✓ Nếu bậc của tử $P(x) <$ bậc của mẫu $Q(x) \xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ phân tích mẫu số $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng đồng nhất thức đưa về tổng của phân số

$$\textcircled{✓} \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\textcircled{✓} \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1

Tính các nguyên hàm của hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{3}x.$

b) $f(x) = (x^2 - 3x)(x + 1).$

BÀI GIẢI

a) Ta có: $F(x) = \int \left(3x^2 + \frac{1}{3}x\right) dx = x^3 + \frac{x^2}{6} + C.$

b) Ta có: $F(x) = \int (x^2 - 3x)(x + 1)dx = \int (x^3 - 2x^2 - 3x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C.$



Nguyên hàm hữu tỷ

Nguyên hàm của hàm hữu tỷ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$

VÍ DỤ 2

Tìm các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

b) $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$

c) $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$

BÀI GIẢI

a) $F(x) = \int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} dx = \int \left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right) dx = x^2 - 3x + \ln|x| + C$

b) Thực hiện chia đa thức $2x + 1$ cho $x + 1$ ta được.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1} = 2 - \frac{1}{x + 1}.$$

$$F(x) = \int \left(2 - \frac{1}{x + 1}\right) dx = 2x - \ln|x + 1| + C$$

(Sắp xếp phép chia đa thức hình bên)

$2x + 1$	$x + 1$
$2x + 2$	2
0	-1

c) Ta viết $f(x) = \frac{2x - 1}{(x^2 - x - 2)} = \frac{2x - 1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{(A + B)x - 2A + B}{(x - 2)(x + 1)}$

Đồng nhất thức 2 vế ta được: $\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A + B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$

Ta viết lại: $f(x) = \frac{2x - 1}{(x^2 - x - 2)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 2}.$

Khi đó: $F(x) = \int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} dx = \int \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 2}\right) dx = \ln|x + 1| + \ln|x - 2| + C$



Tìm một nguyên hàm

Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_0) = k.$

VÍ DỤ 3

Tìm **một** nguyên hàm $F(x)$ của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ thỏa mãn $F(1) = 1.$

b) $f(x) = \frac{1}{2x - 5}$ thỏa mãn $F(1) = 2 \ln 3.$

c) $f'(x) = \frac{2}{x - 1}$, biết $f(0) = 2$ và $f(2) = 4$. Tính giá trị $P = f(-2) + f(5).$

BÀI GIẢI

a) Ta có $F(x) = \int (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx = -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + C.$

Theo giả thiết: $F(1) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1^4}{4} + 1^3 - 1^2 + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{5}{4}$

Vậy $F(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \frac{5}{4}$

b) Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{2x-5} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|2x-5| + C$

Theo giả thiết: $F(1) = 2 \ln 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln|2 \cdot 1 - 5| + C = 2 \ln 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 3 + C = 2 \ln 3$

$\Leftrightarrow C = \frac{3}{2} \ln 3.$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-5| + \frac{3}{2} \ln 3.$

c) Ta có: $\int f'(x) dx = f(x) + C \Leftrightarrow f(x) = \int \frac{2}{x-1} dx - C = 2 \ln|x-1| - C.$

Ta có $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \ln|0-1| - C_1 = 2 \\ 2 \cdot \ln|2-1| - C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \ln|x-1| + 2 \\ f(x) = 2 \ln|x-1| + 4 \end{cases}$

Ta có: $P = f(-2) + f(5) = (2 \ln 3 + 2) + (2 \ln 4 + 4) = \ln 144 + 6.$

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 7$

b) $f(x) = 6x^5 - 12x^3 + x^2 - 8$

c) $f(x) = (x-1)(x^2+2)$

d) $f(x) = x(x^2+1)^2$

Lời giải.

Bài 2. Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^4}$

b) $f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3}$

c) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(2-x)^2}$

d) $f(x) = \frac{6}{(3x-1)^2} - \frac{9}{3x-1}$

Lời giải.

Bài 3. Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{2}{3-2x} + 1 - \frac{3}{\cos^2 x}$

b) $f(x) = \frac{2}{x} + 2^x + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

c) $f(x) = 3x - e^{3x} + \frac{2}{\sin^2 4x}.$

d) $f(x) = 2 - 3^{1-4x} + \sin 2x.$

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Bài 4. Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sin^2 x + \frac{3}{2}$.

b) $f(x) = \frac{1}{2} + \cos^2 2x$.

c) $f(x) = \cos 2x \cdot \cos x + 1$.

d) $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x + \sin^2 \frac{x}{2}$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Bài 5. Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}$.

b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.

c) $f(x) = (1 - 3x)^5$.

d) $f(x) = \sqrt[3]{1 - 4x} + \frac{1}{\sqrt[5]{1 + 2x}}$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Bài 6. Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x}$.

b) $f(x) = \frac{x - 1}{2x + 3}$.

c) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x + 2}$.

d) $f(x) = \frac{2}{x^2 + x - 2}$.

e) $f(x) = \frac{2x - 1}{2x^2 - x - 1}$.

f) $f(x) = \frac{3}{x(x + 3)}$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

Bài 7. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa điều kiện cho trước:

a) $f(x) = x^3 - 4x + 1; F(1) = 3.$

b) $f(x) = 3 - \cos x; F(\pi) = 2.$

c) $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}; F(e) = 1.$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}; F(1) = \frac{3}{2}.$

Lời giải.

Bài 8. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa điều kiện cho trước:

a) $f(x) = \frac{5}{2 - 10x}; F(2) = 3 \ln 2.$

b) $f(x) = \frac{1}{2x + 1}; F(0) = 2.$ Tính $F(e).$

c) $f'(x) = \frac{1}{2x - 1}$ và $f(1) = 1.$ Tính $f(5).$

d) $f'(x) = \frac{1}{2x - 1},$ biết $f(0) = 1$ và $f(1) = 2.$
 Tính giá trị $P = f(-1) + f(5).$

Lời giải.

LUYỆN TẬP 1

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^3 - 2 + \frac{5}{x}.$

b) $f(x) = (3x - 1)(2x^2 + 1).$

c) $f(x) = x(3x - 1)^2.$

d) $f(x) = (2x^2 - 1)^2.$

e) $f(x) = (3x - 1)^5$.

f) $f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{(3-2x)^4} + \sqrt[3]{3x-1}$.

LUYỆN TẬP 2

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x - e^{1+4x} + \frac{3}{2+4x}$.

b) $f(x) = 3^x + \sin(5 - 10x) + 9$.

c) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) + e^x + 1$.

d) $f(x) = e^x(e^x - 1)$.

e) $f(x) = e^x\left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$.

f) $f(x) = 2^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + \frac{3}{\cos^2 5x}$.

LUYỆN TẬP 3

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 1 - \sin^2 2x$.

b) $f(x) = \cos^2 3x - 3$.

c) $f(x) = 2 \sin 3x \cdot \cos 2x$.

d) $f(x) = 4 \sin 6x \sin x$.

LUYỆN TẬP 4

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{2x^3 + 2x + 1}{x}$.

b) $f(x) = \frac{5x - 1}{x + 2}$.

c) $f(x) = \frac{3}{x^2 - x - 6}$.

d) $f(x) = \frac{3x - 1}{3x^2 - x - 4}$.

LUYỆN TẬP 5

Tìm nguyên hàm $F(x)$ thỏa điều kiện cho trước

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}; F(-2) = 0$

b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x; F(1) = 0$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2; F(2) = 14$. Tính $F(-2)$

d) $f(x) = (1 - 2x)^5; \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F(1)$

LUYỆN TẬP 6

Tìm nguyên hàm $F(x)$ thỏa điều kiện cho trước

a) $f(x) = \sqrt{2x - 1}; F(1) = \frac{4}{3}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 4}; F(-2) = \frac{1}{4}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 1}}; F(3) = 3\sqrt{11}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - 1}}; F(2) = \sqrt{5}$

e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 2}}; F(1) = \sqrt{2}$

f) $f(x) = \frac{6x}{\sqrt{3x + 7} - \sqrt{7 - 3x}}; F(2) = 1$

LUYỆN TẬP 7

Tìm nguyên hàm $F(x)$ thỏa điều kiện cho trước

a) $f(x) = e^{3x}; F(0) = 1$

b) $f(x) = e^{3x+1}; F(0) = \frac{e}{3}$

c) $f(x) = (2 + e^{3x})^2; F(0) = \frac{3}{2}$

d) $f(x) = e^x(2e^2 + 1); F(0) = 1$

e) $f(x) = e^x(3 + e^{-x}); F(\ln 2) = 3$

f) $f(x) = \sqrt{e^{4x-2}}; F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

VẬN DỤNG 1

Tìm nguyên hàm $F(x)$ thỏa điều kiện cho trước

- a) $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x; F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$
- b) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}; F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$
- c) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-2}}; F(1) = \sqrt{2}$
- d) $f(x) = \frac{6x}{\sqrt{3x+7} - \sqrt{7-3x}}; F(2) = 1$
- e) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x; F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}.$
- f) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x; F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}$

VẬN DỤNG 2

Tìm nguyên hàm $F(x)$ thỏa điều kiện cho trước

- a) $f(x) = 3^x - 2^x \cdot 3^x; F(0) = -\frac{1}{\ln 6} + 2$
- b) $f(x) = 9^x - 3x^2; F(0) = \frac{1}{\ln 9} + 2$
- c) $f(x) = 4^x \cdot 2^{2x+3}; F(0) = -\frac{2}{\ln 2}.$ Tính $A = \frac{[\ln 2 \cdot F(1)]^3}{2^{10}}$
- d) $f(x) = \frac{x}{x+1}; F(2) = 3 - \ln 3$
- e) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}; F(2) = \frac{5}{3}$
- f) $f(x) = \frac{x^3}{x+2}; F(-3) = 0.$ Tính $F(-1).$

VẬN DỤNG 3

Tìm nguyên hàm $F(x)$ thỏa điều kiện cho trước

- a) $f(x) = \frac{5x+3}{x^2+7x+12}; F(-2) = 18 \ln 2$
- b) $f(x) = \frac{9x-10}{6x^2-11x+3}; F(1) = \ln 2$
- c) $f(x) = \frac{4x+11}{x^2+5x+6}; F(1) = \ln 2.$ Tính $e^{F(-4)}$
- d) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}; F(3) = 0.$ Tính $F\left(\frac{3}{2}\right)$
- e) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2},$ biết rằng đồ thị hàm số $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{2}{3} \ln 2.$
- f) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x}; F(1) = -\frac{5}{3} \ln 2$

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Cho $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm và liên tục thì

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

Phương pháp giải:

Đặt $t = u(x) \xrightarrow{\text{đạo hàm 2 vế}} dt = u'(x)dx.$

⚠ Lưu ý: Sau khi biến đổi và tính nguyên hàm xong, cần trả lại biến cũ ban đầu là $x.$

Một số dạng biến đổi thường gặp

Dạng toán	Cách đặt t
-----------	--------------

① $\int f(ax^{n+1} + b)^m \cdot \boxed{x^n dx}$	$t = ax^{n+1} + b \Rightarrow dt = a(n+1) \boxed{x^n dx}$.
② $\int f\left(\frac{x^n}{ax^{n+1}}\right)^m dx$	$t = ax^{n+1} \Rightarrow dt = a(n+1)x^n dx$.
③ $\int f(ax^2 + b)^n dx$	$t = ax^2 + b \Rightarrow dt = 2ax dx$.
④ $\int \sqrt[n]{f(x)} f'(x) dx$	$t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow nt^{n-1} dt = f'(x) dx$.
⑤ $\int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$	$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.
⑥ $\int f(e^x) \cdot e^x dx$	$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.
⑦ $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$	$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.
⑧ $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$	$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.
⑨ $\int f(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx$.
⑩ $\int f(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx = -(1 + \cot^2 x) dx$.
⑪ $\int f(\sin^2 x; \cos^2 x) \cdot \sin 2x dx$	$\begin{cases} t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -\sin 2x dx \\ t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx \end{cases}$
⑫ $\int f(\sin x \pm \cos x) \cdot (\cos x \pm \sin x) dx$	$t = \cos x \pm \sin x \Rightarrow dt = (\cos x \mp \sin x) dx$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $A = \int (1-x)^{2021} x dx.$

b) $B = \int (x^2 + 1)^5 x dx.$

c) $I = \int \sqrt{x^2 + 3} x dx.$

d) $D = \int \sin^3 x \cdot \cos x dx$

BÀI GIẢI

a) Đặt $t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t \Rightarrow dx = -dt$.

$$\begin{aligned} A &= - \int t^{2021} (1-t) dt = - \int (t^{2021} - t^{2022}) dt = \frac{t^{2023}}{2023} - \frac{t^{2022}}{2022} + C \\ &= \frac{(1-x)^{2023}}{2023} - \frac{(1-x)^{2022}}{2022} + C \end{aligned}$$

b) Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x dx$.

$$\begin{aligned} B &= \int t^5 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{t^6}{12} + C \\ &= \frac{(x^2 + 1)^6}{12} + C \end{aligned}$$

c) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow t^2 = x^2 + 3 \Rightarrow t dt = x dx$.

$$I = \int t \cdot t dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{x^2 + 3})^3}{3} + C.$$

d) Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$D = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

VÍ DỤ 2

Tính các nguyên sau:

a) $I = \int \frac{\ln x}{x} dx.$

b) $J = \int \sqrt{5 - e^x} e^x dx.$

c) $K = \int \frac{\sqrt{1 + \tan x}}{\cos^2 x} dx.$

d) $H = \int \sin^3 x dx.$

BÀI GIẢI

a) Đặt $t = \ln x \Rightarrow dx = \frac{dx}{x}.$

$$I = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

b) Đặt $t = \sqrt{5 - e^x} \Rightarrow t^2 = 5 - e^x \Rightarrow 2t dt = -e^x dx$

$$J = - \int t \cdot 2t dt = -2 \int t^2 dt = -\frac{2}{3} t^3 + C = -\frac{2}{3} (\sqrt{5 - e^x})^3 + C.$$

c) Đặt $t = \sqrt{1 + \tan x} \Rightarrow t^2 = 1 + \tan x \Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$K = \int t \cdot 2t dt = 2 \int t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{3} (\sqrt{1 + \tan x})^3 + C$$

d) Ta viết lại $H = \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$H = - \int (1 - t^2) dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính các nguyên hàm sau:

a) $I = \int (2x^2 + 1)^7 x dx.$

b) $J = \int \frac{x}{x^2 + 5} dx.$

c) $H = \int \sqrt[3]{x^2 + 1} x dx.$

d) $K = \int \frac{3x^2}{\sqrt{5 + 2x^3}} dx.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Tính các nguyên hàm sau:

a) $I = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 3}} dx.$

b) $J = \int e^{x^2+1} x dx.$

c) $H = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

d) $K = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx.$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Tính các nguyên hàm sau:

a) $I = \int \frac{\ln^3 x}{x} dx.$

b) $J = \int \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx.$

c) $H = \int \frac{3 \ln x + 1}{x \cdot \ln x} dx.$

d) $K = \int \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x} dx.$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



e) $M = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^2 + 1}} dx$

f) $N = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx.$

LUYỆN TẬP 5

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$

b) $J = \int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx.$

c) $H = \int \frac{5 \sin^3 x}{1 - \cos x} dx.$

d) $K = \int \sin^2 x \cdot \tan x dx.$

e) $M = \int \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 - \cos x} dx$

f) $N = \int \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx.$

LUYỆN TẬP 6

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I = \int \cos^3 x dx.$

b) $J = \int (1 + 2 \sin x) \cos x dx.$

c) $H = \int \frac{\cos x}{4 + \sin x} dx.$

d) $K = \int \frac{\sin 2x}{1 - \sin x} dx.$

e) $M = \int \sin 2x \cdot \sin^5 x dx$

f) $N = \int \frac{\cos x}{2 + \sqrt{3 \sin x + 1}} dx.$

LUYỆN TẬP 7

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$

b) $J = \int \frac{(1 + \tan x)^2}{\cos^2 x} dx.$

c) $H = \int \frac{dx}{\cos^4 x} dx.$

d) $K = \int \frac{(2 - \cot x)^2}{\sin^2 x} dx.$

e) $M = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$

f) $N = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx.$

VẬN DỤNG 1

Tính các nguyên hàm sau:

a) $I = \int \sqrt{1 - x^2} dx.$

b) $J = \int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$

c) $H = \int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$

d) $K = \int \frac{1}{1 + x^2} dx.$

Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm và liên tục trên \mathcal{K} thì

$$I = \int u(x)v'(x) dx = u(x).v(x) - \int v(x) dx$$

Phương pháp

a) Cách đặt $\begin{cases} u = \dots \xrightarrow{\text{đạo hàm}} du = \dots dx \\ dv = \dots dx \xrightarrow{\text{nguyên hàm}} v = \dots \end{cases}$

b) Chọn cách đặt u và dv

	$\int P(x).e^x dx$	$\int P(x). \cos x dx$	$\int P(x). \sin x dx$	$\int P(x). \ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$	$\sin x dx$	$\ln x dx$

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1

Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I = \int (2x + 1).e^x dx.$

b) $J = \int (3 - x). \sin x dx.$

c) $K = \int 2x. \ln x dx.$

d) $H = \int \frac{3x - 4}{\cos^2 x} dx.$

BÀI GIẢI

a) Đặt $\begin{cases} u = 2x + 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = (2x + 1)e^x - 2 \int e^x dx = (2x + 1)e^x - 2e^x + C = (2x - 1)e^x + C$$

b) Đặt $\begin{cases} u = 3 - x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$J = (x - 3) \cos x - \int \cos x dx = (x - 3) \cos x - \sin x + C$$

c) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 \end{cases}$

$$K = \frac{\ln x}{x^2} - \int x dx = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x^2}{2} + C$$

d) Đặt $\begin{cases} u = 3x - 4 \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3dx \\ v = \tan x \end{cases}$

VÍ DỤ 2

$$H = (3x - 4) \tan x - 3 \int \tan x dx = (3x - 4) \tan x + 3 \ln |\cos x| + C$$

Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x^3}$. Tìm nguyên hàm của hàm $f'(x) \ln x$.

BÀI GIẢI

Ta viết $I = \int f'(x) \ln x dx.$

Vì $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x^3}$ nên $F'(x) = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^3} \Rightarrow f(x) = x^2.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$I = f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = x^2 \ln x - \int x dx$$

$$= x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính các nguyên hàm sau:

a) $I = \int (2x + 1) \ln x dx.$

b) $J = \int x \sin x dx.$

c) $K = \int x \cos x dx.$

d) $H = \int (3 - 2x) \sin 2x dx.$

Lời giải.

<p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Bài 2. Tính các nguyên hàm sau:

a) $I = \int (4 + x) e^{2x} dx.$

b) $J = \int x \cos 2x dx.$

c) $K = \int \ln x dx.$

d) $H = \int x \cdot 2^x dx.$

Lời giải.

<p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Bài 3. Tìm một nguyên hàm của hàm số $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cos 3x$ thỏa mãn $F(0) = 1$

Lời giải.

Bài 4. Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x^4}$. Tìm nguyên hàm của hàm $f'(x) \ln x$.

Lời giải.

Bài 5. Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $x.f(x)$. Tìm nguyên hàm của hàm $f'(x) \ln x$.

Lời giải.

LUYỆN TẬP 1

Tính các nguyên hàm sau:

a) $I = \int (1 - 2x) e^{3x} dx.$

b) $J = \int \frac{\ln x}{x^3} dx.$

c) $K = \int \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) \ln x dx.$

d) $H = \int (3x - 1) \cdot 3^x dx.$

LUYỆN TẬP 2

Tính các nguyên hàm sau:

a) $I = \int (x^2 + 1) e^x dx.$

b) $J = \int (x + 1) \ln (2x) dx.$

c) $K = \int 3x^2 \sin 4x dx.$

d) $H = \int (4 - 3x) \cos 2x dx.$

LUYỆN TẬP 3

- a) Cho $F(x) = x^2 + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm $f'(x) \ln x$.
- b) Cho $F(x) = \frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x) (x^4 - x^3)$
- c) Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)e^{2x}$
- d) Cho $F(x) = \frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x) (x^3 + 1)$

VẬN DỤNG 1

Cho $F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x + x \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \sin x$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cos x$

VẬN DỤNG 2

Cho $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \sin x + x \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cos x$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \sin x$

VẬN DỤNG 3

Cho $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$

C Bài tập trắc nghiệm

1. Dùng bảng nguyên hàm

1.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A** $e^x + x^2 + C$.
- B** $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.
- C** $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.
- D** $e^x + 1 + C$.

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A** $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$.
- B** $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.
- C** $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.
- D** $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \quad (\forall x \neq -1)$.

Câu 3. Công thức nào sau đây là sai?

- A** $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$.
- B** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.
- C** $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
- D** $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 4. Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- A** $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$.
- B** $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
- C** $f(x) = 12x^2 + 2x$.
- D** $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là

- (A) $x^3 + C$. (B) $\frac{x^3}{3} + x + C$.
 (C) $6x + C$. (D) $x^3 - x + C$.

Câu 6. Hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số

- (A) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \cos x$.
 (B) $f(x) = 2x + \cos x$.
 (C) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \cos x$.
 (D) $f(x) = 2x - \cos x$.

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \cos x$.

- (A) $\sin 2x + C$. (B) $-2 \sin x + C$.
 (C) $2 \sin x + C$. (D) $-\sin 2x + C$.

Câu 8. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = \sin x$?

- (A) $y = -\cos x$. (B) $y = \cos x$.
 (C) $y = \tan x$. (D) $y = \cot x$.

Câu 9. Hàm số $F(x) = \cos 3x$ là nguyên hàm của hàm số

- (A) $f(x) = \frac{\sin 3x}{3}$. (B) $f(x) = -3 \sin 3x$.
 (C) $f(x) = 3 \sin 3x$. (D) $f(x) = -\sin 3x$.

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ là

- (A) $3x^2 + C$. (B) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$.
 (C) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$. (D) $x^4 + \frac{x^2}{2} + x + C$.

Câu 11. Tính nguyên hàm $\int x^2 dx$.

- (A) $3x^2 + C$. (B) $2x + C$.
 (C) $x^3 + C$. (D) $\frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \int \sin 3x dx$ là

- (A) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \cos 3x + C$.
 (B) $\int f(x) dx = -\cos 3x + C$.
 (C) $\int f(x) dx = \cos 3x + C$.
 (D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

- (A) $-\sin x + C$. (B) $\cot x + C$.
 (C) $\tan x + C$. (D) $\sin x + C$.

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- (A) $x^3 + C$. (B) $\frac{x^3}{3} + x + C$.
 (C) $6x + C$. (D) $x^3 + x + C$.

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

- (A) $-\sin x + C$. (B) $\cot x + C$.
 (C) $\tan x + C$. (D) $\sin x + C$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm $\int \left(\frac{1}{2x+3} \right) dx$.

- (A) $\frac{1}{2} \ln |2x+3| + C$. (B) $\frac{1}{2} \ln (2x+3) + C$.
 (C) $2 \ln |2x+3| + C$. (D) $\ln |2x+3| + C$.

Câu 17. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

- (A) $\frac{1}{3} \cos 3x + C$. (B) $\cos 3x + C$.
 (C) $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$. (D) $-\cos 3x + C$.

Câu 18. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ là

- (A) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$. (B) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$.
 (C) $x^4 + \frac{x^2}{2} + C$. (D) $3x^2 + C$.

Câu 19. Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2x+1} dx$ bằng

- (A) $-\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$.
 (B) $-\ln |2x+1| + C$.
 (C) $\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$.
 (D) $\ln |2x+1| + C$.

Câu 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x + 2019$ là

- (A) $F(x) = e^x + \sin x + 2019 + C$.
 (B) $F(x) = e^x - \sin x + C$.
 (C) $F(x) = e^x + \sin x + 2019x + C$.
 (D) $F(x) = e^x - \sin x + 2019x + C$.

Câu 21. Nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

- (A) $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$. (B) $2e^x + \tan x + C$.

(C) $2e^x - \tan x + C$. (D) $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$.

Câu 22. $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2} dx$ bằng

- (A) $\frac{x^3 + x^2 - 3x}{x^3} + C$.
 (B) $3x + 2 \ln|x| - \frac{3}{x} + C$.
 (C) $\frac{3(x^3 + x^2 - 3x)}{x^3} + C$.
 (D) $3x + 2 \ln|x| + \frac{3}{x} + C$.

Câu 23. $\int (3 \cdot 2^x + \sqrt{x}) dx$ bằng

- (A) $3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.
 (B) $\frac{3 \cdot \ln 2}{2^x} + \frac{3}{2} \sqrt{x^3} + C$.
 (C) $3 \cdot \frac{\ln 2}{2^x} + \frac{3}{2} \sqrt{x^3} + C$.
 (D) $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$.

Câu 24. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

- (A) $\int 2e^x dx = 2(e^x + C)$.
 (B) $\int x^3 dx = \frac{x^4 + C}{4}$.
 (C) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.
 (D) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Câu 25. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$.

- (A) $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5 + C$.
 (B) $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C$.
 (C) $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$.
 (D) $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 26. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

- (A) $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$.
 (B) $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.
 (C) $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.
 (D) $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Câu 27. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$.

- (A) $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{4} \ln|4x-3| + C$.
 (B) $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{2} \ln\left(2x - \frac{3}{2}\right) + C$.
 (C) $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{2} \ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$.
 (D) $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$.

Câu 28. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin x$ là

- (A) $x^2 - \cos x + C$. (B) $2 + \cos x + C$.
 (C) $2 - \cos x + C$. (D) $x^2 + \cos x + C$.

Câu 29. Với C là hằng số. Tìm $\int (e^x + x) dx$.

- (A) $\int (e^x + x) dx = e^x - \frac{x^2}{2} + C$.
 (B) $\int (e^x + x) dx = e^x + 2x + C$.
 (C) $\int (e^x + x) dx = e^x + \frac{x^2}{2} + C$.
 (D) $\int (e^x + x) dx = e^x + x^2 + C$.

Câu 30. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x^2$ là

- (A) $F(x) = e^{2x} + x^3 + C$.
 (B) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C$.
 (C) $F(x) = 2e^{2x} + 2x + C$.
 (D) $F(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$.

Câu 31. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \sin x$ là

- (A) $e^x - \cos x + C$.
 (B) $xe^{x-1} + \cos x + C$.
 (C) $e^x + \cos x + C$.
 (D) $\frac{1}{x+1}e^{x+1} + \cos x + C$.

Câu 32. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- (A) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.
 (B) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.
 (C) $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

D $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

Câu 33. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$?

- A** $y = \frac{x^{2020}}{2020} + 1.$ **B** $y = \frac{x^{2020}}{2020}.$
C $y = 2019x^{2018}.$ **D** $y = \frac{x^{2020}}{2020} - 1.$

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A** $F(2) - F(0) = 16.$ **B** $F(2) - F(0) = 1.$
C $F(2) - F(0) = 8.$ **D** $F(2) - F(0) = 4.$

Câu 35. Hàm số nào trong các hàm số sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = e^{-2x}$?

- A** $y = -\frac{e^{-2x}}{2}.$
B $y = -2e^{-2x} + C (C \in \mathbb{R}).$
C $y = 2e^{-2x} + C (C \in \mathbb{R}).$
D $y = \frac{e^{-2x}}{2}.$

Câu 36. Hàm số nào trong các hàm số sau đây có một nguyên hàm bằng $\cos^2 x$?

- A** $y = \frac{\cos^3 x}{3}.$ **B** $y = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$
C $y = -\sin 2x.$ **D** $y = \sin 2x + C.$

Câu 37. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x \cdot 5^x + 1$ là

- A** $10^x + x + C.$ **B** $\frac{10^x}{\ln 10} + x + C.$
C $\frac{10^x}{\ln 10} + C.$ **D** $x \cdot 10^x \ln 10.$

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Tìm nguyên hàm $I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$.

- A** $I = 2F(x) + f(x) + x + C.$
B $I = 2F(x) + xf(x) + C.$
C $I = 2xF(x) + f(x) + x + 1.$
D $I = 2xF(x) + f(x) + x + C.$

Câu 39. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

- A** $\int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C.$
B $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$
C $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$

D $\int f(x) dx = 3 + \cos x + C.$

Câu 40. Cho hàm số $y = 2019^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A** $\int f(x) dx = \frac{2019^x}{\ln 2019}.$
B $\int f(x) dx = \frac{2019^x}{\ln 2020}.$
C $\int f(x) dx = 2019^x \cdot \ln 2019.$
D $\int f(x) dx = \frac{2019^x}{2019}.$

Câu 41. Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

- A** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C.$
B $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C.$
C $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$
D $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C.$

Câu 42. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 3^x$ là

- A** $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$
B $F(x) = 1 + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$
C $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x + C.$
D $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x \ln 3 + C.$

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ là

- A** $x^2 + x + C.$ **B** $x^2 + x.$
C $2.$ **D** $C.$

Câu 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x$ là

- A** $x^4 + 3x^2 + C.$ **B** $\frac{x^4}{3} + 3x^2 + C.$
C $\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + C.$ **D** $3x^2 + 3 + C.$

Câu 45. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$.

- A** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C.$
B $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C.$
C $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C.$

D $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$

Câu 46. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x + e^x$ thỏa mãn $F(0) = 2019$. Tính $F(1)$.

- A** $e + 2018.$ **B** $e - 2018.$
C $e + 2019.$ **D** $e - 2019.$

Câu 47. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{3}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ là

- A** $\frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| + C.$ **B** $\frac{x^3}{3} - 3 \ln|x| + C.$
C $\frac{x^3}{3} + 3 \ln x + C.$ **D** $-\frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| + C.$

Câu 48. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là

- A** $e^x + x^2 + C.$ **B** $e^x - x^2 + C.$
C $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C.$ **D** $e^x - 2 + C.$

Câu 49. Cho các hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A** $\int f'(x) dx = f(x) + C.$
B $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$
C $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, (k \in \mathbb{R}, k \neq 0).$
D $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}.$

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

- A** $\cos x + C.$ **B** $-\cos x + C.$
C $-\sin x + C.$ **D** $\sin x + C.$

1.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = -\cos x$ và $f(0) = 2019$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** $f(x) = -\sin x + 2019.$
B $f(x) = 2019 + \cos x.$
C $f(x) = \sin x + 2019.$
D $f(x) = 2019 - \cos x.$

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C.$

B $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$

C $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$

D $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C.$

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 6x$.

A $\int \cos 6x dx = 6 \sin 6x + C.$

B $\int \cos 6x dx = \frac{\sin 6x}{6} + C.$

C $\int \cos 6x dx = -\frac{\sin 6x}{6} + C.$

D $\int \cos 6x dx = \sin 6x + C.$

Câu 4. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4e^{2x} + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

A $F(x) = 4e^{2x} + x^2 - 3.$

B $F(x) = 2e^{2x} + x^2 - 1.$

C $F(x) = 2e^{2x} + x^2 + 1.$

D $F(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1.$

Câu 5. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(3x + 2)$ là

A $x^3 + x^2 + 1.$ **B** $3x^3 + 2x^2 + 1.$

C $x^3 + 2x^2 + 1.$ **D** $x^3 - x^2 + 1.$

Câu 6. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$.

A $\int f(x) dx = e^{-x} + C.$

B $\int f(x) dx = e^x + x + C.$

C $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C.$

D $\int f(x) dx = e^x + C.$

Câu 7. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A $F(3) = \ln 2 - 1.$ **B** $F(3) = \ln 2 + 1.$

C $F(3) = \frac{1}{2}.$ **D** $F(3) = \frac{7}{4}.$

Câu 8. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(1 - 2x)$ và thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A** $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(1 - 2x) + \frac{3}{2}$.
- B** $F(x) = \cos(1 - 2x)$.
- C** $F(x) = \cos(1 - 2x) + 1$.
- D** $F(x) = \frac{1}{2} \cos(1 - 2x) + \frac{1}{2}$.

Câu 9. $\int \cos 3x \cos x \, dx$ bằng

- A** $\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x + C$.
- B** $\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x + C$.
- C** $\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$.
- D** $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$.

Câu 10. $\int \left(3^x - \frac{1}{3^x}\right)^2 \, dx$ bằng

- A** $\frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \cdot 9^x \ln 3} - 2x + C$.
- B** $\frac{1}{3} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{3^x \ln 3}\right)^3 + C$.
- C** $\frac{9^x}{\ln 9} - 2x + \frac{\ln 9}{9^x} + C$.
- D** $\left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{\ln 3}{3^x}\right)^2 + C$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

- A** $S = \ln 4035$.
- B** $S = 4$.
- C** $S = \ln 2$.
- D** $S = 1$.

Câu 12. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi - 2x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

- A** $F(x) = -\frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$.
- B** $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$.
- C** $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + 1$.
- D** $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} - \frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - e^x + 1 - m$. Biết $f(0) = 2$, $f(2) = 1 - e^2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A** $(4; 6)$.
- B** $(5; +\infty)$.
- C** $(-2; 4)$.
- D** $(3; 5)$.

Câu 14. Hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm

của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** $F(x) = \ln\left(-\frac{x}{2}\right)$.
- B** $F(x) = \ln|x| + C$.
- C** $F(x) = \ln|x| + \ln 2$.
- D** $F(x) = \ln(-x) + C$.

Câu 15. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.

- A** $F(1) = \ln 2 + 1$.
- B** $F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1$.
- C** $F(1) = 0$.
- D** $F(1) = \ln 2 + 2$.

Câu 16. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), biết rằng $F(-1) = 1$, $F(1) = 4$ và $f(1) = 0$.

- A** $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$.
- B** $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{2x}{3} - \frac{7}{4}$.
- C** $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.
- D** $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 4$. Tìm b .

- A** $b = -3$.
- B** $b = 1$.
- C** $b = -1$.
- D** $b = 3$.

Câu 18. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 4x$. Tìm $F(x)$ biết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$.

- A** $F(x) = \frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{1}{4}$.
- B** $F(x) = \frac{5}{4}$.
- C** $F(x) = -\frac{1}{2} \cos^2 2x - \frac{1}{4}$.
- D** $F(x) = \frac{1}{4} \sin^2 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{7}{8}$.

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ là

- A** $-\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + C$.
- B** $-\tan x + \cot x + C$.
- C** $\frac{1}{\sin^4 x} + C$.
- D** $\tan x - \cot x + C$.

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+2x^2}{x}$ thỏa mãn $F(-1) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $F(x) = \ln|x| + x + 2$.
- (B) $F(x) = \ln|x| + x^2 - 2$.
- (C) $F(x) = \ln|x| + 2x^2 + 1$.
- (D) $F(x) = \ln|x| + x^2 + 2$.

1.3. Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn $F(-1) = -\frac{3}{2}$. Khi đó phương trình $F(x) = 2x + 1$ có số nghiệm thực là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, $f(0) = 1$ và $f(-4) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $f(2) + f(-3)$ bằng

- (A) $\ln 2$. (B) $10 + \ln 2$.
- (C) $3 - 20 \ln 2$. (D) 12.

Câu 3. Kết quả của phép tính $\int \frac{1}{e^x - 2 \cdot e^{-x} + 1} dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C$.
- (B) $\ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C$.
- (C) $\ln(e^x - 2e^{-x} + 1) + C$.
- (D) $\frac{1}{3} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 2} + C$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Biết $f'(x) = \frac{1}{x}$ và $f(e) = f(-1) = 2$. Tính $S = f(2) + f(-2)$.

- (A) $S = 2 \ln 2 + 1$. (B) $S = 2 \ln 2 + 3$.
- (C) $S = 2 \ln 2 + 4$. (D) $S = 2 \ln 2 + 2$.

Câu 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 3. (B) 4. (C) 9. (D) 5.

2. Phương pháp đổi biến số

Câu 1. Đổi biến $t = x - 1$ thì $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$ trở thành

- (A) $\int \frac{t-1}{t^4} dt$. (B) $\int \frac{(t+1)^4}{t} dt$.
- (C) $\int \frac{t+1}{t^4} dt$. (D) $\int \frac{t+1}{t} dt$.

Câu 2. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

- (A) $\int 2(u^2 - 4) du$. (B) $\int (u^2 - 4) du$.
- (C) $\int (u^2 - 3) du$. (D) $\int 2u(u^2 - 4) du$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$?

- (A) $y = \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{4}{5} \sin^5 x + C$.
- (B) $y = -\frac{4}{3} \cos^3 x + \frac{4}{5} \cos^5 x + C$.
- (C) $y = \frac{4}{3} \sin^3 x - \frac{4}{5} \cos^5 x + C$.
- (D) $y = -\frac{4}{3} \sin^3 x + \frac{4}{5} \sin^5 x + C$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$.
- (B) $\int f(x) dx = \ln |1 + 3 \cos x| + C$.
- (C) $\int f(x) dx = 3 \ln |1 + 3 \cos x| + C$.
- (D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$.

Câu 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (A) $\int f(x) dx = \ln^2 x + C$.
- (B) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.
- (C) $\int f(x) dx = \ln x + C$.
- (D) $\int f(x) dx = e^x + C$.

Câu 6. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$.

- (A) $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x + 1)^3} + C$.
- (B) $\sqrt{\ln x + 1} + C$.
- (C) $\frac{1}{2} \sqrt{(\ln x + 1)^2} + C$.
- (D) $2\sqrt{\ln x + 1} + C$.

Câu 7. Nguyên hàm $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$ ($x > 0$) bằng

- A $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$. B $x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.
 C $\ln^2 x + \ln x + C$. D $x + \ln^2 x + C$.

Câu 8. Cho $\int f(x) dx = x\sqrt{x^2 + 1}$. Tìm $I = \int x \cdot f(x^2) dx$.

- A $I = x^2\sqrt{x^4 + 1} + C$.
 B $I = \frac{x^4}{2}\sqrt{x^4 + 1} + C$.
 C $I = \frac{x^2}{2}\sqrt{x^4 + 1} + C$.
 D $I = x^3\sqrt{x^4 + 1} + C$.

Câu 9. Cho $\int 2x(3x - 2)^6 dx = A(3x - 2)^8 + B(3x - 2)^7 + C$ với $A, B, C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A + 7B$.

- A $\frac{23}{252}$. B $\frac{241}{252}$. C $\frac{52}{9}$. D $\frac{7}{9}$.

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \sin^2 x \cos x$ là

- A $\sin^3 x + C$. B $-\sin^3 x + C$.
 C $\cos^3 x + C$. D $-\cos^3 x + C$.

Câu 11. Xác định họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x + 1)e^{x^2 + 2x - 3}$.

- A $F(x) = \frac{e^{x^2 + 2x - 3} + C}{2}$, $C \in \mathbb{R}$.
 B $F(x) = \frac{e^{x^2 + 2x - 3}}{x + 1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 C $F(x) = 2e^{x^2 + 2x - 3} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 D $F(x) = e^{x^2 + 2x - 3} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Câu 12. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.

- A $F(1) = \ln 2 + 1$. B $F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1$.
 C $F(1) = 0$. D $F(1) = \ln 2 + 2$.

Câu 13. Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$.

- A $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$.
 B $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x} + C$.
 C $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$.

D $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C$.

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}(2x - \ln x)$ là

- A $2x - \frac{\ln^2 x}{2} + C$. B $2x - \frac{1}{x^2} + C$.
 C $\frac{2 \ln |x|}{x} - \frac{1}{x} + C$. D $2x - \frac{\ln x}{x} + C$.

Câu 15. Khi tính nguyên hàm của hàm số $\int \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1}} dx$. Bằng cách đặt $u = \sqrt{x + 1}$ ta được nguyên hàm nào?

- A $\int 2(u^2 - 4)u du$. B $\int 2(u^2 - 4) du$.
 C $\int (u^2 - 4) du$. D $\int (u^2 - 3) du$.

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4 + x^3}$ là

- A $2\sqrt{x^3 + 4} + C$. B $\frac{2}{9}\sqrt{(4 + x^3)^3} + C$.
 C $2\sqrt{(4 + x^3)^3} + C$. D $\frac{1}{9}\sqrt{(4 + x^3)^3} + C$.

Câu 17. Cho $I = \int x(1 - x^2)^{10} dx$. Đặt $u = 1 - x^2$, khi đó viết I theo u và du ta được

- A $I = -\frac{1}{2} \int u^{10} du$. B $I = -2 \int u^{10} du$.
 C $I = \int 2u^{10} du$. D $I = \frac{1}{2} \int u^{10} du$.

Câu 18. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x \sqrt{\sin x + 1}$.

- A $F(x) = \frac{1}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C$.
 B $F(x) = \frac{1 - 2 \sin x - 3 \sin^2 x}{2\sqrt{\sin x + 1}}$.
 C $F(x) = \frac{2}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C$.
 D $F(x) = \frac{1}{3} \sin x \sqrt{\sin x + 1} + C$.

Câu 19. Tìm hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\sin x(4 \cos x + 1)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

- A $F(x) = \cos 2x + \cos x - 1$.
 B $F(x) = -2 \cos 2x + \cos x - 3$.
 C $F(x) = \cos 2x + \cos x$.
 D $F(x) = -\cos 2x - \cos x - 2$.

Câu 20. Tính $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$.

- (A) $\int x(x^2 + 7)^{15} dx = \frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C.$
- (B) $\int x(x^2 + 7)^{15} dx = \frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C.$
- (C) $\int x(x^2 + 7)^{15} dx = -\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C.$
- (D) $\int x(x^2 + 7)^{15} dx = \frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C.$

3. Phương pháp từng phần

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

- (A) $2x^2 \ln x + 3x^2.$
- (B) $2x^2 \ln x + x^2.$
- (C) $2x^2 \ln x + 3x^2 + C.$
- (D) $2x^2 \ln x + x^2 + C.$

Câu 2. Tìm tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \ln x.$

- (A) $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$
- (B) $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$
- (C) $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$
- (D) $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm $f(x) = x \cos 2x dx.$

- (A) $\frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$
- (B) $x \sin 2x - \frac{\cos 2x}{2} + C.$
- (C) $x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + C.$
- (D) $\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$

Câu 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}.$

- (A) $\int f(x) dx = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$
- (B) $\int f(x) dx = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C.$
- (C) $\int f(x) dx = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$
- (D) $\int f(x) dx = 2e^{2x} (x - 2) + C.$

Câu 5. Kết quả của $I = \int xe^x dx$ là

- (A) $I = xe^x - e^x + C.$
- (B) $I = xe^x + e^x + C.$
- (C) $I = \frac{x^2}{2}e^x + C.$

(D) $I = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C.$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + x \ln x$ là

- (A) $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$
- (B) $F(x) = -\cos x + \ln x + C.$
- (C) $F(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$
- (D) $F(x) = -\cos x + C.$

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x + 1) \ln x$ là

- (A) $(x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$
- (B) $(x^2 + x) \ln x - x^2 - x + C.$
- (C) $(x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$
- (D) $(x^2 + x) \ln x - x^2 + x + C.$

Câu 8. Tìm họ nguyên hàm $F(x) = \int (x^2 - x + 1)e^x dx.$

- (A) $F(x) = (x^2 - 3)e^x + C.$
- (B) $F(x) = (x^2 + x + 4)e^x + C.$
- (C) $F(x) = (x^2 + 3x - 4)e^x + C.$
- (D) $F(x) = (x^2 - 3x + 4)e^x + C.$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ là

- (A) $-\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C.$
- (B) $-\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C.$
- (C) $\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C.$
- (D) $\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C.$

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = 2x(e^x - 1)$ là

- (A) $-x^2 - 2xe^x - 2e^x + C.$
- (B) $-x^2 + 2xe^x - 2e^x + C.$
- (C) $-x^2 + 2xe^x - e^x + C.$
- (D) $-x^2 + 2xe^x + 2e^x + C.$

Câu 11. Một nguyên hàm $\int (x - 2) \sin 3x dx = -\frac{(x - a) \cos 3x}{b} + \frac{1}{c} \sin 3x + 2017$ thì tổng $S = a + b + c$ bằng

- (A) $S = 3.$
- (B) $S = 15.$
- (C) $S = 10.$
- (D) $S = 14.$

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(e^x - \sin x)$ là

- A** $(x - 1)e^x + x \cos x - \sin x + C.$
- B** $(x + 1)e^x + x \cos x - \sin x + C.$
- C** $(x - 1)e^x + x \cos x + \sin x + C.$
- D** $(x - 1)e^x - x \cos x - \sin x + C.$

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

- A** $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C.$
- B** $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$
- C** $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$
- D** $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$

Câu 14. Biết $\int x \cdot \cos 2x \, dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab .

- A** $ab = -\frac{1}{8}.$
- B** $ab = \frac{1}{8}.$
- C** $ab = \frac{1}{4}.$
- D** $ab = -\frac{1}{4}.$

Câu 15. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x + 1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(2)$.

- A** $F(2) = e^2 + 7.$
- B** $F(2) = 11e^2 + 3.$
- C** $F(2) = 5e^2 + 7.$
- D** $F(2) = 6e^2 + 7.$

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 \ln x$ là

- A** $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$
- B** $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^3.$
- C** $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x + \frac{1}{16}x^4 + C.$
- D** $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4.$

Câu 17. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\ln 2x}{x^2}$.

- A** $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x - 1).$
- B** $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x + 1).$
- C** $F(x) = -\frac{1}{x}(1 - \ln 2x).$
- D** $F(x) = \frac{1}{x}(\ln 2x + 1).$

Câu 18. Kết quả tính $\int 2x \ln(x - 1) \, dx$ bằng

- A** $(x^2 + 1) \ln(x - 1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

- B** $(x^2 - 1) \ln(x - 1) - \frac{x^2}{2} + x + C.$
- C** $x^2 \ln(x - 1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$
- D** $(x^2 - 1) \ln(x - 1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2xe^{x+1}$ là

- A** $\frac{1}{2}(x - 1)e^{x+1} + C.$
- B** $(x - 1)e^{x+1} + C.$
- C** $2(x - 1)e^{x+1} + C.$
- D** $(2x - 1)e^{x+1} + C.$

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x \ln x$ và $F(1) = 0$. Tính $F(e)$.

- A** $F(e) = \frac{e^2 + 1}{2}.$
- B** $F(e) = \frac{3e^2 - 1}{2}.$
- C** $F(e) = 1.$
- D** $F(e) = 3e^2 - 1.$

Câu 21. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2}$.

- A** $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x - 1) + C.$
- B** $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x + 1) + C.$
- C** $F(x) = -\frac{1}{x}(1 - \ln 2x) + C.$
- D** $F(x) = \frac{1}{x}(\ln 2x + 1) + C.$

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

- A** $\int f(x) \, dx = \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C.$
- B** $\int f(x) \, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C.$
- C** $\int f(x) \, dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 1) + C.$
- D** $\int f(x) \, dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C.$

Câu 23. Tính $F(x) = \int x \cos x \, dx$ ta được kết quả

- A** $F(x) = x \sin x - \cos x + C.$
- B** $F(x) = -x \sin x - \cos x + C.$
- C** $F(x) = x \sin x + \cos x + C.$
- D** $F(x) = -x \sin x + \cos x + C.$

Bài 2

TÍCH PHÂN

A Tóm tắt lí thuyết

◀ **Định nghĩa 2.1.** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là *tích phân* từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$, ký hiệu là $\int_a^b f(x) dx$. Ta còn dùng ký hiệu $F(x) \Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Ta viết

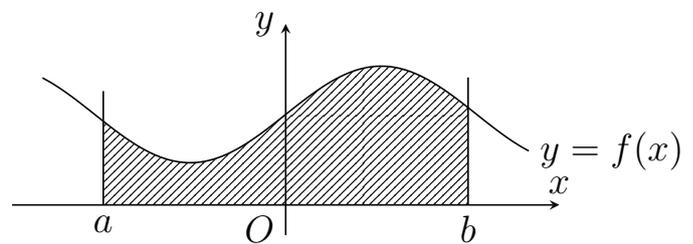
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ta gọi \int_a^b là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x) dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

○ Nhận xét.

✔ Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể ký hiệu bởi $\int_a^b f(x) dx$ hay $\int_a^b f(t) dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t .

✔ Ý nghĩa hình học của tích phân:
 Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b |f(x)| dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, trục Ox và 2 đường thẳng $x = a; x = b$.



◀ **Tính chất 2.1.**

a) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$

b) $\int_a^a f(x) dx = 0$

c) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

d) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$

e) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

f) $\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b$

1. Phương pháp tính tích phân

1.1. Phương pháp đổi biến số

$$\int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

Trong đó $u(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathcal{K} , $y = f(u)$ liên tục và hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên \mathcal{K} , $a, b \in \mathcal{K}$

1.2. Phương pháp từng phần

Nếu u, v là 2 hàm số có đạo hàm liên tục trên \mathcal{K} , $a, b \in \mathcal{K}$ thì

$$\int_a^b u dv = u.v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

B Các dạng toán

Dạng 1. Dùng định nghĩa tính tích phân

Phương pháp:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int_a^b k.f(x) dx &= k. \int_a^b f(x) dx & \textcircled{2} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \\ \textcircled{3} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ trong đó } a < c < b & \textcircled{4} \int_a^b f'(x) dx &= f(x) \Big|_a^b \end{aligned}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1

a) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$

b) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$. Tính $J = \int_1^2 f'(x) dx$.

c) Cho $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$. Tính $K = \int_1^3 f(x) dx$

BÀI GIẢI

a) Ta có: $I = \int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 - 2.5 = 2 - 10 = -8.$ □

b) Ta có: $J = \int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1.$ □

c) Ta có: $K = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -2 + 1 = -1.$ □

VÍ DỤ 2

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 [5f(x) - 3x^2] dx$

BÀI GIẢI

⌋ Ta có: $I = \int_0^1 [5f(x) - 3x^2] dx = 5 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 3x^2 dx = 5 \cdot 2 - x^3 \Big|_0^1 = 10 - 1 = 9.$ □

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Biết $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$. Tính $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$.

🗨️ Lời giải.

..... |

..... |

Bài 2. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$. Tính $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$

🗨️ Lời giải.

..... |

..... |

Bài 3. Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 6$. Tính $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$

🗨️ Lời giải.

..... |

..... |

Bài 4. Biết $\int_1^5 f(x) dx = 4$. Tính $\int_1^5 3f(x) dx$

🗨️ Lời giải.

..... |

..... |

Bài 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1; 4]$, $f(1) = 1$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 2$. Tính $f(4)$.

🗨️ Lời giải.

..... |

..... |

Bài 6. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(x) dx = -4$. Tính $\int_2^4 f(x) dx$

🗨️ Lời giải.

LUYỆN TẬP 1

- a) Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$
- b) Biết $\int_2^3 f(x) dx = 3$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$. Tính $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx$
- c) Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$
- d) Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$. Tính $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$

LUYỆN TẬP 2

- a) Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 4$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$
- b) Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 3$. Tính $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$
- c) Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 5$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$
- d) Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 6$. Tính $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$

LUYỆN TẬP 3

- a) Biết tích phân $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$. Tính $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$
- b) Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$. Tính $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$
- c) Biết $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$. Tính $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$
- d) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Tính $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$

LUYỆN TẬP 4

- a) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$

- b) Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$
- c) Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.

Dạng 2. Tính tích phân bằng bảng nguyên hàm

Phương pháp:

Sử dụng bảng nguyên hàm để tính các tích phân.

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 3

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^3 (3x^2 - 4x + 5) dx.$

b) $J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx.$

c) $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

d) $H = \int_{-5}^{-2} \frac{3}{3x+1} dx.$

BÀI GIẢI

a) $I = \int_1^3 (3x^2 - 4x + 5) dx = (x^3 - 2x^2 + 5x) \Big|_1^3 = (3^3 - 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3) - (1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1) = 20$. Vậy $I = 20$ □

b) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx = \int_0^1 (1+x)^{-3} dx = \frac{(1+x)^{-2}}{-2} \Big|_0^1 = \frac{(1+1)^{-2}}{-2} - \frac{(1+0)^{-2}}{-2} = \frac{3}{8}$. □

c) $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. □

d) $H = \int_{-5}^{-2} \frac{3}{3x+1} dx = \ln |3x+1| \Big|_{-5}^{-2} = \ln |3 \cdot (-2) + 1| - \ln |3 \cdot (-5) + 1| = \ln 5 - \ln 14 = \ln \frac{5}{14}$. □

VÍ DỤ 4

a) Tìm số thực m thỏa mãn $\int_0^m (2x+5) dx = 6$.

b) Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \, dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị $P = ab + b - a$.

BÀI GIẢI

a) Ta có $\int_0^m (2x + 5) \, dx = 6 \Leftrightarrow (x^2 + 5x) \Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^2 + 5m = 6 \Leftrightarrow m^2 + 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -6 \end{cases}$. Vậy giá trị m cần tìm là: $m = 1$ hoặc $m = -6$. □

b) Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{5} (\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0) = -\frac{1}{5} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Theo đề: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \, dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$. $P = ab + b - a = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$. □

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 10) \, dx$

b) $B = \int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x}) \, dx$

c) $C = \int_0^2 x(x+1)^2 \, dx$

d) $D = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x} \right) \, dx$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Tính các tích phân sau:

a) $A = \int_1^3 \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \, dx$

b) $B = \int_0^1 e^{3x} \, dx$

c) $C = \int_0^1 7^x \, dx$

d) $D = \int_0^6 \frac{1}{x+6} \, dx$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos \left(3x - \frac{2\pi}{3} \right) dx$$

$$b) B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

$$c) C = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

$$d) D = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x dx$$

Lời giải.

Bài 4. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_0^1 \sqrt[3]{5+3x} dx$$

$$b) B = \int_3^5 \frac{4x}{\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x+1}} dx$$

$$c) C = \int_1^5 \frac{5x}{\sqrt{8x+1} - \sqrt{3x+1}} dx$$

$$d) D = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} dx$$

Lời giải.

Bài 5. Tính các tích phân sau:

$$a) A = \int_0^1 \frac{5}{3x+5} dx$$

$$b) B = \int_1^4 \frac{2x+1}{x-2} dx$$

$$c) C = \int_1^2 \frac{3x^2+x+1}{x} dx$$

$$d) D = \int_0^1 \frac{x^3}{x+2} dx$$

Lời giải.

Bài 6. Tìm tham số m thỏa mãn điều kiện:

a) $\int_{-1}^m e^{x+1} dx = e^2 - 1.$

b) $\int_2^5 m^2 (5 - x^3) dx = -549.$

c) $\int_m^2 (3 - 2x)^4 dx = \frac{122}{5}.$

d) $\int_0^m (3x^2 - 12x + 11) dx = 6.$

Lời giải.

Bài 7.

a) Biết $\int_1^2 \sqrt{2x - 1} dx = \frac{\sqrt{a} - 1}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $a - b^3$

b) Biết $\int_1^3 \sqrt{8 - 2x} dx = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{3}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = ab + a + b$

c) Biết $\int_2^3 \sqrt[3]{3x - 5} dx = \sqrt[3]{a} - \frac{1}{b}$ với a, b là các số nguyên. Tính $P = ab + a - b$

d) Biết $\int_2^6 \frac{2 dx}{\sqrt{2x - 1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = ab + a + b$

Lời giải.

LUYỆN TẬP 1

Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^{\sqrt{2}} (x^3 + 2x + 1) dx.$

c) $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2} dx$

b) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{3}{x} + e^{3x+1}\right) dx$

d) $\int_1^e \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x^2\right) dx$

LUYỆN TẬP 2

Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\pi} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx.$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos 2x) dx$

b) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx$

LUYỆN TẬP 3

Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 (e^{2x} + 1) dx.$

c) $\int_1^3 \frac{3}{5x+1} dx$

b) $\int_0^1 (3^x - 2) dx$

d) $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx$

LUYỆN TẬP 4

a) Tìm m , biết $\int_1^2 [m^2 + (4 - 4m)x + 4x^3] dx = \int_2^4 2x dx.$

b) $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b.$

c) Biết $\int_0^a \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{4}$. Tìm a

d) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{a} \ln b$ với $b > 0$. Tính $S = a^2 + b$.

VẬN DỤNG 1

a) Biết $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} \, dx = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + 2b + 2^a - 2^b$.

b) Biết $\int_0^1 \frac{2x-1}{x+1} \, dx = a + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = ab - a + b$.

c) Biết $\int_0^1 \frac{x^3}{x+2} \, dx = \frac{a}{3} + b \ln 3 + c \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = 2a + 4b^2 + 3c^3$.

d) Biết $\int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x-2} \, dx = a \ln \frac{2}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + 4b$.

VẬN DỤNG 2

a) Biết $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x} = a \ln 5 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = -2a + b + 3c^2$.

b) Biết $\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x} \, dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + b - ab$.

c) Biết $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(2x+1)} \, dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b + c$.

d) Biết $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6} = a \ln 2 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

Dạng 3. Tích phân hàm số chứa trị tuyệt đối $\int_a^b |f(x)| \, dx$

Phương pháp

Sử dụng tính chất của tích phân

$$\int_a^b |f(x)| \, dx = \int_a^c |f(x)| \, dx + \int_c^b |f(x)| \, dx$$

đến đây ta có 2 cách để phá dấu giá trị tuyệt đối.

☑ **Cách 1.** Xét dấu biểu thức để khử dấu giá trị tuyệt đối.

☑ **Cách 2.** Giải phương trình $f(x) = 0$ trên $(a; b)$. Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có các nghiệm

$x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$. Khi đó

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 5

Tính tích phân sau

$$I = \int_0^2 |1 - x| dx$$

BÀI GIẢI

Cách 1: Xét dấu biểu thức: $1 - x$

Giải phương trình $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$I = \int_0^2 |1 - x| dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx$$

$$I = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Cách 2: Giải phương trình $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; 2)$.

$$\text{Ta có: } I = \int_0^2 |1 - x| dx = \left| \int_0^1 (1 - x) dx \right| + \left| \int_1^2 (1 - x) dx \right| = \left| \frac{1}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} \right| = 1$$

x	0	1	2
$1 - x$		+	-

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^3 |x^2 - 2x| dx$

b) $K = \int_0^4 |x^2 + 4x - 5| dx$

c) $J = \int_0^2 |x^2 - x| dx$

d) $H = \int_2^4 |9 - x^2| dx$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP 1

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx.$

b) $J = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$

c) $K = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$

d) $H = \int_{-2}^{-1} |2x - |x + 1|| dx$

LUYỆN TẬP 2

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^4 |3 - x| dx.$

b) $J = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$

c) $K = \int_{-2}^3 (|x + 1| + |x - 2|) dx$

d) $H = \int_0^3 \left| \sqrt{x^2 - 4x + 4} \right| - 1 dx$

Dạng 4. Phương pháp đổi biến số

$$\int_a^b f[u(x)] u'(x) dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)]$$

Các bước đổi biến số

- ☑ Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx.$
- ☑ Đổi cận

x	a	b
t	$u(a)$	$u(b)$

- ☑ Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 6

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 x(x - 1)^{20} dx.$

b) $J = \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} x dx$

c) $K = \int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx.$

d) $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin x + 1} \cos x dx$

BÀI GIẢI

a) Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x \Rightarrow dx = dt$

Ta có:

$$I = \int_0^1 x(x-1)^{20} dx = \int_{-1}^0 t^{20}(t+1) dt$$

Đổi cận		
x	0	1
t	-1	0

$$I = \int_{-1}^0 (t^{21} + t^{20}) dt = \left(\frac{t^{22}}{22} + \frac{t^{21}}{21} \right) \Big|_{-1}^0 = \left(\frac{0}{22} + \frac{0}{21} \right) - \left(\frac{(-1)^{22}}{22} + \frac{(-1)^{21}}{21} \right) = \frac{1}{462}.$$

b) Đặt $t = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow t^2 = 2-x^2 \Rightarrow t dt = -x dx$

Ta có:

$$J = \int_0^1 \sqrt{2-x^2} x dx = - \int_{\sqrt{2}}^1 t \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$$

Đổi cận		
x	0	1
t	$\sqrt{2}$	1

$$= \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

c) Đặt $t = \sqrt{\ln x + 1} \Rightarrow t^2 = \ln x + 1 \Rightarrow \ln x = t^2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} dx = 2t dt$.

Ta có:

$$K = \int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx = \int_1^2 \frac{(t^2-1)^2}{t} dt =$$

Đổi cận		
x	1	e^3
t	1	2

$$= \int_1^2 \left(t^3 - 2t + \frac{1}{t} \right) dt = \left(\frac{t^4}{4} - t^2 + \ln t \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{4} + \ln 2$$

d) Đặt $t = \sqrt{3 \sin x + 1} \Rightarrow t^2 = 3 \sin x + 1 \Rightarrow 2t dt = 3 \cos x dx \Rightarrow \frac{2t}{3} dt = \cos x dx$

Ta có:

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin x + 1} \cos x dx = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{9}(8-1) = \frac{14}{9}.$$

Đổi cận		
x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	2

VÍ DỤ 7

Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x) dx$.

BÀI GIẢI

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2 dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx$.

Khi đó:

$$I = \int_0^2 f(2x) dx = \int_0^4 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Đổi cận:		
x	0	2
t	0	4

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2} dx.$

b) $I = \int_1^2 (1-x)x dx dx.$

Bài 5. Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$$

$$b) I = \int_0^{\ln 6} \frac{1}{\sqrt{3 + e^x}} dx.$$

$$c) I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{5 - e^x} e^x dx.$$

$$d) I = \int_1^4 \frac{e^{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx.$$

Lời giải.

Bài 6. Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx.$$

$$b) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx.$$

$$c) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + \cos x} dx.$$

$$d) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (2 \cos x + 1)}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx.$$

$$e) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 \sin^2 x + 1}} dx.$$

$$f) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 + \sqrt{3 \sin x + 1}} dx.$$

Lời giải.

Bài 7.

a) Cho $\int_0^4 f(x) dx = 4$. Tính $\int_0^4 f(4x) dx$

b) Cho $\int_0^{2022} f(x) dx = 1$. Tính $\int_0^1 f(2022x) dx$

c) Biết $\int_1^3 f(3x - 1) dx = 20$. Tính $\int_2^8 f(x) dx$.

d) Cho $\int_0^1 f(x) = 2022$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$

Lời giải.

LUYỆN TẬP 1

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 x(1-x)^{19} dx$.

b) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$.

c) $I = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1} dx$.

d) $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$.

$$e) I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot x \, dx.$$

$$f) I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} x^3 \, dx.$$

LUYỆN TẬP 2

Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 2x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx.$$

$$b) I = \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 \, dx.$$

$$c) I = \int_0^1 (1+3x)(1+2x+3x^2)^{10} \, dx.$$

$$d) I = \int_0^1 2[x(1-x^2)]^5 \, dx.$$

LUYỆN TẬP 3

Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_{-1}^0 (x-1)^2 \sqrt{x+1} \, dx.$$

$$b) I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx.$$

$$c) I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} \, dx.$$

$$d) I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} \, dx.$$

LUYỆN TẬP 4

Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x} \, dx.$$

$$b) I = \int_1^e \frac{1+2\ln x}{x} \, dx.$$

$$c) I = \int_1^e \frac{\ln(x)-2}{x \ln(x)+x} \, dx.$$

$$d) I = \int_1^e \frac{\ln(x)+1}{x \ln x + 1} \, dx.$$

$$e) I = \int_1^e \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x} \, dx$$

$$f) I = \int_1^e \frac{\ln x \sqrt{1+\ln^2 x}}{x} \, dx.$$

LUYỆN TẬP 5

Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^1 x e^{x^2} \, dx.$$

$$b) I = \int_0^1 (2x-1)e^{x-x^2} \, dx.$$

$$c) I = \int_0^{\ln x} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \, dx.$$

$$d) I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sqrt{e^x-1} \cdot e^{2x} \, dx.$$

$$e) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$$

$$f) I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx.$$

LUYỆN TẬP 6

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3 \cos x) \sin x \, dx.$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, dx.$

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x \, dx.$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 \cos^2 x + 1}} \, dx.$

e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)^2}{\cos^2 x} \, dx$

f) $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx.$

LUYỆN TẬP 7

a) Biết $\int_0^3 f(x) \, dx = 9$. Tính $I = \int_0^1 [f(3x) + 2x] \, dx$

b) Biết $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x) = 1$ và $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x) \, dx = 13$. Tính $\int_0^1 x^2 f(x^3) \, dx$

c) Biết $\int_1^{13} f(x) \, dx = 2022$. Tính $I = \int_0^4 f(3x + 1) \, dx$

d) Biết $\int_1^8 f(x) \, dx = 5$. Tính $I = \int_1^2 x^2 f(x^3) \, dx$

VẬN DỤNG 1

Cho $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn $\int_1^2 f'(x) \, dx = 10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln 2$.
 Biết rằng $f(x) > 0, \forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$

VẬN DỤNG 2

Cho $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1; 2]$, $f(2) = 2$ và $f(4) = 2018$. Tính $I = \int_1^2 f'(2x) \, dx$.

VẬN DỤNG 3

Cho $\int_1^2 f(x) \, dx = 2022$. Tính $I = \int_0^1 x f(x^2 + 1) \, dx$

VẬN DỤNG 4

Cho $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cdot \cos x \, dx = 2$. Tính $I = \int_0^3 f(x) \, dx$.

VẬN DỤNG 5

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx.$

b) $J = \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx.$

c) $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$

d) $H = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{3}{x^2+4} dx$

Dạng 5. Phương pháp từng phần

Phương pháp:

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là 2 hàm số có đạo hàm và liên tục trên $[a; b]$ thì

$$I = \int_a^b u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x).v'(x) dx \text{ hay } I = \int_a^b u dv = u.v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Thực hành:

☑ **Nhận dạng:** Tích 2 hàm khác nhau.

☑ Đặt $\begin{cases} u = \dots \xrightarrow{\text{đạo hàm}} du = \dots dx \\ dv = \dots dx \xrightarrow{\text{nguyên hàm}} v = \dots \end{cases}$, suy ra $I = \int_a^b u dv = u.v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

☑ Thứ tự ưu tiên chọn: $\begin{cases} u : \text{loga, đa, lượng, mũ} \\ dv = \text{phần còn lại} \end{cases}$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 8

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 (x-3)e^x dx.$

b) $J = \int_1^e x^2 \ln x dx.$

c) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos x dx.$

d) $H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3x}{\cos^2 x} dx.$

BÀI GIẢI

a) Đặt $\begin{cases} u = x-3 \\ dv = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = (x-3)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [(1-3)e^1 - (0-3)e^0] - e^x \Big|_0^1 = -2e+3 - (e^1 - e^0) = 4 - 3e.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$$J = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \left(\frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \ln 1 \right) - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2e^3 - 1}{9}.$$

c) Đặt $\begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$K = (2x - 1) \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \frac{\pi}{2} - (2 \cdot 0 - 1) \sin 0 \right] + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi - 1 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \pi - 2.$$

d) Đặt $\begin{cases} u = 3x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$K = 3x \cdot \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \left[\left(3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \right) - (3 \cdot 0 \tan 0) \right] + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

VÍ DỤ 9

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$ thỏa $f(1) = 0, f(2) = 2$ và $\int_1^2 f(x) dx = 1$.

Tính $I = \int_1^2 x f'(x) dx$

BÀI GIẢI

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Ta có $I = x \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) dx = 2 \cdot f(2) - 1 \cdot f(1) - 1 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 - 1 = 3$.

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 x \cdot e^x dx.$

b) $J = \int_0^2 (2x + 1) e^x dx.$

c) $H = \int_0^1 (4x - 1) e^{2x} dx.$

d) $K = \int_0^1 \frac{3x + 1}{e^{2x}} dx.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 (2x - 1) \ln x \, dx.$

b) $J = \int_1^2 x \ln x \, dx.$

c) $H = \int_1^e (x + 2) \ln x \, dx.$

d) $K = \int_{-1}^1 (4x - 1) \ln(2x + 3) \, dx.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx.$

b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 4x) \cos x \, dx.$

c) $H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + 1) \sin 2x \, dx.$

d) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - x) \cos x \, dx.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



LUYỆN TẬP 1

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^2 \frac{x^3 - 2 \ln x}{x^2} dx.$

c) $H = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x + 1)}{x^2} dx.$

b) $J = \int_1^e 2x(1 - \ln x) dx.$

d) $K = \int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^x + 1) dx.$

LUYỆN TẬP 2

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx.$

c) $I = \int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx.$

b) $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx.$

d) $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx.$

LUYỆN TẬP 3

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^2 \frac{\ln(x + 1)}{x^2} dx.$

c) $I = \int_0^1 xe^{-2x} dx.$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - x) \sin x dx.$

d) $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx.$

VẬN DỤNG 1

Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm là $F(x)$ trên $[1; 2]$, $F(2) = 1$ và $\int_1^2 F(x) dx = 5$.

Tính $I = \int_1^2 (x - 1)f(x) dx$

VẬN DỤNG 2

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^1 x f'(2x) dx$.

VẬN DỤNG 3

Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $f(2) = 2$.

Tính $I = \int_0^4 f'(\sqrt{x}) dx$.

VẬN DỤNG 4

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa $\int_1^2 f'(x) \ln[f(x)] dx = 1$ và $f(1) = 1$, $f(2) > 1$. Tính $f(x)$.

VẬN DỤNG 5

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.

Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

VẬN DỤNG 6

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x dx$.

3. Tích phân qua các đề thi Đại Học

① (Khối D-2003). $I = \int_0^1 |x^2 - x| dx$.

② (Khối B-2003). $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$.

③ (Khối A-2003). $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$.

④ (Khối D-2004). $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$.

⑤ (Khối B-2004). $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \cdot \ln x}{x} dx$

⑥ (Khối A-2004). $I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$.

⑦ (Khối D-2005). $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cdot \cos x dx$

⑧ (Khối B-2005). $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos x} dx$

- 9 (Khối A-2005). $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx.$
- 10 (Khối D-2006). $I = \int_0^1 (x - 2)e^{2x} dx.$
- 11 (Khối B-2006). $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$
- 12 (Khối A-2006). $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx.$
- 13 (Khối D-2007). $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx.$
- 14 (Khối D-2008). $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx.$
- 15 (Khối A-2008). $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx.$
- 16 (Khối B-2008). $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$
- 17 (Khối D-2009). $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}.$
- 18 (Khối B-2009). $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x + 1)^2} dx.$
- 19 (Khối A-2009). $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx.$
- 20 (Khối D-2010). $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx.$
- 21 (Khối B-2010). $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx.$
- 22 (Khối A-2010). $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{2e^x + 1} dx.$
- 23 (Khối D-2011). $I = \int_0^4 \frac{4x - 1}{\sqrt{2x + 1} + 2} dx.$
- 24 (Khối B-2011). $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx.$
- 25 (Khối D-2012). $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx.$
- 26 (Khối A-2011). $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x + 1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx.$
- 27 (Khối B-2012). $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx.$
- 28 (Khối A-2012). $I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x + 1)}{x^2} dx.$
- 29 (Khối D-2013). $I = \int_0^1 \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} dx.$
- 30 (Khối B-2013). $I = \int_0^1 x\sqrt{2 - x^2} dx.$
- 31 (Khối A-2013). $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x dx.$
- 32 (Khối D-2014). $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + 1) \sin 2x dx.$
- 33 (Khối B-2014). $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx.$
- 34 (ĐH-2015). $I = \int_0^1 (x - 3)e^x dx.$
- 35 (ĐH-2016). $I = \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2 + 16}) dx.$
- 36 (Minh họa-2015). $I = \int_1^2 (2x^3 + \ln x) dx.$



1. Sử dụng định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản

1.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Tích phân $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ có giá trị bằng

- A $\ln 2 - 1.$
- B $-\ln 2.$
- C $\ln 2.$
- D $1 - \ln 2.$

Câu 2. Tích phân $I = \int_0^2 dx$ bằng

- A 4.
- B 0.
- C 1.
- D 2.

Câu 3. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ bằng

- A 0.
- B 1.
- C $\frac{\pi}{2}.$
- D $\pi.$

Câu 4. Cho $\int_0^3 f(x) dx = 2$ và $\int_0^3 g(x) dx =$

3. Tính giá trị của tích phân $L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)] dx.$

- A $L = 4.$
- B $L = -1.$
- C $L = -4.$
- D $L = 1.$

Câu 5. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3, \int_2^5 f(x) dx = -1$ thì

$\int_1^5 f(x) dx$ bằng

- A -2.
- B 2.
- C 3.
- D 4.

Câu 6. Giá trị tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ bằng

- A $\log 2.$
- B $\ln 2.$
- C 1.
- D $-\ln 2.$

Câu 7. Tính $I = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 3) dx.$

- A 1.
- B 2.
- C 3.
- D 4.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $F(x)$

là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x) dx = 9$ và

$F(0) = 3.$ Tính $F(9).$

- A $F(9) = -6.$
- B $F(9) = 6.$
- C $F(9) = 12.$
- D $F(9) = -12.$

Câu 9. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ bằng

- A $\log 2.$
- B 1.
- C $\ln 2.$
- D $-\ln 2.$

Câu 10. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A $\int_a^a k f(x) dx = 0.$

B $\int_a^b x f(x) dx = x \int_a^b f(x) dx.$

C $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

D $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(1) - f(0) = 2.$ Tích phân

$I = \int_0^1 [f'(x) - e^x] dx$ bằng

- A $1 - e.$
- B $1 + e.$
- C $3 - e.$
- D $3 + e.$

Câu 12. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 2g(x) dx = 8.$

Khi đó $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- A 10.
- B 6.
- C 18.
- D 0.

Câu 13. Cho tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx = 2.$ Tính

tích phân $J = \int_0^2 [3f(x) - 2] dx.$

- (A) $J = 6$. (B) $J = 2$. (C) $J = 8$. (D) $J = 4$.

Câu 14. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = 7$,

khi đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

- (A) 16. (B) -18. (C) 24. (D) 10.

Câu 15. Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

- (A) $2 \ln 2$. (B) $\frac{2}{3} \ln 2$. (C) $\ln 2$. (D) $\frac{1}{3} \ln 2$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_1^8 f(x) dx = 9$, $\int_4^{12} f(x) dx = 3$ và

$\int_4^8 f(x) dx = 5$. Tính $\int_1^{12} f(x) dx$.

- (A) $I = 17$. (B) $I = 1$.
(C) $I = 11$. (D) $I = 7$.

Câu 17. Cho $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$ và $\int_1^2 f(x) dx = 3$,

khi đó $\int_{-1}^2 f(x) dx$ bằng

- (A) 3. (B) 2. (C) 9. (D) 18.

Câu 18. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và $a, b, c, b+c \in (\alpha; \beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

(B) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b+c} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$.

(C) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b+c} f(x) dx + \int_{b+c}^c f(x) dx$.

(D) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$.

Câu 19. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_2^4 f(x) dx = -1$.

Tích phân $\int_1^4 f(x) dx$ bằng

- (A) -3. (B) 3. (C) 1. (D) -1.

Câu 20. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = 7$,

khi đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

- (A) 16. (B) 10. (C) 24. (D) -18.

Câu 21. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = -2$,

khi đó $\int_0^2 [2f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) 5. (B) 4. (C) 8. (D) 1.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\int_a^a f(x) dx = 0$.

(B) $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

(C) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

(D) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Câu 23. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -2$,

giá trị của $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx$ bằng

- (A) 7. (B) -1. (C) 5. (D) 1.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^3 f(x) dx = 5$ và $\int_{-1}^3 f(x) dx = 1$. Tính tích

phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

- (A) $I = -6$. (B) $I = 6$.

- (C) $I = 4$. (D) $I = -4$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $\int f(x) dx = F(x) + C$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) $\int_a^b f(x) dx = b - a$.
 (B) $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.
 (C) $\int_a^b f(x) dx = a - b$.
 (D) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Câu 26. Giá trị của $\int_0^1 (2019x^{2018} - 1) dx$ bằng

- (A) 0. (B) $2^{2017} + 1$.
 (C) $2^{2017} - 1$. (D) 1.

Câu 27. Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 (2x + 1) dx$.

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) $-\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K và các hằng số $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ với $k \in \mathbb{R}$.
 (B) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
 (C) $\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.
 (D) $\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(t) dt$.

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} (e^{4x} + 1) dx$.

- (A) $I = \frac{15}{4} + \ln 2$. (B) $I = 4 + \ln 2$.

- (C) $I = \frac{17}{4} + \ln 2$. (D) $I = \frac{15}{2} + \ln 2$.

Câu 30. Biết $\int_2^5 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 g(x) dx = 9$.

Tích phân $\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- (A) 10. (B) 3. (C) 6. (D) 12.

Câu 31. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số bất kỳ liên tục trên \mathbb{R} và a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0$.
 (B) $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$.
 (C) $\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.
 (D) $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2; 3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx$,

biết $F(-1) = 1$, $F(2) = 4$.

- (A) $I = 6$. (B) $I = 10$.
 (C) $I = 3$. (D) $I = 9$.

Câu 33. Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập \mathbb{R} . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
 (B) $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.
 (C) $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$.

(D) $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a).$

Câu 34. Tích phân $\int_1^2 (x+3)^2 dx$ bằng

- (A)** 61. **(B)** $\frac{61}{3}$. **(C)** $\frac{61}{9}$. **(D)** 4.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(2) = 2$, $f(3) = 5$; hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $[2; 3]$.

Khi đó $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

- (A)** 3. **(B)** -3. **(C)** 10. **(D)** 7.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$ biết $F(0) = 2$ và $F(1) = 5$.

- (A)** $\int_0^1 f(x) dx = -3$. **(B)** $\int_0^1 f(x) dx = 7$.
(C) $\int_0^1 f(x) dx = 1$. **(D)** $\int_0^1 f(x) dx = 3$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^3 f'(x) dx = 9$. Giá trị của $f(3)$ là

- (A)** 6. **(B)** 3. **(C)** 10. **(D)** 9.

Câu 38. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{2}{2x+1} dx$ bằng

- (A)** $I = 2 \ln 2$. **(B)** $I = 2 \ln 3$.
(C) $I = \ln 2$. **(D)** $I = \ln 3$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và $\int_0^2 f(x) dx = 1, \int_2^3 f(x) dx = 4$. Tính

$I = \int_0^3 f(x) dx.$

- (A)** $I = 5$. **(B)** $I = -3$.
(C) $I = 3$. **(D)** $I = 4$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có $\int_0^2 f(x) dx = 9, \int_2^4 f(x) dx = 4$. Tính giá trị của

$I = \int_0^4 f(x) dx.$

- (A)** $I = 5$. **(B)** $I = 36$.
(C) $I = \frac{9}{4}$. **(D)** $I = 13$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x - 3f(x)] dx$ có giá trị bằng

- (A)** -3. **(B)** 3. **(C)** $\frac{3}{2}$. **(D)** $-\frac{3}{2}$.

Câu 42. Cho $\int_1^5 f(x) dx = 6$ và $\int_1^5 g(x) dx = 8$.

Giá trị của $\int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A)** 16. **(B)** 14. **(C)** 12. **(D)** 10.

Câu 43. Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_{-1}^5 [2f(x) + 3g(x)] dx =$

$-5; \int_{-1}^5 [3f(x) - 5g(x)] dx = 21$. Tính

$\int_{-1}^5 [f(x) + g(x)] dx.$

- (A)** -5. **(B)** 1. **(C)** 5. **(D)** -1.

Câu 44. Kết quả của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

bằng

- (A)** $I = 1$. **(B)** $I = -2$.
(C) $I = 0$. **(D)** $I = -1$.

Câu 45. Cho các số thực $a, b (a < b)$. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên \mathbb{R} thì

(A) $\int_a^b f(x) dx = f'(a) - f'(b).$

- B** $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.
- C** $\int_a^b f'(x) dx = f(a) - f(b)$.
- D** $\int_a^b f(x) dx = f'(b) - f'(a)$.

Câu 46. Cho $\int_1^5 h(x) dx = 4$ và $\int_1^7 h(x) dx = 10$, khi đó $\int_5^7 h(x) dx$ bằng

- A** 7. **B** 2. **C** 6. **D** 5.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A** $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a)$.
- B** $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- C** $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$.
- D** $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.

Câu 48. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 3$ và $\int_1^3 g(x) dx = 4$, khi đó $\int_1^3 [4f(x) - g(x)] dx$ bằng

- A** 16. **B** 8. **C** 11. **D** 19.

Câu 49. Cho $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ và $\int_{-1}^1 g(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_1^{-1} [2f(x) - 5g(x)] dx$.

- A** $I = -7$. **B** $I = 7$.
- C** $I = -14$. **D** $I = 14$.

Câu 50. Biết $\int_{2018}^{2019} f(x) dx = -2$, $\int_{2018}^{2019} g(x) dx = 6$.

Tích phân $\int_{2018}^{2019} [2f(x) - g(x)] dx$ bằng

- A** 10. **B** -2. **C** 22. **D** -10.

1.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A** -3. **B** 12. **C** -8. **D** 1.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 7$, $\int_3^{10} f(x) dx = 8$, $\int_3^6 f(x) dx =$

9. Giá trị của $I = \int_0^{10} f(x) dx$ bằng

- A** 5. **B** 6. **C** 7. **D** 8.

Câu 3. Cho $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m + p + q$ bằng

- A** 10. **B** 6. **C** $\frac{22}{3}$. **D** 8.

Câu 4. Tích phân $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

- A** 1. **B** -3. **C** 3. **D** -1.

Câu 5. Cho $\int_4^{16} f(x) dx = 20$. Tính $\int_1^4 f(4x) dx$.

- A** 80. **B** 24. **C** 5. **D** 16.

Câu 6. Biết $\int_1^7 f(x) dx = 3$, $\int_5^7 f(x) dx = 5$. Tính

$$I = \int_1^5 f(x) dx.$$

- (A) $I = -2.$ (B) $I = 2.$
 (C) $I = 1.$ (D) $I = -1.$

Câu 7. Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b

là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- (A) $S = -2.$ (B) $S = 5.$
 (C) $S = 2.$ (D) $S = 10.$

Câu 8. Tích phân $\int_1^2 e^x dx$ bằng

- (A) $e - e^2.$ (B) $e^2 - e.$ (C) $e.$ (D) $e^{-1}.$

Câu 9. Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_5^7 f(x) dx = 9$ thì

$\int_2^7 f(x) dx$ bằng

- (A) 3. (B) 6. (C) 12. (D) -6.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7, \int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

giá trị của $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

- (A) $P = 3.$ (B) $P = 1.$ (C) $P = 4.$ (D) $P = 2.$

Câu 11. Nếu $\int_a^d f(x) dx = 5, \int_b^d f(x) dx = 2$, với

$a < d < b$ thì $\int_a^b f(x) dx$ bằng

- (A) -2. (B) 3. (C) 8. (D) 0.

Câu 12. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1} dx =$

$e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

- (A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 2.

Câu 13. Tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = a + b\sqrt{2}$ với

$a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $a - b$ bằng

- (A) 1. (B) -1. (C) -4. (D) 4.

Câu 14. Giả sử $\int_0^9 f(x) dx = 37$ và $\int_9^0 g(x) dx =$

16. Khi đó $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

- (A) $I = 122.$ (B) $I = 58.$
 (C) $I = 143.$ (D) $I = 26.$

Câu 15. Giả sử $\int_0^9 f(x) dx = 37$ và $\int_9^0 g(x) dx =$

16. Khi đó, $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

- (A) $I = 122.$ (B) $I = 58.$
 (C) $I = 143.$ (D) $I = 26.$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(1) =$

$12, \int_1^4 f'(x) dx = 17$. Tính giá trị của $f(4) = ?$

- (A) $f(4) = 19.$ (B) $f(4) = 5.$
 (C) $f(4) = 29.$ (D) $f(4) = 9.$

Câu 17. Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và

$\int_5^{-2} g(x) dx = 3$. Tính $\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$.

- (A) $I = 13.$ (B) $I = 27.$
 (C) $I = -11.$ (D) $I = 3.$

Câu 18. Biết $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$

($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Giá trị $a + b - c$ bằng

- (A) 2. (B) -4. (C) 3. (D) -1.

Câu 19. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1, \int_{-2}^4 f(x) dx = -4$.

Tính $I = \int_2^4 f(x) dx$.

- (A) $I = 5$. (B) $I = -5$.
 (C) $I = -3$. (D) $I = 3$.

Câu 20. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ bằng

- (A) $I = \frac{3\pi}{16}$. (B) $I = -\frac{\pi}{16}$.
 (C) $I = \frac{\pi}{16}$. (D) $I = -\frac{3\pi}{16}$.

Câu 21. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 2$ và $\int_2^0 g(x) dx = 1$,

khi đó $\int_0^2 [f(x) - 3g(x)] dx$ bằng

- (A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) -1.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn

$[0; 10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ và $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

- (A) $P = -4$. (B) $P = 10$.
 (C) $P = 7$. (D) $P = 4$.

Câu 23. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên

$[1; 3]$ thỏa mãn $\int_1^3 f(x) dx = 1, \int_1^3 g(x) dx = 3$.

Tính $\int_3^1 [f(x) - 2g(x)] dx$.

- (A) 1. (B) $\frac{5}{2}$. (C) -1. (D) 5.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và

$\int_0^4 f(x) dx = 10, \int_3^4 f(x) dx = 4$. Tích phân

$\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 4. (B) 7. (C) 3. (D) 6.

Câu 25. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- (A) $(-1; 2)$. (B) $(-\infty; 0)$.
 (C) $(0; 4)$. (D) $(-3; 1)$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và

$\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$

- (A) -18. (B) -2. (C) 18. (D) 2.

Câu 27. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên

tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_0^2 [f(x) - 3g(x)] dx = 4$,

$\int_0^1 f(x) dx = 3$, và $\int_0^2 [2f(x) + g(x)] dx = 8$. Tính

$I = \int_1^2 f(x) dx$.

- (A) $I = 0$. (B) $I = 1$. (C) $I = 3$. (D) $I = 2$.

Câu 28. Nếu các số hữu tỉ a, b thỏa mãn $\int_0^1 (ae^x + b) dx = e + 2$ thì giá trị của biểu thức $a + b$ bằng

- (A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 3.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 12$,

$f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$.

Tính $f(4)$.

- (A) 29. (B) 9. (C) 26. (D) 5.

Câu 30. Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

- (A) $\log \frac{5}{3}$. (B) $\frac{16}{225}$. (C) $\ln \frac{5}{3}$. (D) $\frac{2}{15}$.

Câu 31. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx$.

- (A) $I = \ln 5$. (B) $I = \frac{\ln 5}{2}$.
 (C) $I = 2 \ln 5$. (D) $I = 4 \ln 5$.

Câu 32. Cho $\int_1^2 \frac{2}{x^2 + 2x} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với

a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a + 3b$ bằng

- (A) 5. (B) 1. (C) -1. (D) -5.

Câu 33. Cho $\int_2^5 f(x) dx = 10$, khi đó $I = -\int_5^2 4f(x) dx$ bằng

- (A) 12. (B) 40. (C) -40. (D) -12.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 3]$ đồng thời $f(2) = 2, f(3) = 5$. Khi đó $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

- (A) 3. (B) -3. (C) 10. (D) 7.

Câu 35. Cho biết $\int_0^3 f(x) dx = 3, \int_0^5 f(t) dt = 10$. Tính $\int_3^5 2f(z) dz$.

- (A) -7. (B) 14. (C) 13. (D) 7.

Câu 36. Biết $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{(x + 3)^2} dx = \frac{a}{4} - 4 \ln \frac{4}{b}$, với a, b

là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng

- (A) 25. (B) 41. (C) 20. (D) 34.

Câu 37. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 3$ và $\int_2^{-1} g(x) dx = 1$.

Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

- (A) $\frac{21}{2}$. (B) $\frac{26}{2}$. (C) $\frac{7}{2}$. (D) $\frac{5}{2}$.

Câu 38. Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b

là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- (A) $S = 2$. (B) $S = -2$.
(C) $S = 5$. (D) $S = 10$.

Câu 39. Cho $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với

a, b, c là các số nguyên. Giá trị $P = abc$ là

(A) $P = -36$.

(B) $P = 0$.

(C) $P = 18$.

(D) $P = -18$.

Câu 40. Cho $\int_2^3 f(x) dx = 1, \int_2^3 g(x) dx = 5$. Tìm tất cả các giá trị của a để

$$\int_2^3 [a + 2ax + 3f(x)] dx - \int_2^3 (a - 2)g(x) dx = 10.$$

- (A) 2. (B) -3. (C) 1. (D) 3.

Câu 41. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx = 10$, khi đó $\int_1^2 g(x) dx$ bằng

- (A) 17. (B) 1. (C) -1. (D) -4.

Câu 42. Cho $\int_0^4 f(x) dx = \frac{16}{3}$. Tính $I =$

$$\int_0^4 \left[\frac{5}{(x+1)^2} - 3f(x) \right] dx.$$

(A) $I = -12$.

(B) $I = 0$.

(C) $I = -20$.

(D) $I = 1$.

Câu 43. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x) dx = -2$ và

$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

(A) $P = -\frac{3}{4}$.

(B) $P = -\frac{4}{3}$.

(C) $P = \frac{4}{3}$.

(D) $P = \frac{3}{4}$.

Câu 44. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$

đồng thời $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

- (A) 9. (B) 6. (C) 7. (D) 8.

Câu 45. Biết $\int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x + 2} dx = \frac{1}{a} + b \ln \frac{3}{2}$ với $a, b > 0$. Tính giá trị của $S = a + 2b$.

- (A) $S = 5$. (B) $S = 6$. (C) $S = 9$. (D) $S = 3$.

Câu 46. Cho biết $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = -2$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 [2x + f(x) - 2g(x)] dx.$$

- (A) $I = 11$. (B) $I = 18$.
(C) $I = 5$. (D) $I = 3$.

Câu 47. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$,

khi đó $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{7}{2}$. (C) $\frac{17}{2}$. (D) $\frac{11}{2}$.

Câu 48. Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{dx}{1 - 2x}$.

- (A) $I = -\ln 9$. (B) $I = \ln 9$.
(C) $I = -\ln 3$. (D) $I = \ln 3$.

Câu 49. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Khi

đó $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

- (A) 6. (B) -1. (C) 1. (D) 5.

Câu 50. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 5$ và $\int_0^5 f(x) dx = -3$.

Khi đó $\int_2^5 f(x) dx$ bằng

- (A) 8. (B) 15. (C) -8. (D) -15.

1.3. Mức độ vận dụng

Câu 1. Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x + 2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

- (A) -2. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

Câu 2. Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- (A) $S = -2$. (B) $S = 5$.
(C) $S = 2$. (D) $S = 10$.

Câu 3. Biết $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng

- (A) -8. (B) -10. (C) -12. (D) 16.

Câu 4. Cho tích phân $\int_1^5 \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = abc$.

- (A) $P = -36$. (B) $P = 0$.
(C) $P = -18$. (D) $P = 18$.

Câu 5. Biết $\int_1^2 \frac{1}{4x^2 - 4x + 1} dx = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- (A) $x^2 - 5x + 6 = 0$. (B) $x^2 - 9 = 0$.
(C) $x^2 + 4x - 12 = 0$. (D) $2x^2 - x - 1 = 0$.

Câu 6. Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và

$\int_{-2}^5 g(x) dx = -3$. Tính $\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$.

- (A) $I = -11$. (B) $I = 13$.
(C) $I = 27$. (D) $I = 3$.

Câu 7. Cho $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x + 1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$.

- (A) $P = 1$. (B) $P = 5$. (C) $P = 7$. (D) $P = 2$.

Câu 8. Cho f, g là hai hàm liên tục trên

[1; 3] thoả $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$, $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

- (A) 7. (B) 6. (C) 8. (D) 0.

Câu 9. Cho $\int_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x} dx = a \ln 2 + b \ln 3$. Tính giá trị biểu thức $a^2 - ab - b$.

- (A) 11. (B) 21. (C) 31. (D) 41.

Câu 10. Cho $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $6a + b + c$ bằng

- (A) -2. (B) 1. (C) 2. (D) -1.

Câu 11. Cho $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+m}} dx$, m là số thực dương. Tìm tất cả các giá trị của m để $I \geq 1$.

- (A) $0 < m \leq \frac{1}{4}$. (B) $m \geq \frac{1}{4}$.
(C) $m > 0$. (D) $\frac{1}{8} \leq m \leq \frac{1}{4}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0; 2]$ và thỏa mãn $I = \int_0^2 f(x) dx = 5$. Khi đó giá trị của tích phân

$$K = \int_0^2 (e^{2+\ln f(x)} + 3) dx$$

- (A) $5e^2 + 6$. (B) $5e^2 - 6$.
(C) $6e^2 + 5$. (D) $5e^2 + 9$.

Câu 13. Biết $\int_{-1}^1 \left(\frac{9}{x-3} - \frac{7}{x-2} \right) dx = a \ln 3 - b \ln 2$ với a, b là các số nguyên. Tính giá trị $P = a^2 + b^2$.

- (A) $P = 32$. (B) $P = 130$.
(C) $P = 2$. (D) $P = 16$.

Câu 14. Biết $\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ với $a, b,$

c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $T = a + b + c + d$.

- (A) $T = 13$. (B) $T = 10$.
(C) $T = 12$. (D) $T = 11$.

Câu 15. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

- (A) $S = 6$. (B) $S = 2$.
(C) $S = -2$. (D) $S = 0$.

Câu 16. Biết $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P = a + b + c$.

- (A) $P = \frac{16}{3}$. (B) $P = \frac{13}{2}$.
(C) $P = 5$. (D) $P = \frac{2}{3}$.

Câu 17. Biết $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{b} (-\sqrt{2} + c)$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c$.

- (A) -1. (B) 7. (C) 3. (D) 1.

Câu 18. Cho tích phân $\int_2^3 \frac{1}{x^3+x^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b + c$.

- (A) $S = -\frac{2}{3}$. (B) $S = -\frac{7}{6}$.
(C) $S = \frac{2}{3}$. (D) $S = \frac{7}{6}$.

Câu 19. Cho $\int_2^3 \frac{x+2}{2x^2-3x+1} dx = a \ln 5 + b \ln 3 + 3 \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = 2a - b$.

- (A) $P = 1$. (B) $P = 7$.
(C) $P = -\frac{15}{2}$. (D) $P = \frac{15}{2}$.

Câu 20. Biết $I = \int_1^2 \frac{3x dx}{(2x+2)\sqrt{x+2x\sqrt{x+1}}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - c}{2}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a - b + c$.

- (A) $P = 24$. (B) $P = 12$.
(C) $P = 18$. (D) $P = 22$.

2. Phương pháp đổi biến số

Câu 1. Cho tích phân $I = \int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$. Với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ ta được

- (A) $I = 3 \int_0^1 t^3 dt.$ (B) $I = 3 \int_0^1 t^2 dt.$
 (C) $I = \int_0^1 t^3 dt.$ (D) $I = 3 \int_0^1 t dt.$

Câu 2. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)} dx = a \ln \frac{3}{2} + b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $a - b = 1.$ (B) $2a + b = 1.$
 (C) $a^2 + b^2 = 4.$ (D) $a + 2b = 0.$

Câu 3. Biết $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 4$. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$.

- (A) $S = 2.$ (B) $S = 3.$ (C) $S = 4.$ (D) $S = 5.$

Câu 4. Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1)xdx = 2$, khi đó

$\int_2^5 f(x)dx$ bằng

- (A) 2. (B) 1. (C) -1. (D) 4.

Câu 5. Giả sử $\int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx = a + b \ln c$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

- (A) $S = 5.$ (B) $S = 1.$
 (C) $S = 8.$ (D) $S = 11.$

Câu 6. Tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 +$

$b \ln 2 + \frac{c}{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $a^2 + b^2 + c^2 = 1.$ (B) $a^2 + b^2 + c^2 = 11.$
 (C) $a^2 + b^2 + c^2 = 9.$ (D) $a^2 + b^2 + c^2 = 3.$

Câu 7. Tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = a + b\sqrt{2}$ với

$a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $a - b$ bằng

- (A) 1. (B) -1. (C) -4. (D) 4.

Câu 8. Nếu $\int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 f(t) dt$ với $t = \sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

- (A) $f(t) = 2t^2 + 2t.$ (B) $f(t) = t^2 - t.$
 (C) $f(t) = t^2 + t.$ (D) $f(t) = 2t^2 - 2t.$

Câu 9. Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 3} dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{2} \log \frac{7}{3}.$ (B) $\ln \frac{7}{3}.$
 (C) $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{7}.$ (D) $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}.$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 f(2x) dx = 2$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

- (A) 8. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^6 f(x) dx = 10$, thì $\int_0^3 f(2x) dx$ bằng

- (A) 30. (B) 20. (C) 10. (D) 5.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} đồng thời thỏa mãn $f(0) = f(1) = 5$. Tính tích

phân $I = \int_0^1 f'(x)e^{f(x)} dx$.

- (A) $I = 10.$ (B) $I = -5.$
 (C) $I = 0.$ (D) $I = 5.$

Câu 13. Cho tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$.

Tính tích phân $J = \int_0^2 f(2x) dx$.

- (A) $J = 64.$ (B) $J = 8.$
 (C) $J = 32.$ (D) $J = 16.$

Câu 14. Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1)xdx = 2$. Khi đó $I =$

$\int_2^5 f(x) dx$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) -1.

Câu 15. Cho $\int_0^4 f(x) dx = -1$. Tính giá trị của

$I = \int_0^1 f(4x) dx.$

- (A) $I = \frac{1}{4}.$ (B) $I = -2.$
 (C) $I = -\frac{1}{4}.$ (D) $I = -\frac{1}{2}.$

Câu 16. Cho tích phân $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx$ và $x = 4 \sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt.$
 (B) $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt.$
 (C) $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt.$
 (D) $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt.$

Câu 17. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ được kết quả

- (A) $\frac{1}{6} - \ln 2.$ (B) $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}.$
 (C) $\frac{2\sqrt{2} + 4}{3}.$ (D) $\ln 2 - \frac{1}{6}.$

Câu 18. Cho tích phân $I = \int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9} dx$. Khi đặt $t = \sqrt{x^2 + 9}$ thì tích phân đã cho trở thành

- (A) $I = \int_3^5 t dt.$ (B) $I = \int_0^4 t dt.$
 (C) $I = \int_0^4 t^2 dt.$ (D) $I = \int_3^5 t^2 dt.$

Câu 19. Cho $I = \int_1^4 f(t) dt = 9$. Tính tích phân

$J = \int_0^1 f(3x + 1) dx.$

- (A) 9. (B) 27. (C) 3. (D) 1.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$\int_0^{2017} f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x) dx.$

- (A) $I = 0.$ (B) $I = 1.$
 (C) $I = \frac{1}{2017}.$ (D) $I = 2017.$

Câu 21. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = 1.$ (B) $S = \frac{1}{2}.$
 (C) $S = \frac{3}{4}.$ (D) $S = \frac{2}{3}.$

Câu 22. Tính tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx.$

- (A) $I = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$ (B) $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$
 (C) $I = 2\sqrt{2} - 1.$ (D) $I = \frac{2\sqrt{2} + 1}{3}.$

Câu 23. Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1 + 2x} dx$ và $u = \sqrt{2x + 1}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3.$
 (B) $I = \int_1^3 u^2(u^2 - 1) du.$
 (C) $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2(x^2 - 1) dx.$
 (D) $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2 - 1) du.$

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$ thỏa mãn $\int_2^3 f(x) dx = 2019$. Tính

$$I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} x^2 f(x^3 + 1) dx.$$

- (A) $I = 6057.$ (B) $I = \sqrt[3]{2019}.$
 (C) $I = 673.$ (D) $I = 2019.$

Câu 25. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a \ln b + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a + b + c$.

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

2.1. Phương pháp từng phần

Câu 1. Biết rằng $I = \int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$, trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Tính $m + n + 2p$.

- (A) $\frac{5}{4}.$ (B) $\frac{9}{2}.$ (C) 0. (D) $-\frac{5}{4}.$

Câu 2. Tích phân $\int_0^{\pi^2} (\sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{x}) dx = A + B\pi$ với $A, B \in \mathbb{Z}$. Tính $A + B$.

- (A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[1; e]$ biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1, f(e) = 2$.

Tính tích phân $\int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx$.

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Câu 4. Cho b là số thực dương sao cho $\int_0^b x e^{\sqrt{x^2+1}} dx = 2e^{\sqrt{b^2+1}}$. Tính b .

- (A) $b = 2\sqrt{2}.$ (B) $b = 3\sqrt{2}.$
 (C) $b = 2\sqrt{3}.$ (D) $b = 3\sqrt{3}.$

Câu 5. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

- (A) $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2.$
 (B) $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

- (C) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$
 (D) $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

Câu 6. Cho tích phân $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực và b, c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

- (A) $P = 6.$ (B) $P = -6.$
 (C) $P = 5.$ (D) $P = 4.$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x$ và $f(0) = 1$. Tính $f(2)$.

- (A) $f(2) = 4e^2 + 1.$ (B) $f(2) = 2e^2 + 1.$
 (C) $f(2) = 3e^2 + 1.$ (D) $f(2) = e^2 + 1.$

Câu 8. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a}\pi - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b$.

- (A) $T = 9.$ (B) $T = 13.$
 (C) $T = 7.$ (D) $T = 11.$

Câu 9. Biết $J = \int_1^4 x \log_2 x dx = 16 - \frac{a}{b \ln 2}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + b$.

- (A) $T = 11.$ (B) $T = 19.$
 (C) $T = 13.$ (D) $T = 17.$

Câu 10. Cho $\int (x-2)e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x + C$. Tính giá trị $a + b + c$.

- (A) -2. (B) -1. (C) -3. (D) 0.

Câu 11. Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $m \leq 0.$ (B) $0 < m \leq 3.$
 (C) $3 < m \leq 6.$ (D) $m > 6.$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Biết $f(2) = 4$ và $\int_0^2 f(x) dx = 5$. Tính $I =$

$$\int_0^2 x \cdot f'(x) dx.$$

- (A) $I = 1.$ (B) $I = 3.$
 (C) $I = -1.$ (D) $I = 9.$

Câu 13. Biết $I = \int_1^e x^2 \ln x dx = ae^3 + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $9(a + b)$ bằng

- (A) 3. (B) 10. (C) 9. (D) 6.

Câu 14. Cho biết $\int_0^1 \ln(x + 1) dx = a + b \ln 2$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ, thì

- (A) $a + b = 2.$ (B) $a + b = 1.$
 (C) $a + b = 3.$ (D) $a + b = -1.$

Câu 15. Cho $\int_0^1 (x + 2)e^x dx = ae + b$ với a, b là số nguyên. Tính $S = a^2 + b^2$.

- (A) $S = -1.$ (B) $S = 10.$
 (C) $S = 5.$ (D) $S = 0.$

Câu 16. Biết rằng $\int_1^a \ln x dx = 1 + 2a, (a > 1)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- (A) $a \in (18; 21).$ (B) $a \in (1; 4).$
 (C) $a \in (11; 14).$ (D) $a \in (6; 9).$

Câu 17. Cho $\int_0^1 (x + 3)e^x dx = a + be$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a \cdot b = 6.$ (B) $a \cdot b = -6.$
 (C) $a + b = -5.$ (D) $a + b = -1.$

Câu 18. Kết quả của tích phân $I = \int_1^2 (2x -$

1) $\ln x dx$ bằng

- (A) $I = 2 \ln 2.$ (B) $I = \frac{1}{2}.$
 (C) $I = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}.$ (D) $I = 2 \ln 2 + \frac{1}{2}.$

Câu 19. Tính tích phân $I = \int_1^2 xe^x dx.$

- (A) $I = e.$ (B) $I = -e^2.$
 (C) $I = e^2.$ (D) $I = 3e^2 - 2e.$

Câu 20. Giá trị của $I = \int \left(\frac{x^2 - 2}{x} \right) \cdot \ln x dx$ bằng

- (A) $I = 2 \ln^2 x + \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$
 (B) $I = -\ln^2 x + \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$
 (C) $I = \ln^2 x + \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$
 (D) $I = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

3. Tích phân hàm hợp

Câu 1. Cho $\int_0^3 f(x) dx = 2$ và $\int_0^3 g(x) dx = 3$. Tính giá trị của tích phân $L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)] dx.$

- (A) $L = 4.$ (B) $L = -1.$
 (C) $L = -4.$ (D) $L = 1.$

Câu 2. Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$, khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng

- (A) 2. (B) 1. (C) -1. (D) 4.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x) dx.$

- (A) $I = \frac{1}{2017}.$ (B) $I = 0.$
 (C) $I = 2017.$ (D) $I = 1.$

Câu 4. Cho tích phân $\int_1^2 f(x) dx = a$. Hãy tính tích phân $I = \int_0^1 xf(x^2 + 1) dx$ theo a .

- (A) $I = 4a.$ (B) $I = \frac{a}{4}.$

(C) $I = \frac{a}{2}$.

(D) $I = 2a$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^{\pi^2} f(x) dx = 2018$. Tính $I = \int_0^{\pi} xf(x^2) dx$.

(A) $I = 1008$.

(B) $I = 2019$.

(C) $I = 2017$.

(D) $I = 1009$.

Câu 6. Cho $\int_1^{13} f(x) dx = 2019$. Tính $\int_0^4 f(3x + 1) dx$.

(A) -2019 .

(B) 2019 .

(C) 6057 .

(D) 673 .

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1; 4]$, $f(4) = 2017$, $\int_{-1}^4 f'(x) dx = 2016$.

Giá trị của $f(-1)$ là

(A) 3 .

(B) 1 .

(C) -1 .

(D) 2 .

Câu 8. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 12$, giá trị của $I = \int_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng

(A) $I = 24$.

(B) $I = 10$.

(C) $I = 6$.

(D) $I = 14$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ thỏa mãn $\int_{-1}^1 f'(x) dx = 5$ và $f(-1) = 4$. Tìm $f(1)$?

(A) $f(1) = -1$.

(B) $f(1) = 1$.

(C) $f(1) = 9$.

(D) $f(1) = -9$.

Câu 10. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính

$\int_0^2 (f(x) + 1) dx$.

(A) 4 .

(B) 5 .

(C) 7 .

(D) 1 .

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^1 f(2x) dx = 2$.

Tính $\int_0^2 x \cdot f'(x) dx$

(A) 16 .

(B) 28 .

(C) 36 .

(D) 30 .

Câu 12. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 4$, $\int_1^3 f(x) dx = -8$.

Tính $\int_1^4 3f(x-1) dx$.

(A) -4 .

(B) 12 .

(C) -12 .

(D) -24 .

Câu 13. Cho $\int_1^7 f(x) dx = 10$. Tính tích phân

$I = \int_1^4 f(2x-1) dx$.

(A) $I = 7$.

(B) $I = 14$.

(C) $I = 5$.

(D) $I = 17$.

Câu 14. Cho $\int_{-2}^1 f(x) dx = 3$. Tính tích phân

$I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx$.

(A) $I = 5$.

(B) $I = 3$.

(C) $I = -3$.

(D) $I = -9$.

Câu 15. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2018$. Tính $I =$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$.

(A) $I = 2018$.

(B) $I = -1009$.

(C) $I = -2018$.

(D) $I = 1009$.

Câu 16. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Khi đó tính $I = \int_2^5 f(3x - 6) dx$.

(A) $I = 27$.

(B) $I = 3$.

(C) $I = 24$.

(D) $I = 0$.

Câu 17. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2018}}{e^x + 1} dx$.

(A) $I = 0$.

(B) $I = \frac{2^{2020}}{2^{2018}}$.

(C) $I = \frac{2^{2019}}{2019}$.

(D) $I = \frac{2^{2018}}{2018}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

$5; \int_2^3 f(x) dx = -2$. Tính $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

- (A) 7. (B) -7. (C) 3. (D) -3.

Câu 19. Cho $\int_0^1 f(4x) dx = 4$. Tính $I =$

$$\int_0^4 f(x) dx.$$

- (A) $I = 1$. (B) $I = 8$.
(C) $I = 4$. (D) $I = 16$.

Câu 20. Cho $\int_2^4 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 g(x) dx = 5$.

Tính $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx$.

- (A) $I = 5$. (B) $I = -5$.
(C) $I = 10$. (D) $I = 15$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (A) $I = 6$. (B) $I = 2$. (C) $I = 3$. (D) $I = 4$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và $f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính

$$\int_0^1 x f'(2x) dx.$$

- (A) $I = 7$. (B) $I = 20$.
(C) $I = 12$. (D) $I = 13$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x + 1)f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I =$

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

- (A) $I = -8$. (B) $I = 8$.
(C) $I = 12$. (D) $I = -12$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(3) = 7, \int_0^3 f(x) dx = 3$.

Giá trị của $\int_0^1 x f'(3x) dx$ bằng

- (A) $\frac{8}{3}$. (B) 6. (C) 8. (D) 2.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4$.

Tính $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$.

- (A) $I = 7$. (B) $I = 12$.
(C) $I = 20$. (D) $I = 13$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(2) = -2, \int_0^2 f(x) dx = 1$.

Tính tích phân $I = \int_{-1}^3 f'(\sqrt{x+1}) dx$.

- (A) $I = -5$. (B) $I = 0$.
(C) $I = -18$. (D) $I = -10$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Biết $\int_0^{\ln 2} f(e^x + 1) dx = 5$ và $\int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1} dx = 3$.

Tính $I = \int_2^3 f(x) dx$.

- (A) $I = 2$. (B) $I = 4$.
(C) $I = -2$. (D) $I = 8$.

Bài 3

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A Tóm tắt lí thuyết

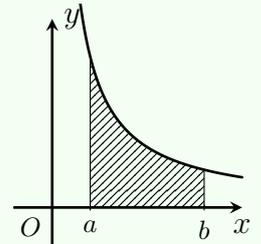
1. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ và trục hoành

◆ Định lí 3.1.

Cho (\mathcal{H}) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Diện tích hình phẳng (\mathcal{H}) được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

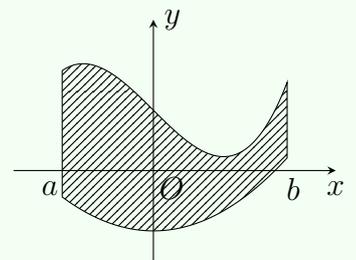


2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

◆ Định lí 3.2.

Cho (\mathcal{H}) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

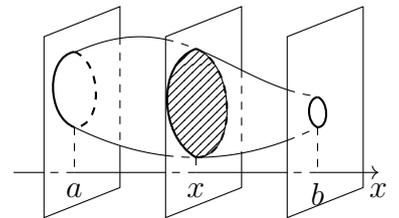
Diện tích của (\mathcal{H}) bằng $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.



3. Thể tích vật thể

◆ Định lí 3.3. Cắt vật thể \mathcal{V} bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a, x = b (a < b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm $x, (a \leq x \leq b)$ cắt \mathcal{V} theo thiết diện có diện tích $S(x)$. Với $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Thể tích của vật thể \mathcal{V} giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



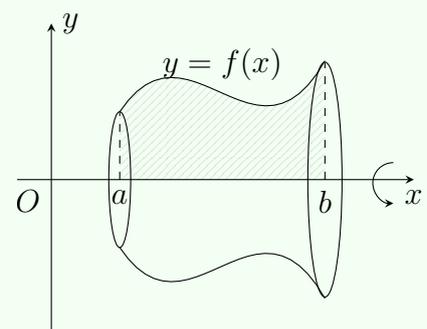
4. Thể tích khối tròn xoay

◆ Định lí 3.4.

Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b (a < b)$ quay quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay.

Thể tích của khối tròn xoay đó được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

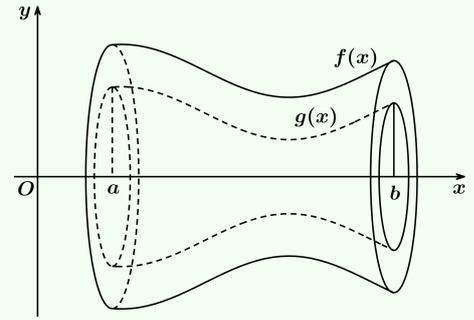


Định lí 3.5.

Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và 2 đường thẳng $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) quay quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay.

Thể tích của khối tròn xoay đó được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$



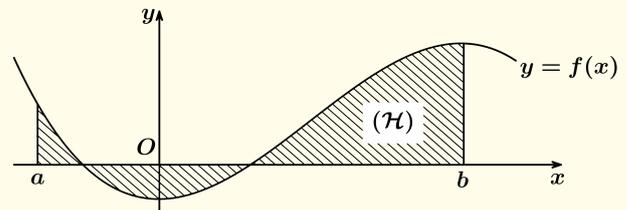
B Các dạng toán

Dạng 1. Diện tích hình giới hạn bởi: đồ thị hàm số - trục hoành và hai cận

Hình (\mathcal{H}) được giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) (C) \\ x = a \\ x = b \\ y = 0 \text{ (trục hoành)} \end{cases}$.

Khi đó diện tích hình (\mathcal{H}) được tính bởi:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



Cách tính S

Cách 1: Xét dấu biểu thức $f(x)$ để phá dấu giá trị tuyệt đối.

Cách 2: Dùng định nghĩa tích phân

Tìm nghiệm phương trình: $f(x) = 0$; $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$. Khi đó

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx \\ &= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right| \end{aligned}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^3$, trục hoành, $x = 0$ và $x = 2$.

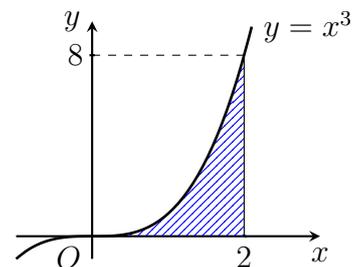
BÀI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Diện tích hình giới hạn là

$$S = \int_0^2 |x^3| dx = \left| \int_0^2 x^3 dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 \right| = 4.$$



VÍ DỤ 2

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 4$.

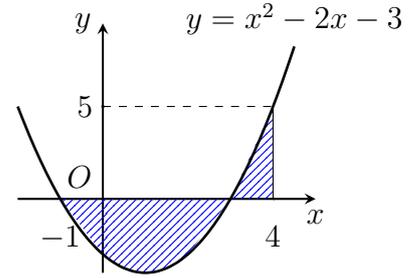
BÀI GIẢI

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Diện tích hình giới hạn là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 |x^2 - 2x - 3| dx = \\ &= \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx + \int_3^4 |x^2 - 2x - 3| dx = \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| + \left| \int_3^4 (x^2 - 2x - 3) dx \right| = \\ &= \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) \Big|_{-1}^3 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) \Big|_3^4 \right| = 13. \end{aligned}$$



2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ và $y = x^2 - 2x$.

Lời giải.

--	--

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^3 - 4x$, $x = -2$, $x = 4$, $y = 0$.

Lời giải.

--	--

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x(x + 1)(x - 3)$, $y = 0$.

Lời giải.

--	--

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^3 - 3$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \frac{2x-4}{x+1}$, $x = 4$, $y = 0$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP 1

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^4 - 3x^2 - 4 \\ x = 0; x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^3 - 4x \\ x = -2; x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$

c) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} \\ x = 1; x = e \\ y = 0 \end{cases}$

d) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \cos x \\ x = 0; x = \pi \\ y = 0 \end{cases}$

LUYỆN TẬP 2

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = 2^x \\ x = 0; x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x = 1; x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

c) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} \ln x \\ x = e \\ y = 0 \end{cases}$

d) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x(x + 1)(x - 2) \\ y = 0 \end{cases}$

Dạng 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số

Muốn tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ ta thực hiện theo các bước như sau:

Bước 1: Xét phương trình $f(x) - g(x) = 0$ (1).

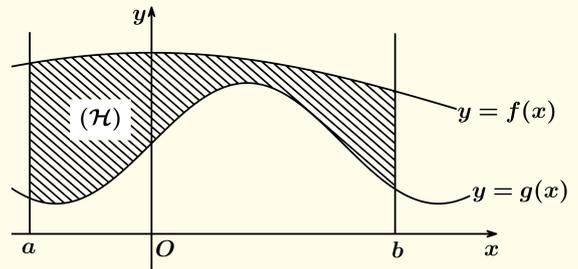
Phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

Bước 2: Gọi S là diện tích cần tính, ta có:

$$S = \int_{x_1}^{x_k} |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - g(x)) dx \right|$$



1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 3

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2 + 2$ và $y = 3x$.

BÀI GIẢI

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$x^2 + 2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_1^2 |x^2 + 2 - 3x| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| = \left| \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_1^2 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right| = \frac{1}{6} \text{ (đvdt)}$$

VÍ DỤ 4

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y^2 - 3y + x = 0$ và $x - y = 0$.

BÀI GIẢI

Xét phương trình tung độ giao điểm ta có:

$$y^2 - 3y + y = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

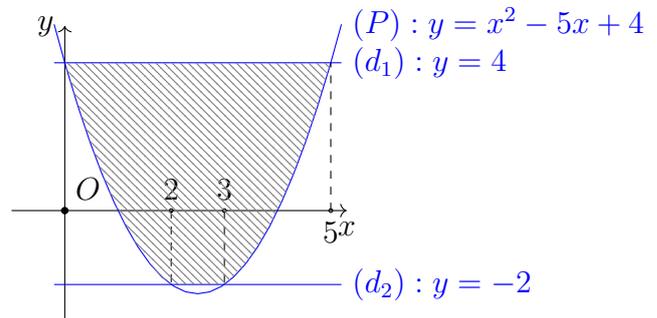
$$S = \int_0^2 |y^2 - 3y + y| dy = \left| \int_0^2 (y^2 - 2y) dy \right| = \left| \left(\frac{1}{3}y^3 - y^2 \right) \Big|_0^2 \right| = \left| \frac{-4}{3} - 0 \right| = \frac{4}{3} \text{ (đvdt)}$$

VÍ DỤ 5

Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P) : y = x^2 - 5x + 4$, $(d_1) : y = 4$ và $(d_2) : y = -2$.

BÀI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1) là $x^2 - 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 5$.
 Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_2) là $x^2 - 5x + 4 = -2 \Leftrightarrow x = 2$ hay $x = 3$.
 Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là



$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 (4 - (x^2 - 5x + 4)) dx + \int_2^3 (4 + 2) dx + \int_3^5 (4 - (x^2 - 5x + 4)) dx \\
 &= \int_0^2 (-x^2 + 5x) dx + \int_2^3 6 dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx \\
 &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right) \Big|_0^2 + 6x \Big|_2^3 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right) \Big|_3^5 = \frac{37}{2}.
 \end{aligned}$$

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^3 - 2x^2$ và $y = x - 2$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^3 - 12x$ và $y = x^2$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x$ và $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $y = e$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = 2x^2 - 2x$ và $y = x^2 + 3x, x = 0, x = 4$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2 - 2x + 2$ và $y = x^2 + 4x + 5, y = 1$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP 1

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ y = x-1 \end{cases}$

b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^3 - x \\ y = 2x \\ x = -1, x = 1 \end{cases}$

c) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2-x \\ y = 0 \end{cases}$

d) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^3 - x \\ y = x - x^2 \end{cases}$

e) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \frac{x-1}{x+1} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

f) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ y = 1 \end{cases}$

LUYỆN TẬP 2

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x^3 \end{cases}$

b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = -2x^3 + x^2 + x + 5 \\ y = x^2 - x + 5 \end{cases}$

$$c) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ y = 4-x \\ y = 1 \end{cases}$$

$$d) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = x \\ y = 2 \end{cases}$$

LUYỆN TẬP 3

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$a) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 3 \end{cases}$$

$$b) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2} \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$c) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$d) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = 1 - \sqrt{1-x^2} \\ y = x^2 \end{cases}$$

VẬN DỤNG 1

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$a) (\mathcal{H}) : \begin{cases} x^2 \\ \frac{x^2}{27} \\ y = \frac{27}{x} \end{cases}$$

$$b) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = 8 - 3x - 2x^2 \\ y = 2 + 9x - 2x^2 \\ y = x + 10 \end{cases}$$

$$c) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x^2 - 4x - 4 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$d) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x^2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$e) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^2}{8} \\ y = \frac{8}{x} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = 3x - 15 \end{cases}$$

VẬN DỤNG 2

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$a) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x \end{cases}$$

$$b) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y^2 = 2x \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

$$c) (\mathcal{H}) : \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x + y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$d) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y^2 = 2x \\ 2x + 2y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$e) (\mathcal{H}) : \begin{cases} x - y^3 + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$f) (\mathcal{H}) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

$$g) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y^2 = (4-x)^3 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$$h) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

$$k) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x \\ y = 0; y = 3 \end{cases}$$

VẬN DỤNG 3

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$a) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3| \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$b) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = |x| \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

$$c) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3| \\ y = 3 \end{cases}$$

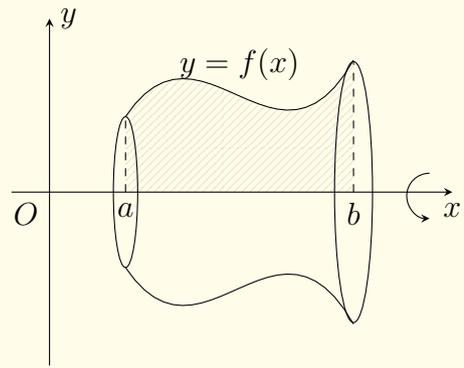
$$d) (\mathcal{H}) : \begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3| \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Dạng 3. Thể tích khối tròn xoay

Loại 1

Vật thể tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ với $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

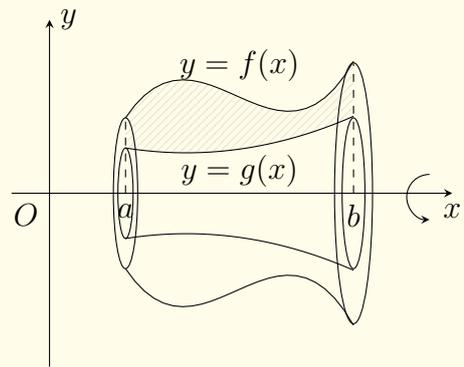
Áp dụng công thức:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Loại 2

Vật thể tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ với $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$

Áp dụng công thức:
$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$



Lưu ý: Nên vẽ hình để xác định công thức thể tích cho chính xác nhất

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 6

Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 2$ và $x = 4$ quay quanh trục Ox .

BÀI GIẢI

Áp dụng công thức ta có:
$$V = \pi \int_2^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 = 6\pi \text{ (đvtt)}.$$

VÍ DỤ 7

Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x; y = 4x; x = 1; x = 2$ quay quanh trục Ox .

BÀI GIẢI

Áp dụng công thức ta có
$$V = \pi \int_1^2 [(4x)^2 - x^2] dx = \pi \int_1^2 15x^2 dx = 15\pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = 35\pi \text{ (đvtt)}.$$

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính thể tích vật thể xoay sinh ra bởi hình phẳng quay quanh Ox

- a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^3 - 1 \\ x = -1, x = 1. \\ y = 0 \end{cases}$ b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ c) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x - 2 \\ x = -1, x = 4. \\ y = 0 \end{cases}$

d) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$

e) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \sqrt{2 + \cos x} \\ x = 0, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

f) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \sqrt{2 + \sin x} \\ x = 0, x = \pi \end{cases}$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Tính thể tích vật thể xoay sinh ra bởi hình phẳng quay quanh Ox

a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \sqrt{x^2 + 1} \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$

b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x = 0, x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

c) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x = 1, x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

d) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Tính thể tích vật thể xoay sinh ra bởi hình phẳng quay quanh Ox

a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = x + 2 \end{cases}$

b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x^2 \\ y = 4 \end{cases}$

c) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x^3 \end{cases}$

d) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP 1

Tính thể tích vật thể xoay sinh ra bởi hình phẳng quay quanh Ox

a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = e^x \\ x = 0, x = 1. \\ y = 0 \end{cases}$

b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \sqrt{x \ln x} \\ x = 1, x = e. \\ y = 0 \end{cases}$

c) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \cos x \\ x = 0, x = \pi. \\ y = 0 \end{cases}$

d) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ x = 1, x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

LUYỆN TẬP 2

Tính thể tích vật thể xoay sinh ra bởi hình phẳng quay quanh Ox

a) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = -x^2 - 2x + 6 \end{cases}$

b) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = x^2 \\ x = 1, y = \sqrt{x} \end{cases}$

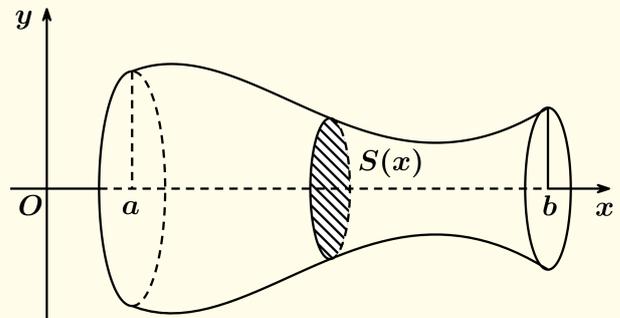
c) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = \frac{x^3}{8} \end{cases}$

d) $(\mathcal{H}) : \begin{cases} y = (x - 1)^2 \\ y = 1 \end{cases}$

Dạng 4. Thể tích của vật thể

Thể tích của vật thể

- ✔ **Nhận dạng:** Có chữ "Thiết diện"
- ✔ Tính diện $S(x)$
- ✔ Xác định 2 cận a, b
- ✔ Tính theo công thức: $V = \int_a^b S(x) dx$.



1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 8

Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng $3x$ và $2\sqrt{3x^2 - 2}$.

BÀI GIẢI

Diện tích hình chữ nhật $S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$.

Thể tích vật thể tạo thành là $V = \int_1^3 S(x) dx =$

Đổi cận		
x	1	3
t	1	5

$$\int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx.$$

Đặt $t = \sqrt{3x^2 - 2} \Rightarrow t^2 = 3x^2 - 2 \Rightarrow t dt = 3x dx$

$$V = \int_1^5 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^5 = \frac{124}{3}.$$

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0 \leq x \leq 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{9 - x^2}$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Bài 2. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0 \leq x \leq \pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Bài 3. Thể tích vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0 \leq x \leq 2)$ là một nửa hình tròn đường kính $\sqrt{5}x^2$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....

.....

Bài 4. Xét trong không gian $Oxyz$, tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1 - x^2}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Xét trong không gian $Oxyz$, tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 4$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 4$) là một hình vuông cạnh là \sqrt{x} .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 5. Bài toán thực tế: Tìm vận tốc, quãng đường

Chất điểm chuyển động với vận tốc và quãng đường, gia tốc được biểu diễn: $v(t), S(t), a(t)$.
 Khi đó:

$$S(t) = \int v(t) dt$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 9

Một vật đang chuyển động với vận tốc 5 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 2t + 3t^2$ m/s². Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây sau khi tăng tốc, quãng đường vật đi được là bao nhiêu?

BÀI GIẢI

Vận tốc của vật $v(t) = \int a(t) dt = \int (2t + 3t^2) dt = t^2 + t^3 + C$.

Theo giả thiết: $v(0) = 5$ nên $C = 5$.

Vậy quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây sau khi tăng tốc là:

$$s = \int_0^{10} (t^2 + t^3 + 5) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + 5t \right) \Big|_0^{10} = \frac{8650}{3} \text{ (m)}$$

VÍ DỤ 10

Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc v_0 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = -6t + v_0$ m/s. Tính vận tốc ban đầu v_0 , biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô đi được 27 m.

BÀI GIẢI

Xe dừng hẳn ứng với t thỏa $v(t) = 0$. Hay $-6t + v_0 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{6}$.

Quãng đường xe đi được từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn:

$$27 = \int_0^{\frac{v_0}{6}} (-6t + v_0) dt.$$

Từ đây ta giải được $v_0 = 18$ (m/s).

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 150 - 10t$ (m/s). Hỏi trong 4 s trước khi dừng hẳn, vật đi chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải.

Bài 2. Một nhà máy thủy điện xả lũ với tốc độ xả tại thời điểm t giây là $v(t) = 2t + 100$ (m³/s). Hỏi sau 30 phút kể từ lúc bắt đầu xả, nhà máy xả được bao nhiêu mét khối nước?

Lời giải.

Bài 3. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ m/s². Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải.

Bài 4. Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ (khi $t = 0$ s) chuyển động với vận tốc $v(t) = 5t - t^2$ m/s. Tính quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại (kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Một ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 15$ m/s trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải.

.....

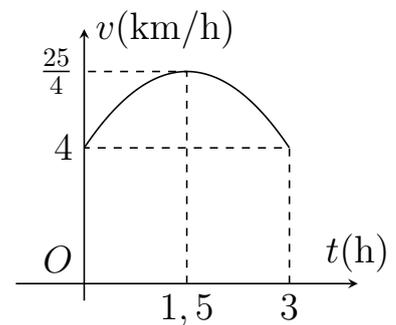
.....

.....

.....

LUYỆN TẬP 1

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v km/h phụ thuộc vào thời gian t h có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{25}{4}\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



LUYỆN TẬP 2

Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 150 - 15t$ m/s. Hỏi rằng trong 5 s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét?

LUYỆN TẬP 3

Một ô tô đang chạy đều với vận tốc b m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + b$ m/s. Biết từ khi đạp phanh đến lúc dừng hẳn thì ô tô di chuyển được 50 m. Tìm vận tốc ban đầu b .

LUYỆN TẬP 4

Một ô tô xuất phát với vận tốc $v_1(t) = 2t + 12$ m/s sau khi đi được khoảng thời gian t_1 thì bắt gặp gặp chướng ngại vật nên tài xế phanh gấp với vận tốc $v_2(t) = 24 - 6t$ m/s và đi thêm một khoảng thời gian t_2 nữa thì dừng lại. Hỏi từ khi xuất phát đến lúc dừng lại thì xe ô tô đã đi được bao nhiêu mét?

LUYỆN TẬP 5

Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 18$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 5t$ m/s². Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

LUYỆN TẬP 6

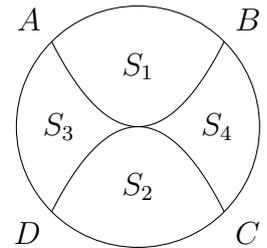
Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 5t$ m/s². Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

LUYỆN TẬP 7

Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong vòng 40 phút với tốc độ dòng nước tại thời điểm t giây là $v(t) = 10t + 500$ m³/s. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

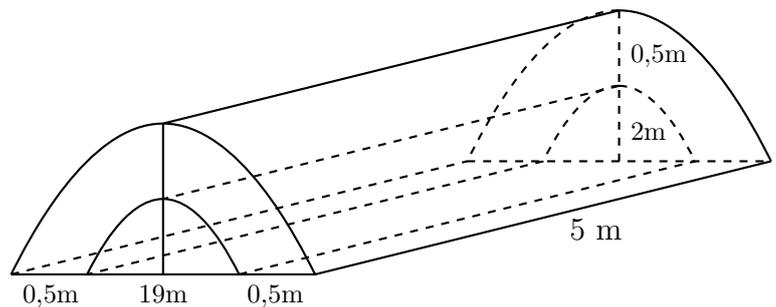
VẬN DỤNG 1

Sân trường có một bồn hoa hình tròn có tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường Parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O . Hai đường Parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng 4 m (như hình vẽ). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí để trồng hoa là 150.000 đồng /1 m², kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng /1 m². Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn).



VẬN DỤNG 2

Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình là các đường Parabol).



C Bài tập trắc nghiệm

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị

1.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f_1(x), y = f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) được tính theo công thức

A $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$

B $S = \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \right|.$

C $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$

D $S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$

Câu 2. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ có diện tích là

A $S = \int_1^2 f(x) dx.$ **B** $S = \int_1^2 |f(x)| dx.$

C $S = \int_2^1 |f(x)| dx.$ **D** $S = \int_1^2 f(x) dx.$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) được tính theo công thức

- (A) $S = \int_a^b |f(x)| dx.$ (B) $S = \pi \int_a^b f(x) dx.$
 (C) $S = \int_a^b f(x) dx.$ (D) $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Diện tích S của hình D được tính theo công thức:

- (A) $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$ (B) $S = \int_a^b f(x) dx.$
 (C) $S = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$ (D) $\int_a^b |f(x)| dx.$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

- (A) $S = \int_a^b |f(x)| dx.$ (B) $S = \pi \int_a^b f(x) dx.$
 (C) $S = \int_a^b f(x) dx.$ (D) $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$ bằng

- (A) $\frac{4}{3}.$ (B) $\frac{7}{3}.$ (C) $\frac{8}{3}.$ (D) 1.

Câu 7. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1; x = 1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

- (A) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx.$ (B) $S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx.$
 (C) $S = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx.$ (D) $S = \int_{-1}^1 f^2(x) dx.$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường

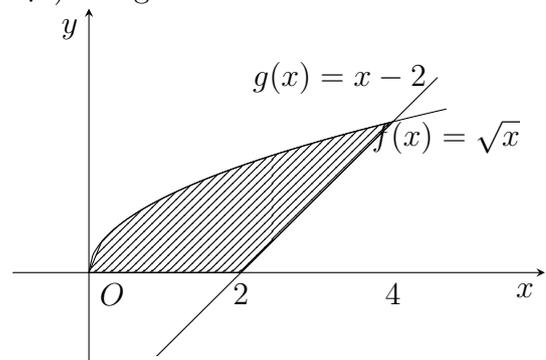
cong $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a; x = b$ được tính bằng công thức nào?

- (A) $S = \int_a^b |f(x)| dx.$ (B) $S = - \int_a^b f(x) dx.$
 (C) $S = \int_a^b f(x) dx.$ (D) $S = \int_a^b f(x) dx.$

Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x, y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ bằng

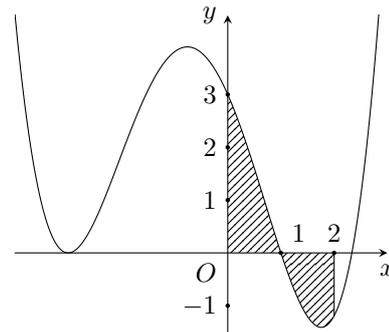
- (A) $e^2.$ (B) $e - 2.$ (C) $2e.$ (D) $2 - e.$

Câu 10. Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình bên



- (A) $S = \frac{8}{3}.$ (B) $S = \frac{10}{3}.$
 (C) $S = \frac{11}{3}.$ (D) $S = \frac{7}{3}.$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ (phần gạch chéo trong hình là

- (A) $S = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$
 (B) $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$
 (C) $S = \left| \int_0^2 f(x) dx \right|.$
 (D) $S = \int_0^2 f(x) dx.$

Câu 12. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $S = \int_0^2 \pi e^{2x} dx$. (B) $S = \int_0^2 \pi e^x dx$.
 (C) $S = \int_0^2 e^{2x} dx$. (D) $S = \int_0^2 e^x dx$.

Câu 13. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$. (B) $S = \int_0^2 e^x dx$.
 (C) $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. (D) $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

Câu 14. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $S = \int_0^2 2^x dx$. (B) $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$.
 (C) $S = \int_0^2 2^{2x} dx$. (D) $S = \pi \int_0^2 2^x dx$.

Câu 15. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x - 1$, $x = 0$, $x = 2$ và trục Ox . Diện tích S của hình phẳng D được tính bởi công thức

- (A) $S = \left| \int_0^2 (x - 1) dx \right|$.
 (B) $S = \int_0^2 (1 - x) dx$.
 (C) $S = \int_0^2 |x - 1| dx$.
 (D) $S = \int_0^2 (x - 1) dx$.

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

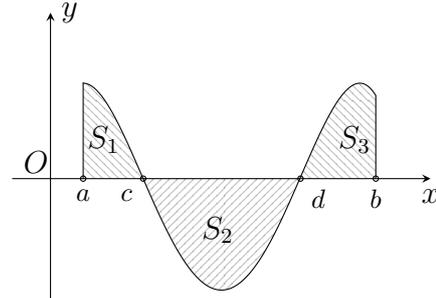
- (A) $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

(B) $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx$.

(C) $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx$.

(D) $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Câu 17. Tổng diện tích $S = S_1 + S_2 + S_3$ trong hình vẽ được tính bằng tích phân nào sau đây?

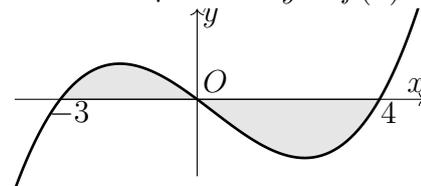


- (A) $S = \int_a^b f(x) dx$.
 (B) $S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$.
 (C) $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx$.
 (D) $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$.

Câu 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$.

- (A) 19. (B) $\frac{2186}{7}\pi$.
 (C) 20. (D) 18.

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$.

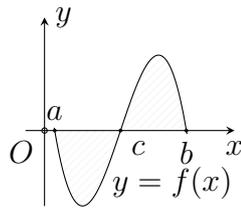


Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình) là

- (A) $S = \int_{-3}^4 f(x) dx$.

- B** $S = \int_0^{-3} f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx.$
- C** $S = \int_{-3}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx.$
- D** $S = \int_{-3}^0 f(x)dx - \int_0^4 f(x)dx.$

Câu 20. Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình bên). Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?



- A** $S = \left| \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right|.$
- B** $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$
- C** $S = - \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$
- D** $S = \int_a^b f(x)dx.$

Câu 21. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục Ox là

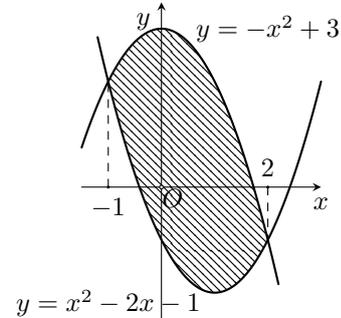
- A** $S = \int_0^\pi \cos x dx.$
- B** $S = \int_0^\pi \cos^2 x dx.$
- C** $S = \int_0^\pi |\cos x| dx.$
- D** $S = \pi \int_0^\pi |\cos x| dx.$

Câu 22. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = 2$ là

- A** $S = \frac{7}{3}.$
- B** $S = \frac{8}{3}.$
- C** $S = 7.$
- D** $S = 8.$

1.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



- A** $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$
- B** $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx.$
- C** $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$
- D** $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

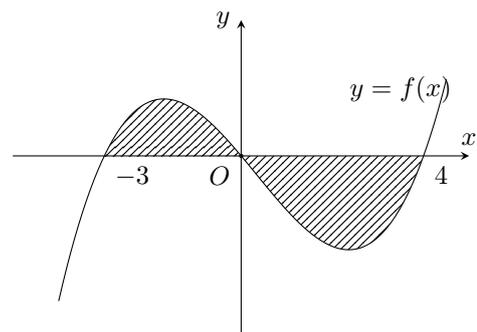
Câu 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y = x - 2$ là

- A** $S = \frac{16}{3}.$
- B** $S = \frac{10}{3}.$
- C** $S = 2.$
- D** $S = \frac{17}{2}.$

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $4y = x^2$ và $y = x$. Thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành bằng

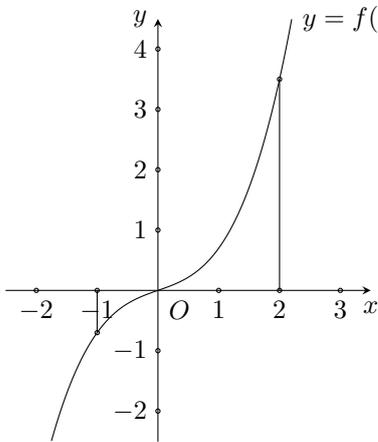
- A** $\frac{129}{30}\pi.$
- B** $\frac{128}{15}\pi.$
- C** $\frac{128}{30}\pi.$
- D** $\frac{32}{15}\pi.$

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần gạch chéo trong hình) là



- (A) $S = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx.$
- (B) $S = \int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx.$
- (C) $S = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_4^0 f(x) dx.$
- (D) $S = \int_{-3}^4 f(x) dx.$

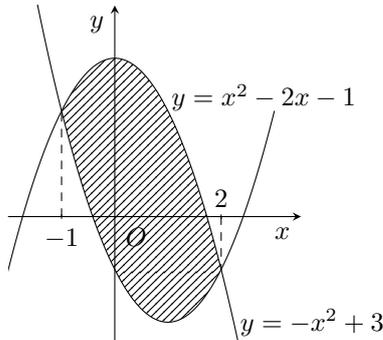
Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên).



Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $S = b - a.$
- (B) $S = b + a.$
- (C) $S = -b + a.$
- (D) $S = -b - a.$

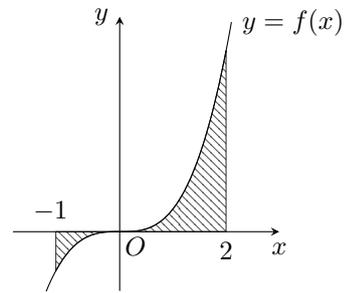
Câu 6. Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 3$ và hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ có đồ thị như hình vẽ.



Tích phân $I = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx$ bằng với tích phân nào sau đây?

- (A) $I = \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx.$
- (B) $I = \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx.$
- (C) $I = \int_{-1}^2 [f(x) + g(x)] dx.$
- (D) $I = \int_{-1}^2 [|f(x)| - |g(x)|] dx.$

Câu 7. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên).



Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $S = b - a.$
- (B) $S = b + a.$
- (C) $S = -b + a.$
- (D) $S = -b - a.$

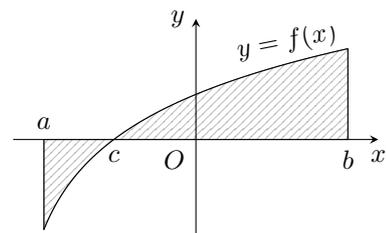
Câu 8. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = x^3 - 3x$ và $y = x$. Tính S .

- (A) $S = 4.$
- (B) $S = 8.$
- (C) $S = 2.$
- (D) $S = 0.$

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}.$
- (B) $\frac{1}{4}.$
- (C) $\frac{1}{2}.$
- (D) $\frac{1}{6}.$

Câu 10. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây?



- (A) $S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

B $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

C $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

D $S = \int_a^b f(x) dx$.

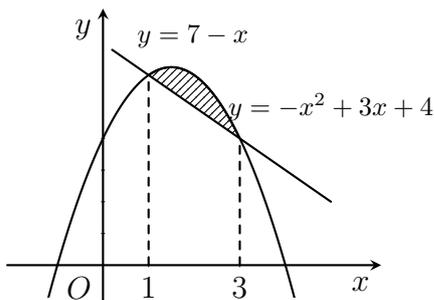
Câu 11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 + x - 5 = 0$, $x + y - 3 = 0$.

- A** $\frac{19}{6}$. **B** $\frac{15}{2}$. **C** $\frac{37}{6}$. **D** $\frac{9}{2}$.

Câu 12. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$ và $y = x^4$ bằng

- A** $\frac{9}{20}$. **B** $\frac{1}{5}$. **C** $\frac{1}{6}$. **D** $\frac{1}{20}$.

Câu 13. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$.

B $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$.

C $\int_1^3 (x^2 - 2x - 11) dx$.

D $\int_1^3 (-x^2 + 2x + 11) dx$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$ bằng

- A** $\frac{7}{2}$. **B** $\frac{9}{2}$. **C** $\frac{5}{2}$. **D** $\frac{11}{2}$.

Câu 15. Gọi S là số đo diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$. Tính $\cos \frac{S}{2}$.

- A** 0. **B** 1. **C** -1. **D** $\frac{1}{2}$.

Câu 16. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

(H): $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ là

- A** $\ln 2 - 1$. **B** $\ln 2 + 1$.
C $2 \ln 2 - 1$. **D** $2 \ln 2 + 1$.

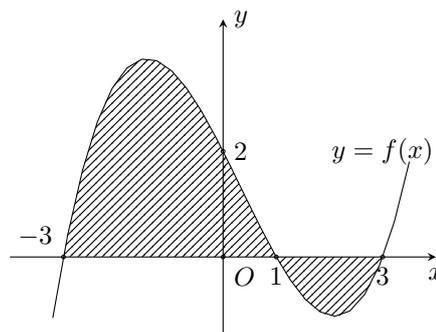
Câu 17. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $y = x^2$ và $y = \frac{2x}{x-1}$ là $S = a + b \ln 2$ với a, b là những số hữu tỷ. Tính $a + b$.

- A** $-\frac{1}{3}$. **B** 2. **C** $-\frac{2}{3}$. **D** 1.

Câu 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \ln x$, trục Ox và đường thẳng $x = e$.

- A** $S = \frac{e^2 + 3}{4}$. **B** $S = \frac{e^2 - 1}{2}$.
C $S = \frac{e^2 + 1}{2}$. **D** $S = \frac{e^2 + 1}{4}$.

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức

A $S = \left| \int_{-3}^3 f(x) dx \right|$.

B $S = \int_{-3}^3 f(x) dx$.

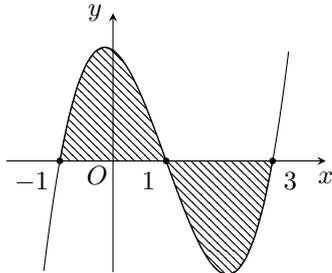
C $S = \int_{-3}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$.

D $S = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.

Câu 20. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$. Biết $S = a\sqrt{2} + b$, với $(a, b \in \mathbb{Q})$ và a, b viết dạng các phân số tối giản. Tính $a + b$.

- A** $a + b = \frac{1}{6}$.
- B** $a + b = \frac{1}{2}$.
- C** $a + b = \frac{1}{3}$.
- D** $a + b = 0$.

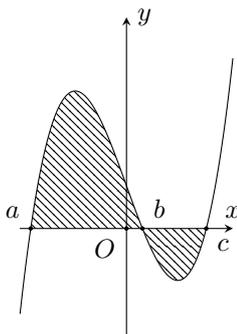
Câu 21. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ và trục hoành như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A** $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx$.
- B** $S = 2 \int_1^3 f(x)dx$.
- C** $S = 2 \int_{-1}^1 f(x)dx$.
- D** $S = \int_{-1}^3 |f(x)| dx$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên.



Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là

- A** $S = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$.
- B** $S = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$.
- C** $S = - \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

D $S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

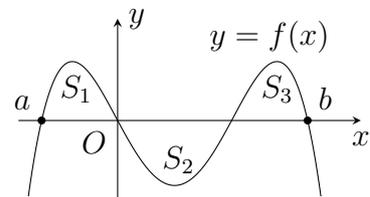
Câu 23. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 + 3, y = 4x$. Xác định mệnh đề đúng.

- A** $S = \int_1^3 |x^2 + 4x + 3| dx$.
- B** $S = \int_1^3 (x^2 + 4x + 3) dx$.
- C** $S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$.
- D** $S = \int_1^3 (|x^2 + 3| - |4x|) dx$.

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ và trục hoành bằng

- A** $\left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.
- B** $\int_0^2 f(x) dx$.
- C** $\int_1^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$.
- D** $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đồ thị tạo với trục hoành một hình phẳng gồm 3 phần có diện tích $S_1; S_2; S_3$ như hình vẽ.

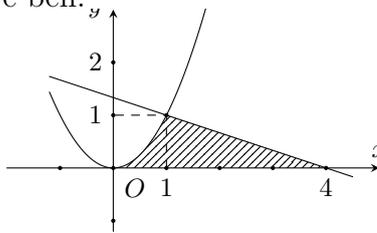


Tích phân $\int_a^b f(x) dx$ bằng

- A** $S_2 + S_3 - S_1$.
- B** $S_1 - S_2 + S_3$.
- C** $S_1 + S_2 + S_3$.
- D** $S_1 + S_2 - S_3$.

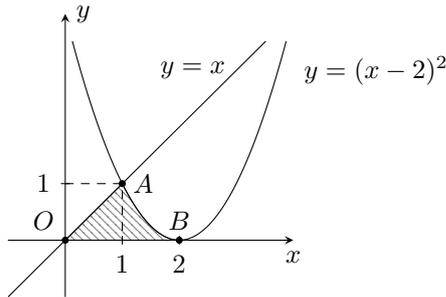
Câu 26. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành

như hình vẽ bên.



- A
 $\frac{7}{3}$ - B
 $\frac{56}{3}$ - C
 $\frac{39}{2}$ - D
 $\frac{11}{6}$

Câu 27. Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.



- A
 $\frac{5}{6}$ - B
 $\frac{5\pi}{6}$ - C
 $\frac{8}{15}$ - D
 $\frac{8\pi}{15}$

Câu 28. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 3x$ và $y = x$ bằng

- A
 2
 - B
 $\frac{8}{3}$ - C
 $\frac{16}{3}$ - D
 $\frac{32}{3}$

Câu 29. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$. Biết $S = a\sqrt{2} + b$, với $(a, b \in \mathbb{Q})$ và a, b viết dạng các phân số tối giản. Tính $a + b$.

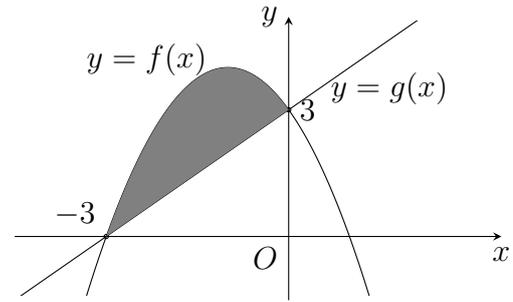
- A
 $a + b = \frac{1}{6}$ - B
 $a + b = \frac{1}{2}$ - C
 $a + b = \frac{1}{3}$ - D
 $a + b = 0$

Câu 30. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \ln x$, trục Ox và đường thẳng $x = e$.

- A
 $S = \frac{e^2 + 3}{4}$ - B
 $S = \frac{e^2 - 1}{2}$ - C
 $S = \frac{e^2 + 1}{2}$ - D
 $S = \frac{e^2 + 1}{4}$

Câu 31. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ (phần tô đậm

trong hình vẽ).



Gọi S là diện tích của hình phẳng D . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A
 $S = \int_{-3}^0 [f(x) - g(x)] dx.$ - B
 $S = \int_{-3}^0 [g(x) - f(x)] dx.$ - C
 $S = \int_{-3}^0 [f(x) + g(x)] dx.$ - D
 $S = \int_{-3}^1 [f(x) - g(x)]^2 dx.$

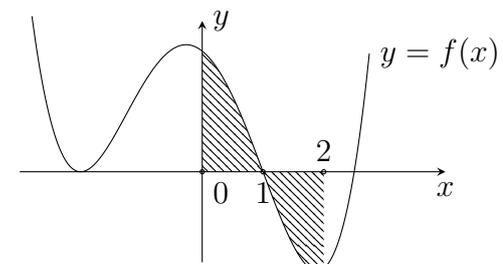
Câu 32. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

- A
 $S = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ - B
 $S = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{10}$ - C
 $S = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ - D
 $S = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 33. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$ và $y = x + 3$.

- A
 $S = \frac{32}{3}$ - B
 $S = \frac{16}{3}$ - C
 $S = 16$ - D
 $S = 32$

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị (\mathcal{C}) là đường cong như hình bên dưới.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (\mathcal{C}), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (phần bị bôi đen) là

- A
 $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

B $S = \left| \int_0^2 f(x) dx \right|.$

C $S = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

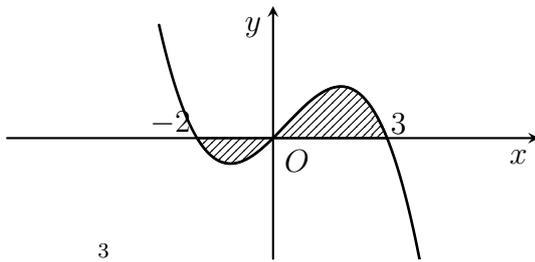
D $S = \int_0^2 f(x) dx.$

Câu 35. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x$ và $y = x^2$ là

A $S = \frac{939}{12}.$ **B** $S = \frac{979}{12}.$

C $S = \frac{160}{3}.$ **D** $S = \frac{937}{12}.$

Câu 36. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm của hình vẽ dưới) là



A $S = \int_{-2}^3 f(x) dx.$

B $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx.$

C $S = \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx.$

D $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx.$

Câu 37. Diện tích miền D được giới hạn bởi hai đường: $y = -2x^2$ và $y = -2x - 4$ là

A $\frac{3}{13}.$ **B** 9. **C** $\frac{13}{3}.$ **D** $\frac{1}{9}.$

Câu 38. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ có diện tích bằng

A $\frac{5}{4}.$ **B** $\frac{7}{4}.$ **C** $\frac{4}{3}.$ **D** $\frac{3}{4}.$

Câu 39. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^5$ bằng

A $S = 1.$ **B** $S = 2.$

C $S = \frac{1}{6}.$ **D** $S = \frac{1}{3}.$

Câu 40. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$.

A $\frac{31}{4}.$ **B** $\frac{49}{4}.$ **C** $\frac{21}{4}.$ **D** $\frac{39}{4}.$

Câu 41. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{-x-2}{x-1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$, $x = 0$ bằng

A $3 \ln 2 - 1.$

B 2.

C 1.

D $2 \ln 3 - 1.$

Câu 42. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và trục hoành.

A $S = \frac{27}{4}.$

B $S = \frac{27\pi}{4}.$

C $S = 4.$

D $S = 1.$

Câu 43. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x$ và $y = x$.

A $S = \frac{25}{3}.$

B $S = \frac{125}{6}.$

C $S = \frac{25}{2}.$

D $S = \frac{9}{2}.$

Câu 44. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$, $y = x + 3$.

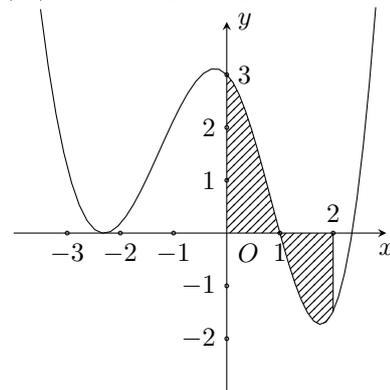
A $S = \frac{32}{3}.$

B $S = \frac{16}{3}.$

C $S = 16.$

D $S = 32.$

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (phần tô đen) là

A $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

B $S = \left| \int_0^2 f(x) dx \right|.$

C $S = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

D $S = \int_0^2 f(x) dx.$

Câu 46. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$ và trục hoành bằng

- A** $\frac{25}{4}.$ **B** $\frac{3}{4}.$ **C** $\frac{4}{3}.$ **D** $\frac{2}{3}.$

Câu 47. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành bằng

- A** 9. **B** $\frac{13}{6}.$ **C** $\frac{9}{2}.$ **D** $\frac{3}{2}.$

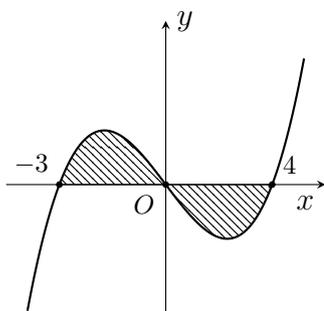
Câu 48. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ bằng

- A** $\frac{1}{2}.$ **B** 1. **C** $\frac{1}{4}.$ **D** 2.

Câu 49. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = xe^x$, trục hoành, hai đường thẳng $x = -2; x = 3$ có công thức tính là

- A** $S = \int_{-2}^3 xe^x dx.$ **B** $S = \int_{-2}^3 |xe^x| dx.$
C $S = \left| \int_{-2}^3 xe^x dx \right|.$ **D** $S = \pi \int_{-2}^3 xe^x dx.$

Câu 50. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng thuộc phần tô đậm trong hình vẽ bên là

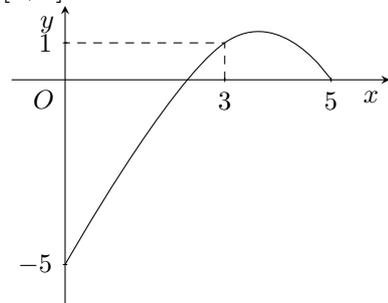


- A** $S = \int_{-3}^0 f(x) dx - \int_0^4 f(x) dx.$
B $S = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx.$
C $S = \int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx.$

D $S = \int_{-3}^4 f(x) dx.$

1.3. Mức độ vận dụng

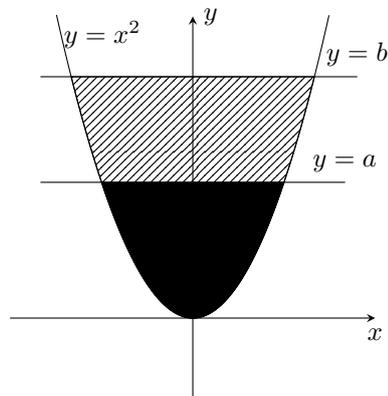
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

- A** $f(0) = f(5) < f(3).$
B $f(3) < f(0) = f(5).$
C $f(3) < f(0) < f(5).$
D $f(3) < f(5) < f(0).$

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a, y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ bên).



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào của a và b thì $S_1 = S_2$?

- A** $b = \sqrt[3]{4a}.$ **B** $b = \sqrt[3]{2a}.$
C $b = \sqrt[3]{3a}.$ **D** $b = \sqrt[3]{6a}.$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A** $S = \int_{-2}^2 |f(x)| dx.$

- B** $S = 2 \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + 2 \left| \int_1^2 f(x) dx \right|$.
- C** $S = 2 \int_0^2 |f(x)| dx$.
- D** $S = 2 \left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

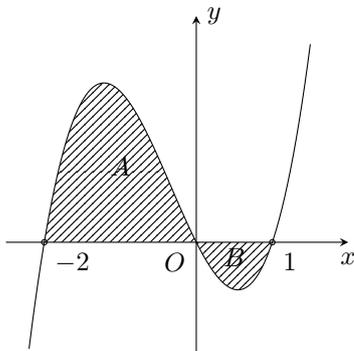
Câu 4. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = -2x^3 + x^2 + x + 5$ và $y = x^2 - x + 5$ bằng

- A** $S = \pi$.
- B** $S = 0$.
- C** $S = 1$.
- D** $S = \frac{1}{2}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3, & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2, & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

- A** $\frac{16}{3}$.
- B** 9.
- C** $\frac{20}{3}$.
- D** 10.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2.

Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$ bằng

- A** 3.
- B** $\frac{13}{3}$.
- C** 9.
- D** 13.

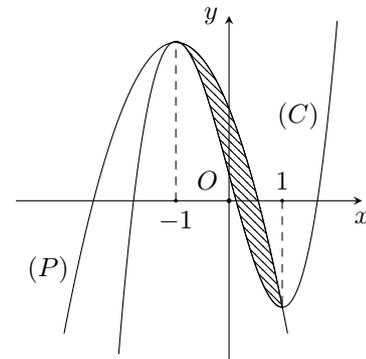
Câu 7. Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 3)$. Giả sử khi đường thẳng d có hệ số góc k thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng d là nhỏ nhất. Giá trị thực của k thuộc khoảng nào sau đây?

- A** $(-\infty; -3)$.
- B** $(3; +\infty)$.
- C** $(-3; 0)$.
- D** $(0; 3)$.

Câu 8. Diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x, y = -x + 3, y = 1$ bằng

- A** $\frac{1}{\ln 2} + 3$.
- B** $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$.
- C** $\frac{1}{\ln 2} + 1$.
- D** $\frac{1}{\ln 2} + 2$.

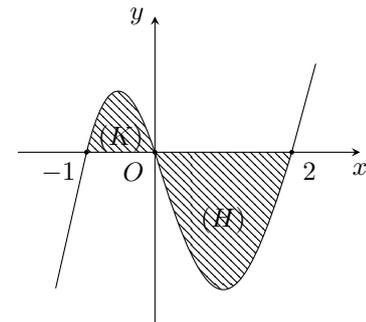
Câu 9. Cho hai hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p$, $(m, n, p \in \mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A** $(0; 1)$.
- B** $(1; 2)$.
- C** $(3; 4)$.
- D** $(2; 3)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 2]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Diện tích các hình phẳng $(K), (H)$ lần lượt là $\frac{5}{12}$ và $\frac{8}{3}$. Biết $f(-1) = \frac{19}{12}$, tính $f(2)$.

- A** $f(2) = -\frac{2}{3}$.
- B** $f(2) = \frac{2}{3}$.
- C** $f(2) = \frac{11}{6}$.
- D** $f(2) = \frac{23}{6}$.

2. Vận tốc, gia tốc, quãng đường

Câu 1. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15$ m/s, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

- A** 38 m.
- B** 37,2 m.
- C** 37,5 m.
- D** 37 m.

Câu 2. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển

động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A** 5 m. **B** 20 m. **C** 40 m. **D** 10 m.

Câu 3. Hai người A và B ở cách nhau 180 (m) trên một đoạn đường thẳng và cùng chuyển động thẳng theo một hướng với vận tốc biến thiên theo thời gian, A chuyển động với vận tốc $v_1(t) = 6t + 5$ (m/s), B chuyển động với vận tốc $v_2(t) = 2at - 3$ (m/s) (a là hằng số), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A, B bắt đầu chuyển động. Biết rằng lúc đầu A đuổi theo B và sau 10 giây thì đuổi kịp. Hỏi sau 20 (giây), A cách B bao nhiêu mét?

- A** 720 m. **B** 360 m.
C 320 m. **D** 380 m.

Câu 4. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t^2 + 4$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Tính quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ giây thứ 3 đến giây thứ 10.

- A** 945 m. **B** 994 m.
C 471 m. **D** 1001 m.

Câu 5. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s thì người lái xe thấy ô tô B đang đứng dừng đèn đỏ nên hãm phanh, ô tô A chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu diễn bởi công thức $v(t) = 16 - 4t$ m/s. Hỏi rằng để khoảng cách giữa hai ô tô A và B là an toàn thì người lái ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

- A** 33 m. **B** 12 m. **C** 31 m. **D** 32 m.

Câu 6. Một tay đua đang điều khiển chiếc xe đua của mình với vận tốc 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc $a(t) = 2t + 1$ (m/s²). Hỏi rằng 4 s sau khi tay đua nhấn ga thì xe đua chạy với vận tốc bao nhiêu km/h?

- A** 200 km/h. **B** 252 km/h.
C 288 km/h. **D** 243 km/h.

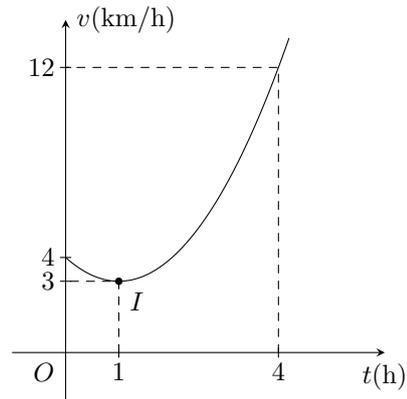
Câu 7. Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox , với vận tốc cho bởi công thức $v(t) = 3t^2 + 4t$ m/s với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 1$. Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là?

- A** $x = 4$. **B** $x = 5$. **C** $x = 6$. **D** $x = 9$.

Câu 8. Một chất điểm chuyển động thẳng với gia tốc $a(t) = 3t^2 + t$ m/s (với t là thời gian tính bằng giây). Biết vận tốc ban đầu của chất điểm là 2 m/s. Tính vận tốc của chất điểm sau 2 s.

- A** 12 m/s. **B** 10 m/s.
C 8 m/s. **D** 16 m/s.

Câu 9. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1; 3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ bên.



Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.

- A** $s = \frac{50}{3}$ (km). **B** $s = 10$ (km).
C $s = 20$ (km). **D** $s = \frac{64}{3}$ (km).

Câu 10. Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t = 0$ (s) chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5 - t)$ (m/s). Tìm quãng đường vật đi được khi nó dừng lại.

- A** $\frac{15}{4}$ m. **B** 25 m.
C $\frac{125}{6}$ m. **D** 5 m.

Câu 11. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s²). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

- A** 96,5 mét. **B** 102,5 mét.
C 105 mét. **D** 87,5 mét.

Câu 12. Một ô tô đang chạy đều với vận tốc a m/s thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + a$ trong đó thời gian tính bằng giây

kể từ lúc đạp phanh. Hỏi vận tốc ban đầu a của ô tô bằng bao nhiêu, biết từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn ô tô đi được 40 m.

- (A) $a = 40$. (B) $a = 20$.
 (C) $a = 25$. (D) $a = 10$.

Câu 13. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 6t$ (m/s). Đi được 10 s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -60$ (m/s²). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- (A) $S = 300$ m. (B) $S = 330$ m.
 (C) $S = 350$ m. (D) $S = 400$ m.

Câu 14. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 2t + \frac{1}{3}t^2$ (m/s²), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 12 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu mét?

- (A) 1272 m. (B) 1372 m.
 (C) 1172 m. (D) 456 m.

3. Thể tích khối tròn xoay

3.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ quay quanh trục hoành là

- (A) $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. (B) $V = \int_a^b f^2(x) dx$.
 (C) $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. (D) $V = \pi \int_b^a f^2(x) dx$.

Câu 2. Cho hình phẳng (\mathcal{H}) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Quay (\mathcal{H}) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

- (A) $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.
 (B) $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx$.

- (C) $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx$.
 (D) $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.
 (B) $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.
 (C) $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.
 (D) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Khi cho hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = 0, x = \pi, x = e$, quay quanh trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích V . Khi đó V được xác định bằng công thức nào sau đây?

- (A) $V = \pi \int_e^\pi |f(x) dx|$.
 (B) $V = \pi \int_e^\pi |f(x)| dx$.
 (C) $V = \pi \int_e^\pi f^2(x) dx$.
 (D) $V = \pi \int_e^\pi f^2(x) dx$.

Câu 5. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x}$, trục hoành, và các đường thẳng $x = 1, x = 4$ quanh Ox .

- (A) $V = 6\pi$. (B) $V = 12\pi$.
 (C) $V = \ln 12\pi^2$. (D) $V = \ln 256$.

Câu 6. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ

thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$ (B) $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$
 (C) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$ (D) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$

Câu 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- (A) $V = \pi - 1.$ (B) $V = \pi + 1.$
 (C) $V = \pi(\pi - 1).$ (D) $V = \pi(\pi + 1).$

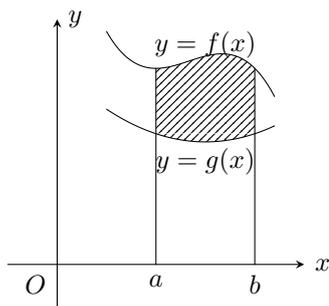
Câu 8. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$ quanh trục Ox là

- (A) $\pi.$ (B) $\pi^2.$ (C) $\frac{\pi^2}{2}.$ (D) $\frac{\pi}{2}.$

Câu 9. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{-e^x + 4x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$; V là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục hoành. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_1^2 (e^x - 4x) \, dx .$
 (B) $V = \pi \int_1^2 (4x - e^x) \, dx.$
 (C) $V = \int_1^2 (e^x - 4x) \, dx .$
 (D) $V = \int_1^2 (4x - e^x) \, dx.$

Câu 10. Cho hình phẳng trong hình (phần gạch sọc) quay quanh trục hoành.



Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?

- (A) $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx.$
 (B) $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] \, dx.$
 (C) $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx.$
 (D) $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx.$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[3; 4]$. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 3, x = 4$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành được tính theo công thức

- (A) $V = \int_3^4 f(x) \, dx.$
 (B) $V = \pi \int_3^4 f^2(x) \, dx.$
 (C) $V = \pi^2 \int_3^4 f^2(x) \, dx.$
 (D) $V = \int_3^4 f^2(x) \, dx.$

Câu 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

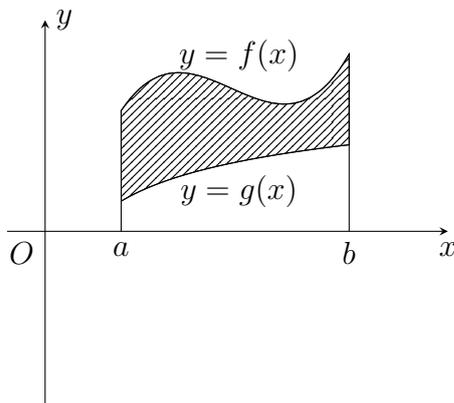
- (A) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 \, dx.$
 (B) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) \, dx.$
 (C) $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 \, dx.$
 (D) $V = \int_0^2 (x^2 + 3) \, dx.$

Câu 13. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi

V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$
- (B) $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$
- (C) $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx.$
- (D) $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx.$

Câu 14. Cho hình phẳng trong hình bên (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào trong các công thức sau đây?



- (A) $V = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx.$
- (B) $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$
- (C) $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$
- (D) $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$

Câu 15. Thể tích khối tròn xoay có được khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 0, x = 1$ bằng

- (A) $V = \frac{\pi}{2}.$
- (B) $V = \frac{2\pi}{3}.$
- (C) $V = \frac{2}{3}.$
- (D) $V = \frac{1}{3}.$

Câu 16. Thể tích khối tròn xoay tạo được do hình

phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}; y = 0; x = 1; x = 4$ quay quanh trục Ox là

- (A) $\frac{21\pi}{16}.$
- (B) $\frac{15}{16}.$
- (C) $\frac{21}{16}.$
- (D) $\frac{15\pi}{8}.$

Câu 17. Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị (C). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức

- (A) $V = \pi^2 \int_2^3 \pi^x dx.$
- (B) $V = \pi^3 \int_2^3 \pi^x dx.$
- (C) $V = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx.$
- (D) $V = \pi \int_3^2 \pi^{2x} dx.$

Câu 18. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln(2x+1)}, y = 0, x = 0, x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox .

- (A) $\frac{3}{2} \ln 3 - 1.$
- (B) $\frac{\pi}{2} \ln 3 - \pi.$
- (C) $\left(\pi + \frac{1}{2}\right) \ln 3 - 1.$
- (D) $\frac{3\pi}{2} \ln 3 - \pi.$

Câu 19. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0, x = \pi, y = 0$ và $y = -\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

- (A) $V = \pi \int_0^\pi |\sin x| dx.$
- (B) $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$
- (C) $V = \int_0^\pi \sin^2 x dx.$
- (D) $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\sin x) dx \right|.$

Câu 20. Gọi D là phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường $x = -1, y = 0, y = x^3$. Thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay D quanh trục Ox bằng

- (A) $\frac{2\pi}{7}.$
- (B) $\frac{\pi}{8}.$
- (C) $\frac{\pi}{7}.$
- (D) $\frac{\pi}{6}.$

Câu 21. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$ và các đường thẳng $y = 0; x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

(A) $V = \int_0^1 e^{2x} dx.$ (B) $V = \pi \int_0^1 e^{x^2} dx.$
 (C) $V = \int_0^1 e^{x^2} dx.$ (D) $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx.$

Câu 22. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x, y = 0, x = -1, x = 2$ quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{16\pi}{5}.$ (B) $\frac{17\pi}{5}.$ (C) $\frac{18\pi}{5}.$ (D) $\frac{5\pi}{18}.$

Câu 23. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi$ quay xung quanh Ox .

(A) 0. (B) $2\pi.$ (C) $\frac{\pi^2}{2}.$ (D) 2.

Câu 24. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{-e^x + 4x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

(A) $V = \pi \int_1^2 (e^x - 4x) dx.$
 (B) $V = \int_1^2 (e^x - 4x) dx.$
 (C) $V = \int_1^2 (4x - e^x) dx.$
 (D) $V = \pi \int_1^2 (4x - e^x) dx.$

Câu 25. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x, y = 0, x = 0, x = 1$ xung quanh trục Ox là

(A) $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$ (B) $V = \pi \int_0^1 x e^x dx.$
 (C) $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$ (D) $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx.$

Câu 26. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{D} quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = \frac{e^2 - 1}{2}.$ (B) $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}.$
 (C) $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$ (D) $V = \frac{\pi e^2}{2}.$

Câu 27. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0, x = 1, y = 0$ và $y = \sqrt{2x + 1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x + 1} dx.$
 (B) $V = \pi \int_0^1 (2x + 1) dx.$
 (C) $V = \int_0^1 (2x + 1) dx.$
 (D) $V = \int_0^1 \sqrt{2x + 1} dx.$

Câu 28. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

(A) $\frac{496\pi}{15}.$ (B) $\frac{32\pi}{15}.$ (C) $\frac{4\pi}{3}.$ (D) $\frac{16\pi}{15}.$

Câu 29. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}, y = 0, x = 1, x = 4$ khi quay quanh trục Ox bằng

(A) $2\pi.$ (B) $\frac{1}{12}\pi.$ (C) $\frac{21}{16}\pi.$ (D) $\frac{1}{16}\pi.$

Câu 30. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$ (B) $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$
 (C) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$ (D) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

3.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1, x = 2$

và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

- (A) 3π . (B) $\frac{3\pi}{2}$. (C) $\frac{2\pi}{3}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Câu 2. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng (H) khi nó quay quanh Ox.

- (A) $V = \frac{16\pi}{15}$. (B) $V = \frac{17\pi}{15}$.
(C) $V = \frac{18\pi}{15}$. (D) $V = \frac{19\pi}{15}$.

Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox.

- (A) $V = \frac{\pi}{6}$. (B) $V = \frac{\pi}{3}$.
(C) $V = \frac{\pi}{2}$. (D) $V = \pi$.

Câu 4. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 0$; $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox.

- (A) $V = \frac{8}{3}$. (B) $V = \frac{32}{5}$.
(C) $V = \frac{8\pi}{3}$. (D) $V = \frac{32\pi}{5}$.

Câu 5. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành từ việc quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay quanh trục Ox.

- (A) 5. (B) $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.
(C) $\frac{3\pi}{2}$. (D) $\pi \left(\frac{1}{2} + \pi\right)$.

Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay xung quanh trục Ox.

- (A) $V = \frac{16}{15}\pi$. (B) $V = \frac{16}{15}$.
(C) $V = \frac{4}{3}$. (D) $V = \frac{4}{3}\pi$.

Câu 7. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox.

- (A) $\frac{32\pi}{7}$. (B) $\frac{32\pi}{5}$. (C) $\frac{32\pi}{15}$. (D) $\frac{22\pi}{5}$.

Câu 8. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

- (A) $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). (B) $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt).
(C) $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt). (D) $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt).

Câu 9. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi (H) quay quanh trục Ox bằng

- (A) $\frac{\pi^2}{4}$. (B) 2π . (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi^2}{2}$.

Câu 10. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- (A) $V = \pi \cdot (e + 1)$. (B) $V = \pi \cdot (e - 2)$.
(C) $V = \pi \cdot e$. (D) $V = \pi \cdot (e - 1)$.

Câu 11. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

- (A) $\frac{31\pi}{3}$. (B) $\frac{32\pi}{3}$. (C) $\frac{34\pi}{3}$. (D) $\frac{35\pi}{3}$.

Câu 12. Thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x - 1}$, trục hoành và $x = 2$ quay quanh trục hoành bằng

- (A) $V = \frac{\pi}{2}$. (B) $V = \frac{1}{2}$.
(C) $V = 2\pi$. (D) $V = 2$.

Câu 13. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4}$, trục Ox, đường thẳng $x = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục hoành.

- (A) $V = \frac{7\pi}{3}$ (đvtt). (B) $V = \frac{5\pi}{3}$ (đvtt).
(C) $V = 2\pi$ (đvtt). (D) $V = 3\pi$ (đvtt).

Câu 14. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\tan x}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

- (A) $\frac{\pi}{4}$. (B) $\frac{\pi \ln 3}{4}$. (C) $\frac{\pi \ln 2}{2}$. (D) $\pi \ln 2$.

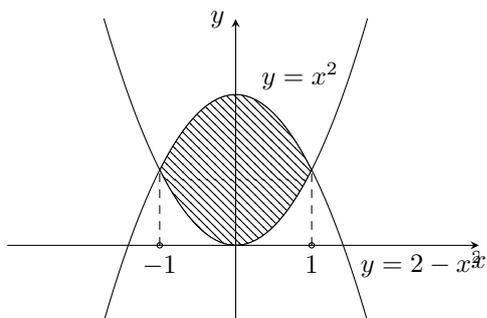
Câu 15. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x - 1$ và trục hoành. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay (H) quanh trục hoành bằng

- (A) $\frac{9}{8}$. (B) $\frac{81}{80}$. (C) $\frac{81\pi}{80}$. (D) $\frac{9\pi}{8}$.

Câu 16. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ khi quay quanh trục Ox bằng

- (A) 2π . (B) $\frac{\pi}{12}$. (C) $\frac{21\pi}{16}$. (D) $\frac{\pi}{16}$.

Câu 17. Cho hình phẳng H (phần gạch chéo trong hình vẽ).



Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay H quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

- (A) $V = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 4) dx - \pi \int_{-1}^1 x^4 dx$.
 (B) $V = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 4) dx - \int_{-1}^1 x^4 dx$.
 (C) $V = \pi \int_{-1}^1 (4x^4 - 8x^2 + 4) dx$.
 (D) $V = \pi \int_{-1}^1 x^4 dx - \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 4) dx$.

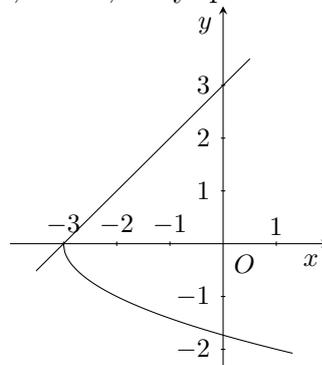
Câu 18. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = -1$ và các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$ quay quanh trục Ox được tính bởi công thức

- (A) $V = \pi \int_{-1}^1 x^4 dx$.
 (B) $V = \pi \int_{-1}^1 x^4 dx - \pi \int_{-1}^1 (-1)^2 dx$.
 (C) $V = \pi \int_{-1}^1 1 dx$.
 (D) $V = \pi \int_{-1}^1 x^4 dx + \pi \int_{-1}^1 (-1)^2 dx$.

Câu 19. Tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ và trục Ox quanh trục Ox .

- (A) $\frac{3}{5}\pi$. (B) $\frac{16}{15}\pi$. (C) 4π . (D) 3π .

Câu 20. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 3$, $y = -\sqrt{x + 3}$, $x = 1$, xoay quanh trục Ox .



- (A) $\frac{41\pi}{2}$. (B) $\frac{43\pi}{2}$. (C) $\frac{41\pi}{3}$. (D) $\frac{40\pi}{3}$.

Câu 21. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay quanh sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ quay quanh trục Ox .

- (A) $V = \frac{2e^3 + 1}{9}\pi$. (B) $V = \frac{2e^3 + 1}{3}\pi$.
 (C) $V = \frac{2e^3 - 1}{9}\pi$. (D) $V = \frac{2e^3 - 1}{3}\pi$.

Câu 22. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 3$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình D xung quanh Ox .

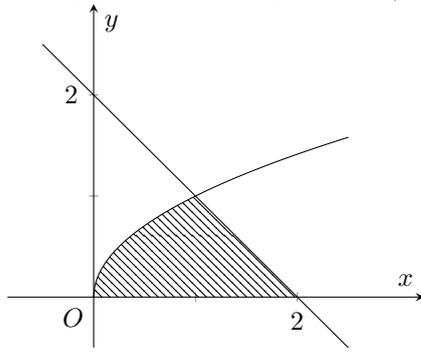
- (A) $V = \frac{98}{3}$. (B) $V = 8\pi$.
 (C) $V = \frac{98\pi}{3}$. (D) $V = \frac{98\pi^2}{3}$.

Câu 23. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = \frac{4}{x}$ và đường thẳng (d): $y = 5 - x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

- (A) $V = 51\pi$. (B) $V = 33\pi$.
 (C) $V = 9\pi$. (D) $V = 18\pi$.

Câu 24. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục

hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ).



Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng

- A** $\frac{5\pi}{4}$. **B** $\frac{4\pi}{3}$. **C** $\frac{7\pi}{6}$. **D** $\frac{5\pi}{6}$.

Câu 25. Gọi (H) là hình phẳng tạo bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^3 - x^2 - 2x}$ và trục hoành. Khi cho (H) quay quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích là

- A** $\frac{13}{6}\pi$. **B** $\frac{9}{4}\pi$. **C** $\frac{5}{12}\pi$. **D** $\frac{8}{3}\pi$.

Câu 26. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A** $V = \pi - 1$. **B** $V = \pi + 1$.
C $V = \pi(\pi - 1)$. **D** $V = \pi(\pi + 1)$.

Câu 27. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay quanh trục Ox .

- A** $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.
B $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.
C $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.
D $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

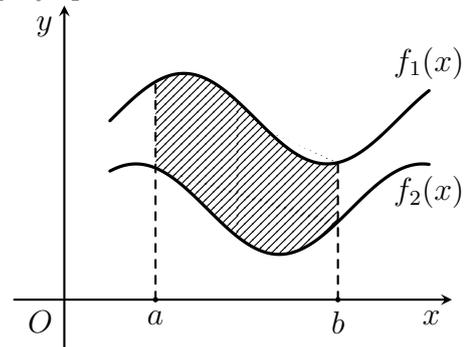
Câu 28. Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x$ quay xung quanh trục Ox bằng

- A** $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.
B $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.
C $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.
D $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Câu 29. Thể tích khối tròn xoay tạo bởi khi quay quanh trục hoành của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x; y = 0; x = 0; x = 1$ có giá trị bằng

- A** $\frac{8\pi}{15}$ (đvtt). **B** $\frac{7\pi}{3}$ (đvtt).
C $\frac{15\pi}{8}$ (đvtt). **D** $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt).

Câu 30. Cho hình phẳng trong hình (phần gạch chéo) quay quanh trục hoành.



Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?

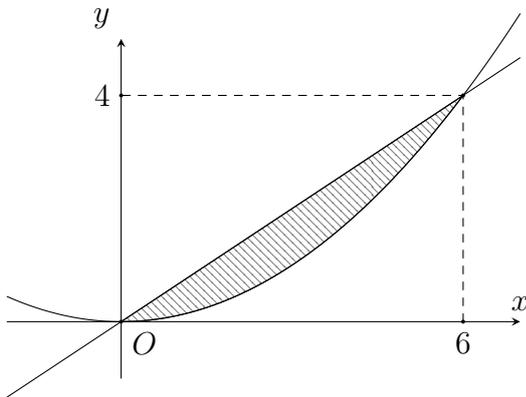
- A** $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx$.
B $V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$.
C $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$.
D $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx$.

Câu 31. Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox .

- A** $V = \frac{3\pi}{10}$. **B** $V = \frac{\pi}{10}$.

(C) $V = \frac{7\pi}{10}$. (D) $V = \frac{9\pi}{10}$.

Câu 32. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{9}$ và đường thẳng $-2x + 3y = 0$.



Tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) (phần tô sọc) quanh trục hoành.

(A) $V = 4\pi$. (B) $V = \frac{96\pi}{5}$.
 (C) $V = \frac{64\pi}{5}$. (D) $V = \frac{625\pi}{81}$.

Câu 33. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$; $y = 0$ quay quanh trục Ox .

(A) $\frac{14\pi}{15}$. (B) $\frac{17\pi}{15}$. (C) $\frac{48\pi}{15}$. (D) $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 34. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - e^x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

(A) $V = \pi(6 - e^2 - e)$. (B) $V = 6 - e^2 + e$.
 (C) $V = 6 - e^2 - e$. (D) $V = \pi(6 - e^2 + e)$.

Câu 35. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = 3e^{-x} + x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \ln 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục hoành được tính bằng công thức nào sau đây?

(A) $\pi^2 \int_0^{\ln 2} (3e^{-x} + x)^2 dx$.
 (B) $\int_0^{\ln 2} |3e^{-x} + x| dx$.
 (C) $\pi \int_0^{\ln 2} (3e^{-x} + x)^2 dx$.
 (D) $\pi \int_0^{\ln 2} |3e^{-x} + x| dx$.

Câu 36. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$ và trục hoành Ox . Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox .

(A) $\frac{\pi}{3}$. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) π . (D) $\sqrt{\pi}$.

Câu 37. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x$ và $y = x^2$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

(A) $\frac{2\pi}{15}$. (B) $\frac{3\pi}{25}$. (C) $\frac{\pi}{30}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

Câu 38. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox của hình giới hạn bởi đường thẳng $y = 1 - x^2$ và Ox .

(A) $\frac{16}{15}$. (B) $\frac{16\pi}{15}$. (C) $\frac{4}{3}$. (D) $\frac{4\pi}{3}$.

Câu 39. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

(A) $\frac{16}{15}$. (B) $\frac{4\pi}{3}$. (C) $\frac{16\pi}{15}$. (D) $\frac{4}{3}$.

Câu 40. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi trục hoành và hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{\frac{x}{2}}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ bằng

(A) πe^2 . (B) $\pi(e^2 - 1)$.
 (C) $\pi(e - 1)$. (D) $e^2 - 1$.

Câu 41. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $y = (4x - 1)\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Khi hình phẳng D quay quanh trục hoành được vật thể tròn xoay có thể tích V được tính theo công thức

(A) $V = \int_{\frac{1}{4}}^e (4x - 1)^2 \ln x dx$.
 (B) $V = \int_1^e (4x - 1)^2 \ln x dx$.
 (C) $V = \pi \int_1^e (4x - 1)^2 \ln x dx$.
 (D) $V = \pi \int_{\frac{1}{4}}^e (4x - 1)^2 \ln x dx$.

Câu 42. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các

đường $y = x^2 + 1, y = x^3 + 1$ quay quanh Ox .

- (A) $V = \frac{47}{210}$. (B) $V = \frac{47\pi}{210}$.
 (C) $V = \frac{2}{35}$. (D) $V = \frac{2\pi}{35}$.

Câu 43. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, đường thẳng $x = 4$, trục Ox quay quanh trục Ox .

- (A) $V = 8\pi$. (B) $V = 4\pi$.
 (C) $V = 16\pi$. (D) $V = 8\pi^2$.

Câu 44. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 3x, y = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.

- (A) $\frac{81\pi}{10}$. (B) $\frac{85\pi}{10}$. (C) $\frac{81}{10}$. (D) $\frac{41\pi}{10}$.

Câu 45. Thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ khi quay quanh trục Ox là

- (A) $V = \frac{9}{15}$. (B) $V = \frac{8\pi}{15}$.
 (C) $V = \frac{8}{15}$. (D) $V = \frac{9\pi}{15}$.

Câu 46. Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = a$ ($a > 0$). Giá trị của a sao cho thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng 57π là

- (A) $a = 3$. (B) $a = 5$. (C) $a = 4$. (D) $a = 2$.

Câu 47. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - x$ và trục hoành quanh trục hoành là

- (A) $\frac{\pi}{5}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{\pi}{30}$. (D) $\frac{\pi}{15}$.

Câu 48. Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox , biết (H) được giới hạn bởi các đường $y = 4x^2 - 1, y = 0$.

- (A) $\frac{8\pi}{15}$. (B) $\frac{16\pi}{15}$. (C) $\frac{4\pi}{15}$. (D) $\frac{2\pi}{15}$.

Câu 49. Khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{1 - x^2}$ quanh trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

- (A) $\frac{4\pi}{3}$. (B) $\frac{3\pi}{4}$. (C) $\frac{3\pi}{2}$. (D) $\frac{2\pi}{3}$.

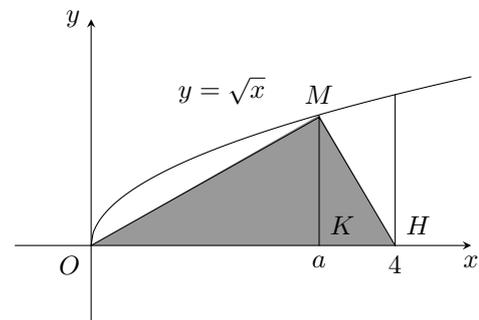
Câu 50. Gọi \mathcal{H} là hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{x}{4 - x^2}}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình \mathcal{H} xung quanh trục Ox .

- (A) $V = \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3}$. (B) $V = \frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{4}$.
 (C) $V = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$. (D) $V = \pi \ln \frac{4}{3}$.

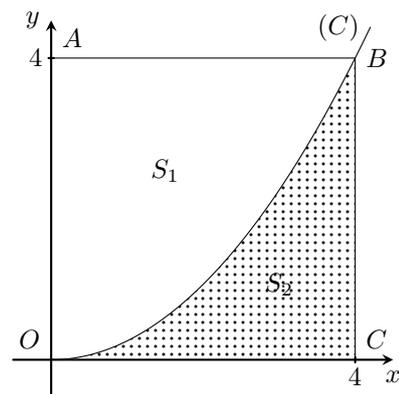
3.3. Mức độ vận dụng

Câu 1. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (tham khảo hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



- (A) $a = 2$. (B) $a = 2\sqrt{2}$.
 (C) $a = \frac{5}{2}$. (D) $a = 3$.

Câu 2. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1 là phần hình phẳng không bị gạch chéo (hình vẽ).



Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng S_1 xung quanh trục Ox .

- (A) $V = \frac{128\pi}{3}$. (B) $V = \frac{128\pi}{5}$.
 (C) $V = \frac{64\pi}{3}$. (D) $V = \frac{256\pi}{5}$.

Câu 3. Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x, y = 0, x = e$ là $V = \pi(a + be)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b$.

- (A) 3. (B) -1. (C) 0. (D) 2.

Câu 4. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C) : x^2 + (y - 3)^2 = 1$ xung quanh trục hoành.

- (A) $6\pi^2$. (B) $6\pi^3$. (C) $3\pi^2$. (D) 6π .

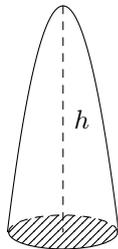
Câu 5. Quay hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P) : y^2 = x$ và đường thẳng $(D) : x = 1$ quanh Ox thì được một vật thể tròn xoay có thể tích là

- (A) $V = \frac{1}{3}\pi$. (B) $V = \frac{2}{3}\pi$.
 (C) $V = \frac{1}{5}\pi$. (D) $V = \frac{1}{2}\pi$.

Câu 6. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $y = \frac{x-3}{x+1}$, trục hoành và trục tung. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích $V = \pi(a + b \ln 2)$ với a, b là các số nguyên. Tính $T = a + b$.

- (A) $T = 10$. (B) $T = 3$.
 (C) $T = 6$. (D) $T = -1$.

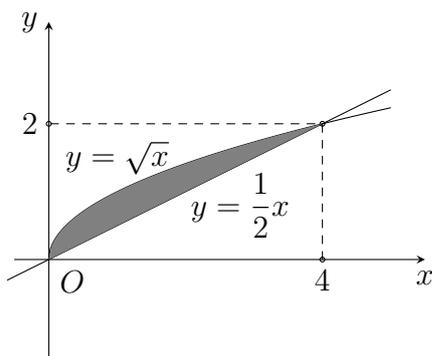
Câu 7. Vật thể Parabolide tròn xoay như hình vẽ bên, có đáy (phần gạch chéo) có diện tích $B = 3$, chiều cao $h = 4$ (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).



Thể tích V của vật thể trên là

- (A) $V = \frac{\pi}{3}$. (B) $V = 6$.
 (C) $V = \frac{3}{4}\pi$. (D) $V = 8$.

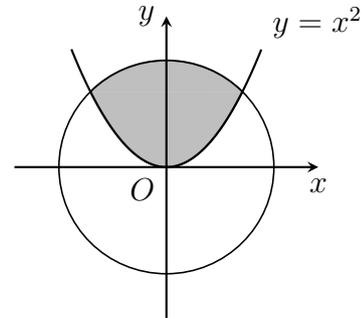
Câu 8. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \frac{1}{2}x$ (phần tô đậm trong hình vẽ).



Tính thể tích V khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A xung quanh trục Ox .

- (A) $V = \frac{8}{3}\pi$. (B) $V = \frac{8}{5}\pi$.
 (C) $V = 0,533$. (D) $V = 0,53\pi$.

Câu 9. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (Phần tô đậm trong hình bên).



Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành

- (A) $\frac{22\pi}{15}$. (B) $\frac{\pi}{5}$. (C) $\frac{5\pi}{3}$. (D) $\frac{44\pi}{15}$.

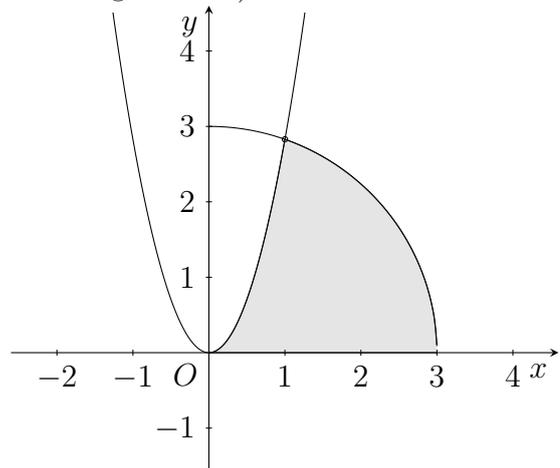
Câu 10. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các hàm số $y = \frac{x^2}{2}, y = \sqrt{2x}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- (A) $V = \frac{4\pi}{3}$. (B) $V = \frac{28\pi}{5}$.
 (C) $V = \frac{36\pi}{35}$. (D) $V = \frac{12\pi}{5}$.

Câu 11. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4, y = 2x - 4, x = 0, x = 2$ quanh trục Ox .

- (A) $\frac{32\pi}{7}$. (B) $\frac{22\pi}{5}$. (C) $\frac{32\pi}{15}$. (D) $\frac{32\pi}{5}$.

Câu 12. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2\sqrt{2}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 3$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục Ox là

- A** $\frac{163\pi}{15}$. **B** $\frac{164\pi}{15}$. **C** $\frac{163}{15}$. **D** $\frac{164}{15}$.

Câu 13. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{\frac{3+(x-2)e^x}{xe^x+1}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích $V = \pi \left[a + b \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right) \right]$, trong đó a, b là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** $a - 2b = 5$. **B** $a + b = 3$.
C $a - 2b = 7$. **D** $a + b = 5$.

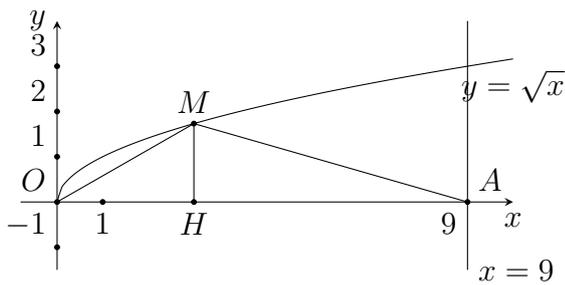
Câu 14. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quay quanh trục Ox .

- A** π . **B** $\frac{\pi}{6}$. **C** $\frac{\pi}{4}$. **D** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 15. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox bằng

- A** $\pi \ln \frac{4}{3}$. **B** $\frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{4}$.
C $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3}$. **D** $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3}$.

Câu 16. Cho đồ thị (C): $y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (C), đường thẳng $x = 9$, trục hoành.



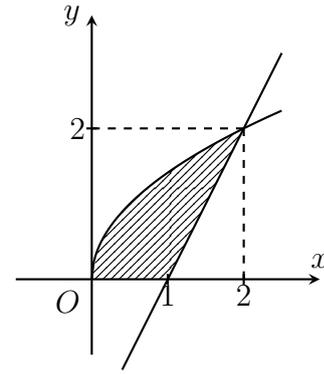
Cho M là điểm thuộc (C), $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox .

Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi (C) và OM biết $V_1 = 2V_2$.

- A** $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B** $S = \frac{4}{3}$.
C $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. **D** $S = 3$.

Câu 17. Hình phẳng D (phần gạch chéo trên

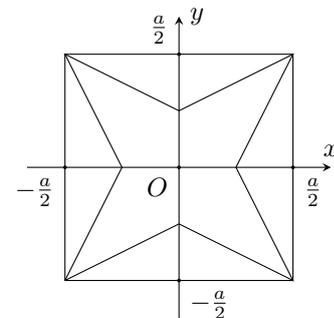
hình) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x}$, đường thẳng $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục hoành.



Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi hình phẳng D quay quanh trục Ox .

- A** $\frac{8\pi}{3}$. **B** $\frac{10\pi}{3}$. **C** $\frac{16\pi}{3}$. **D** $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 18. Bên trong hình vuông cạnh a , dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình).



Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox .

- A** $V = \frac{5\pi a^3}{24}$. **B** $V = \frac{5\pi a^3}{48}$.
C $V = \frac{5\pi a^3}{96}$. **D** $V = \frac{7\pi a^3}{24}$.

Câu 19. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x$ và $y = \sqrt{x}$ quay quanh trục hoành. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành bằng

- A** $V = \frac{\pi}{6}$. **B** $V = \frac{\pi}{2}$.
C $V = \pi$. **D** $V = 0$.

Câu 20. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

- A** $\frac{\pi}{6}$. **B** $\frac{\pi}{3}$. **C** $\frac{2\pi}{15}$. **D** $\frac{4\pi}{15}$.

4. Thể tích tính theo mặt cắt $S(x)$

Câu 1. Tính thể tích vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể đó cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x thỏa mãn $-1 \leq x \leq 1$

là một tam giác vuông cân với cạnh huyền bằng $\sqrt{1-x^4}$.

- (A) 4. (B) $\frac{2}{5}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{3}{4}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (T) nằm giữa hai mặt phẳng $x=0, x=1$. Tính thể tích V của (T) biết rằng khi cắt (T) bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x, (0 \leq x \leq 1)$ ta được thiết diện là một tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{1+x}$.

- (A) $V = \frac{3}{2}$. (B) $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$.
 (C) $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. (D) $V = \frac{3}{2}\pi$.

Câu 3. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 3)$ là một hình tròn có đường kính bằng $\sqrt{36-3x^2}$.

- (A) $V = \frac{81\pi}{4}$. (B) $V = \frac{81}{4}$.
 (C) $V = 81\pi$. (D) $V = 81$.

Câu 4. Viết công thức tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\ln 4$, biết khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq \ln 4)$, ta được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh là $\sqrt{xe^x}$.

- (A) $V = \int_0^{\ln 4} xe^x dx$.
 (B) $V = \pi \int_0^{\ln 4} xe^x dx$.
 (C) $V = \pi \int_0^{\ln 4} (xe^x)^2 dx$.
 (D) $V = \int_0^{\ln 4} \sqrt{xe^x} dx$.

Câu 5. Cho phần vật thể (\mathfrak{S}) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể (\mathfrak{S}) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể (\mathfrak{S}) .

- (A) $V = \frac{4}{3}$. (B) $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- (C) $V = 4\sqrt{3}$. (D) $V = \sqrt{3}$.

Câu 6. Xét vật thể (T) nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (-1 \leq x \leq 1)$ là một hình vuông có cạnh $2\sqrt{1-x^2}$. Thể tích vật thể (T) bằng

- (A) $\frac{16\pi}{3}$. (B) $\frac{16}{3}$. (C) π . (D) $\frac{8}{3}$.

Câu 7. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa 2 mặt phẳng $x=0, x=3$, biết thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{1-x^2}$.

- (A) $V = 16$. (B) $V = 17$.
 (C) $V = 18$. (D) $V = 19$.

Câu 8. Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0, x=2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $(0 \leq x \leq 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

- (A) $\frac{(13e^4-1)\pi}{4}$. (B) $\frac{13e^4-1}{4}$.
 (C) $2e^2$. (D) $2\pi e^2$.

Câu 9. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 < x < 4)$ thì được thiết diện là nửa hình tròn có bán kính $R = x\sqrt{4-x}$.

- (A) $V = \frac{64}{3}$. (B) $V = \frac{32}{3}$.
 (C) $V = \frac{64\pi}{3}$. (D) $V = \frac{32\pi}{3}$.

Câu 10. Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0; x=2$. Cắt vật thể (T) bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x (0 \leq x \leq 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

- (A) $\frac{(13e^4-1)\pi}{4}$. (B) $\frac{13e^4-1}{4}$.
 (C) $2e^2$. (D) $2\pi e^2$.

Chương 4

SỐ PHỨC

Bài 1

SỐ PHỨC

A Tóm tắt lí thuyết

☞ **Định nghĩa 1.1.** Một số phức là một biểu thức dạng $a + bi$, trong đó a và b là những số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.
 i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực, b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.
Tập hợp các số phức được kí hiệu là \mathbb{C} .

☞ **Ví dụ 1.** Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

a) $z = 3 - 5i$.

b) $z = -\sqrt{3} + 5i$.

c) $z = 2 + (-4)i$.

💬 **Lời giải.**

a) Phần thực: $a = 3$, phần ảo: $b = -5$

b) Phần thực: $a = -\sqrt{3}$, phần ảo: $b = 5$

c) Phần thực: $a = 2$, phần ảo: $b = -4$

1. Số phức bằng nhau

☞ **Định nghĩa 1.2.** Hai số phức được gọi là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

☞ **Ví dụ 2.** Tìm các số thực x, y , biết

$$(3x - y) + (2y - 1)i = (x + 1) + (y + 2)i$$

💬 **Lời giải.**

Từ định nghĩa hai số phức bằng nhau, ta có

$$\begin{cases} 3x - y = x + 1 \\ 2y - 1 = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ và $y = 3$.

⚠ **Lưu ý:**

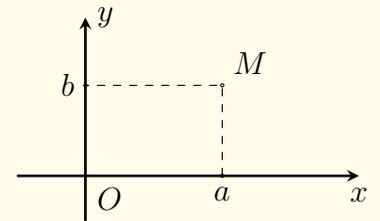
☑ Mọi số thực a được gọi là một số phức với phần ảo bằng 0, tức là $a = a + 0i$.
Như vậy, mỗi số thực cũng là một số phức. Ta có $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

☺ Số phức $0 + bi$ được gọi là **số thuần ảo** và viết đơn giản là bi , tức là $bi = 0 + bi$.

2. Biểu diễn hình học số phức

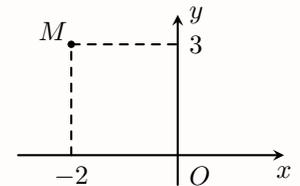
⇔ Định nghĩa 1.3.

Điểm $M(a; b)$ trong một hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z = a + bi$.



⇔ Ví dụ 3.

Tìm số phức được biểu diễn bởi điểm M như hình vẽ bên.



💬 **Lời giải.**

Điểm $M(-2; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -2 + 3i$.

3. Môđun của số phức

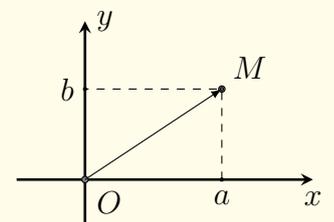
Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

⇔ Định nghĩa 1.4.

Độ dài của véc-tơ \overrightarrow{OM} được gọi là **mô-đun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.

Từ định nghĩa, suy ra $|z| = |\overrightarrow{OM}|$ hay $|a + bi| = |\overrightarrow{OM}|$. Khi đó

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



⇔ Ví dụ 4. Tính mô-đun của các số phức sau:

a) $z = 3 + 4i$

b) $z = -4 - 3i$

c) $z = 1 + i$

d) $z = 10i$

💬 **Lời giải.**

a) $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

b) $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$

c) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

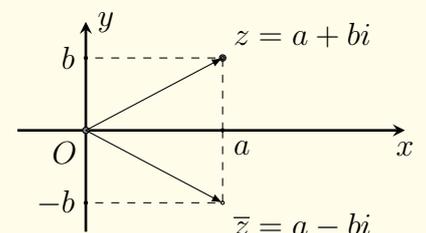
d) $|z| = \sqrt{0^2 + 10^2} = \sqrt{100} = 10.$

4. Số phức liên hợp

⇔ Định nghĩa 1.5.

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là **số phức liên hợp** của z và kí hiệu là $\bar{z} = a - bi$. Tức là

$$\overline{a + bi} = a - bi.$$



⊠ **Tính chất 1.1.** $\bar{\bar{z}} = z$.

⊠ **Tính chất 1.2.** $|\bar{z}| = |z|$.

⊠ **Ví dụ 5.** Tìm số phức liên hợp của các số phức sau

a) $z = 2 + 3i$

b) $z = 1 - 5i$

c) $z = 10i$

d) $\bar{z} = 5 - 2i$

💬 **Lời giải.**

a) $\bar{z} = 2 - 3i$

b) $\bar{z} = 1 + 5i$

c) $\bar{z} = -10i$

d) $z = 5 + 2i$



Các dạng toán

Dạng 1. Xác định phần thực - phần ảo của số phức

Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ có a là phần thực, b là phần ảo.

Bài 1. Xác định phần thực, phần ảo của các số phức:

a) $z = 2 + 3i$.

b) $z = 2i - 4$.

c) $z = 3$.

d) $z = 15i$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

Bài 2. Xác định phần thực, phần ảo của các số phức:

a) $z = 4i$.

b) $z = -3i + 4$.

c) $z = 16$.

d) $z = -43 + 15i$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

Dạng 2. Xác định mô-đun của số phức

Mô-đun của số phức $z = a + bi$ là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bài 1. Tìm mô-đun của các số phức sau:

a) $z = 1 + 2i$.

b) $z = 3 - 5i$.

c) $z = -5 + 4i$.

d) $z = -4i$.

e) $z = 2$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

Bài 2. Tìm mô-đun của các số phức sau:

a) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) $z = 4i - 3$.

c) $z = -3 - 4i$.

d) $z = -6$.

e) $z = -4i$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

Dạng 3. Hai số phức bằng nhau

Hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i$ được gọi là bằng nhau nếu $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

Bài 1. Tìm các số thực x, y biết:

a) $x + 2y + 3i = 4x - 5y + (6 - y)i.$

b) $-3x + 6y - (8 + 4y)i = 3x - 4 + (4x - y)i.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Cho $z = (3a + 2) + (b - 4)i.$ Tìm các số a, b để

a) z là số thực.

b) z là số thuần ảo.

Lời giải.

.....

.....

Bài 3. Tìm các số thực $x, y,$ biết:

a) $(2x + 1) + (3y - 2)i = (x + 2) + (y + 4)i.$

b) $(1 - 3x) + (y + 1)i = (x + y) - (2x + 1)i.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Tìm các số thực $x, y,$ biết:

a) $2x + 1 + 5i = -4 + (3y - 2)i.$

b) $(x - \sqrt{2}) - 4i = 3 - (y + 1)i.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

Bài 5. Cho số phức $z = (a^2 - 4b^2) + (a + 2b)i$. Tìm các số a, b để z là số ảo.

Lời giải.

.....

.....

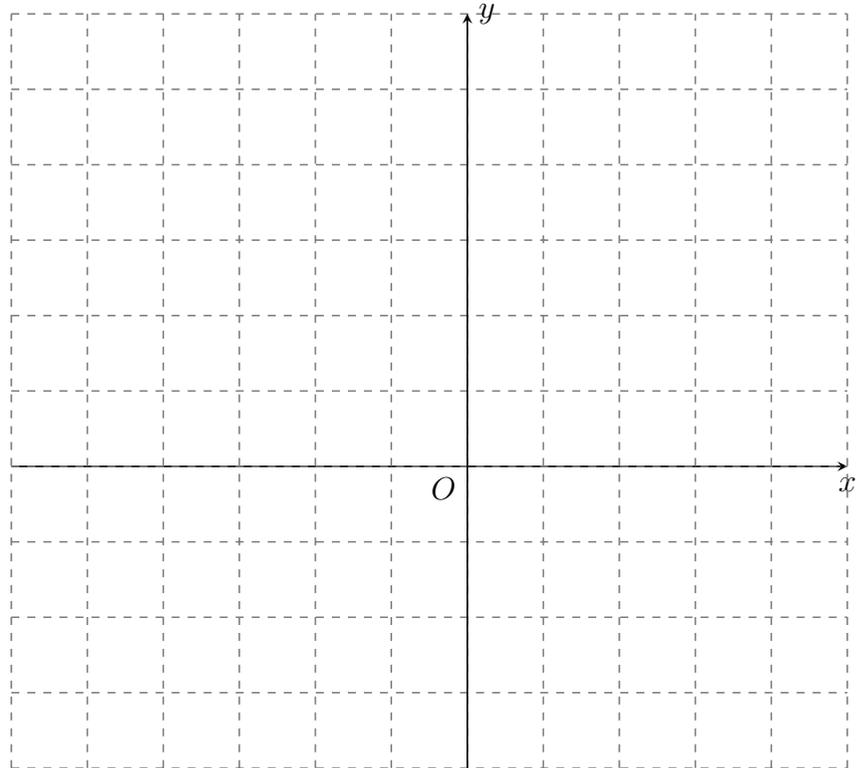
.....

Dạng 4. Tìm tập hợp điểm biểu diễn

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$.

Bài 1. Biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ các số phức sau: $4 - 3i, 3 + 2i, -5, 5i$.

Lời giải.



Bài 2. Biết A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn theo thứ tự các số: $-1 + i, -1 - i, 2i, 2 - 2i$. Tìm các số z_1, z_2, z_3, z_4 theo thứ tự biểu diễn các vec-tơ $\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BC}, \vec{BD}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

$$\vec{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M)$$

Bài 3. Biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ các số phức sau: $-4 - 2i$, $-3 + 5i$, 4 , $-3i$.

Lời giải.

.....

.....

Bài 4. Cho $ABCD$ là một hình bình hành với A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $1 - 2i, 4 - 2i, 5 + i, z$. Tìm số phức z .

Lời giải.

.....

.....

.....

Dạng 5. Số phức liên hợp

Số $\bar{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của $z = a + bi$.

Bài 1. Tìm số phức liên hợp của các số phức sau

- a) $z = 3 - i\sqrt{2}$; b) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$; c) $z = 3$; d) $z = -5i$.

Lời giải.

.....

.....

.....

Bài 2. Tìm số phức liên hợp của các số phức sau

- a) $z = -5 + i\sqrt{3}$. b) $z = \pi - 2\pi i$. c) $z = 2$. d) $z = i \cos \sqrt{2}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

VẬN DỤNG 1

Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện:

- a) Phần thực của z lớn hơn hoặc bằng 1;
- b) Phần ảo của z thuộc nửa khoảng $(-1; 2]$;
- c) Phần thực thuộc đoạn $[-1; 2]$, phần ảo thuộc đoạn $[-1; 3]$;
- d) $|z| = 2$;
- e) $|z| \leq 2$;
- f) $|z| = 2$ và phần thực nhỏ hơn 1;
- g) $|z| \leq 2$ và phần thực thuộc đoạn $[-1; 1]$.

VẬN DỤNG 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Ba đỉnh A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a = 2 - 2i, b = -1 + i, c = 5 + mi$ ($m \in \mathbb{R}$).

- a) Tìm số phức d được biểu diễn bởi điểm D ;
- b) Xác định m sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật.

VẬN DỤNG 3

Cho A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn các số phức $z_1 = -1 - i, z_2 = i, z_3 = 1 + ki$ ($k \in \mathbb{R}$). Xác định k để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

VẬN DỤNG 4

Cho số phức $z = m + (m - 3)i, m \in \mathbb{R}$.

- a) Tìm m để điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường thẳng $y = -x$;
- b) Tìm m để điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 5$;
- c) Tìm m để khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức đến gốc tọa độ là nhỏ nhất.

C Bài tập trắc nghiệm

1. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức

1.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Số phức $z = -2i$ có phần thực và phần ảo lần lượt là

- A -2 và 0.
- B $-2i$ và 0.
- C 0 và -2 .
- D 0 và 2.

Câu 2. Số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là

- A $\bar{z} = -3 + 2i$.
- B $\bar{z} = 2 - 3i$.
- C $\bar{z} = -3 - 2i$.
- D $\bar{z} = 3 - 2i$.

Câu 3. Tính mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$.

- A 3.
- B 5.
- C 7.
- D $\sqrt{7}$.

Câu 4. Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là

- A 2 và 1.
- B 1 và $2i$.
- C 1 và 2.
- D 1 và i .

Câu 5. Số phức liên hợp \bar{z} của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A $\bar{z} = 2 + 3i$.
- B $\bar{z} = 3 - 2i$.
- C $\bar{z} = 3 + 2i$.
- D $\bar{z} = -2 + 3i$.

Câu 6. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 4 - 3i$.

- A $\bar{z} = -4 - 3i$.
- B $\bar{z} = -4 + 3i$.
- C $\bar{z} = 4 + 3i$.
- D $\bar{z} = 3 + 4i$.

Câu 7. Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là

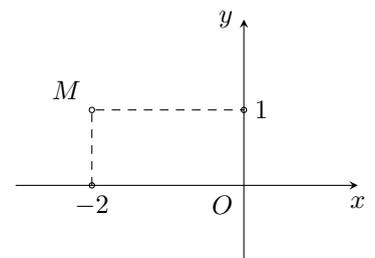
- A $\bar{z} = -a + bi$.
- B $\bar{z} = b - ai$.
- C $\bar{z} = -a - bi$.
- D $\bar{z} = a - bi$.

Câu 8. Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ bằng

- A -4 .
- B $-4i$.
- C 4.
- D $4i$.

Câu 9.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



- A $z = -2 + i$.
- B $z = 1 - 2i$.
- C $z = 2 + i$.
- D $z = 1 + 2i$.

Câu 10. Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ bằng

- A -4 .
- B $-4i$.
- C 4.
- D $4i$.

Câu 11. Số phức liên hợp \bar{z} của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A $\bar{z} = 3 - 2i$.
- B $\bar{z} = 2 + 3i$.
- C $\bar{z} = 3 + 2i$.
- D $\bar{z} = -2 + 3i$.

Câu 12. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A $-3i$.
- B 2.
- C -3 .
- D 3.

Câu 13. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = \dots$

$(3 + i)(m - 2i), m \in \mathbb{R}$.

- A** $\bar{z} = -(3m + 2) + (m - 6)i$.
- B** $\bar{z} = (3m + 2) + (m - 6)i$.
- C** $\bar{z} = -(3m + 2) - (m - 6)i$.
- D** $\bar{z} = (3m + 2) - (m - 6)i$.

Câu 14. Số phức liên hợp của số phức $z = 4 + 3i$ là

- A** $\bar{z} = -3 + 4i$.
- B** $\bar{z} = 4 - 3i$.
- C** $\bar{z} = 3 + 4i$.
- D** $\bar{z} = 3 - 4i$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A** Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2.
- B** Phần thực bằng -3, phần ảo bằng 2.
- C** Phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2.
- D** Phần thực bằng -3, phần ảo bằng -2.

Câu 16. Cho số phức $z = -12 + 5i$. Mô-đun của số phức z bằng

- A** 13.
- B** 119.
- C** 17.
- D** -7.

Câu 17. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(3; -5)$. Xác định số phức liên hợp \bar{z} của z .

- A** $\bar{z} = -5 + 3i$.
- B** $\bar{z} = 5 + 3i$.
- C** $\bar{z} = 3 + 5i$.
- D** $\bar{z} = 3 - 5i$.

Câu 18. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của số phức z là

- A** $\bar{z} = 3 - 2i$.
- B** $\bar{z} = 3 + 2i$.
- C** $\bar{z} = -2 - 3i$.
- D** $\bar{z} = 2 + 3i$.

Câu 19. Trong mặt phẳng phức, điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 2i$ là

- A** $M(3; -2)$.
- B** $N(2; -3)$.
- C** $P(-2; 3)$.
- D** $Q(-3; 2)$.

Câu 20. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$.

- A** $\bar{z} = 1 + 2i$.
- B** $\bar{z} = 2 - i$.
- C** $\bar{z} = -1 + 2i$.
- D** $\bar{z} = -1 - 2i$.

Câu 21. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

- A** $\bar{z} = 2 - i$.
- B** $\bar{z} = 2 + i$.
- C** $\bar{z} = -2 + i$.
- D** $\bar{z} = -2 - i$.

Câu 22. Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là

- A** 1 và 2.
- B** 1 và i .

- C** 1 và $2i$.
- D** 2 và 1.

Câu 23. Cho số phức $z = 10 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} .

- A** Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng 2.
- B** Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng $2i$.
- C** Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng $-2i$.
- D** Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng -2.

Câu 24. Tọa độ điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = 2 + 5i$ là

- A** $(2; -5)$.
- B** $(2; 5)$.
- C** $(-2; -5)$.
- D** $(-2; 5)$.

Câu 25. Giả sử a, b , là hai số thực thỏa mãn $2a + (b - 3)i = 4 - 5i$ với i là đơn vị ảo. Giá trị của a, b , bằng

- A** $a = 1, b = 8$.
- B** $a = 8, b = 8$.
- C** $a = 2, b = -2$.
- D** $a = -2, b = 2$.

Câu 26. Số phức $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

- A** 5.
- B** -8.
- C** 8.
- D** -8i.

Câu 27. Tìm phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$.

- A** -4.
- B** 4.
- C** 3.
- D** -3.

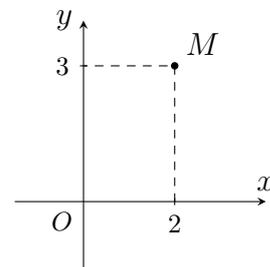
Câu 28. Số phức z thỏa mãn $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

- A** -8.
- B** 8.
- C** 5.
- D** -8i.

Câu 29. Trong các số phức $z_1 = -2i, z_2 = 2 - i, z_3 = 5i, z_4 = 4$ có bao nhiêu số thuần ảo?

- A** 4.
- B** 1.
- C** 3.
- D** 2.

Câu 30. Số phức z có điểm biểu diễn M như hình vẽ.



Phần ảo của số phức $\frac{z}{z - i}$ bằng

- A** $\frac{5}{4}i$.
- B** $\frac{1}{4}i$.
- C** $\frac{5}{4}$.
- D** $\frac{1}{4}$.

Câu 31. Mô-đun của số phức $w = 2 - \sqrt{5}i$ là

- A** $|w| = \sqrt{29}$.
- B** $|w| = 1$.
- C** $|w| = \sqrt{7}$.
- D** $|w| = 3$.

Câu 32. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

- (A) $\bar{z} = 3 + 2i$. (B) $\bar{z} = 3 - 2i$.
 (C) $\bar{z} = 2 + 3i$. (D) $\bar{z} = -2 + 3i$.

Câu 33. Mô-đun của số phức $z = 4 - 3i$ bằng

- (A) 7. (B) 25. (C) 5. (D) 1.

Câu 34. Phần ảo của số phức $z = -1 + i$ là

- (A) 1. (B) -1. (C) i . (D) $-i$.

Câu 35. Cho số phức $z = 3 - 5i$. Phần ảo của z là

- (A) 5. (B) 3. (C) -5. (D) $-5i$.

Câu 36. Mô-đun của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

- (A) $\sqrt{29}$. (B) 3. (C) 7. (D) 29.

Câu 37. Số phức $z = 5 - 7i$ có số phức liên hợp là

- (A) $\bar{z} = 5 + 7i$. (B) $\bar{z} = -5 + 7i$.
 (C) $\bar{z} = 7 - 5i$. (D) $\bar{z} = -5 - 7i$.

Câu 38. Tìm các số thực a, b thỏa mãn $(a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $a = -3, b = 1$. (B) $a = 3, b = -1$.
 (C) $a = -3, b = -1$. (D) $a = 3, b = 1$.

Câu 39. Phần ảo của số phức $z = 5 + 2i$ bằng

- (A) 5. (B) $2i$. (C) 2. (D) $5i$.

Câu 40. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- (A) Số phức z có phần thực là a , phần ảo là bi .
 (B) Số phức z có mô-đun là $\sqrt{a^2 + b^2}$.
 (C) Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$.
 (D) $z = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Câu 41. Điểm $M(-1; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức

- (A) $z = -1 + 3i$. (B) $z = 2$.
 (C) $z = 1 - 3i$. (D) $z = 2i$.

Câu 42. Phần ảo của số phức liên hợp của $z = 4i - 7$ là

- (A) -4. (B) -7. (C) 7. (D) 4.

Câu 43. Mô-đun của số phức $z = -4 + 3i$ là

- (A) -1. (B) 1. (C) 5. (D) 25.

Câu 44. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 1 + 3i$.

- (A) $\bar{z} = -1 + 3i$. (B) $\bar{z} = 1 - 3i$.
 (C) $\bar{z} = 3 - i$. (D) $\bar{z} = -1 - 3i$.

Câu 45. Mô-đun của số phức $z = bi, b \in \mathbb{R}$ là

- (A) b . (B) b^2 . (C) $|b|$. (D) \sqrt{b} .

Câu 46. Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

- (A) 3. (B) -7. (C) -3. (D) 7.

Câu 47. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

- (A) $3 + 4i$. (B) $4 - 3i$. (C) $3 - 4i$. (D) $4 + 3i$.

Câu 48. Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng

- (A) -5. (B) 5. (C) -6. (D) 6.

Câu 49. Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

- (A) $-1 - 3i$. (B) $1 - 3i$.
 (C) $-1 + 3i$. (D) $1 + 3i$.

Câu 50. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(2x + 5y) + (4x + 3y)i = 5 + 2i$.

- (A) $x = \frac{5}{14}$ và $y = -\frac{8}{7}$.
 (B) $x = \frac{8}{7}$ và $y = -\frac{5}{14}$.
 (C) $x = -\frac{5}{14}$ và $y = \frac{8}{7}$.
 (D) $x = -\frac{8}{14}$ và $y = -\frac{5}{7}$.

1.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Mô-đun số phức $z = 4 - 3i$ bằng

- (A) 7. (B) 5. (C) 1. (D) 25.

Câu 2. Cho số phức $z = 2 + 3i$. Phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} lần lượt là

- (A) 2 và 3. (B) -2 và -3.
 (C) 2 và $-3i$. (D) 2 và -3.

Câu 3. Có bao nhiêu số phức z có phần thực bằng 2 và $|z + 1 - 2i| = 3$?

- (A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Câu 4. Tìm hai số thực x, y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i$, với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = 3, y = -1$. (B) $x = \frac{2}{3}, y = -1$.
 (C) $x = 3, y = -3$. (D) $x = -3, y = -1$.

Câu 5. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$, với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = \frac{3}{2}, y = -2$. (B) $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{4}{3}$.
 (C) $x = 1, y = \frac{4}{3}$. (D) $x = \frac{3}{2}, y = \frac{4}{3}$.

Câu 6. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$ với i là đơn vị ảo.

- A $x = \frac{1}{7}; y = \frac{4}{7}$. B $x = -\frac{2}{7}; y = \frac{4}{7}$.
 C $x = -\frac{1}{7}; y = \frac{4}{7}$. D $x = -\frac{1}{7}; y = -\frac{4}{7}$.

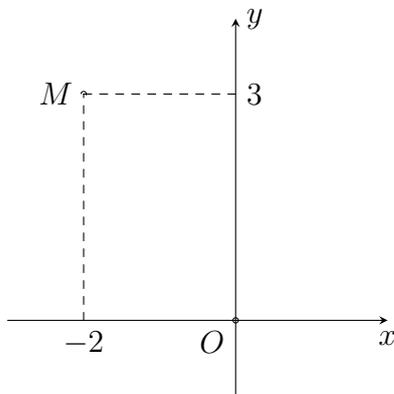
Câu 7. Cho số phức $z = -3 + 4i$. Mô-đun của z là

- A $|z| = 7$. B $|z| = 4$.
 C $|z| = 5$. D $|z| = 3$.

Câu 8. Biết rằng có duy nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $(x + y) + (x - y)i = 5 + 3i$. Tính giá trị của $S = x + 2y$.

- A $S = 4$. B $S = 6$. C $S = 5$. D $S = 3$.

Câu 9. Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu thị cho số phức z . Chọn khẳng định đúng.



- A $\bar{z} = -2 + 3i$. B $\bar{z} = 3 - 2i$.
 C $\bar{z} = -2 - 3i$. D $\bar{z} = 3 + 2i$.

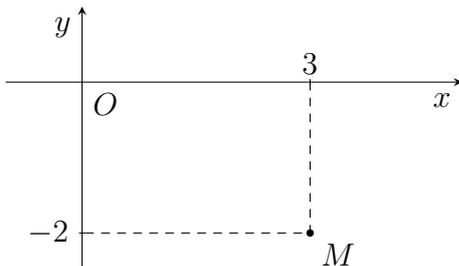
Câu 10. Cho số phức $z = -1 - 4i$. Tìm phần thực của số phức \bar{z} .

- A -4 . B -1 . C 1 . D 4 .

Câu 11. Cho số phức $z = -2 - 5i$. Nếu z và z' là hai số phức liên hợp của nhau thì

- A $z' = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$. B $z' = 2 - 5i$.
 C $z' = 2 + 5i$. D $z' = -2 + 5i$.

Câu 12. Cho số phức z có điểm biểu diễn là M trong hình vẽ bên.



Gọi M' là điểm biểu diễn cho số phức \bar{z} . Tọa độ

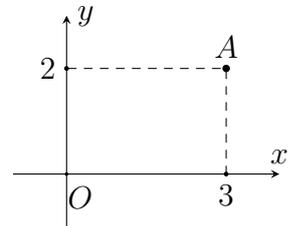
- A $M'(-3; -2)$. B $M'(3; 2)$.
 C $M'(-3; 2)$. D $M'(3; -2)$.

Câu 13. Mô-đun của số phức $z = 4 - 3i$ bằng:

- A 25. B 5. C 4. D -3 .

Câu 14.

Cho số phức z có điểm biểu diễn là điểm A trong hình vẽ. Tìm phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} .



- A Phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2 .
 B Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2.
 C Phần thực bằng 2, phần ảo bằng $-3i$.
 D Phần thực bằng 3, phần ảo bằng $2i$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z = z - 1$. Mô-đun của z bằng

- A $\frac{1}{\sqrt{10}}$. B $\frac{1}{10}$. C 1. D $\sqrt{10}$.

Câu 16. Cho số phức $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ($\varphi \in \mathbb{R}$). Tìm mô-đun của z .

- A $|\cos \varphi| + |\sin \varphi|$. B 1.
 C $|\cos \varphi + \sin \varphi|$. D $|\cos 2\varphi|$.

Câu 17. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \frac{15 - 5i}{1 - i} = 20$.

- A $|z| = 5$. B $|z| = 7$.
 C $|z| = \sqrt{5}$. D $|z| = 1$.

Câu 18. Cho cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 3 - 2i$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A $|z| > |w|$.
 B $|z| = |w|$.
 C Nếu A và B theo thứ tự là hai điểm biểu diễn của z và w trên hệ tọa độ Oxy thì $AB = |z - w|$.
 D Số phức z là số phức liên hợp của số phức w .

Câu 19. Tìm hai số thực x, y thỏa mãn $2 + (5 - y)i = (x - 1) + 5i$.

- A $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$. B $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$.
 C $\begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \end{cases}$. D $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$.

Câu 20. Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 2 + yi = -2 + 5i$.

- (A) $x = 0, y = 5$. (B) $x = -2, y = 5$.
 (C) $x = 2, y = 5$. (D) $x = 2, y = -5$.

Câu 21. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (1 - i)(3 + 2i)$.

- (A) $\bar{z} = -5 + i$. (B) $\bar{z} = 5 - i$.
 (C) $\bar{z} = 5 + i$. (D) $\bar{z} = -5 - i$.

Câu 22. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(x + y) + (2x - y)i = 3 - 6i$.

- (A) $x = -1; y = -4$. (B) $y = -1; x = 4$.
 (C) $x = -1; y = 4$. (D) $x = 1; y = -4$.

Câu 23. Mô-đun của số phức $z = m - 2i$ ($m \in \mathbb{R}$) là

- (A) $\sqrt{m^2 - 2}$. (B) $\sqrt{m^2 + 2}$.
 (C) $\sqrt{m^2 - 4}$. (D) $\sqrt{m^2 + 4}$.

Câu 24. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Tính mô-đun của số phức \bar{z} .

- (A) 3. (B) 1. (C) 9. (D) $\sqrt{41}$.

Câu 25. Cho số phức $z = 2i - 8$. Số phức liên hợp của z là

- (A) $\bar{z} = 2i + 8$. (B) $\bar{z} = -2i + 8$.
 (C) $\bar{z} = 2i - 8$. (D) $\bar{z} = -2i - 8$.

Câu 26. Cho số phức $z = \sqrt{7} - 3i$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = 5$. (B) $|z| = 3$.
 (C) $|z| = 4$. (D) $|z| = 16$.

Câu 27. Cho số phức z có phần ảo âm và thỏa mãn $z^2 - 3z + 5 = 0$. Tìm mô-đun của số phức $\omega = 2z - 3 + \sqrt{14}$.

- (A) $\sqrt{24}$. (B) $\sqrt{17}$. (C) 4. (D) 5.

Câu 28. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Mệnh đề nào dưới đây luôn đúng?

- (A) $z - \bar{z} = 2a$. (B) $z\bar{z} = a^2 - b^2$.
 (C) $z + \bar{z} = 2bi$. (D) $|z^2| = |z|^2$.

Câu 29. Số phức z nào sau đây thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$ và z là số thuần ảo?

- (A) $z = \sqrt{5}$. (B) $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.
 (C) $z = 5i$. (D) $z = -\sqrt{5}i$.

Câu 30. Điểm $M(3; -4)$ là điểm biểu diễn của số phức z , số phức liên hợp của z là

- (A) $\bar{z} = 3 - 4i$. (B) $\bar{z} = -3 + 4i$.
 (C) $\bar{z} = 3 + 4i$. (D) $\bar{z} = -3 - 4i$.

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) = 3-5i$. Tính mô-đun của z .

- (A) $|z| = 4$. (B) $|z| = \sqrt{17}$.
 (C) $|z| = 17$. (D) $|z| = 16$.

Câu 32. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Mô-đun của số phức z bằng

- (A) 3. (B) 9. (C) $\sqrt{41}$. (D) 1.

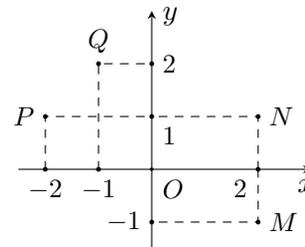
Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} - 3 + i = 0$. Mô-đun của z bằng bao nhiêu?

- (A) $\sqrt{10}$. (B) 10. (C) $\sqrt{3}$. (D) 4.

2. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

2.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?



- (A) N. (B) P. (C) M. (D) Q.

Câu 2. Điểm nào trong các điểm dưới đây biểu diễn số phức $z = -1 + i$?

- (A) $Q(0; -1)$. (B) $M(-1; 1)$.
 (C) $N(1; -1)$. (D) $P(-1; 0)$.

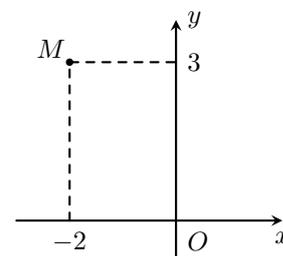
Câu 3. Điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$ trên mặt phẳng Oxy có tọa độ là

- (A) $(1; -2)$. (B) $(-1; -2)$.
 (C) $(2; -1)$. (D) $(2; 1)$.

Câu 4. Cho số phức $z = -4 + 5i$. Điểm biểu diễn của z có tọa độ

- (A) $(-4; 5)$. (B) $(-4; -5)$.
 (C) $(4; -5)$. (D) $(4; 5)$.

Câu 5. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức nào trong các số phức cho sau đây?

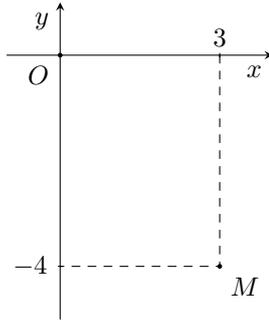


- (A) $3 - 2i$.
- (B) $-2 + 3i$.
- (C) $2 - 3i$.
- (D) $3 + 2i$.

Câu 6. Số phức được biểu diễn bởi điểm $M(2; -1)$ là

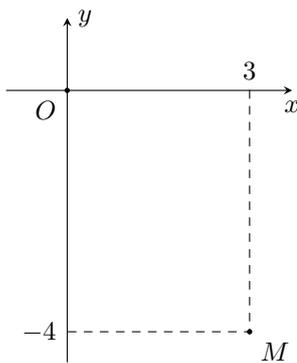
- (A) $2 + i$.
- (B) $1 + 2i$.
- (C) $2 - i$.
- (D) $-1 + 2i$.

Câu 7. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .



- (A) Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
- (B) Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
- (C) Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- (D) Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Câu 8. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .



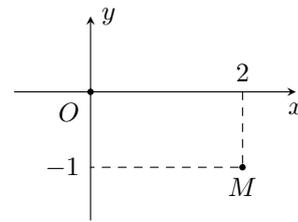
- (A) Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
- (B) Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
- (C) Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- (D) Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Câu 9. Cho số phức $z = -4 + 5i$. Biểu diễn hình học của z là điểm có tọa độ

- (A) $(-4; 5)$.
- (B) $(-4; -5)$.
- (C) $(4; -5)$.
- (D) $(4; 5)$.

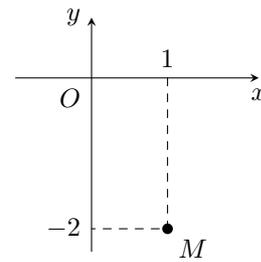
Câu 10. Điểm M trong hình vẽ là biểu diễn hình

học của số phức nào dưới đây?



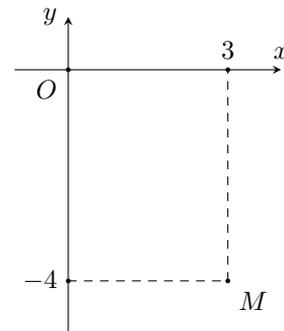
- (A) $z = 1 + 2i$.
- (B) $z = 2 + i$.
- (C) $z = -1 + 2i$.
- (D) $z = -1 - 2i$.

Câu 11. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực, phần ảo của số phức z



- (A) Phần thực là -2 , phần ảo là i .
- (B) Phần thực là 1 , phần ảo là -2 .
- (C) Phần thực là 1 , phần ảo là $-2i$.
- (D) Phần thực là -2 , phần ảo là 1 .

Câu 12. Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức z . Mệnh đề nào sau đây đúng?



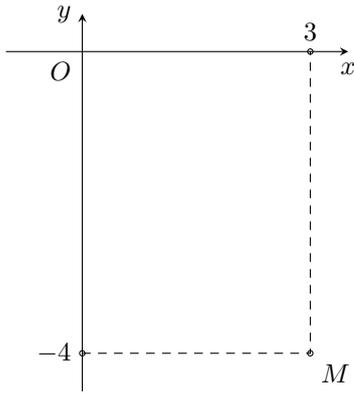
- (A) Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- (B) Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
- (C) Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
- (D) Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Câu 13. Điểm M biểu diễn số phức $z = 3 + 2i$ trong mặt phẳng tọa độ phức là

- (A) $M(2; 3)$.
- (B) $M(-3; -2)$.
- (C) $M(3; 2)$.
- (D) $M(3; -2)$.

Câu 14. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu

diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .



- A Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- B Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
- C Phần thực là -4 và phần ảo là 3.
- D Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Câu 15. Biết $M(1; -2)$ là điểm biểu diễn số phức \bar{z} , số phức z bằng

- A $2 + i$.
- B $1 + 2i$.
- C $2 - i$.
- D $1 - 2i$.

Câu 16. Điểm biểu thị số phức $z = 3 - 2i$ là

- A $M(3; -2)$.
- B $N(-2; 3)$.
- C $P(2; 3)$.
- D $Q(3; 2)$.

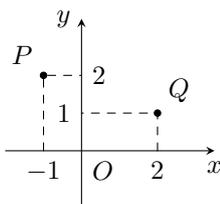
Câu 17. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 4i$?

- A $M(3; 4)$.
- B $M(-3; 4)$.
- C $M(3; -4)$.
- D $M(-3; -4)$.

Câu 18. Gọi M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức z và \bar{z} . Xác định mệnh đề đúng.

- A M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành.
- B M và M' đối xứng với nhau qua trục tung.
- C M và M' đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
- D Ba điểm O, M, M' thẳng hàng.

Câu 19. Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn số phức z_1 , điểm Q biểu diễn số phức z_2 . Tìm số phức $z = z_1 + z_2$?



- A $1 + 3i$

- B $-3 + i$

- C $-1 + 2i$

- D $2 + i$

Câu 20. Cho số phức $z = -1 + 2i$. Số phức \bar{z} được biểu diễn bởi điểm nào dưới đây trên mặt phẳng tọa độ?

- A $Q(-1; -2)$.

- B $P(1; 2)$.

- C $N(1; -2)$.

- D $M(-1; 2)$.

Câu 21. Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1; -2)$?

- A $1 + 2i$.

- B $1 - 2i$.

- C $-2 + i$.

- D $-1 - 2i$.

Câu 22. Trong mặt phẳng Oxy , điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = 2 + i$?

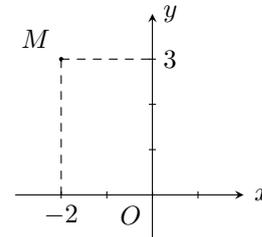
- A $M(2; 0)$.

- B $N(2; 1)$.

- C $N(2; -1)$.

- D $N(1; 2)$.

Câu 23. Điểm M trong hình vẽ bên biểu thị cho số phức nào dưới đây?



- A $3 + 2i$.

- B $2 - 3i$.

- C $-2 + 3i$.

- D $3 - 2i$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 3i$ là

- A $(2; 3)$.

- B $(2; -3)$.

- C $(-3; 2)$.

- D $(3; 2)$.

Câu 25. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

- A $M(2; -3)$.

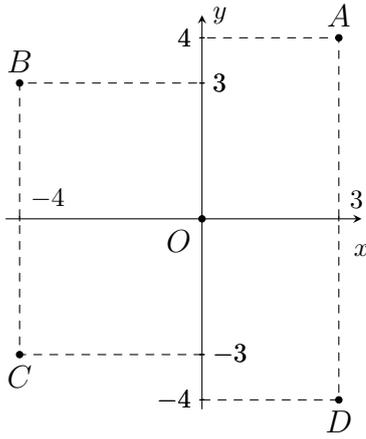
- B $M(2; 3)$.

- C $M(-2; 3)$.

- D $M(-2; -3)$.

Câu 26. Trên mặt phẳng tọa độ, số phức $z = 3 - 4i$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm

A, B, C, D?

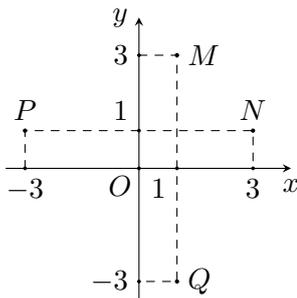


- (A) Điểm D. (B) Điểm B.
- (C) Điểm A. (D) Điểm C.

Câu 27. Số phức $z = 2 - 3i$ có điểm biểu diễn là

- (A) $N(-3; 2)$. (B) $P(3; 2)$.
- (C) $M(2; -3)$. (D) $Q(2; 3)$.

Câu 28. Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = 1 + 3i$?

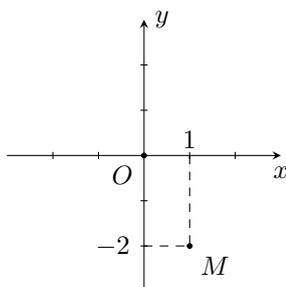


- (A) Q. (B) P. (C) M. (D) N.

Câu 29. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là

- (A) $(2; -3)$. (B) $(2; 3)$.
- (C) $(-2; -3)$. (D) $(-2; 3)$.

Câu 30. Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?

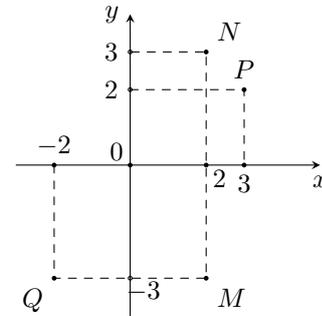


- (A) $1 - 2i$. (B) $i + 2$. (C) $i - 2$. (D) $1 + 2i$.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N theo thứ tự là các điểm biểu diễn cho số phức z và \bar{z} (với $z \neq 0$). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

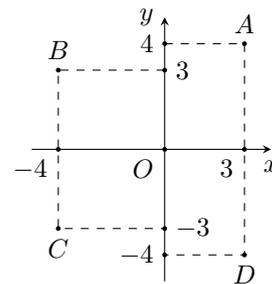
- (A) M và N đối xứng nhau qua trục Ox .
- (B) M và N đối xứng nhau qua trục Oy .
- (C) M và N đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.
- (D) M và N đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ .

Câu 32. Điểm nào trong hình vẽ dưới đây biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$?



- (A) M. (B) P. (C) N. (D) Q.

Câu 33. Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 4i$?

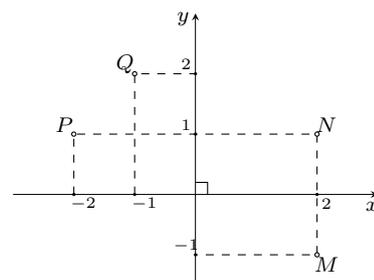


- (A) Điểm D. (B) Điểm C.
- (C) Điểm A. (D) Điểm B.

Câu 34. Điểm M biểu diễn số phức $z = 2 - i$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là

- (A) $M = (1; -2)$. (B) $M = (2; -1)$.
- (C) $M = (-2; 1)$. (D) $M = (2; 1)$.

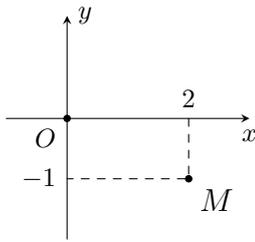
Câu 35. Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -2 + i$?



- (A) N. (B) P. (C) M. (D) Q.

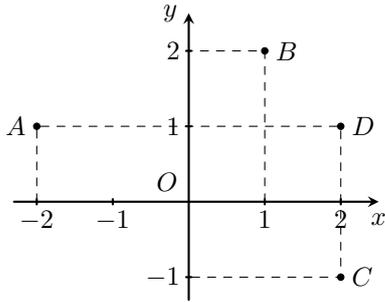
Câu 36. Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số

phức \bar{z} . Số phức z là



- (A) $2 - i$. (B) $2 + i$. (C) $1 + 2i$. (D) $1 - 2i$.

Câu 37. Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + i$?

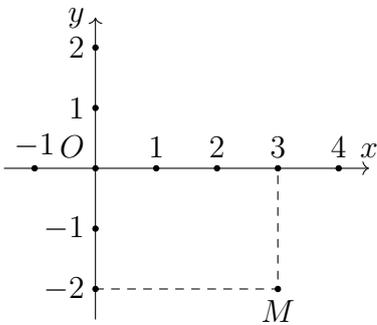


- (A) D . (B) B . (C) C . (D) A .

Câu 38. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $z = -3 + 4i$?

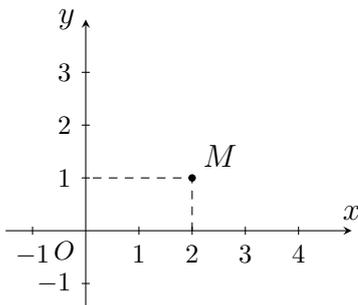
- (A) $M(3; 4)$. (B) $M(-3; 4)$.
(C) $M(3; -4)$. (D) $M(-3; -4)$.

Câu 39. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?



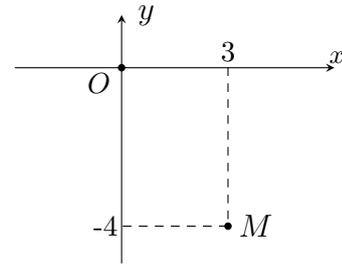
- (A) $z = -2 + 3i$. (B) $z = 3 + 2i$.
(C) $z = 2 - 3i$. (D) $z = 3 - 2i$.

Câu 40. Điểm M trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn của số phức z . Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức z .



- (A) -1 . (B) $3i$. (C) 3 . (D) $2 + i$.

Câu 41. Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn cho số phức

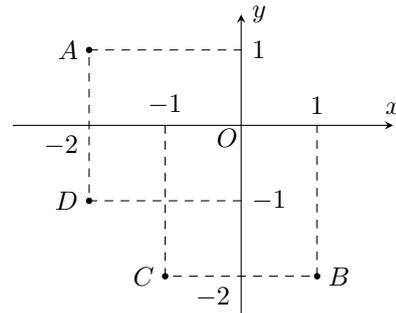


- (A) $z = 3 - 4i$. (B) $z = -4 - 3i$.
(C) $z = 3 + 4i$. (D) $z = -4 + 3i$.

Câu 42. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là

- (A) $(6; 7)$. (B) $(6; -7)$.
(C) $(-6; 7)$. (D) $(-6; -7)$.

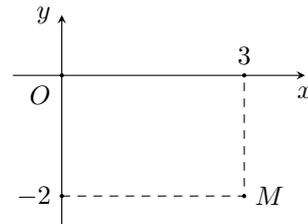
Câu 43. Cho 4 điểm A, B, C, D trên hình vẽ biểu diễn 4 số phức khác nhau.



Chọn mệnh đề **sai**.

- (A) B là điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$.
(B) D là điểm biểu diễn số phức $z = -1 - 2i$.
(C) C là điểm biểu diễn số phức $z = -1 - 2i$.
(D) A là điểm biểu diễn số phức $z = -2 + i$.

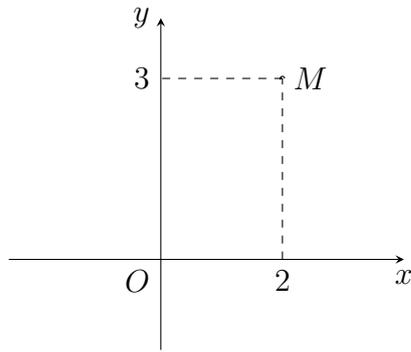
Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M có tọa độ như hình bên. Xác định số phức z có điểm biểu diễn là điểm M .



- (A) $z = 3 + 2i$. (B) $z = -2 + 3i$.
(C) $z = 2 + 3i$. (D) $z = 3 - 2i$.

Câu 45. Điểm M trong hình vẽ bên là biểu diễn

số phức



- A $z = 2 + 3i$.
- B $z = 3 - 2i$.
- C $z = 2 - 3i$.
- D $z = 3 + 2i$.

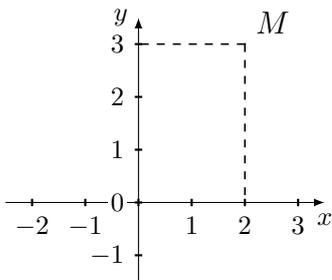
Câu 46. Điểm nào trong các điểm sau đây là điểm biểu diễn hình học của số phức $z = -5 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

- A $C(5; -4)$.
- B $B(4; -5)$.
- C $A(-5; 4)$.
- D $D(4; 5)$.

Câu 47. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm biểu diễn của số phức liên hợp của z là điểm nào sau đây?

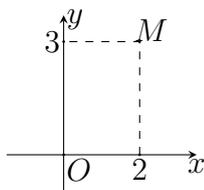
- A $M(1; 2)$.
- B $N(1; -2)$.
- C $P(-1; -2)$.
- D $Q(2; -1)$.

Câu 48. Điểm M trong hình vẽ bên là biểu diễn số phức



- A $z = 3 + 2i$.
- B $z = 3 - 2i$.
- C $z = 2 - 3i$.
- D $z = 2 + 3i$.

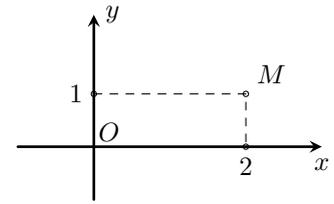
Câu 49. Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z . Số phức \bar{z} bằng



- A $2 + 3i$.
- B $2 - 3i$.
- C $3 + 2i$.
- D $3 - 2i$.

Câu 50. Trong hình vẽ bên điểm M biểu diễn số

phức z . Số phức z bằng



- A $2 + i$.
- B $1 + 2i$.
- C $1 - 2i$.
- D $2 - i$.

3. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

3.1. Thông hiểu

Câu 1. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức đối của z có tọa độ điểm biểu diễn là

- A $(-5; 4)$.
- B $(5; -4)$.
- C $(-5; -4)$.
- D $(5; 4)$.

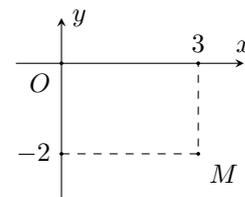
Câu 2. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là điểm nào sau đây?

- A $M(6; -7)$.
- B $N(-6; 7)$.
- C $P(-6; -7)$.
- D $Q(6; 7)$.

Câu 3. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 1 - 3i$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó M biểu diễn cho số phức nào sau đây?

- A $-i$.
- B $2 - 2i$.
- C $1 + i$.
- D $1 - i$.

Câu 4. Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M ở hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A $\bar{z} = -3 - 2i$.
- B $\bar{z} = 3 + 2i$.
- C $\bar{z} = 3 - 2i$.
- D $\bar{z} = -3 + 2i$.

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy , gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1 = -3i$, $z_2 = 2 - 2i$, $z_3 = -5 - i$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó điểm G biểu diễn số phức

- A $z = 2 - i$.
- B $z = 1 - 2i$.
- C $z = -1 - 2i$.
- D $z = -1 - i$.

Câu 6. Nếu điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn $OM = 4$ thì

- (A) $|z| = \frac{1}{4}$. (B) $|z| = 4$.
 (C) $|z| = 16$. (D) $|z| = 2$.

Câu 7. Cho số phức z thoả mãn $|z + 2 - i| = 3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $\omega = 1 + \bar{z}$ là

- (A) đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$.
 (B) đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.
 (C) đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$.
 (D) đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thoả mãn $|z| = \sqrt{7}$.

- (A) Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \frac{7}{2}$.
 (B) Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 7$.
 (C) Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 49$.
 (D) Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{7}$.

Câu 9. Cho các số phức z, z' có biểu diễn hình học lần lượt là các điểm M, M' trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Nếu $OM = 2OM'$ thì

- (A) $|z| = 2|z'|$. (B) $z' = 2z$.
 (C) $z = 2z'$. (D) $|z'| = 2|z|$.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $-1 - 2i, 4 - 4i, -3i$. Số phức biểu diễn trọng tâm tam giác ABC là

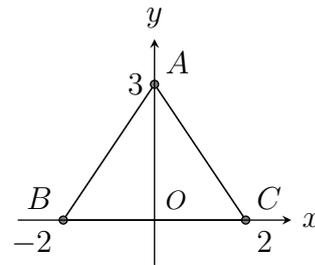
- (A) $-1 - 3i$. (B) $1 - 3i$.
 (C) $-3 + 9i$. (D) $3 - 9i$.

Câu 11. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 8 + i, z_3 = 1 - 3i$ trong mặt phẳng phức Oxy . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $\triangle MNP$ vuông.
 (B) $\triangle MNP$ đều.
 (C) $\triangle MNP$ cân.
 (D) $\triangle MNP$ vuông cân.

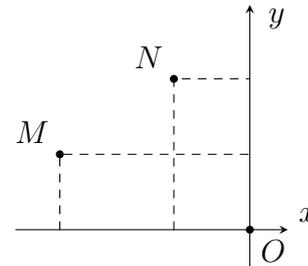
Câu 12. Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn

của số phức z . Tìm phần ảo của số phức \bar{z} .



- (A) 1. (B) -1. (C) -i. (D) i.

Câu 13. Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 khác 0.



Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $|z_1 + z_2| = MN$. (B) $|z_2| = ON$.
 (C) $|z_1 - z_2| = MN$. (D) $|z_1| = OM$.

Câu 14. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm biểu diễn của số phức \bar{z} là

- (A) $M(-1; 2)$. (B) $M(-1; -2)$.
 (C) $M(1; -2)$. (D) $M(2; 1)$.

Câu 15. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(2; -3)$ biểu diễn số phức z_A , điểm B biểu diễn số phức $z_B = (1 + i)z_A$. Tính diện tích S của tam giác OAB .

- (A) $S = \frac{11}{2}$. (B) $S = \frac{13}{2}$.
 (C) $S = \frac{17}{2}$. (D) $S = \frac{15}{2}$.

Câu 16. Cho các số phức $z_1 = 1 + 3i, z_2 = -2 + 2i, z_3 = -1 - i$ được biểu diễn lần lượt bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Gọi M là điểm thoả mãn $\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{AC}$. Khi đó điểm M biểu diễn số phức

- (A) $z = 6i$. (B) $z = -6i$.
 (C) $z = 2$. (D) $z = -2$.

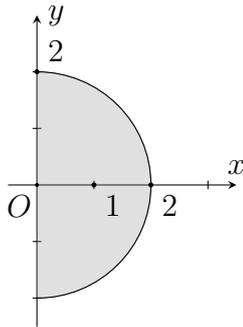
Câu 17. Cho số phức z thoả mãn $|z - 2i| = |\bar{z} + 3i|$. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình

- (A) $6x + 4y - 5 = 0$. (B) $6x - 4y = 0$.
 (C) $6x - 4y + 5 = 0$. (D) $6x + 4y + 5 = 0$.

Câu 18. Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\omega = z + 2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

- (A) $x - 4y + 3 = 0$. (B) $x + 3y + 4 = 0$.
 (C) $x - 3y + 4 = 0$. (D) $-x + 3y + 4 = 0$.

Câu 19. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ là nửa hình tròn tâm $O(0; 0)$ bán kính $R = 2$ (phần tô đậm, kể cả đường giới hạn) như hình bên.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) $x \geq 0$ và $|z| = \sqrt{2}$. (B) $y \geq 0$ và $|z| = 2$.
 (C) $x \geq 0$ và $|z| \leq 2$. (D) $y \geq 0$ và $|z| \leq 2$.

Câu 20. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn M là

- (A) $M(-5; -4)$. (B) $M(5; -4)$.
 (C) $M(5; 4)$. (D) $M(-5; 4)$.

3.2. Mức độ vận dụng

Câu 1. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$; $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Câu 2. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $1 \leq |z| \leq 2$ là một hình phẳng có diện tích bằng

- (A) π . (B) 2π . (C) 4π . (D) 3π .

Câu 3. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

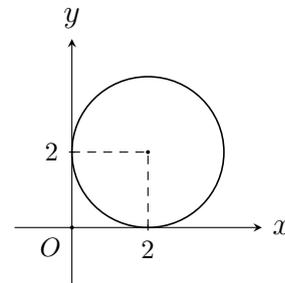
- (A) $\frac{8}{3}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Câu 4. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 + 2i, 1 + \sqrt{3} + i, 1 + \sqrt{3} - i, 1 - 2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội

tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diễn số phức có phần thực là

- (A) $\sqrt{3}$. (B) 2. (C) $\sqrt{2}$. (D) 1.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tô đậm như hình vẽ bên là tập hợp điểm biểu diễn số phức z . Hỏi số phức z thỏa mãn đẳng thức nào sau đây ?



- (A) $|z - 2 - 2i| = 2$. (B) $|z - 2| = 2$.
 (C) $|z - 1 - 2i| = 2$. (D) $|z - 2i| = 2$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- (A) $r = 9$. (B) $r = 16$.
 (C) $r = 25$. (D) $r = 4$.

Câu 7. Cho số phức z , biết rằng các điểm biểu diễn hình học của số phức z, iz và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z .

- (A) $|z| = 2\sqrt{3}$. (B) $|z| = 3\sqrt{2}$.
 (C) $|z| = 6$. (D) $|z| = 9$.

Câu 8. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\bar{z} - (3 - 4i)| = 2$ là

- (A) Đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 2$.
 (B) Đường tròn tâm $I(-3; -4)$, bán kính $R = 2$.
 (C) Đường tròn tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$.
 (D) Đường tròn tâm $I(-3; 4)$, bán kính $R = 2$.

Câu 9. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Khi đó tam giác ABC

- (A) đều. (B) vuông.
 (C) cân. (D) có một góc tù.

b) $z \cdot \bar{w} = (3 - i)(-2 - 3i) = -6 - 9i + 2i + 3i^2 = -6 - 7i + 3(-1) = -9 - 7i.$

c) $z \cdot \bar{z} = 3^2 + (-1)^2 = 9 + 1 = 10.$

B Các dạng toán

Dạng 1. Cộng trừ hai số phức

a) Phép cộng hai số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$:

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i.$$

Tính chất:

- Kết hợp: $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

- Giao hoán: $z + z' = z' + z.$

- Số đối của $z = a + bi$ là số $-z = -a - bi.$

b) Phép trừ hai số phức.

$$z - z' = (a - a') + (b - b')i.$$

Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $(2 + 3i) + (5 - 3i)$

b) $(-5 + 2i) + (3i)$

c) $(2 - 3i) - (5 - 4i)$

Lời giải.

..... |

..... |

Bài 2. Tìm phần thực phần ảo của các số phức sau:

a) $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$

b) $\left(3 - \frac{1}{3}i\right) + \left(-\frac{3}{2} + 2i\right) - \frac{1}{2}i$

Lời giải.

..... |

..... |

Bài 3. Giải phương trình sau: $z + 2\bar{z} = 2 - 4i.$

Lời giải.

..... |

..... |

Bài 4. Tìm tập hợp điểm M thỏa: $|z + \bar{z} + 3| = 4.$

Lời giải.

..... |

..... |

Bài 5. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + i| = |z + 2i|.$

Lời giải.

..... |

..... |



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VẬN DỤNG 1

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1, |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

VẬN DỤNG 2

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = \frac{3}{2}$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

VẬN DỤNG 3

Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|, w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là bao nhiêu?

VẬN DỤNG 4

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

VẬN DỤNG 5

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1| = |z - i|$. Tìm số phức $w = z + 2i - 3$ có mô-đun nhỏ nhất.

VẬN DỤNG 6

Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$, tìm giá trị lớn nhất K của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

VẬN DỤNG 7

Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$, tìm giá trị lớn nhất K của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

VẬN DỤNG 8

Xét số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z - i| = |z - 1| \\ |z - 2i| = |z| \end{cases}$. Tính $|z|$.

Dạng 2. Phép nhân hai số phức

- Thực hiện phép nhân tương tự như nhân hai đa thức với chú ý $i^2 = -1$:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

- $(1 + i)^2 = 2i, (1 - i)^2 = -2i.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i \Rightarrow i^n \in \{\pm 1; \pm i\}.$

Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $(1 + 2i)(-3 + 5i)$.

b) $-i(2 - 3i)$.

c) $(-3 + 2i)^2$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Tìm phần thực, phần ảo, mô-đun và tọa độ điểm biểu diễn hình học của số phức z biết $\bar{z} = 5 + 3i - (2 + i)(1 - 4i)$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Tính

a) $z = i^{2017}$.

b) $z = (1 + i)^{2018}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Tìm số phức z thỏa mãn $z + (2 + i)\bar{z} = 3 + 5i$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|zi - 2 - i| = 2$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....



LUYỆN TẬP 1

Chứng minh $z = (1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$ là một số thực.

LUYỆN TẬP 2

Tìm phần thực, phần ảo, mô-đun, số phức liên hợp và tọa độ điểm biểu diễn hình học của số phức z biết

a) $z = (-7 + 2i)(2 + 5i)$.

b) $z = 3i(2 - i)(3 + 4i)$.

LUYỆN TẬP 3

Tìm số phức z biết

a) $z = i^{106}$.

b) $z = (1 + i)^{50}$.

c) $z = (1 - i)^{2019}$.

LUYỆN TẬP 4

Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn $2z(1 + i) + (\bar{z} + 2)(1 - i) = -1 + 5i$.

LUYỆN TẬP 5

Tìm số phức z biết $z^2 = 3 - 4i$.

LUYỆN TẬP 6

Tìm số phức z biết $|z| = 3\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

VẬN DỤNG 1

Tìm số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 52 \\ z + \bar{z} = 6. \end{cases}$

VẬN DỤNG 2

Tìm số phức z biết $z^2 + 2(|z|^2 + \bar{z}) = 9$ và z không là số thực.

VẬN DỤNG 3

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$. Xác định phương trình đường chứa các điểm biểu diễn số phức $w = (2 + i)z - 3i$.

VẬN DỤNG 4

Trong các số phức z thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$, tìm phần thực của số phức z sao cho $|z|$ nhỏ nhất.

VẬN DỤNG 5

Trong các số phức z thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$, tìm phần thực của số phức z sao cho $|z|$ nhỏ nhất.

Bài tập tổng hợp

1) Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau
 a) $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$. b) $|z - i| + |z + i| = 4$. c) $z^2 = \bar{z}^2$.

2) Tìm số phức z thỏa mãn các điều kiện sau
 a) $|z - 2 - 3i| = |z + 1 - i|$.
 b) $\omega = (-z^2 - 4iz) \overline{(z^2 + 16)}$ là số thực không âm.

- 3 Gọi \mathcal{X} là tập các số phức z thỏa mãn $|z - i| \geq 3$ và $|z - 2 - 2i| \leq 5$. Tìm các số phức $z_1, z_2 \in \mathcal{X}$ sao cho $|z_1|$ là nhỏ nhất và $|z_2|$ là lớn nhất.
- 4 Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2| + |z + 2 - 2i|$.
- 5 Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| + |z - 4 - 3i| = \sqrt{10}$. Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.
- 6 Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}|$.

C Bài tập trắc nghiệm

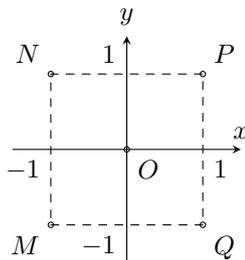
1. Thực hiện phép tính

1.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Số nào trong các số phức sau là số thực?

- A $(\sqrt{3} + 2i) - (\sqrt{3} - 2i)$.
- B $(3 + 2i) + (3 - 2i)$.
- C $(5 - 2i) + (\sqrt{5} - 2i)$.
- D $(1 + 2i) + (-1 + 2i)$.

Câu 2. Cho số phức $z = -1 + 2i, w = 2 - i$.



Điểm nào trong hình bên biểu diễn số phức $z + w$?

- A P.
- B N.
- C Q.
- D M.

Câu 3. Cho số phức $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

- A 2i.
- B 4.
- C 2.
- D -4.

Câu 4. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- A $z = 1 - 10i$.
- B $z = 5 - 4i$.
- C $z = 3 - 10i$.
- D $z = 3 + 3i$.

Câu 5. Cho số phức z thỏa $z + 2\bar{z} = 2 + 3i$, thì $|z|$ bằng

- A $\frac{\sqrt{29}}{3}$.
- B $\frac{85}{3}$.
- C $\frac{29}{3}$.
- D $\frac{\sqrt{85}}{3}$.

Câu 6. Cho số phức z khác 0 là số thuần ảo.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A \bar{z} là số thực.
- B $z = \bar{z}$.
- C $z + \bar{z} = 0$.
- D Phần ảo của z bằng 0.

Câu 7. Cho z_1, z_2 là hai số phức tùy ý. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
- B $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
- C $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- D $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Câu 8. Số nào trong các số phức sau là số thực?

- A $(1 + 2i) + (-1 + 2i)$.
- B $(3 + 2i) + (3 - 2i)$.
- C $(5 + 2i) - (\sqrt{5} - 2i)$.
- D $(\sqrt{3} - 2i) - (\sqrt{3} + 2i)$.

Câu 9. Cho số phức $z = 2 + 3i$. Tính $\frac{z}{\bar{z}}$.

- A $\frac{-5 + 12i}{13}$.
- B $\frac{5 - 6i}{13}$.
- C $\frac{5 - 12i}{13}$.
- D $\frac{-5 - 12i}{13}$.

Câu 10. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 2i, z_2 = -3 + 3i$. Khi đó số phức $z_1 - z_2$ là

- A $-5 + 5i$.
- B $-5i$.
- C $5 - 5i$.
- D $-1 + i$.

Câu 11. Tổng 2 số phức $1 + i$ và $\sqrt{3} + i$ bằng

- A $1 + \sqrt{3} + 2i$.
- B $2i$.
- C $1 + \sqrt{3} + i$.
- D $1 + \sqrt{3}$.

Câu 12. Cho i là đơn vị ảo. Giá trị của biểu thức $z = (1 + i)^2$ là

- (A) $2i$. (B) $-i$. (C) $-2i$. (D) i .

Câu 13. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức $w = i \cdot \bar{z} + z$ là

- (A) $w = -1 + i$. (B) $w = 5 - i$.
(C) $w = -1 + 5i$. (D) $w = -1 - i$.

Câu 14. Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tính số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

- (A) $w = \frac{8}{3}$. (B) $w = \frac{8}{3} + i$.
(C) $w = \frac{10}{3} + i$. (D) $w = \frac{10}{3}$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $(1+z)(1+i) - 5 + i = 0$. Số phức $w = 1 + z$ bằng

- (A) $-1 + 3i$. (B) $1 - 3i$.
(C) $-2 + 3i$. (D) $2 - 3i$.

Câu 16. Thu gọn số phức $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i)$, ta được:

- (A) $z = -1 - i$. (B) $z = 1 - i$.
(C) $z = -1 - 2i$. (D) $z = 1 + i$.

Câu 17. Cho số phức $z = 2 + bi$. Tính $z \cdot \bar{z}$.

- (A) $z \cdot \bar{z} = \sqrt{4 + b^2}$. (B) $z \cdot \bar{z} = 4 - b^2$.
(C) $z \cdot \bar{z} = -b$. (D) $z \cdot \bar{z} = 4 + b^2$.

Câu 18. Số phức $z + \bar{z}$ là

- (A) Số thực. (B) Số ảo.
(C) 0. (D) 2.

Câu 19. Tính mô-đun của số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$.

- (A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. (B) $\frac{1}{25}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\frac{1}{5}$.

Câu 20. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

- (A) $w = -3 - 3i$. (B) $w = 3 + 7i$.
(C) $w = -7 - 7i$. (D) $w = 7 - 3i$.

Câu 21. Số phức $z = (1 + 2i)(2 - 3i)$ bằng

- (A) $8 - i$. (B) 8.
(C) $8 + i$. (D) $-4 + i$.

Câu 22. Cho $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 3i$. Khi đó $w = z_1 - 2z_2$ bằng

- (A) $w = 5 + 8i$. (B) $w = -3 + 8i$.
(C) $w = 3 - i$. (D) $w = -3 - 4i$.

Câu 23. Tìm số phức $w = z_1 - 2z_2$, biết rằng $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$.

- (A) $w = 3 - i$. (B) $w = 5 + 8i$.
(C) $w = -3 + 8i$. (D) $w = -3 - 4i$.

Câu 24. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 - 5i$. Tính $z = z_1 + z_2$.

- (A) $z = -2 - 2i$. (B) $z = -2 + 2i$.
(C) $z = 2 + 2i$. (D) $z = 2 - 2i$.

Câu 25. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -4 - 5i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- (A) $z = 2 + 2i$. (B) $z = -2 - 2i$.
(C) $z = 2 - 2i$. (D) $z = -2 + 2i$.

1.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Tìm số phức $w = 3z + \bar{z}$ biết $z = 1 + 2i$.

- (A) $w = 4 + 4i$. (B) $w = 4 - 4i$.
(C) $w = 2 - 4i$. (D) $w = 2 + 4i$.

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i$. Tìm mô-đun của z .

- (A) $|z| = \sqrt{5}$. (B) $|z| = 1$.
(C) $|z| = \sqrt{3}$. (D) $|z| = 2$.

Câu 3. Cho số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $z^3 = 1$. Tính $(1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018})$.

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Câu 4. Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tính số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

- (A) $w = \frac{8}{3}$. (B) $w = \frac{8}{3} + i$.
(C) $w = \frac{10}{3} + i$. (D) $w = \frac{10}{3}$.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

- (A) 5. (B) 3. (C) $\frac{13}{4}$. (D) $\frac{25}{4}$.

Câu 6. Nếu số phức $z = 1 - i$ thì z^{10} bằng

- (A) $32i$. (B) -32 . (C) $-32i$. (D) 32.

Câu 7. Nếu 2 số thực x, y thỏa mãn $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 - 32i$ thì $x + y$ bằng

- (A) 2. (B) 4. (C) 5. (D) -3 .

Câu 8. Cho $(2 - 2i)^{2018} = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

- (A) -8^{1009} . (B) 8^{1009} .
(C) -4^{1009} . (D) 4^{1009} .

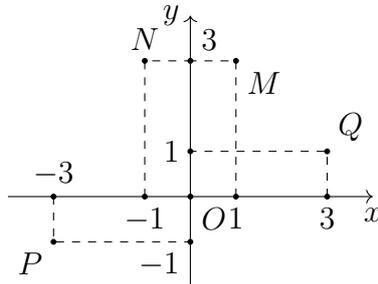
Câu 9. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 3$, $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$. Tính $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$.

- (A) 2. (B) 8. (C) 0. (D) 4.

Câu 10.

Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = (1+i)(2-i)$?

- (A) M. (B) P.
(C) N. (D) Q.



Câu 11. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau đúng?

- (A) $(1+i)^{2018} = 2^{1009}i$.
(B) $(1+i)^{2018} = -2^{1009}i$.
(C) $(1+i)^{2018} = 2^{1009}$.
(D) $(1+i)^{2018} = -2^{1009}$.

Câu 12. Biết z là một nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = z^3 + \frac{1}{z^3}$.

- (A) $P = -2$. (B) $P = 0$.
(C) $P = 4$. (D) $P = \frac{7}{4}$.

Câu 13. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x$. Khi đó giá trị của $x^2 - 3xy - y$ bằng

- (A) -3. (B) 1. (C) -2. (D) -1.

Câu 14. Số phức $z = (1 - i)^{2018}$ có phần thực bằng

- (A) 1. (B) 2^{1009} .
(C) -2^{1009} . (D) 0.

Câu 15. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i - 1)$ là

- (A) $\bar{z} = 3 - i$. (B) $\bar{z} = -3 + i$.
(C) $\bar{z} = 3 + i$. (D) $\bar{z} = -3 - i$.

Câu 16. Số nào trong các số sau là số thuần ảo?

- (A) $(\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i)$.
(B) $(\sqrt{3} + 2i) + (\sqrt{3} - 2i)$.
(C) $\frac{1 - 4i}{1 + 4i}$.
(D) $(3 + 3i)^2$.

Câu 17. Rút gọn biểu thức $P = i^{2000} + i^{2021}$.

- (A) $P = 1 + i$. (B) $P = 1 - i$.
(C) $P = -1 + i$. (D) $P = -1 - i$.

Câu 18. Điểm biểu diễn của số phức z là $M(1; 2)$. Tọa độ của điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 2\bar{z}$ là

- (A) $(2; -3)$. (B) $(2; 1)$.
(C) $(-1; 6)$. (D) $(2; 3)$.

Câu 19. Tính $P = \frac{|1 + \sqrt{3}i|^{2018}}{|1 - \sqrt{3}i|^{2018}}$.

- (A) $P = 2$. (B) $P = 2^{1010}$.
(C) $P = 2^{2019}$. (D) $P = 4$.

Câu 20. Cho i là đơn vị ảo. Gọi S là tập hợp tất cả các số n nguyên dương có hai chữ số thỏa mãn i^n là số nguyên dương. Số phần tử của S là

- (A) 22. (B) 23. (C) 45. (D) 46.

Câu 21. Cho số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 6 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của $z = 6z_1 + 5z_2$.

- (A) $\bar{z} = 51 + 40i$. (B) $\bar{z} = 51 - 40i$.
(C) $\bar{z} = 48 + 37i$. (D) $\bar{z} = 48 - 37i$.

2. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán

2.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.

- (A) 3. (B) 5. (C) 1. (D) 2.

Câu 2. Cho số phức $z = 1 - i$. Biểu diễn số phức z^2 là điểm

- (A) $M(-2; 0)$. (B) $N(1; 2)$.
(C) $P(2; 0)$. (D) $Q(0; -2)$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

- (A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Câu 4. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

- (A) $\bar{z} = 3 + i$. (B) $\bar{z} = -3 + i$.
(C) $\bar{z} = 3 - i$. (D) $\bar{z} = -3 - i$.

Câu 5. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1 + 2i)z$.

- (A) 4. (B) 7. (C) -4. (D) $4i$.

Câu 6. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 + i$. Tính $|z_1 + 3z_2|$.

- (A) $|z_1 + 3z_2| = \sqrt{11}$. (B) $|z_1 + 3z_2| = 11$.
 (C) $|z_1 + 3z_2| = \sqrt{61}$. (D) $|z_1 + 3z_2| = 61$.

Câu 7. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- (A) $P(-2; 1)$. (B) $Q(1; 2)$.
 (C) $M(1; -2)$. (D) $N(2; 1)$.

Câu 8. Cho số phức $z = 2 + i$. Tính mô-đun của số phức $w = z^2 - 1$.

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $5\sqrt{5}$. (D) 20.

Câu 9. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $-2 \cdot \bar{z}$.

- (A) Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng $-4i$.
 (B) Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng -4 .
 (C) Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng $4i$.
 (D) Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng 4 .

Câu 10. Cho số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $w = z_1 + z_2$.

- (A) $\bar{w} = 3 - 2i$. (B) $\bar{w} = 1 - 4i$.
 (C) $\bar{w} = -1 + 4i$. (D) $\bar{w} = 3 + 2i$.

Câu 11. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = i(7 - 4i)$ trong mặt phẳng tọa độ?

- (A) $P(-4; 7)$. (B) $M(4; 7)$.
 (C) $Q(-4; -7)$. (D) $N(4; -7)$.

Câu 12. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -3 - 5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$.

- (A) 3. (B) -3 .
 (C) 0. (D) $-1 - 2i$.

Câu 13. Cho hai số phức $z = 5 + 2i$ và $z' = 1 - i$. Tính mô-đun của số phức $w = z - z'$.

- (A) 5. (B) $3\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{17}$. (D) $\sqrt{37}$.

Câu 14. Cho các số phức $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 4 + 5i$. Số phức liên hợp của số phức $w = 2(z_1 + z_2)$ là

- (A) $\bar{w} = 8 + 10i$. (B) $\bar{w} = 12 - 16i$.
 (C) $\bar{w} = 12 + 8i$. (D) $\bar{w} = 28i$.

Câu 15. Cho hai số phức $z = 3 - 5i$ và $w = -1 + 2i$. Điểm biểu diễn số phức $z' = \bar{z} - w \cdot z$ trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

- (A) $(-4; -6)$. (B) $(4; 6)$.

- (C) $(4; -6)$. (D) $(-6; -4)$.

Câu 16. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1 + i)z - (2 - i)\bar{z}$.

- (A) -5 . (B) -9 . (C) $-5i$. (D) $-9i$.

Câu 17. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Tìm số phức $z = z_1 + 2z_2$.

- (A) $1 + i$. (B) 1. (C) $4 - i$. (D) $2i$.

Câu 18. Cho $z_1 = 2 + 3i; z_2 = 4 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức w biết $w = 2(z_1 + z_2)$.

- (A) $\bar{w} = 12 - 16i$. (B) $\bar{w} = 12 + 16i$.
 (C) $\bar{w} = -14 + 44i$. (D) $\bar{w} = -14 - 44i$.

Câu 19. Tìm phần ảo của số phức $z = (a + bi)(1 - 2i)$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

- (A) $2a + b$. (B) $2a - b$.
 (C) $a + 2b$. (D) $b - 2a$.

Câu 20. Cho số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $w = z_1 + z_2$.

- (A) $\bar{w} = 4 - i$. (B) $\bar{w} = 4 + i$.
 (C) $\bar{w} = -4 + i$. (D) $\bar{w} = -4 - i$.

Câu 21. Cho z là một số thuần ảo khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) \bar{z} là số thực.
 (B) Phần ảo của z bằng 0.
 (C) $z = \bar{z}$.
 (D) $z + \bar{z} = 0$.

Câu 22. Cho số phức z thỏa $(1 + i)z = 3 - i$. Tìm phần ảo của z .

- (A) $-2i$. (B) $2i$. (C) 2. (D) -2 .

Câu 23. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z = (-2 + 3i)(-9 - 10i)$.

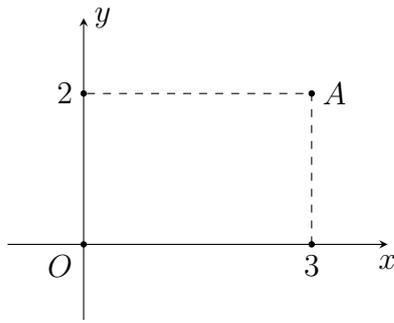
- (A) $a = 48$ và $b = 7$.
 (B) $a = -48$ và $b = 7$.
 (C) $a = -48$ và $b = -7$.
 (D) $a = 48$ và $b = -7$.

Câu 24. Tìm mô-đun của số phức $z = (-6 + 8i)^2$.

- (A) $|z| = 4\sqrt{527}$. (B) $|z| = 2\sqrt{7}$.
 (C) $|z| = 100$. (D) $|z| = 10$.

Câu 25. Điểm A trong hình vẽ biểu diễn cho số

phức z .



Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A** Phần thực là 3, phần ảo là $-2i$.
- B** Phần thực là 3, phần ảo là 2.
- C** Phần thực là 3, phần ảo là -2 .
- D** Phần thực là 3, phần ảo là $2i$.

Câu 26. Phần thực của số phức $z = (a+i)(1-i)$ là

- A** $-a + 1$.
- B** $a - 1$.
- C** $a + 1$.
- D** $a^2 + 1$.

Câu 27. Cho số phức $z = a + bi$. Khi đó phần ảo của số phức z^2 bằng

- A** b .
- B** a .
- C** $2ab$.
- D** $a^2 - b^2$.

Câu 28. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (3 + 2i)(3 - 2i)$.

- A** $\bar{z} = 13$.
- B** $\bar{z} = i$.
- C** $\bar{z} = 0$.
- D** $\bar{z} = -13$.

Câu 29. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 3i + (1 - i)^2$.

- A** $\bar{z} = -1 - 5i$.
- B** $\bar{z} = 1 - 5i$.
- C** $\bar{z} = 1 + 5i$.
- D** $\bar{z} = 5 - i$.

Câu 30. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + i)^2 - (3 + 3i)$ là

- A** $\sqrt{10}$.
- B** -4 .
- C** 4 .
- D** $-3 - i$.

Câu 31. Cho số phức $z = -3 + 4i$. Mô-đun của số phức z là

- A** 4.
- B** 7.
- C** 3.
- D** 5.

Câu 32. Phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + 2i)i$ lần lượt là

- A** 1 và 2.
- B** -2 và 1.
- C** 1 và -2 .
- D** 2 và 1.

Câu 33. Tìm số phức liên hợp của số phức z , biết: $4z + (2 + 3i)(1 - 2i) = 4 + 3i$

- A** $\bar{z} = -1 - \frac{5}{4}i$.
- B** $\bar{z} = 1 - \frac{5}{4}i$.
- C** $\bar{z} = -1 + \frac{5}{4}i$.
- D** $\bar{z} = -1 - i$.

Câu 34. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $a + (b - i)i = 1 + 3i$ với i là đơn vị ảo.

- A** $a = -2, b = 3$.
- B** $a = 1, b = 3$.
- C** $a = 2, b = 4$.
- D** $a = 0, b = 3$.

2.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Tìm số phức $3z + \bar{z}$ biết $z = 1 + 2i$.

- A** $3z + \bar{z} = 4 + 4i$.
- B** $3z + \bar{z} = 4 - 4i$.
- C** $3z + \bar{z} = 2 - 4i$.
- D** $3z + \bar{z} = 2 + 4i$.

Câu 2. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$.

- A** $|z| = \sqrt{34}$.
- B** $|z| = 34$.
- C** $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.
- D** $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 3. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Mô-đun của số phức $w = 2z + (1 + i)\bar{z}$ bằng

- A** 4.
- B** 2.
- C** $\sqrt{10}$.
- D** $2\sqrt{2}$.

Câu 4. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Mô-đun của số phức $w = \bar{z} + z^2$ bằng

- A** $3\sqrt{10}$.
- B** $\sqrt{206}$.
- C** $\sqrt{134}$.
- D** $3\sqrt{2}$.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Xác định phần thực và phần ảo của z .

- A** Phần thực là -2 ; phần ảo là 3.
- B** Phần thực là -3 ; phần ảo là $5i$.
- C** Phần thực là -2 ; phần ảo là $5i$.
- D** Phần thực là -2 ; phần ảo là 5.

Câu 6. Cho số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn $(2 + 3i)|z| = (4 + 3i)z - 15(1 - i)$. Tính $a - b$.

- A** -1 .
- B** 3.
- C** 5.
- D** 7.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z - (2 - i)\bar{z} = 3$. Mô-đun của số phức $w = \frac{i - 2z}{1 - i}$ là

- A** $\frac{\sqrt{122}}{5}$.
- B** $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.
- C** $\frac{\sqrt{45}}{4}$.
- D** $\frac{\sqrt{122}}{2}$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $z + 3\bar{z} = (1 - 2i)^2$. Phần ảo của z là

- A** -2 .
- B** $\frac{3}{4}$.
- C** 2.
- D** $-\frac{3}{4}$.

Câu 9. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

- (A) $P = 1$. (B) $P = -\frac{1}{2}$.
(C) $P = \frac{1}{2}$. (D) $P = -1$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)z + (3 - i)\bar{z} = 2 - 6i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 2z + 2$.

- (A) $6\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{7}$. (C) $\sqrt{34}$. (D) $2\sqrt{3}$.

Câu 11. Giá trị của $|(1 - i)(2 + i) - i|$ bằng

- (A) $\sqrt{17}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) 3. (D) $\sqrt{13}$.

Câu 12. Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tìm số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

- (A) $w = \frac{10}{3} + i$. (B) $w = \frac{10}{3}$.
(C) $w = \frac{8}{3}$. (D) $w = \frac{8}{3} + i$.

Câu 13. Số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$ là

- (A) $1 - 2i$. (B) $1 + 2i$. (C) $2 - i$. (D) $2 + i$.

Câu 14. Gọi a và b là các số thực thỏa mãn $a + 2bi + b - 3 = -ai - i$ với i là đơn vị ảo. Tính $a + b$.

- (A) 3. (B) 11. (C) -3. (D) -11.

Câu 15. Tìm hai số x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = -1; y = -1$. (B) $x = -1; y = 1$.
(C) $x = 1; y = -1$. (D) $x = 1; y = 1$.

Câu 16. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = -2 + i$. Tìm số phức liên hợp của $z_1 + z_2$.

- (A) $1 + 3i$. (B) $1 - 3i$.
(C) $-1 + 3i$. (D) $-1 - 3i$.

Câu 17. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 3 + 4i$. Tìm điểm M biểu diễn số phức $z_1 \cdot z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- (A) $M(-2; 11)$. (B) $M(11; 2)$.
(C) $M(11; -2)$. (D) $M(-2; -11)$.

Câu 18. Mô-đun của số phức $z = (1 + 2i)(2 - i)$ là

- (A) $|z| = 5$. (B) $|z| = \sqrt{5}$.
(C) $|z| = 10$. (D) $|z| = 6$.

Câu 19. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 . Khi đó độ dài của vectơ \overrightarrow{AB} bằng

- (A) $|z_1| - |z_2|$. (B) $|z_1| + |z_2|$.
(C) $|z_2 - z_1|$. (D) $|z_2 + z_1|$.

Câu 20. Trong các số phức $(1 + i)^3, (1 + i)^4, (1 + i)^5, (1 + i)^6$ số phức nào là số phức thuần ảo?

- (A) $(1 + i)^5$. (B) $(1 + i)^6$.
(C) $(1 + i)^3$. (D) $(1 + i)^4$.

Câu 21. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = (\sqrt{2} + 3i)^2$. Tính $T = a + 2b$.

- (A) $T = -7 + 12\sqrt{2}$. (B) $T = -7 + 6\sqrt{2}$.
(C) $T = 12 - 7\sqrt{2}$. (D) $T = -7 - 12\sqrt{2}$.

Câu 22. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w = iz + \bar{z}$. Tính tích ab .

- (A) -9. (B) -6. (C) 9. (D) 6.

Câu 23. Tính mô-đun của số phức z biết $\bar{z} = (2i - 1)(3 + i)$.

- (A) $|z| = 2\sqrt{5}$. (B) $|z| = 5\sqrt{2}$.
(C) $|z| = \sqrt{10}$. (D) $|z| = \sqrt{26}$.

Câu 24. Cho số phức $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ thỏa $||z - 1| + z - 2| = a = b$. Tính $|z(1 + \bar{z})|$.

- (A) $3\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{2}$.

Câu 25. Trong mặt phẳng phức, điểm $M(1; -2)$ biểu diễn số phức z . Mô-đun của số phức $w = i\bar{z} - z^2$ bằng

- (A) 26. (B) $\sqrt{6}$. (C) $\sqrt{26}$. (D) 6.

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7)$. Khi đó, mô-đun của z bằng bao nhiêu?

- (A) $|z| = \sqrt{3}$. (B) $|z| = 3$.
(C) $|z| = \sqrt{5}$. (D) $|z| = 5$.

Câu 27. Số nào sau đây là số thuần ảo?

- (A) $(1 + i)^4$. (B) $(1 + i)^3$.
(C) $(1 + i)^5$. (D) $(1 + i)^6$.

Câu 28. Tìm số phức thỏa mãn $i(\bar{z} - 2 + 3i) = 1 + 2i$.

- (A) $z = -4 + 4i$. (B) $z = -4 - 4i$.
(C) $z = 4 - 4i$. (D) $z = 4 + 4i$.

Câu 29. Cho số phức $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 6 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 6z_1 + 5z_2$.

- (A) $\bar{z} = 51 + 40i$. (B) $\bar{z} = 48 - 37i$.
(C) $\bar{z} = 51 - 40i$. (D) $\bar{z} = 48 + 37i$.

Câu 30. Tính giá trị của tổng phần thực và phần ảo của số phức z biết $z = (2 + i)^2$.

- (A) 7. (B) 6. (C) 8. (D) -1.

Câu 31. Cho số phức $z = -4 + 3i$. Tính mô-đun của số phức $w = iz + \bar{z}$.

- (A) $|w| = 7\sqrt{2}$. (B) $|w| = \sqrt{50}$.
(C) $|w| = 2\sqrt{7}$. (D) $|w| = 25$.

Câu 32. Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z + 1)(\bar{z} - i)$ là số thực. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

- (A) $S = -3$. (B) $S = 1$.
(C) $S = 0$. (D) $S = -1$.

Câu 33. Cho số phức $w = (2 + i)^2 - 3(2 - i)$. Giá trị của $|w|$ là

- (A) $\sqrt{54}$. (B) $2\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{43}$. (D) $\sqrt{58}$.

Câu 34. Mô-đun của số phức $z = (1 + 2i)(2 - i)$ là

- (A) $|z| = 5$. (B) $|z| = \sqrt{5}$.
(C) $|z| = 10$. (D) $|z| = 6$.

Câu 35. Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 4 - i$. Tính mô-đun của số phức $z_1^2 + \bar{z}_2$.

- (A) 12. (B) 10. (C) 13. (D) 15.

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + i) + 12i = 3$. Tìm phần ảo của số \bar{z} .

- (A) $-\frac{9}{2}$. (B) $-\frac{15}{2}$. (C) $\frac{15}{2}i$. (D) $\frac{15}{2}$.

Câu 37. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

- (A) 12. (B) 1. (C) 11. (D) $12i$.

Câu 38. Tìm phần ảo của số phức z biết $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$.

- (A) 1. (B) -2. (C) -1. (D) 2.

Câu 39. Cho số phức $w = (2 + i)^2 - 3(2 - i)$. Giá trị của $|w|$ là

- (A) $\sqrt{54}$. (B) $\sqrt{58}$. (C) $2\sqrt{10}$. (D) $\sqrt{43}$.

Câu 40. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (A) $z + \bar{z} = 2bi$. (B) $z - \bar{z} = 2a$.
(C) $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$. (D) $|z^2| = |z|^2$.

Câu 41. Tính mô-đun của số phức $z = (1 + 2i)(2 - i)$.

- (A) $|z| = 5$. (B) $|z| = \sqrt{5}$.

- (C) $|z| = 10$. (D) $|z| = 6$.

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $(2 - 3i)z + 6 = 5i - 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\bar{z} = \frac{29}{13} + \frac{11}{13}i$. (B) $\bar{z} = \frac{29}{13} - \frac{11}{13}i$.
(C) $\bar{z} = -\frac{29}{13} - \frac{11}{13}i$. (D) $\bar{z} = -\frac{29}{13} + \frac{11}{13}i$.

Câu 43. Cho số phức $z = (1 - i)^2(3 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

- (A) 6. (B) $-6i$. (C) -6 . (D) 4.

Câu 44. Cho số phức $z = (\sqrt{2} + 3i)^2$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng bao nhiêu?

- (A) $\sqrt{2} + 3$. (B) $6\sqrt{2} + 11$.
(C) $6\sqrt{2} - 7$. (D) 11.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , số phức $z = (2 - 3i) - (3 + i)$ được biểu diễn bởi điểm nào sau đây?

- (A) $M(-1; -4)$. (B) $N(1; -4)$.
(C) $P(1; 4)$. (D) $Q(-1; 4)$.

Câu 46. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i$. Tính giá trị $x + y$.

- (A) $x + y = 4$. (B) $x + y = 3$.
(C) $x + y = 2$. (D) $x + y = -3$.

Câu 47. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(1; -2)$. Tính mô-đun của số phức $w = i\bar{z} - z^2$.

- (A) $\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{26}$. (C) 26. (D) 6.

Câu 48. Nếu mô-đun của số phức z là r ($r > 0$) thì mô-đun của số phức $(1 - i)^3 \cdot z$ bằng

- (A) $\sqrt{2}r$. (B) $3r$. (C) $2r$. (D) $2\sqrt{2}r$.

Câu 49. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i \cdot \bar{z}$.

- (A) $M(5; -5)$. (B) $M(1; -5)$.
(C) $M(1; 1)$. (D) $M(5; 1)$.

Câu 50. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

- (A) $\bar{z} = 3 - i$. (B) $\bar{z} = -3 - i$.
(C) $\bar{z} = -3 + i$. (D) $\bar{z} = 3 + i$.

Câu 51. Cho số phức $z = (2 - 3i)(3 - 4i)$. Điểm biểu diễn số phức z là

- (A) $M(6; 17)$. (B) $M(17; 6)$.
(C) $M(-17; -6)$. (D) $M(-6; -17)$.

2.3. Mức độ vận dụng

Câu 1. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $3z \cdot \bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i$

- (A) $|z| = 4$. (B) $|z| = \sqrt{2016}$.
 (C) $|z| = \sqrt{2017}$. (D) $|z| = 2$.

Câu 2. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.

- (A) $P = 3$. (B) $P = -1$.
 (C) $P = -5$. (D) $P = 7$.

Câu 3. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Mô-đun của số phức $w = 1 - z + z^2$.

- (A) $|w| = \sqrt{37}$. (B) $|w| = \sqrt{425}$.
 (C) $|w| = \sqrt{457}$. (D) $|w| = \sqrt{445}$.

Câu 4. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Tìm mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2 - 6 + 10i$.

- (A) $|w| = 10$. (B) $|w| = 32$.
 (C) $|w| = 16$. (D) $|w| = 8$.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và $|z + 2|^2 - |z - i|^2 = 33$. Mô-đun của số phức $z - 2 - i$ bằng

- (A) $\sqrt{5}$. (B) 9. (C) 25. (D) 5.

Câu 6. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(z + 1 + i)(\bar{z} - i) + 3i = 9$ và $|\bar{z}| > 2$. Tính $P = a + b$.

- (A) 2. (B) 1. (C) -3. (D) -1.

Câu 7. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa mãn $z \cdot \bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 + 10i$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = 7$. (B) $S = 17$.
 (C) $S = -17$. (D) $S = 5$.

Câu 8. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|3z - i| = |3 + iz|$. Biết rằng $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

- (A) $P = 2\sqrt{2}$. (B) $P = \frac{1}{2}$.
 (C) $P = \frac{3}{2}$. (D) $P = 1$.

Câu 9. Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z + 1)(\bar{z} - i)$ là số thực. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b$ bằng bao nhiêu?

- (A) $S = -3$. (B) $S = 0$.
 (C) $S = -1$. (D) $S = 1$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm mô-đun nhỏ nhất của số phức $w = 2z + 2 - i$.

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. (D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3. Bài toán tập hợp điểm

Câu 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn phương trình $x + 2i = 3 + 4yi$. Khi đó giá trị của x và y là

- (A) $x = 3i, y = \frac{1}{2}$. (B) $x = 3, y = 2$.
 (C) $x = 3, y = -\frac{1}{2}$. (D) $x = 3, y = \frac{1}{2}$.

Câu 2. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $a = 0, b = 2$. (B) $a = \frac{1}{2}, b = 1$.
 (C) $a = 0, b = 1$. (D) $a = 1, b = 2$.

Câu 3. Cho cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $(2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i$. Khi đó biểu thức $P = x^2 - xy$ nhận giá trị nào sau đây?

- (A) 30. (B) 40. (C) 10. (D) 20.

Câu 4. Tìm số z thỏa mãn phương trình $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$.

- (A) $z = \frac{-2}{3} - 4i$. (B) $z = \frac{2}{3} - 4i$.
 (C) $z = \frac{-2}{3} + 4i$. (D) $z = \frac{2}{3} + 4i$.

Câu 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(2x - 1) + (y + 1)i = 1 + 2i$. Giá trị của biểu thức $x^2 + 2xy + y^2$ bằng

- (A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 4.

Câu 6. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Câu 7. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Giá trị của $ab + 1$ bằng

- (A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) -2.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i$. Tìm mô-đun của z .

- (A) $|z| = \sqrt{5}$. (B) $|z| = 1$.
 (C) $|z| = \sqrt{3}$. (D) $|z| = 2$.

Câu 9. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i$. Giá trị của $x + y$ bằng

- (A) -3. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Câu 10. Tìm mô-đun của số phức z biết $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

- (A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\frac{2}{9}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 11. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = 2a + 3b$.

- (A) $S = -5$. (B) $S = 5$.
(C) $S = -6$. (D) $S = 6$.

Câu 12. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Câu 13. Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 2\bar{z}$.

- (A) $z = 2 + i$. (B) $z = 2 - i$.
(C) $z = 3 - 2i$. (D) $z = 3 + i$.

Câu 14. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$ và $|z| = 1$.

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + 2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20$. Tìm $|z|$.

- (A) $|z| = 25$. (B) $|z| = 7$.
(C) $|z| = 4$. (D) $|z| = 5$.

Câu 16. Cho các số phức $z_1 = 2 + i$, $z_2 = x + yi$. Tính tổng $S = x + y$ biết $|z_2 + i| = |z_2 - 1 + 2i|$ và $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$.

- (A) $-\frac{2}{3}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $-\frac{4}{3}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Câu 17. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a + bi)i - 2a = 1 + 3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a - b$ bằng

- (A) -4. (B) 4. (C) 10. (D) -10.

Câu 18. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $iz + (1 - i)\bar{z} = -2i$ bằng

- (A) -6. (B) -2. (C) 2. (D) 6.

Câu 19. Nếu hai số thực x, y thỏa mãn $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i$ thì $x - y$ bằng

- (A) 3. (B) -3. (C) -7. (D) 7.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $3\bar{z} + (1 + i)z = 1 - 5i$. Tìm mô-đun của z .

- (A) $|z| = 5$. (B) $|z| = \sqrt{5}$.
(C) $|z| = \sqrt{13}$. (D) $|z| = \sqrt{10}$.

Câu 21. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

- (A) $P = 1$. (B) $P = -1$.

- (C) $P = -\frac{1}{2}$. (D) $P = \frac{1}{2}$.

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) - \bar{z}(2 - 3i) = -4 + 12i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

- (A) $M(3; 1)$. (B) $M(3; -1)$.
(C) $M(-1; 3)$. (D) $M(1; 3)$.

Câu 23. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $x + (y + 2i)i = 2 + i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = 4; y = 1$. (B) $x = 3; y = 2$.
(C) $x = -1; y = 2$. (D) $x = 0; y = 1$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $2 + 3i, 1 - 2i, -3 + i$. Tọa độ điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành là

- (A) $Q(0; 2)$. (B) $Q(6; 0)$.
(C) $Q(-2; 6)$. (D) $Q(-4; -4)$.

Câu 25. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

- (A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Câu 26. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính mô-đun của số phức $w = 1 - z + z^2$.

- (A) $|w| = \sqrt{37}$. (B) $|w| = \sqrt{457}$.
(C) $|w| = \sqrt{425}$. (D) $|w| = \sqrt{445}$.

Câu 27. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 3 + i - |z|i = 0$. Tính $S = a + b$.

- (A) 0. (B) -1. (C) -3. (D) 1.

Câu 28. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$?

- (A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Câu 29. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = |z_2| = 2$ và $|z_1 + 2z_2| = 4$. Giá trị của $|2z_1 - z_2|$ bằng

- (A) $2\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $3\sqrt{6}$. (D) 8.

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $z - 4 = (i + 1)|z| - (3z + 4)i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $|z| \in (6; 9)$. (B) $|z| \in (4; 6)$.
(C) $|z| \in (1; 4)$. (D) $|z| \in (0; 1)$.

Bài 3

PHÉP CHIA SỐ PHỨC

A Tóm tắt lí thuyết

⚡ **Tính chất 3.1.** Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó.

⚡ **Tính chất 3.2.** Tích của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng bình phương môđun của số phức đó.

⚡ **Định nghĩa 3.1.** Nếu $c + di = (a + bi)z$ thì số phức z được gọi là thương của phép chia $c + di$ cho $a + bi$ khác 0.

$$z = \frac{c + di}{a + bi}$$

⚠ **Lưu ý:** Để tính thương $c + di = (a + bi)z$ ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a + bi$.

$$z = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i$$

⚡ **Tính chất 3.3.** Số phức nghịch đảo của số phức z là: $\frac{1}{z}$

⚡ **Ví dụ 1.** Thực hiện phép tính: $\frac{1 + i}{3 - 4i}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\frac{1 + i}{3 - 4i} = \frac{(1 + i)(3 + 4i)}{3^2 + (-4)^2} = \frac{3 + 4i + 3i + 4i^2}{25} = \frac{-1 + 7i}{25} = -\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$

⚡ **Ví dụ 2.** Cho số phức $z = 2 + i$. Tìm số phức nghịch đảo của z .

💬 **Lời giải.**

Ta có số phức nghịch đảo của z là $\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + i} = \frac{1 \cdot (2 - i)}{2^2 + 1^2} = \frac{2 - i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Phép chia số phức đơn giản

Cho hai số phức $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ trong đó $z_2 \neq 0$. Khi đó thương của phép chia z_1 cho z_2 được xác định như sau:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) - (ad + bc)i}{c^2 + d^2}$$

Bài 1. Thực hiện phép chia $2 + i$ cho $1 + 2i$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

Bài 2. Thực hiện phép chia $\sqrt{2} + 2i$ cho $\sqrt{2} - 2i$.

Lời giải.

.....

.....

Bài 3. Tìm nghịch đảo $\frac{1}{z}$ của số phức $z = 2 - 3i$.

Lời giải.

.....

.....

Bài 4. Tìm số phức z thỏa mãn $(2 - i)z = 4 + 3i$.

Lời giải.

.....

.....

Bài 5. Tìm nghịch đảo $\frac{1}{z}$ của số phức z biết:

a) $z = 2 - 4i$.

b) $z = 3i$.

c) $z = -3 + 5i$.

d) $z = -3 - 2i$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài 6. Thực hiện phép chia sau:

a) $\frac{2 - 5i}{i}$.

b) $\frac{3 - 2i}{2 - 3i}$.

c) $\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} + i}$.

d) $\frac{2 + 6i}{-1 - i}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP 1

Tìm số phức z thỏa mãn:

a) $iz = 1 + i$.

b) $(2 - i)z = -2 - i$.

c) $(-2 + i)z = 3 + 2i$.

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)z = 1 - i$.

Dạng 2. Các bài toán tìm phần thực và phần ảo của số phức

Để tìm phần thực và phần ảo của số phức z , ta cần đưa z về dạng $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó phần thực của z là x và phần ảo của z là y . Để thực hiện được ta cần nắm vững một số kiến



thức cơ bản đã học:

1) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$ với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2) $(1 + i)^2 = 2i$ và $(1 - i)^2 = -2i$ với i là đơn vị ảo.

3) Công thức Nhị thức Newton: Cho $z = a + bi \in \mathbb{C}$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có:

$$z^n = (a + bi)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} (bi)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k i^k$$

Để viết được kết quả dưới dạng đại số thông thường, chỉ còn phải áp dụng các công thức: $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Từ đó, một cách tổng quát ta có:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 4k \\ i & \text{nếu } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{nếu } n = 4k + 2 \\ -i & \text{nếu } n = 4k + 3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Bài 1. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} - \frac{\sqrt{2} - i}{i}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z nếu như ta có $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^3$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Tính tổng của phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^{2018}$.

Lời giải.

Bài 5. Cho số phức z thỏa $\bar{z} = \frac{(1-2i)^5}{2+i}$. Viết z dưới dạng $z = a + ib$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $S = a + 2b$.

Lời giải.

LUYỆN TẬP 1

- a) Tìm phần thực và phần ảo của số phức z biết $\bar{z} = \frac{5}{1-2i} - 3i$.
- b) Tìm số phức z biết $\bar{z} - \frac{5+i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$.

LUYỆN TẬP 2

Chứng tỏ $z = -\frac{3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3i} + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3i}$ là một số thực.

LUYỆN TẬP 3

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{67} + (1-i)^{21} + (3+2i)(3-2i) + \frac{1}{i}$

LUYỆN TẬP 4

Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2-i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = z^2 + z + 1$.

Dạng 3. Một số bài toán xác định môđun của số phức

Môđun số phức z được kí hiệu là $|z|$

- 1) Môđun số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- 2) $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- 3) $|z| = |\bar{z}|$
- 4) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Bài 1. Tìm môđun của số phức z biết $z = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$.

Lời giải.

Bài 2. Tìm môđun của số phức z biết $z = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$.

Lời giải.

Bài 3. Tìm môđun của số phức z biết $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2018}$.

Lời giải.

Bài 4. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z} + iz$.

Lời giải.

Bài 5. Tìm môđun của số phức z biết $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

Lời giải.

LUYỆN TẬP 1

Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z} + i)}{z + i} = 2 - i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

LUYỆN TẬP 2

Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$.
 Tìm môđun của số phức $w = z + 1 + i$.

LUYỆN TẬP 3

Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i$.
 Tìm môđun của số phức $w = \frac{\bar{z} + 2z + 1}{z^2}$.

LUYỆN TẬP 4

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$.

LUYỆN TẬP 5

Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|2z - i| = |2 + iz|, |z_1 - z_2| = 1$. Tính $P_1 = |z_1 + z_2|$

Dạng 4. Tìm tập hợp điểm-GTNN-GTLN

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Bước 1 Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức: $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Bước 2 Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Khi thực hiện bước 2 ta cần lưu ý các tính chất sau:

- | | | |
|--------------------------------|---|--|
| 1. $z = \bar{\bar{z}}$. | 3. $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, \forall z \neq 0$. | 5. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. |
| 2. $z \cdot \bar{z} = z ^2$. | 4. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. | 6. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$. |

Ví dụ 1. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức $z = \frac{5}{3 - 4i}$.

Lời giải.

.....
----------------------------------	----------------------------------

Ví dụ 2. Tìm tập hợp các điểm nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z + 1 - 2i}{5 - i\bar{z}} \right| = 1$.

Lời giải.

.....
-------------------------	-------------------------

.....

.....

.....

.....

VẬN DỤNG 1

Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3 - 4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn tâm I , bán kính R . Tìm tọa độ điểm I và bán kính R .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP 1

Cho các số phức z thỏa mãn $|(1 - i)z - 4 + 2i| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó.

LUYỆN TẬP 2

Tập hợp các số phức $w = (1 + i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

LUYỆN TẬP 3

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Hãy biểu diễn số phức $w = \frac{5}{iz}$ trên hệ trục tọa độ Oxy .

LUYỆN TẬP 4

Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $\frac{4i}{i - 1}$, $(1 - i)(1 + 2i)$, $-2i^3$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

LUYỆN TẬP 5

Cho số phức z thỏa mãn $|z + i| = 3$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

LUYỆN TẬP 6

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có mô-đun lớn nhất. Tìm mô-đun số phức z .

VẬN DỤNG 2

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn $|z - 1| = |z + 2i|$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức z .

VẬN DỤNG 3

Gọi (H) là hình gồm các điểm M là biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 3|^2 + |z - 3|^2 = 50$. Tính diện tích S của hình (H) .

VẬN DỤNG 4

Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Gọi A, B, C là ba điểm biểu diễn lần lượt cho ba số phức z_1, z_2, z_3 . Tính diện tích S của tam giác ABC .

VẬN DỤNG 5

Cho z là số phức thay đổi và luôn thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 4\sqrt{2}$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z và \bar{z} . Tính diện tích lớn nhất S_{\max} của tam giác OMN .

VẬN DỤNG 6

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{5}{2} - 2i\right| = \left|z + \frac{3}{2} + 2i\right|$. Hãy tính $P = a - 4b$, biết rằng biểu thức $Q = |z - 2 - 4i| + |z - 4 - 6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

VẬN DỤNG 7

Cho A, B, C tương ứng là các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -2 + 5i, z_3 = 2 + 4i$. Tìm số phức z biểu diễn bởi điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

VẬN DỤNG 8

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$; M' là điểm biểu diễn cho số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích tam giác OMM' .

VẬN DỤNG 9

Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3 . Biết $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ và $z_1 + z_2 = 0$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

VẬN DỤNG 10

Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox .

VẬN DỤNG 11

Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z - \bar{z}| \leq 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H .

VẬN DỤNG 12

Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = \frac{3}{2}$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất.

VẬN DỤNG 13

Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + 1 - i$. Tìm $|w|$ có giá trị lớn nhất.

VẬN DỤNG 14

Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

VẬN DỤNG 15

Cho các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $\sqrt{2}|z_1| = \sqrt{2}|z_2| = |z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$.

C Bài tập trắc nghiệm

1. Thực hiện phép tính

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A** $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.
- B** $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.
- C** $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.
- D** $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

Câu 2. Cho số phức $z = \frac{2-6i}{(1+i)^2}$, khi đó số phức liên hợp của z là

- A** $\bar{z} = -3 + i$.
- B** $\bar{z} = 3 - i$.
- C** $\bar{z} = -3 - i$.
- D** $\bar{z} = 3 + i$.

Câu 3. Tìm số phức z thỏa mãn $z + 4 - 2i = \frac{10 + 20i}{3 - i}$.

- A** $z = -3 + 9i$.
- B** $z = 1 - 3i$.
- C** $z = 46 - 52i$.
- D** $z = 5 + 5i$.

Câu 4. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - i$. Tìm số phức $z = \frac{z_2}{z_1}$.

- A** $z = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.
- B** $z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$.
- C** $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$.
- D** $z = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

Câu 5. Cho $z = 1 + 3i$. Tính $\frac{1}{z}$.

- A** $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$.
- B** $\frac{1}{10}i - \frac{3}{10}$.

- C** $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.
- D** $-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.

Câu 6. Số phức $z = \frac{2+i}{4+3i}$ bằng

- A** $\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$.
- B** $\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$.
- C** $\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$.
- D** $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$.

Câu 7. Số phức $z = \frac{4-3i}{i}$ có phần thực là

- A** 3.
- B** -3.
- C** -4.
- D** 4.

Câu 8. Cho số phức $z = 1 + i$. Số phức nghịch đảo của z là

- A** $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.
- B** $1 - i$.
- C** $\frac{1-i}{2}$.
- D** $\frac{-1+i}{2}$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.
- B** $\bar{z} = +\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.
- C** $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.
- D** $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

Câu 10. Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$.

- (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\frac{8}{3}$. (D) $\frac{3}{8}$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2019}$. Tính z^4 .

- (A) -1 . (B) i . (C) $-i$. (D) 1 .

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} + 2z = 3 + i$. Giá trị của biểu thức $z + \frac{1}{z}$ bằng

- (A) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. (B) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
(C) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$. (D) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Câu 13. Cho số phức $z = 7 - i$. Tìm số phức $w = \frac{1}{z}$.

- (A) $w = \frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$. (B) $w = -\frac{1}{50} + \frac{7}{50}i$.
(C) $w = \frac{1}{50} + \frac{7}{50}i$. (D) $w = \frac{7}{50} + \frac{1}{50}i$.

Câu 14. Tìm số phức z thỏa mãn $(1-i)(z+1-2i) - 3 + 2i = 0$.

- (A) $z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$. (B) $z = 4 - 3i$.
(C) $z = 4 + 3i$. (D) $z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z = (1+2i) - (-2+i)$. Mô-đun của z bằng

- (A) 2 . (B) 1 . (C) $\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{10}$.

Câu 16. Tính số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2018} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$ có kết quả là

- (A) 2 . (B) -2 . (C) $2i$. (D) $1+i$.

Câu 17. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 4z + (m-2)^2 = 0, m \in \mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$. Hỏi trong đoạn $[0; 2018]$ có bao nhiêu giá trị nguyên của m_0 ?

- (A) 2019 . (B) 2015 . (C) 2014 . (D) 2018 .

Câu 18. Tính tổng $S = 1 + i^3 + i^6 + \dots + i^{2016}$.

- (A) $S = 1$. (B) $S = -1$.
(C) $S = i$. (D) $S = -i$.

Câu 19. Phần ảo của số phức $z = \frac{1 - (1-i)^{33}}{1-i} + \overline{(1-2i)}$ là

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{5}{2}i$. (C) $-\frac{3}{2}i$. (D) $-\frac{3}{2}$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{1+i}$. Tính mô-đun của số phức $\bar{z} - iz$.

- (A) $8\sqrt{2}$. (B) 8 . (C) 16 . (D) -8 .

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7 + 8i$. Tính mô-đun của số phức $w = z + 1 - 2i$.

- (A) 7 . (B) $\sqrt{7}$. (C) 25 . (D) 4 .

Câu 22. Cho số phức $z = 2 + 3i$, khi đó $\frac{z}{\bar{z}}$ bằng

- (A) $\frac{5-12i}{13}$. (B) $\frac{-5-12i}{13}$.
(C) $\frac{-5+12i}{13}$. (D) $\frac{5-6i}{11}$.

Câu 23. Số phức z thỏa $\frac{\bar{z}}{4-3i} + (2-3i) = 5-2i$. Mô-đun của z bằng

- (A) $|z| = 10\sqrt{2}$. (B) $|z| = \sqrt{10}$.
(C) $|z| = 250$. (D) $|z| = 5\sqrt{10}$.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)\bar{z} = 2+11i$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z| + |\bar{z}|$.

- (A) 5 . (B) $\sqrt{10}$. (C) 10 . (D) $\sqrt{5}$.

Câu 25. Tìm số phức z thỏa mãn $(3-2i)z - 2 = z + 18i$.

- (A) $z = -4 + 5i$. (B) $z = 4 + 5i$.
(C) $z = 4 - 5i$. (D) $z = -4 - 5i$.

Câu 26. Số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình $(1+2i)z - 8 - i = 0$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = -1$. (B) $S = 1$.
(C) $S = -5$. (D) $S = 5$.

Câu 27. Trong tập hợp số phức, phương trình $\frac{4}{z+1} = 1 - i$ có nghiệm là

- (A) $z = 2 - i$. (B) $z = 5 - 3i$.
(C) $z = 1 + 2i$. (D) $z = 3 + 2i$.

Câu 28. Tìm số phức z thỏa mãn $(1-2i)z = 3+i$.

- (A) $z = 1 - i$. (B) $z = 1 + i$.
(C) $z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$. (D) $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$.

Câu 29. Cho số phức z , biết $\bar{z} = 2 - i + \frac{i}{1+i}$. Phần ảo của số phức z^2 là

- A $\frac{5}{2}$.
 B $\frac{5}{2}i$.
 C $-\frac{5}{2}$.
 D $-\frac{5}{2}i$.

2. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán

2.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

- A $M(-1; 1)$.
 B $M(-1; -1)$.
 C $M(1; 1)$.
 D $M(1; -1)$.

Câu 2. Tìm phần thực của số phức z thỏa mãn $(5 - i)z = 7 - 17i$.

- A -2 .
 B 3 .
 C -3 .
 D 2 .

Câu 3. Số phức liên hợp của số phức z biết $z = (1 + i)(3 - 2i) + \frac{1}{3 + i}$ là

- A $\frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$.
 B $\frac{13}{10} - \frac{9}{10}i$.
 C $\frac{13}{10} + \frac{9}{10}i$.
 D $\frac{53}{10} + \frac{9}{10}i$.

Câu 4. Tìm phần ảo của số phức z , biết $(1 - i)z = 3 + i$.

- A -1 .
 B 1 .
 C -2 .
 D 2 .

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z là

- A $M(-1; 1)$.
 B $M(-1; -1)$.
 C $M(1; 1)$.
 D $M(1; -1)$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

- A $|z| = 34$.
 B $|z| = \sqrt{34}$.
 C $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.
 D $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

Câu 7. Tìm phần ảo của số phức z biết $z(2 - i) + 13i = 1$.

- A $-5i$.
 B $5i$.
 C -5 .
 D 5 .

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

- A $|z| = 34$.
 B $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.
 C $|z| = \sqrt{34}$.
 D $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z = 3 - 4i$. Tìm phần thực của z .

- A $\frac{2}{25}$.
 B $-\frac{11}{5}$.
 C $\frac{2}{5}$.
 D $\frac{11}{5}$.

Câu 10. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + 3i)z - 3 + 2i = 2 + 7i$. Giá trị của $a + b$ là

- A $\frac{11}{5}$.
 B 1 .
 C $\frac{19}{5}$.
 D 3 .

Câu 11. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $z = \frac{3 - i}{1 + i} + \frac{2 + i}{i}$.

- A Phần thực là 2, phần ảo là -4 .
 B Phần thực là 2, phần ảo là $4i$.
 C Phần thực là 2, phần ảo là 4.
 D Phần thực là 2, phần ảo là $-4i$.

Câu 12. Tìm phần ảo của số phức \bar{z} , biết $z = \frac{(1 + i)3i}{1 - i}$.

- A 3 .
 B -3 .
 C 0 .
 D -1 .

Câu 13. Tìm phần ảo của số phức $z = 2017 - 2018i$.

- A -2018 .
 B 2017 .
 C 2018 .
 D $-2018i$.

Câu 14. Tìm phần ảo của số phức $z = \frac{3}{i}$.

- A -1 .
 B 1 .
 C -3 .
 D 3 .

Câu 15. Số phức liên hợp của số phức $z = \frac{2}{1 + i}$ là số phức nào trong các số phức dưới đây?

- A $\frac{-2}{1 - i}$.
 B $1 - i$.
 C $\frac{-2}{1 + i}$.
 D $1 + i$.

Câu 16. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{1 + 5i}{2i}$ bằng

- A 3 .
 B -2 .
 C 2 .
 D -3 .

Câu 17. Cho số phức $z = 1 + i$. Tính mô-đun của số phức $w = \frac{\bar{z} + 2i}{z - 1}$.

- A $|w| = \sqrt{2}$.
 B $|w| = \sqrt{3}$.
 C $|w| = 1$.
 D $|w| = 2$.

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z = 9 - 8i$. Mô-đun của số phức $w = z + 1 + i$ bằng

- A 3 .
 B 5 .
 C 6 .
 D 4 .

Câu 19. Tìm số phức liên hợp của số phức z thỏa $(-7 + 6i)z = 1 - 2i$.

- A $\bar{z} = -\frac{19}{85} + \frac{8}{85}i$.
 B $\bar{z} = -\frac{19}{85} - \frac{8}{85}i$.

(C) $\bar{z} = \frac{19}{85} - \frac{8}{85}i$. (D) $\bar{z} = \frac{19}{85} + \frac{8}{85}i$.

Câu 20. Cho hai số phức $z = a+bi$ và $z' = a'+b'i$ ($z' \neq 0, a, a', b, b' \in \mathbb{R}$). Số phức $\frac{z}{z'}$ có phần thực là

(A) $\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}$. (B) $\frac{2bb'}{a'^2 + b'^2}$.
 (C) $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$. (D) $\frac{a + a'}{a^2 + b^2}$.

2.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $a + (b - 1)i = \frac{1 + 3i}{1 - 2i}$. Giá trị nào dưới đây là mô-đun của z ?

(A) 5. (B) 1. (C) $\sqrt{10}$. (D) $\sqrt{5}$.

Câu 2. Tính môđun của số phức z biết $\bar{z} + 1 = \frac{2 - 3i}{1 + i}$.

(A) $|z| = \frac{\sqrt{34}}{2}$. (B) $|z| = \sqrt{34}$.
 (C) $|z| = \frac{\sqrt{26}}{2}$. (D) $|z| = \frac{\sqrt{34}}{4}$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

(A) $|z| = 34$. (B) $|z| = \sqrt{34}$.
 (C) $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$. (D) $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

Câu 4. Cho hai số phức $z = a+bi$ và $z' = a'+b'i$. Số phức $\frac{z}{z'}$ có phần thực là

(A) $\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}$. (B) $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$.
 (C) $\frac{a + a'}{a^2 + b^2}$. (D) $\frac{2bb'}{a'^2 + b'^2}$.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2 - i)z = (4 + i)z + 3 - 2i$. Giá trị của $|4\bar{z} + i|$ là

(A) $\sqrt{26}$. (B) $\sqrt{30}$. (C) $\sqrt{17}$. (D) $\sqrt{15}$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - \sqrt{3}i)^2 z = 3 - 4i$. Mô-đun của z bằng

(A) $\frac{5}{4}$. (B) $\frac{5}{2}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.

Câu 7. Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây sai?

(A) $\frac{z}{\bar{z}}$ là số thuần ảo. (B) $z - \bar{z}$ là số ảo.
 (C) $z \cdot \bar{z}$ là số thực. (D) $z + \bar{z}$ là số thực.

Câu 8. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$. Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1 z_2$.

(A) $w = -\frac{3}{4} + 2i$. (B) $w = \frac{3}{4} + 2i$.
 (C) $w = 2 + \frac{3}{2}i$. (D) $w = \frac{3}{2} + 2i$.

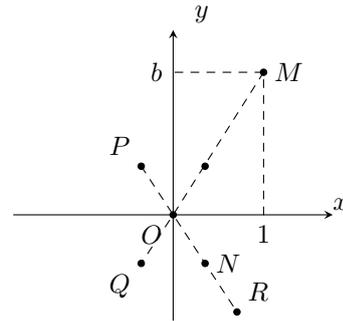
Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z = z - 1$. Mô-đun của \bar{z} bằng

(A) $\frac{1}{10}$. (B) $\sqrt{10}$. (C) 1. (D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 10. Viết số phức $z = \frac{(2 - 3i)(4 - i)}{3 + 2i}$ dưới dạng $z = a + bi$ với a, b là các số thực. Tìm a, b .

(A) $a = -1; b = -4$. (B) $a = 1; b = -4$.
 (C) $a = -1; b = 4$. (D) $a = 1; b = 4$.

Câu 11. Trong mặt phẳng phức, cho số phức z có điểm biểu diễn là M . Biết rằng số phức $w = \frac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm N, P, Q, R như hình vẽ bên.



Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào?

(A) N. (B) P. (C) Q. (D) R.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

(A) $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. (B) $|z| = 34$.
 (C) $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$. (D) $|z| = \sqrt{34}$.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $z + (2 + i)\bar{z} = 3 + 5i$. Tính môđun của số phức z .

(A) $|z| = 13$. (B) $|z| = 5$.
 (C) $|z| = \sqrt{13}$. (D) $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 14. Tìm phần ảo của số phức z , biết $(2 - i)z = 1 + 3i$.

(A) 3. (B) $\frac{7}{5}i$. (C) $\frac{7}{5}$. (D) $-\frac{1}{5}$.

Câu 15. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z|(2 + i) = z - 1 + i(2z + 3)$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = 1.$ (B) $S = -5.$
 (C) $S = -1.$ (D) $S = 7.$

Câu 16. Nghịch đảo $\frac{1}{z}$ của số phức $z = 1 + 3i$ bằng

- (A) $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}i.$ (B) $\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}i.$
 (C) $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$ (D) $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.$

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Mô-đun của số phức $w = (z + 1)\bar{z}$ bằng

- (A) 2. (B) $\sqrt{10}.$ (C) $\sqrt{5}.$ (D) 4.

Câu 18. Tính mô-đun của số phức z , biết $(1 - 2i)z + 2 - i = -12i$.

- (A) 5. (B) $\sqrt{7}.$ (C) $\frac{1}{2}.$ (D) $2\sqrt{2}.$

Câu 19. Cho số phức $z = \frac{3i}{3 + i} - i$. Mô-đun của số phức \bar{z} là

- (A) $\frac{\sqrt{370}}{10}.$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{10}.$
 (C) $\sqrt{10}.$ (D) $\frac{-3}{10} + \frac{1}{10}i.$

Câu 20. Tìm điểm biểu diễn của số phức \bar{z} là số phức liên hợp của z , biết $(4 + 3i)z - (3 + 4i)(2 + i) = 9 - 9i$.

- (A) (2; -1). (B) (2; 1).
 (C) (-2; -1). (D) (-2; 1).

Câu 21. Tìm số phức \bar{z} , biết $(2 - 5i)z - 3 + 2i = 5 + 7i$.

- (A) $\bar{z} = -\frac{9}{29} + \frac{50}{29}i.$ (B) $\bar{z} = -\frac{9}{29} - \frac{50}{29}i.$
 (C) $\bar{z} = \frac{9}{29} - \frac{50}{29}i.$ (D) $\bar{z} = \frac{9}{29} + \frac{50}{29}i.$

Câu 22. Tìm tọa độ của điểm biểu diễn số phức $z = \frac{3 + 4i}{1 - i}$ trên mặt phẳng tọa độ.

- (A) $Q\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right).$ (B) $N\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right).$
 (C) $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right).$ (D) $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right).$

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i.$ (B) $\bar{z} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i.$
 (C) $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i.$ (D) $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i.$

Câu 24. Số phức nào dưới đây thỏa mãn phương trình $(1 - 2i)z = 3z - 2i$?

- (A) $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$ (B) $z = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i.$
 (C) $z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i.$ (D) $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

Câu 25. Tìm phần ảo của số phức $z = \frac{2 - 9i}{1 + 6i}$.

- (A) $-\frac{52}{37}.$ (B) $\frac{52}{37}.$ (C) $-\frac{21}{37}.$ (D) $\frac{21}{37}.$

Câu 26. Giả sử $\frac{1}{(1 - i)^9} = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

- (A) $a = \frac{1}{32}; b = -\frac{1}{32}.$ (B) $a = 0; b = \frac{1}{32}.$
 (C) $a = \frac{1}{32}; b = 0.$ (D) $a = b = \frac{1}{32}.$

Câu 27. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1 + i)\bar{z} = 3 - 5i$.

- (A) $M(-1; 4).$ (B) $M(-1; -4).$
 (C) $M(1; 4).$ (D) $M(1; -4).$

Câu 28. Phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$ lần lượt bằng bao nhiêu?

- (A) $\sqrt{3} - 1$ và $\sqrt{3} + 1.$
 (B) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ và $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$
 (C) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ và $\sqrt{3} + 1.$
 (D) $\sqrt{3} - 1$ và $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = 8 + i$. Số phức liên hợp \bar{z} của z là

- (A) $\bar{z} = -2 - 3i.$ (B) $\bar{z} = -2 + 3i.$
 (C) $\bar{z} = 2 + 3i.$ (D) $\bar{z} = 2 - 3i.$

Câu 30. Tính mô-đun của số phức thỏa mãn: $z(2 - i) + 13i = 1$.

- (A) $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}.$ (B) $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{2}.$
 (C) $|z| = 34.$ (D) $|z| = \sqrt{34}.$

Câu 31. Số phức $z = \frac{2 - 3i}{1 + i}$ có mô-đun bằng

- (A) $|z| = \frac{\sqrt{26}}{3}.$ (B) $|z| = 3\sqrt{26}.$
 (C) $|z| = 2\sqrt{26}.$ (D) $|z| = \frac{\sqrt{26}}{2}.$

Câu 32. Tìm phần thực và ảo của số phức $z = \frac{3-i}{1+i} + \frac{2+i}{i}$.

- (A) Phần thực bằng 2; phần ảo bằng $-4i$.
- (B) Phần thực bằng 2; phần ảo bằng -4 .
- (C) Phần thực bằng 2; phần ảo bằng $4i$.
- (D) Phần thực bằng -2 ; phần ảo bằng 4 .

Câu 33. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $(1+i)z + 3 = -2i$.

- (A) $|z| = \frac{5}{2}$.
- (B) $|z| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.
- (C) $|z| = \sqrt{26}$.
- (D) $|z| = \sqrt{13}$.

Câu 34. Cho số phức z thỏa $2z + 3\bar{z} = 10 + i$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = 1$.
- (B) $|z| = 3$.
- (C) $|z| = \sqrt{3}$.
- (D) $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 35. Cho số phức $z_1 = a - 2i, z_2 = 1 + bi$. Tìm phần ảo của số phức \bar{z} , biết $z_1 z_2 + z_2 z_1 = 1 + i$.

- (A) $\frac{a+b-1}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$.
- (B) $\frac{a-b+3}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$.
- (C) $\frac{b-a-3}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$.
- (D) $\frac{1-a-b}{(a+1)^2 + (b-2)^2}$.

Câu 36. Tìm phần ảo của số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = (2-i)^3(1-i)$.

- (A) -9 .
- (B) 9 .
- (C) 13 .
- (D) -13 .

Câu 37. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm mô-đun của số phức $w = \bar{z} + \frac{13}{z}$.

- (A) $\sqrt{10}$.
- (B) $2\sqrt{5}$.
- (C) 4 .
- (D) $2\sqrt{13}$.

Câu 38. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = \frac{13}{12 + 5i}$.

- (A) $\bar{z} = \frac{13}{12 - 5i}$.
- (B) $\bar{z} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$.
- (C) $\bar{z} = \frac{13}{12} + \frac{13}{5}i$.
- (D) $\bar{z} = \frac{12}{13} - \frac{13}{5}i$.

Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 - 2i$. Tính mô-đun của số phức z .

- (A) $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{106}$.
- (B) $|z| = \frac{53}{2}$.
- (C) $|z| = \frac{41}{8}$.
- (D) $|z| = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Câu 40. Số phức liên hợp của số phức $z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$ là

- (A) $4 + 4i$.
- (B) $4 - 4i$.
- (C) $-4 - 4i$.
- (D) $-4 + 4i$.

Câu 41. Cho số phức $z = mi$ với $m \neq 0$ là tham số thực. Tìm phần ảo của số phức $\frac{1}{z}$.

- (A) $-\frac{1}{m}$.
- (B) $\frac{1}{m}$.
- (C) $-\frac{1}{m}i$.
- (D) $\frac{1}{m}$.

Câu 42. Cho số phức $(1-i)z = 4 + 2i$. Tìm mô-đun của số phức $w = z + 3$.

- (A) 5 .
- (B) $\sqrt{10}$.
- (C) 25 .
- (D) $\sqrt{7}$.

Câu 43. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$.

Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1 z_2$.

- (A) $w = -\frac{3}{4} + 2i$.
- (B) $w = \frac{3}{4} + 2i$.
- (C) $w = 2 + \frac{3}{2}i$.
- (D) $w = \frac{3}{2} + 2i$.

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.
- (B) $\bar{z} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.
- (C) $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.
- (D) $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

Câu 45. Tính mô-đun số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$.

- (A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- (B) $\sqrt{5}$.
- (C) $\frac{1}{25}$.
- (D) $\frac{1}{5}$.

2.3. Mức độ vận dụng

Câu 1. Cho số thực $a > 2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + a = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $z_1 + z_2$ là số thực.
- (B) $z_1 - z_2$ là số ảo.
- (C) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số ảo.
- (D) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số thực.

Câu 2. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tính $|z_1 + z_2|$.

- (A) 2 .
- (B) 3 .
- (C) $\sqrt{2}$.
- (D) $2\sqrt{2}$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $(z + 3 - i)(\bar{z} + 3i + 1)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng

- (A) $4\sqrt{2}$.
- (B) 0 .
- (C) $2\sqrt{2}$.
- (D) $3\sqrt{2}$.

Câu 4. Số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{5}{17}$ và z có phần ảo dương. Tìm tổng phần thực và phần ảo của z .

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

Câu 5. Cho số phức z thỏa $\frac{z}{z^2}$ là số thực, $|z - \bar{z}| = 3\sqrt{2}$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = 3\sqrt{2}$. (B) $|z| = \sqrt{6}$.
(C) $|z| = 2\sqrt{3}$. (D) $|z| = \sqrt{3}$.

Câu 6. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$ và chúng được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M, N . Biết góc giữa hai véc-tơ \vec{OM} và \vec{ON} bằng 60° . Tìm mô-đun của số phức $z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$.

- (A) $|z| = \sqrt{3}$. (B) $|z| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
(C) $|z| = \frac{\sqrt{481}}{13}$. (D) $|z| = 4\sqrt{3}$.

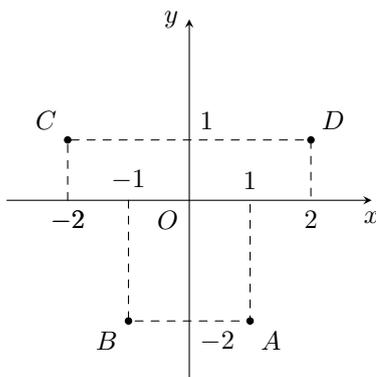
Câu 7. Cho số phức $z = 1 - i$ và \bar{z} là số phức liên hợp của z . Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $|\bar{z}| < 2$. (B) $\frac{z^3}{\bar{z}^3} = i$.
(C) z^2 là số thuần ảo. (D) \bar{z}^4 là số thuần ảo.

Câu 8. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $az^2 + z + \frac{1}{a} = 0$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$). Biết $|z_1| + |z_2| = 2$, khi đó a nhận giá trị bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Số phức $w = \frac{5}{iz}$ có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm A, B, C, D ở hình bên?



- (A) Điểm C. (B) Điểm A.
(C) Điểm D. (D) Điểm B.

Câu 10. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có phần thực dương và thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$. Tính $P = a + b$.

- (A) $P = 7$. (B) $P = -1$.
(C) $P = -5$. (D) $P = 3$.

3. Bài toán quy về giải phương trình

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(i + 3)z + \frac{2 + i}{i} = (2 - i)\bar{z}$. Tính mô-đun của số phức $w = z - i$.

- (A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{\sqrt{26}}{5}$. (C) $\frac{\sqrt{26}}{25}$. (D) $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

Câu 2. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$, thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = \frac{1}{2}$. (B) $S = -1$.
(C) $S = 1$. (D) $S = -\frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 - 3i)z + (2 + 3i)\bar{z} = 12 - i$. Tính $P = a^2 - b^3$.

- (A) -3. (B) -1. (C) 1. (D) 3.

Câu 4. Tìm số phức z thỏa mãn $(3 + i)\bar{z} + (1 + 2i)z = 3 - 4i$.

- (A) $z = 2 + 5i$. (B) $z = 2 + 3i$.
(C) $z = -1 + 5i$. (D) $z = -2 + 3i$.

Câu 5. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = -\frac{1}{2}$. (B) $S = 1$.
(C) $S = \frac{1}{2}$. (D) $S = -1$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

- (A) $w = -1 + 7i$. (B) $w = -3 + 8i$.
(C) $w = 1 + 3i$. (D) $w = -4 + 8i$.

Câu 7. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + 2i)z + i\bar{z} = 7 + 5i$. Tính $S = 4a + 3b$.

- (A) $S = 7$. (B) $S = 24$.
(C) $S = -7$. (D) $S = 0$.

Câu 8. Cho số thực x, y thỏa mãn $2x + y + (2y - x)i = x - 2y + 3 + (y + 2x + 1)i$. Khi đó giá trị của $M = x^2 + 4xy - y^2$ bằng

- (A) -1. (B) 1. (C) 0. (D) -2.

Câu 9. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$ và $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$.

Tính $P = a + b$.

- (A) $P = 7$. (B) $P = -1$.
(C) $P = 1$. (D) $P = 2$.

Câu 10. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4$ và $|z - 1 - i| = |z - 3 + 3i|$?

- (A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Câu 11. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- (A) 1. (B) $1 - 2\sqrt{3}i$.
(C) $-3 - 2\sqrt{3}i$. (D) $1 - \sqrt{3}i$.

Câu 12. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

- (A) 0. (B) Vô số. (C) 2. (D) 1.

Câu 13. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo.

- (A) 0. (B) vô số. (C) 2. (D) 1.

Câu 14. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$. Tính tổng tất cả các phần tử của S

- (A) $1 - 2\sqrt{3}i$. (B) $-3 - 2\sqrt{3}i$.
(C) 1. (D) $1 - i\sqrt{3}$.

Câu 15. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo.

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) Vô số.

Câu 16. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau đồng thời thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính mô đun của số phức z_1 .

- (A) $|z_1| = 3$. (B) $|z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
(C) $|z_1| = 2$. (D) $|z_1| = \sqrt{5}$.

Câu 17. Tìm phần thực của số phức z , biết $z + \frac{|z|^2}{z} = 10$.

- (A) 20. (B) 10. (C) 5. (D) 15.

Câu 18. Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)}$, ($m \in \mathbb{R}$).

Tìm các giá trị nguyên của m để $|z - i| < 1$ là

- (A) 0. (B) 1. (C) 4. (D) Vô số.

Câu 19. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{|z|^2}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0$. Tính $P = \frac{a}{b}$.

- (A) $P = \frac{3}{5}$. (B) $P = \frac{1}{5}$.
(C) $P = 5$. (D) $P = -\frac{1}{5}$.

Câu 20. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1+i) = 0$?

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

4. Bài toán tập hợp điểm

Câu 1. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1| = 2$. Biết rằng tập hợp các số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là đường tròn có bán kính bằng R . Tính R .

- (A) $R = 8$. (B) $R = 2$.
(C) $R = 16$. (D) $R = 4$.

Câu 2. Trong mặt phẳng phức Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z - 4 + 2i| = 4\sqrt{2}$ là một đường tròn. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

- (A) $I(1; -3)$, $R = 4$.
(B) $I(4; -2)$, $R = 4\sqrt{2}$.
(C) $I(1; -3)$, $R = 2$.
(D) $I(-1; 3)$, $R = 4$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{2-i} + i \right| = \sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp biểu diễn số phức $w = (1-i)z + 2i$ có dạng $(x+2)^2 + y^2 = m$. Tìm m .

- (A) $m = 96$. (B) $m = 92$.
(C) $m = 50$. (D) $m = 100$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z - 4 + 2i| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn đó.

- (A) $I(3; -1)$, $R = \sqrt{2}$. (B) $I(3; -1)$, $R = 2$.
(C) $I(3; 1)$, $R = \sqrt{2}$. (D) $I(3; 1)$, $R = 2$.

Câu 5. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

- (A) $R = 4$. (B) $R = 16$.
 (C) $R = 8$. (D) $R = 2$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$. Tính diện tích của hình (H) .

- (A) 8π . (B) 18π . (C) 16π . (D) 4π .

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{z}{z-1} \right| = 3$ là

- (A) Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{8} = 0$.
 (B) Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$.
 (C) Đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$.
 (D) Đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{8}$.

Câu 8. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z - i| = 4$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) $4\sqrt{2}$. (C) 4. (D) 2.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z + i| = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3 + 4i)z + 2 + i$ là một đường tròn tâm I . Điểm I có tọa độ là

- (A) $(6; -2)$. (B) $(6; 2)$.
 (C) $(2; 1)$. (D) $(-2; -1)$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa điều kiện $|z| = 10$ và $w = (6 + 8i) \cdot \bar{z} + (1 - 2i)^2$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn có tâm là

- (A) $I(-3; -4)$. (B) $I(3; 4)$.
 (C) $I(1; -2)$. (D) $I(6; 8)$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + i\sqrt{8})z + i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- (A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 36.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| \leq 3$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình có diện tích.

- (A) $S = 25\pi$. (B) $S = 16\pi$.
 (C) $S = 9\pi$. (D) $S = 36\pi$.

Câu 13. Trong mặt phẳng Oxy , gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1, z_2, z_1 + z_2$. Xét các mệnh đề sau

- 1) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{cases};$ 2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
 3) Nếu $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ thì $z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 = 0$; 4) $OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Câu 14. Cho số phức z có mô-đun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1 - i)(z + 1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R . Tổng $a + b + R$ bằng

- (A) 5. (B) 7. (C) 1. (D) 3.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{2\bar{z} - z + 3i}{z + i} \right| = 3$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là

- (A) Một Parabol. (B) Một đường thẳng.
 (C) Một đường tròn. (D) Một Elip.

Câu 16. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3 - 4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn tâm I , bán kính R . Khi đó

- (A) $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$.
 (B) $I(1; 2), R = \sqrt{5}$.
 (C) $I(-1; 2), R = 5$.
 (D) $I(1; -2), R = 5$.

Câu 17. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1$.

- (A) Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = \pm 1, y = \pm 1$.
 (B) Trục Ox .
 (C) Đường tròn $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
 (D) Hai đường thẳng $y = \pm 1$, trừ điểm $(0; -1)$.

Bài 4

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A Tóm tắt lí thuyết

1. Căn bậc hai của số thực âm

Các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Khi đó:

- ☑ Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$.
- ☑ Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- ☑ Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

🔗 Ví dụ 1. Giải phương trình

$$x^2 + x + 1 = 0$$

💬 Lời giải.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = -3 = 3i^2$.

Phương trình có 2 nghiệm phức:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

🔗 Định lí 4.1 (Định lý Vi-et). Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

B Các dạng toán

Dạng 1. Giải phương trình bậc hai hệ số thực

Áp dụng công thức nghiệm của phương trình bậc hai đã biết.

⚠ Lưu ý: Với phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$ ta có thể đặt $t = x^2$ để đưa về phương trình bậc hai và lưu ý rằng trong tập số phức thì **không** cần điều kiện $t \geq 0$.

🔗 Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2 + 4x + 5 = 0$ trên tập số phức.

💬 Lời giải.

Biệt thức thu gọn của phương trình là $\Delta' = 2^2 - 1 \times 5 = -1 = i^2$.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phức: $x_1 = -2 - i$ và $x_2 = -2 + i$.

Bài 1. Giải phương trình $z^2 - 3z + 10 = 0$ trên tập số phức.

Lời giải.

.....

.....

.....

Bài 2. Giải phương trình $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$ (*) trên tập số phức.

Lời giải.

.....

.....

.....

Bài 3. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $F = |z_1| + |z_2|$.

Lời giải.

.....

.....

.....

Bài 4. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$. Tính tổng $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$.

Lời giải.

.....

.....

.....

Bài 5. Giải phương trình $z^2 - z + \frac{5}{4} = 0$ trên tập số phức.

Lời giải.

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP 1

Giải phương trình $2z^4 + 3z^2 - 5 = 0$ trên tập số phức.

LUYỆN TẬP 2

Biết rằng phương trình $z^2 + az + b = 0$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}$) có một nghiệm phức là $1 + 2i$. Tính tích ab .

LUYỆN TẬP 3

Cho phương trình $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$ có các nghiệm trên tập số phức là z_1, z_2, z_3, z_4 . Tính giá trị biểu thức $F = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$.

LUYỆN TẬP 4

Giải phương trình $3z^2 + (3 + 2i\sqrt{2})z - \frac{(1+i)^3}{1-i} = i\sqrt{8}z$ trên tập số phức.

LUYỆN TẬP 5

Giải phương trình $3z^2 + (3 + 2i\sqrt{2})z - \frac{(1+i)^3}{1-i} = i\sqrt{8}z$ trên tập số phức.

Dạng 2. Phương trình bậc cao với hệ số thực.

Phương pháp giải:

- ☑ Phân tích thành nhân tử để đưa về phương trình tích.
- ☑ Đặt ẩn phụ.

Ví dụ 3. Giải phương trình $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Đặt $t = z^2$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = -2$ hoặc $t = 4$.

- ☑ Với $t = 4$ suy ra $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$.
- ☑ Với $t = -2$ suy ra $z^2 = -2 \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{2}$.

Ta có thể trình bày theo cách sau:

$$z^4 - 2z^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -2 \\ z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm i\sqrt{2} \\ z = \pm 2 \end{cases}.$$

Bài 1. Giải phương trình $z^3 - 27 = 0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Bài 2. Giải phương trình $z^3 + 4z^2 + 6z + 3 = 0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Bài 3. Giải phương trình sau trên tập số phức $z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$.

Lời giải.



LUYỆN TẬP 3

Giải phương trình $z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$ trên tập số phức.

LUYỆN TẬP 4

Phương trình $z^6 + z^5 - 13z^4 - 14z^3 - 13z^2 + z + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

LUYỆN TẬP 5

Giải phương trình sau trên tập số phức $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$

LUYỆN TẬP 6

Giải phương trình sau trên tập số phức $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$

Số phức trong các đề thi tốt nghiệp, ĐH-CĐ

- 1 [TN THPT-2006] Giải phương trình $2x^2 - 5x + 4 = 0$ trên tập số phức.
- 2 [TN THPT-2007-Lần 1] Giải phương trình $x^2 - 4x + 7 = 0$ trên tập số phức.
- 3 [TN THPT-2007-Lần 2] Giải phương trình $x^2 - 6x + 25 = 0$ trên tập số phức.
- 4 [TN THPT-2008-Lần 1] Tìm giá trị của biểu thức: $P = (1 + \sqrt{3}i)^2 + (1 - \sqrt{3}i)^2$
- 5 [TN THPT-2008-Lần 2] Tìm giá trị của biểu thức: Giải phương trình $x^2 - 2x + 2 = 0$ trên tập số phức.
- 6 [TN THPT-2009] Giải phương trình $8z^2 - 4z + 1 = 0$ trên tập số phức.
- 7 [TN THPT-2010] Cho hai số phức: $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1 - 2z_2$
- 8 [TN THPT-2011] Giải phương trình $(1 - i)z + (2 - i) = 4 - 5i$
- 9 [TN THPT-2012] Tìm các số phức $2z + \bar{z}$ và $\frac{25i}{z}$, biết $z = 3 - 4i$.
- 10 [TN THPT-2012] Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z - 2 - 4i = 0$. Tìm số phức liên hợp của z .
- 11 [ĐH-Khối A-2009] Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.
- 12 [ĐH-Khối B-2009] Tìm số phức z thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$.
- 13 [ĐH-Khối D-2009] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.
- 14 [ĐH-Khối A-2010] Tìm phần ảo của số phức z , biết: $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i)$.
- 15 [ĐH-Khối B-2010] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |(1 + i)z|$.
- 16 [ĐH-Khối D-2010] Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo
- 17 [ĐH-Khối A-2011] Tìm tất cả các số phức z , biết $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$

- 18** [ĐH-Khối B-2011] Tìm tất cả các số phức z , biết $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$
- 19** [ĐH-Khối D-2011] Tìm tất cả các số phức z , biết $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$.
- 20** [ĐH-Khối A-2012] Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} = 2 - i$. Tính mô-đun của số phức $w = 1 + z + z^2$.
- 21** [ĐH-Khối D-2012] Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 1 + 1 + i$
- 22** [ĐH-Khối D-2013] Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i$. Tính mô-đun của số phức $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$.

C Bài tập trắc nghiệm

1. Giải phương trình. Tính toán biểu thức nghiệm

1.1. Mức độ nhận biết

Câu 1. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Tính $M = |z_1^2| + |z_2^2|$.

- A** $M = 2\sqrt{34}$. **B** $M = 4\sqrt{5}$.
C $M = 12$. **D** $M = 10$.

Câu 2. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Tính $M = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A** $M = 2\sqrt{34}$. **B** $M = 4\sqrt{5}$.
C $M = 12$. **D** $M = 10$.

Câu 3. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A** 10. **B** 5. **C** 12. **D** 14.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ trên tập số phức là

- A** $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
B $z_1 = \sqrt{3} + i; z_2 = \sqrt{3} - i$.
C $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
D $z_1 = 1 + \sqrt{3}i; z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

Câu 5. Hai số phức $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ và $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A** $z^2 - 3z - 4 = 0$. **B** $z^2 + 3z + 4 = 0$.
C $z^2 - 3z + 4 = 0$. **D** $z^2 + 3z - 4 = 0$.

Câu 6. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tìm số phức liên hợp của $w = \frac{z_1}{2 - i}$.

- A** $\bar{w} = 1 - 3i$. **B** $\bar{w} = i$.
C $\bar{w} = -3 + i$. **D** $\bar{w} = -i$.

Câu 7. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 5z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A** $A = 10$. **B** $A = 50$.
C $A = 20$. **D** $A = 40$.

Câu 8. Phương trình $(z^2 - 1)(z^3 + 8) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phức?

- A** 5. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Câu 9. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 + 3z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A** $\sqrt{5}$. **B** $2\sqrt{5}$. **C** 5. **D** $\frac{3}{4}$.

Câu 10. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2| + |z_2^2|$ bằng

- A** 8. **B** 0. **C** 4. **D** $8i$.

Câu 11. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 1 = 0$ (trong đó số phức z_1 có phần ảo âm). Tính $z_1 + 3z_2$.

- A** $z_1 + 3z_2 = \sqrt{2}i$. **B** $z_1 + 3z_2 = -\sqrt{2}$.
C $z_1 + 3z_2 = -\sqrt{2}i$. **D** $z_1 + 3z_2 = \sqrt{2}$.

Câu 12. Giả sử z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của

phương trình $z^2 + (1 - 2i)z - 1 - i = 0$. Khi đó $|z_1 - z_2|$ bằng

- (A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Câu 13. Gọi z_1, z_2 (z_1 có phần ảo lớn hơn z_2) là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 6 = 0$. Phần ảo của $(z_2 + z_2 z_1)$ là

- (A) $-\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $-\sqrt{2}i$. (D) $\sqrt{2}i$.

Câu 14. Cho phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Một nghiệm phức của phương trình đã cho là

- (A) $z = 2 + 3i$. (B) $z = 5 - 4i$.
(C) $z = 1 + i$. (D) $z = 3 - i$.

Câu 15. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Số phức iz_0 bằng

- (A) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. (B) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
(C) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. (D) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Câu 16. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

- (A) $M_2 \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. (B) $M_1 \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.
(C) $M_3 \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. (D) $M_4 \left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

Câu 17. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ trên tập số phức. Số tập con của S là

- (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 4.

Câu 18. Giải phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$ trên tập hợp số phức, ta có tập nghiệm S là

- (A) $S = \{1 - i; 1 + i\}$.
(B) $S = \{1 - i; -1 + i\}$.
(C) $S = \{-1 - i; -1 + i\}$.
(D) $S = \{-1 - i; 1 + i\}$.

Câu 19. Tập nghiệm của phương trình $x^2 + 9 = 0$ trên tập hợp số phức là tập hợp nào sau đây?

- (A) \emptyset . (B) $\{-3; 3\}$.
(C) $\{0; 3\}$. (D) $\{-3i; 3i\}$.

Câu 20. Tìm số phức z có phần ảo dương thỏa $z^2 - 2z + 10 = 0$.

- (A) $z = 1 + 3i$. (B) $z = -1 + 3i$.
(C) $z = 2 + 6i$. (D) $z = -2 + 6i$.

Câu 21. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Tính $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

- (A) 4. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{8}{3}$. (D) 8.

Câu 22. Giải phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ trên tập số phức ta được các nghiệm

- (A) $-2 + i, -2 - i$. (B) $2 + i, 2 - i$.
(C) $4 + i, 4 - i$. (D) $-4 + i, -4 - i$.

Câu 23. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1 là

- (A) $M(-1; -\sqrt{2})$. (B) $M(-1; 2)$.
(C) $M(-1; -2)$. (D) $M(-1; -\sqrt{2}i)$.

Câu 24. Ký hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 6 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- (A) $\sqrt{6}$. (B) $2\sqrt{6}$. (C) 12. (D) 4.

Câu 25. Tìm x và y thỏa mãn $x + (y + 2i)i = 2 + i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = 4; y = 1$. (B) $x = 3; y = 2$.
(C) $x = -1; y = 2$. (D) $x = 0; y = 1$.

1.2. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) là nghiệm của phương trình $(1 + 2i)z - 8 - i = 0$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = -1$. (B) $S = 1$.
(C) $S = -5$. (D) $S = 5$.

Câu 2. Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) 3. (D) 10.

Câu 3. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- (A) $A = 10$. (B) $A = 15$.
(C) $A = 20$. (D) $A = 25$.

Câu 4. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 8z + 25 = 0$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ bằng

- (A) 8. (B) 5. (C) 6. (D) 3.

Câu 5. Gọi số phức z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 + 4z + 37 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w = iz_0$.

- A $M_1 \left(-3; \frac{1}{2} \right)$. B $M_2 \left(3; -\frac{1}{2} \right)$.
 C $M_3 \left(3; \frac{1}{2} \right)$. D $M_4 \left(-3; -\frac{1}{2} \right)$.

Câu 6. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A $3\sqrt{2}$. B $2\sqrt{3}$. C 3. D $\sqrt{3}$.

Câu 7. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 + 4z + 37 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

- A $M_1 \left(-3; \frac{1}{2} \right)$. B $M_2 \left(3; -\frac{1}{2} \right)$.
 C $M_3 \left(3; \frac{1}{2} \right)$. D $M_4 \left(-3; -\frac{1}{2} \right)$.

Câu 8. Biết $z = 1 - 2i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó $a + b$ bằng

- A 3. B -3. C 4. D -4.

Câu 9. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của biểu thức $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A $T = \sqrt{10}$. B $T = 10$.
 C $T = 20$. D $T = 2\sqrt{10}$.

Câu 10. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Tính độ dài đoạn MN .

- A $MN = 2$. B $MN = 6i$.
 C $MN = -6i$. D $MN = 6$.

Câu 11. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 8z + 25 = 0$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ bằng

- A 8. B 5. C 6. D 3.

Câu 12. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$; M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng phức. Độ dài của đoạn thẳng MN là

- A $2\sqrt{5}$. B 4. C $\sqrt{2}$. D 2.

Câu 13. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số phức $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$ bằng

- A 2. B 10. C $2i$. D $10i$.

Câu 14. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của $|z_1^2| + |z_2^2|$ bằng

- A $\sqrt{10}$. B 20. C $2\sqrt{10}$. D 10.

Câu 15. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A $2\sqrt{10}$. B 2. C $\sqrt{10}$. D 20.

Câu 16. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

- A $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$. B $P = \frac{2}{3}$.
 C $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. Trong tập số phức, phương trình $z^2 + 3iz + 4 = 0$ có hai nghiệm là z_1, z_2 . Đặt $S = |z_1| - |z_2|$. Tìm S .

- A $S \in \{3\}$. B $S \in \{3; -3\}$.
 C $S \in \{-3\}$. D $S \in \{0\}$.

Câu 18. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $|z_1|^2 + z_1 z_2$.

- A 5. B 10. C 15. D 0.

Câu 19. Số phức nào dưới đây là một căn bậc hai của số phức $z = -3 + 4i$?

- A $2 + i$. B $2 - i$. C $1 + 2i$. D $1 - 2i$.

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $2z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A 2. B 1. C 4. D 3.

Câu 21. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A 4. B 6. C 10. D 20.

Câu 22. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 = -1$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A 2. B 4. C 1. D 0.

Câu 23. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A 6. B 10. C $2\sqrt{5}$. D 4.

Câu 24. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $T = z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A $T = \frac{3}{18}$. B $T = -\frac{9}{8}$.

(C) $T = 3.$ (D) $T = -\frac{9}{4}.$

Câu 25. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 7 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $2\sqrt{7}.$ (B) $\sqrt{7}.$ (C) 14. (D) 10.

Câu 26. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực âm và phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^{2019}z_0$?

(A) $M(3; -1).$ (B) $M(-3; 1).$
(C) $M(3; 1).$ (D) $M(-3; -1).$

Câu 27. Phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ có hai nghiệm là $z_1; z_2$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 6. (D) 2.

Câu 28. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(A) $P = 40.$ (B) $P = \sqrt{10}.$
(C) $P = 20.$ (D) $P = 2\sqrt{10}.$

Câu 29. Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Biểu thức $|z_1 - z_2|$ có giá trị là

(A) $6i.$ (B) $2i.$ (C) 6. (D) 2.

Câu 30. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn cho số phức z_1 có tọa độ là

(A) $(-2; -1).$ (B) $(2; -1).$
(C) $(-1; -2).$ (D) $(1; -2).$

Câu 31. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 5z + 7 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(A) $4\sqrt{7}.$ (B) 56. (C) 14. (D) $2\sqrt{7}.$

Câu 32. Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 6 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $\sqrt{6}.$ (B) $2\sqrt{6}.$ (C) 12. (D) 4.

Câu 33. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) $\sqrt{2}.$

Câu 34. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2| + |z_2^2|$ bằng

(A) $6 - 8i.$ (B) 20.
(C) 6. (D) 10.

Câu 35. Cho phương trình $z^2 + az + b = 0$ với a, b là các tham số thực nhận số phức $1 + i$ là một nghiệm. Tính $a - b$.

(A) -2. (B) -4. (C) 4. (D) 0.

Câu 36. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2 + 2|z| = 0$?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Câu 37. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$ có một nghiệm $z = 1 - 2i$. Tính $a + b$

(A) 1. (B) -5. (C) -3. (D) 3.

Câu 38. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 5z + 7 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1 - z_2|$ là

(A) $\sqrt{3}i.$ (B) $-\sqrt{3}i.$ (C) $\sqrt{3}.$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 39. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 4 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 6.

Câu 40. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$. Giá trị của $|2z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $3\sqrt{3}.$ (B) $2\sqrt{2}.$ (C) $2\sqrt{3}.$ (D) $3\sqrt{2}.$

Câu 41. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tính $P = 2|z_1| + 5|z_2|$.

(A) $P = \sqrt{3}.$ (B) $P = 5\sqrt{3}.$
(C) $P = 3\sqrt{3}.$ (D) $P = 7\sqrt{3}.$

Câu 42. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 8z + 17 = 0$. Tìm giá trị $T = |z_1| + |z_2|$?

(A) $T = 34.$ (B) $T = \sqrt{17}.$
(C) $T = 2\sqrt{17}.$ (D) $T = 17.$

Câu 43. Gọi z_1 là nghiệm có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 4z + 20 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z_1 .

(A) $M(-2; -4).$ (B) $M(-4; -2).$
(C) $M(2; -4).$ (D) $M(4; -2).$

Câu 44. Gọi z_1 và $z_2 = 3 + 4i$ là hai nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Tính $T = 2|z_1| - |z_2|$.

- (A) $T = 0$. (B) $T = 5$.
 (C) $T = 10$. (D) $T = 7$.

Câu 45. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2 + bz + c = 0$, ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 - 4ac < 0$). Đặt $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 - 2|z_1|^2 - 3|z_2|^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $P = \sqrt{a^2 + b^2}$. (B) $P = -\frac{c}{a}$.
 (C) $P = \frac{a}{3c}$. (D) $P = -\frac{2b}{3a}$.

Câu 46. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 8z + 25 = 0$. Khi đó, giả sử $z_1^2 = a + bi$ thì $a + b$ là

- (A) 7. (B) -7. (C) 24. (D) 31.

Câu 47. Giả sử z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- (A) 22. (B) 20. (C) 26. (D) 18.

Câu 48. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $5z^2 - 4z + 2 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1$ bằng

- (A) $\frac{2}{25}$. (B) $-\frac{8}{25}$. (C) $\frac{8}{25}$. (D) $-\frac{2}{25}$.

Câu 49. Tìm tham số m để phương trình $z^2 + (2 - m)z + 2 = 0$ có một nghiệm là $1 - i$.

- (A) $m = -2$. (B) $m = 6$.
 (C) $m = 2$. (D) $m = 4$.

Câu 50. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của biểu thức $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- (A) $T = 2\sqrt{10}$. (B) $T = 10$.
 (C) $T = \sqrt{10}$. (D) $T = 20$.

1.3. Mức độ thông hiểu

Câu 1. Gọi S là tổng tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Tính S .

- (A) $S = 6$. (B) $S = 10$.
 (C) $S = -3$. (D) $S = 7$.

Câu 2. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- (A) $T = 2\sqrt{10}$. (B) $T = \sqrt{10}$.
 (C) $T = 10$. (D) $T = 20$.

Câu 3. Biết $z = 1 - 2i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó $a + b$ bằng

- (A) 3. (B) -3. (C) 4. (D) -4.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z(1 + i)$ là đường tròn

- (A) Tâm $I(3; -1)$, $R = 3\sqrt{2}$.
 (B) Tâm $I(-3; -1)$, $R = 3$.
 (C) Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3\sqrt{2}$.
 (D) Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3$.

Câu 5. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^{2019} z_0$?

- (A) $M(-2; 1)$. (B) $M(2; 1)$.
 (C) $M(-2; -1)$. (D) $M(2; -1)$.

Câu 6. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $z^2 - 2mz + 2m^2 - 2m = 0$ có nghiệm phức mà môđun của nghiệm đó bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập hợp S bằng

- (A) 6. (B) 5. (C) 4. (D) 1.

Câu 7. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$. Tính biểu thức $T = (z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4)$.

- (A) $T = 2i$. (B) $T = 1$.
 (C) $T = -2i$. (D) $T = 0$.

Câu 8. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$, trong đó z_2 có phần ảo âm. Tìm phần ảo b của số phức $w = [(z_1 - i)(z_2 + 2i)]^{2018}$.

- (A) $b = 2^{1009}$. (B) $b = 2^{2017}$.
 (C) $b = -2^{2018}$. (D) $b = 2^{2018}$.

Câu 9. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $z^2 - (m + 4)z + m^2 + 3 = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0| = 2$. Số phần tử của tập hợp S là

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Câu 10. Trên tập số phức \mathbb{C} , gọi z_1, z_2 và z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3 - 8z^2 + 37z - 50 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

- (A) $P = 10$. (B) $P = 9$.
 (C) $P = 11$. (D) $P = 12$.

Câu 11. Biết rằng phương trình $z^2 + bz + c = 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $b + c = 0$. (B) $b + c = 2$.
(C) $b + c = 3$. (D) $b + c = 7$.

Câu 12. Có hai số phức z thỏa mãn $\frac{z+1}{z+2} - z - 4 = 0$ là z_1, z_2 . Tính $T = |z_1 - i|^2 + |z_2 - i|^2$.

- (A) $T = 10$. (B) $T = 8$.
(C) $T = 5$. (D) $T = 16$.

Câu 13. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^4 + z_2^4$ bằng

- (A) 14. (B) -7. (C) -14. (D) 7.

Câu 14. Biết phương trình $z^2 + 2017 \cdot 2018z + 2^{2018} = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 . Tính $S = |z_1| + |z_2|$

- (A) 2^{2018} . (B) 2^{2019} . (C) 2^{1009} . (D) 2^{1010} .

Câu 15. Nếu $z = i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $a + b$ bằng

- (A) -1. (B) 2. (C) -2. (D) 1.

2. Định lí Viet và ứng dụng

Câu 1. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$. Khi đó $w = z_1^2 + z_2^2 - 3z_1z_2$ là số phức có mô-đun là

- (A) 2. (B) $\sqrt{13}$. (C) $2\sqrt{13}$. (D) $\sqrt{20}$.

Câu 2. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 2 = 0$. Tính $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- (A) $T = \frac{2}{3}$. (B) $T = \frac{8}{3}$.
(C) $T = \frac{4}{3}$. (D) $T = -\frac{11}{9}$.

Câu 3. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$?

- (A) $P = -\frac{9}{4}$. (B) $P = \frac{4}{9}$.
(C) $P = \frac{9}{4}$. (D) $P = -\frac{4}{9}$.

Câu 4. Phương trình bậc hai nào dưới đây nhận hai số phức $2 - 3i$ và $2 + 3i$ làm nghiệm?

- (A) $z^2 + 4z + 13 = 0$. (B) $z^2 + 4z + 3 = 0$.

- (C) $z^2 - 4z + 13 = 0$. (D) $z^2 - 4z + 3 = 0$.

Câu 5. Biết phương trình $z^2 + bz + c = 0$, $(b, c \in \mathbb{R})$ có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $b + c = 2$. (B) $b + c = 3$.
(C) $b + c = 1$. (D) $b + c = 7$.

Câu 6. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của $|z_1| \cdot |z_2|$ bằng

- (A) 5. (B) $\frac{5}{2}$. (C) 10. (D) 20.

Câu 7. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$.

- (A) $P = 6$. (B) $P = 3$.
(C) $P = 2\sqrt{2} + 2$. (D) $P = \sqrt{2} + 4$.

Câu 8. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - z + 7 = 0$. Tính $S = |z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1|$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{27}{4}$. (C) 2. (D) $\frac{7}{2}$.

Câu 9. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1z_2 + i(z_1 + z_2)|$.

- (A) $P = 1$. (B) $P = \frac{7}{2}$.
(C) $P = \sqrt{3}$. (D) $P = \frac{5}{2}$.

Câu 10. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ với a, b là các số thực, có một nghiệm phức là $z = 1 - i$, giá trị của biểu thức $a^{10} + b$ bằng

- (A) 1026. (B) 4. (C) 1. (D) 1024.

Câu 11. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + mz + m = 0$ với m là số thực. Tìm giá trị của tham số m để biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $m = \frac{1}{2}$. (B) $m = 1$.
(C) $m = 0$. (D) $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 12. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $5z^2 - 4z + 2 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2z_2 + z_2^2z_1$ bằng

- (A) $-\frac{8}{25}$. (B) $\frac{2}{25}$. (C) $-\frac{2}{25}$. (D) $\frac{8}{25}$.

Câu 13. Biết z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Tính $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Câu 14. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $4z^2 + 4z + 5 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$.

- (A) 1. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. (D) $\frac{5}{2}$.

Câu 15. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z - i = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 - 2i|$.

- (A) $\sqrt{5}$. (B) 9. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 4.

Câu 16. Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 3 - 2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là

- (A) $z^2 + 6z - 13 = 0$. (B) $z^2 + 6z + 13 = 0$.
(C) $z^2 - 6z + 13 = 0$. (D) $z^2 - 6z - 13 = 0$.

Câu 17. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2| + |z_2^2|$ bằng

- (A) 10. (B) 20. (C) 6. (D) $6 - 8i$.

Câu 18. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$.

- (A) $T = \frac{3}{2}i$. (B) $T = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.
(C) $T = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $T = -\frac{3}{2}$.

Câu 19. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{z_1^2}{z_2} + \frac{z_2^2}{z_1}$.

- (A) $\frac{22}{5}$. (B) $-\frac{38}{5}$. (C) $-\frac{22}{5}$. (D) -12.

Câu 20. Trên tập số phức, hai số phức $z_1 = a - 3i$ và $z_2 = a + 3i, a \in \mathbb{R}$ là hai nghiệm của phương trình nào dưới đây?

- (A) $z^2 + 2az + a^2 - 9 = 0$.
(B) $z^2 + 2az + a^2 + 9 = 0$.
(C) $z^2 - 2az + a^2 - 9 = 0$.
(D) $z^2 - 2az + a^2 + 9 = 0$.

Câu 21. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 3z + 5 = 0$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w = z_1z_2 + (z_1 + z_2)i$.

- (A) Phần thực bằng 5, phần ảo bằng 3.
(B) Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 5.

(C) Phần thực bằng -5, phần ảo bằng 3.

(D) Phần thực bằng 5, phần ảo bằng -3.

Câu 22. Trong tập số phức \mathbb{C} , biết z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $(z_1 + z_2)^2$.

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Câu 23. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 10 = 0$. Khi đó giá trị của $P = z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2$ là

- (A) $P = 14$. (B) $P = -14$.
(C) $P = -6$. (D) $P = 6$.

Câu 24. Phương trình $z^2 + 3z + 9 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Tính $S = z_1z_2 + z_1 + z_2$.

- (A) -6. (B) 6. (C) 12. (D) -12.

Câu 25. Trên tập số phức, tích 4 nghiệm của phương trình $x(x^2 - 1)(x + 2) = 24$ bằng

- (A) -24. (B) -12. (C) 12. (D) 24.

Câu 26. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Khi đó, phần thực của $w = z_1^2 + z_2^2$ bằng

- (A) 6. (B) 8. (C) 16. (D) 0.

Câu 27. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 3z + 5 = 0$. Tính $|z_1 + z_2|$.

- (A) 3. (B) $\frac{3}{2}$. (C) 5. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 7z + 51i^{2008} = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = 2z_1 - z_1z_2 + 2z_2$.

- (A) $P = -37$. (B) $P = 58$.
(C) $P = -65$. (D) $P = -44$.

Câu 29. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0 (a, b \in \mathbb{R})$ có một nghiệm $z = -2 + i$. Tính $T = a + b$.

- (A) $T = 9$. (B) $T = 1$.
(C) $T = 4$. (D) $T = -1$.

Câu 30. Phương trình nào sau đây nhận hai số phức $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$ và $z_2 = 1 - \sqrt{2}i$ làm nghiệm?

- (A) $z^2 - 2z + 3 = 0$. (B) $z^2 - 2z - 3 = 0$.
(C) $z^2 + 2z + 3 = 0$. (D) $z^2 + 2z - 3 = 0$.

Câu 31. Trong mặt phẳng phức, gọi M, N là điểm biểu diễn của các số phức là nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

- (A) $MN = 4$. (B) $MN = 5$.
(C) $MN = 20$. (D) $MN = 2\sqrt{5}$.

Câu 32. Cho số phức $z = a + bi$. Phương trình nào dưới đây nhận z và \bar{z} làm nghiệm?

- (A) $z^2 - 2az + a^2b^2 = 0$.
- (B) $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.
- (C) $z^2 - 2az - a^2 - b^2 = 0$.
- (D) $z^2 + 2az + a^2 + b^2 = 0$.

Câu 33. Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó, giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là

- (A) $\frac{9}{4}$.
- (B) $-\frac{9}{4}$.
- (C) 9.
- (D) 4.

Câu 34. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1z_2 + i(z_1 + z_2)|$.

- (A) $P = 1$.
- (B) $P = \frac{7}{2}$.
- (C) $P = \sqrt{3}$.
- (D) $P = \frac{5}{2}$.

Câu 35. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ với a, b là các tham số thực nhận số phức $1 + i$ là một nghiệm. Tính $a - b$.

- (A) -2.
- (B) -4.
- (C) 4.
- (D) 0.

Câu 36. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình

$$(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) - z(9 + 2z^2) + z^2 = 0.$$

Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng

- (A) $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$.
- (B) 2.
- (C) $2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$.
- (D) $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$.

Câu 37. Biết $z_1 = 2 - i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$), gọi nghiệm còn lại là z_2 . Tìm số phức $w = bz_1 + cz_2$.

- (A) $w = 18 - i$.
- (B) $w = 18 + i$.
- (C) $w = 2 - 9i$.
- (D) $w = 2 + 9i$.

Câu 38. Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết $z_1 = w - 2 - 3i$ và $z_2 = 2w - 5$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tính $T = |z_1^2| + |z_2^2|$.

- (A) $T = 4\sqrt{13}$.
- (B) $T = 10$.
- (C) $T = 5$.
- (D) $T = 25$.

Câu 39. Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là

- (A) 9.
- (B) 4.
- (C) $\frac{9}{4}$.
- (D) $-\frac{9}{4}$.

Câu 40. Biết z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị biểu thức $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là

- (A) $\frac{3}{5}$.
- (B) $-\frac{4}{5}$.
- (C) $\frac{16}{5}$.
- (D) $\frac{6}{5}$.

3. Phương trình quy về bậc hai

Câu 1. Biết rằng phương trình $z^4 + z^3 + 2z^2 + 3z - 3 = 0$ có hai nghiệm thuần ảo. Tích của hai nghiệm đó bằng

- (A) $3i$.
- (B) -3 .
- (C) 3.
- (D) $-3i$.

Câu 2. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 + 4z + 37 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức iz_0 ?

- (A) $M_2 \left(-3; \frac{1}{2}\right)$.
- (B) $M_3 \left(3; \frac{1}{2}\right)$.
- (C) $M_4 \left(3; -\frac{1}{2}\right)$.
- (D) $M_1 \left(-3; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 3. Tổng các nghiệm phức của phương trình $z^3 + z^2 - 2 = 0$ là

- (A) 1.
- (B) -1.
- (C) $1 - i$.
- (D) $1 + i$.

Câu 4. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} = -4$ (z_2 là số phức có phần ảo âm). Khi đó $|z_1 + z_2|$ bằng

- (A) 1.
- (B) 4.
- (C) 8.
- (D) 2.

Câu 5. Cho các số phức z, ω khác 0 thỏa mãn $z + \omega \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{\omega} = \frac{6}{z + \omega}$. Khi đó $\left|\frac{z}{\omega}\right|$ bằng

- (A) 3.
- (B) $\frac{1}{3}$.
- (C) $\sqrt{3}$.
- (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 6. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2 + |z| = 0$?

- (A) 4.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 1.

Câu 7. Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $z_1, z_2 \neq 0; z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$. Tính $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (D) $2\sqrt{3}$.