# TỔNG HỢP LÝ THUYẾT

# 2023
# TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
# 2024

Biên soạn:

**LÊ MINH TÂM**

093.337.6281

leminhtam19927@gmail.com

# GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1.

## ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

CHƯƠNG 2.

## LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT

CHƯƠNG 3.

## NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

CHƯƠNG 4.

## SỐ PHỨC

# Mục lục

## Chương 01. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

## Chương 02. LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

## Chương 04. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

### Chủ đề 01. NGUYÊN HÀM



### Chủ đề 02. TÍCH PHÂN



### Chủ đề 03. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN



## Chương 04. SỐ PHỨC

Chương 01

Chủ đề 01

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

# SỰ ĐỒNG BIẾN – NGHỊCH BIẾN

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

**Định nghĩa 01.**

Giả sử $K$ là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y=f(x)$ là một hàm số xác định trên $K$, ta có hàm số $f(x)$ được gọi là :

- ***đồng biến*** (tăng) trên $K$ nếu $\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- ***nghịch biến*** (giảm) trên $K$ nếu $\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.
- Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên $K$ gọi chung là ***đơn điệu*** trên $K$.

**Định lý.**

**01**

Giả sử hàm số $f$ có đạo hàm trên khoảng $K$. Khi đó:

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng $K$ thì $f'(x)\ge 0, \forall x\in K$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng $K$ thì $f'(x)\le 0, \forall x\in K$.

**02**

Giả sử hàm số $f$ có đạo hàm trên khoảng $K$. Khi đó:

- Nếu $f'(x)>0, \forall x\in K$ thì hàm số $f$ đồng biến trên $K$.
- Nếu $f'(x)<0, \forall x\in K$ thì hàm số $f$ nghịch biến trên $K$.
- Nếu $f'(x)=0, \forall x\in K$ thì hàm số $f$ không đổi trên $K$.

*Ta có các nhận xét sau:*

**Nhận xét 01**

– Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên $D$ thì hàm số $f(x)+g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $D$. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x)-g(x)$.

**Nhận xét 02**

– Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên $D$ thì hàm số $f(x).g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $D$.

*Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên $D$.*

**Nhận xét 03**

Cho hàm số $u=u(x)$, xác định với $x\in(a;b)$ và $u(x)\in(c;d)$.

Hàm số $f\left[u(x)\right]$ cũng xác định với $x\in(a;b)$. Ta có nhận xét sau:

+ Giả sử hàm số $u=u(x)$ đồng biến với $x\in(a;b)$. Khi đó, hàm số $f\left[u(x)\right]$ đồng biến với $x\in(a;b)\Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u\in(c;d)$.

+ Giả sử hàm số $u=u(x)$ nghịch biến với $x\in(a;b)$. Khi đó, hàm số $f\left[u(x)\right]$ nghịch biến với $x\in(a;b)\Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u\in(c;d)$.

**Định lý.**

Giả sử hàm số $f$ có đạo hàm trên khoảng $K$. Khi đó:

- Nếu $f'(x)\ge 0,\forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc $K$ thì hàm số $f$ ***đồng biến*** trên $K$.
- Nếu $f'(x)\le 0,\forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc $K$ thì hàm số $f$ ***nghịch biến*** trên $K$.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 1.1.* Xét tính đơn điệu của hàm số (biết đồ thị, bbt)

❶ Đề cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ hoặc Bảng biến thiên $\rightarrow$ nhìn hướng đi của đồ thị:

☑ Khoảng mà đồ thị có hướng "đi lên" $\rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng đó.

☑ Khoảng mà đồ thị có hướng "đi xuống" $\rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

❷ Đề cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ $\rightarrow$ làm theo các bước sau:

☑ **Bước 01.** Tìm các giao điểm của đồ thị $f'(x)$ với $Ox$.

☑ **Bước 02.** Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ bằng cách nhìn:

↳ Phần trên $Ox$ mang dấu $+$. ↳ Phần dưới $Ox$ mang dấu $-$.

☑ **Bước 03.** Từ bảng xét dấu ta tìm được chiều "lên – xuống" của $f(x)$.

### *Dạng 1.2.* Hàm số bậc ba đơn điệu trên khoảng k.

❶ **Tìm tham số $m$ để hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đơn điệu trên tập xác định**

☑ **Bước 01.** Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Tính đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$.

☑ **Bước 02.** Ghi điều kiện để hàm đơn điệu, chẳng hạn:

Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}>0 \\ \Delta_{y'}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\le 0\end{cases} \Rightarrow m?$

Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}<0 \\ \Delta_{y'}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac\le 0\end{cases} \Rightarrow m$ ?

*Lưu ý:* Dấu của tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$.

- $\boxed{f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0\end{cases}}$.
- $\boxed{f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0\end{cases}}$.

❷ **Tìm tham số $m$ để hàm số bậc ba đơn điệu trên miền $D$ cho trước.**

❖ ***Phương pháp 1.*** (Khi $f'(x)=0$ nhẩm được nghiệm).

☑ **Bước 01.** Tính $f'(x)$.

☑ **Bước 02.** Giải $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2\end{array}\right.$.

☑ **Bước 03.** Lập bảng xét dấu, xác định các khoảng đơn điệu của hàm số.

☑ **Bước 04.** Từ bảng xét dấu, giả sử điều kiện để hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến theo yêu cầu bài toán) là $D$.

☑ **Bước 05.** Để hàm số đơn điệu trên $K$ là $K\subset D$.

❖ ***Phương pháp 2.*** (Khi $f'(x)=0$ không nhẩm được nghiệm).

☑ **Bước 01.** Ghi điều kiện để $y=f(x;m)$ đơn điệu trên D. Chẳng hạn:

Đề yêu cầu $y=f(x;m)$ đồng biến trên $D\Rightarrow y'=f'(x;m)\ge 0$.

Đề yêu cầu $y=f(x;m)$ nghịch biến trên $D\Rightarrow y'=f'(x;m)\le 0$.

☑ **Bước 02.** Cô lập $m$ ra khỏi biến số và đặt vế còn lại là $g(x)$ được: $\left[\begin{array}{l} m \ge g(x) \\ m \le g(x) \end{array}\right.$.

☑ **Bước 03.** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên $D$.

☑ **Bước 04.** Dựa vào bảng biến thiên kết luận: $\left[\begin{array}{l} \text{Khi } m \ge g(x) \Rightarrow m \ge \max\limits_{D} g(x) \\ \text{Khi } m \le g(x) \Rightarrow m \le \min\limits_{D} g(x) \end{array}\right.$.

## *Dạng 1.3.* Hàm số phân thức đơn điệu trên khoảng k.

❶ **Tìm tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định**

☑ **Bước 01.** Tính $f'(x) = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

☑ **Bước 02.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

☞ Hàm số ***đồng biến*** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2} > 0 \Leftrightarrow ad-cb > 0$

☞ Hàm số ***nghịch biến*** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2} < 0 \Leftrightarrow ad-cb < 0$.

❷ **Tìm tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định**

☑ **Bước 01.** Điều kiện xác định $cx+d \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -{}^{d}\!/_{c}$.

☑ **Bước 02.** Tính $f'(x) = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

☑ **Bước 03.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

☞ Hàm số ***đồng biến*** trên $(a;b) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-cb > 0 \\ -{}^{d}\!/_{c} \notin (m;n) \end{cases}$ với $-{}^{d}\!/_{c}$ chứa tham số $m$.

☞ Hàm số ***nghịch biến*** trên $(a;b) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-cb < 0 \\ -{}^{d}\!/_{c} \notin (m;n) \end{cases}$ với $-{}^{d}\!/_{c}$ chứa tham số $m$.

## *Dạng 1.4.* Hàm hợp y=f(u(x)).

☑ **Bước 01.** Tính $y' = u' \cdot f'(u) \to y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \ (*) \end{array}\right.$.

☑ **Bước 02.** Để giải $(*)$ ta tìm $f'(x) = 0$ (đồ thị cắt trục hoành).

Giả sử $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{array}\right. \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = a \\ \vdots \\ u = b \end{array}\right. \to$ nghiệm của $(*)$.

☑ **Bước 03.** Lập bảng xét dấu của $y' = u' \cdot f'(u) \Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

### *Dạng 1.5.* Hàm hợp y=g(x)+h(x).

☑ **Bước 01.** Tính $y'=f'(x)\pm h'(x)\rightarrow y'=0\Leftrightarrow f'(x)=\mp h'(x)\ \ (*)$.

☑ **Bước 02.** Giải $(*)$ bằng cách vẽ $h'(x)$ vào hệ trục tọa độ và xét các điểm mà $f'$ cắt $h'$

Sau khi tìm được các nghiệm ta lập bảng xét dấu của $y'=f'(x)\pm h'(x)$.

☑ **Bước 03.** Từ bảng xét dấu của $y'=f'(x)\pm h'(x)\Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

### *Dạng 1.6.* Ứng dụng phương pháp hàm số.

☑ Nếu $f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=m$ nếu có nghiệm chỉ có duy nhất 1 nghiệm trên $(a;b)$;

☑ Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì phương trình $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$ trên $(a;b)$.

☑ Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì bất phương trình $f(u)<f(v)\Leftrightarrow u<v$ .

☑ Nếu $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì bất phương trình $f(u)<f(v)\Leftrightarrow u>v$ .

Chương 01

Chủ đề 02

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

# CỰC TRỊ

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

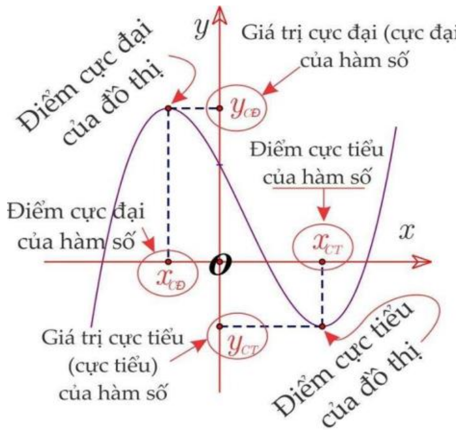
### 1. CÁC ĐỊNH NGHĨA – ĐỊNH LÝ.

**Định nghĩa 01.**

Giả sử hàm số $f$ xác định trên tập $K$ và $x_0 \in K$. Ta nói:

- $x_0$ là *điểm cực tiểu* của hàm số $f$ nếu tồn tại $(a;b)$ chứa $x_0$ sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm $f$.
- $x_0$ là *điểm cực đại* của hàm số $f$ nếu tồn tại $(a;b)$ chứa $x_0$ sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm $f$.

| *Tên gọi* | *Ký hiệu* |
|---|---|
| Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là *điểm cực trị.* | $x_0$ |
| Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là *cực trị (giá trị cực trị).* | $y_0$ |
| Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là *điểm cực trị của hàm số.* | $M(x_0; f(x_0))$ |




**Định lý.**

| | |
|---|---|
| **01** | Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x_0$.<br>Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0$ thì $f'(x_0) = 0$. |
| **02** | Giả sử hàm số $f$ đạt cực trị tại điểm $x_0$.<br>Khi đó, nếu hàm số $f$ có đạo hàm tại điểm $x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.<br>❒ Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \longrightarrow x_0$ là một điểm cực đại của hàm $f(x)$.<br>❒ Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) > 0 & \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \longrightarrow x_0$ là một điểm cực tiểu của hàm $f(x)$. |

| $x$ | $x_o - h$ | | $x_o$ | | $x_o + h$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\searrow$ | $f(x_o)$ $CT$ | $\nearrow$ | |

| $x$ | $x_o - h$ | | $x_o$ | | $x_o + h$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | $f(x_o)$ CĐ | $\searrow$ | |

**03**

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$.

Khi đó:

❒ Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$ thì hàm số $f$ đạt cực đại tại $x_0$.

❒ Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ thì hàm số $f$ đạt cực tiểu tại $x_0$.

📖 ***Chú ý:***

① Đạo hàm $f'(x)$ *có thể* bằng $0$ tại điểm $x_0$ nhưng hàm số $f$ không đạt cực trị tại điểm $x_0$.

② Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.

③ Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng $0$ hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

*Từ **định lí 03**, ta có một quy tắc khác để tìm **cực trị** của hàm số*

☑ **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.

☑ **Bước 2:** Tìm các nghiệm $x_i$ $(i = 1; 2; ...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

☑ **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

* Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số $f$ đạt cực đại tại điểm $x_i$.
* Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số $f$ đạt cực tiểu tại điểm $x_i$.

## 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP.

### 2.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba.

#### 2.1.1. Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

✍ Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$. Có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c\ (a \neq 0)$.

| Điều kiện | Hướng giải quyết |
|---|---|
| *Có **hai** cực trị* | $b^2 - 3ac > 0$ |
| ***Không có** cực trị*<br>(hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$). | $b^2 - 3ac \leq 0$ |
| *Có hai cực trị **trái dấu*** | $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt ***trái dấu***<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ac < 0 \end{cases}$. |
| *Có hai cực trị **cùng dấu*** | $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt ***cùng dấu***<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$. |

| | | |
|---|---|---|
| *Có hai cực trị **cùng dấu dương*** | | $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm ***dương*** phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ S=x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0\\ P=x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ ab<0\\ ac>0\end{cases}.$ |
| *Có hai cực trị **cùng dấu âm*** | | $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm ***âm*** phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ S=x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}<0\\ P=x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ ab>0\\ ac>0\end{cases}.$ |
| *Có hai cực trị $x_1;x_2$ thỏa* | $x_1<\alpha<x_2$ | $\Leftrightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)<0 \Leftrightarrow x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2<0.$ |
| | $x_1<x_2<\alpha$ | $\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\\ x_1+x_2<2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2>0\\ x_1+x_2<2\alpha\end{cases}.$ |
| | $\alpha<x_1<x_2$ | $\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\\ x_1+x_2>2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2>0\\ x_1+x_2>2\alpha\end{cases}.$ |

### 2.1.1. Cực trị thỏa mãn điều kiện với đường thẳng.

#### 2.1.2.1. Cực trị nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng.

| | |
|---|---|
| ***Tổng quát:*** VTTĐ giữa 2 điểm với đường thẳng | Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0.$<br>☑ Nếu $(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)<0$ thì hai điểm $A$, $B$ nằm khác phía so với đường thẳng $\Delta$.<br>☑ Nếu $(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)>0$ thì hai điểm $A$, $B$ nằm cùng phía so với đường thẳng $\Delta$. |
| ***Đặc biệt:*** | Các điểm cực trị của đồ thị nằm ***cùng phía đối với trục Oy***<br>$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu<br>$\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu |
| | Các điểm cực trị của đồ thị nằm ***khác phía đối với trục Oy***<br>$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu<br>$\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu |
| | Các điểm cực trị của đồ thị nằm ***cùng phía đối với trục Ox***<br>$\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD}.y_{CT}>0$.<br>① Cùng về phía trên đối với trục $Ox$.<br>$\Leftrightarrow$ $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\begin{cases}y_{CD}.y_{CT}>0\\ y_{CD}+y_{CT}>0\end{cases}$<br>② Cùng về phía dưới đối với trục $Ox$. |

| | |
|---|---|
| | $\Leftrightarrow\ y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT}>0 \\ y_{CD}+y_{CT}<0 \end{cases}$ |
| | Các điểm cực trị của đồ thị nằm ***khác phía đối với trục Ox***<br>$\Leftrightarrow\ y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $y_{CD}.y_{CT}<0$<br>Hoặc<br>$\Leftrightarrow\ f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt (*khi nhẩm được nghiệm*). |

**2.1.2.2. Phương trình đường thẳng qua các hai cực trị.**

$$\boxed{g(x)=\left(\frac{2c}{3}-\frac{2b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}}\ \textbf{\textit{hoặc}}\ \boxed{g(x)=y-\frac{y'.y''}{18a}.}\ \textbf{\textit{hoặc}}\ \boxed{g(x)=y-\frac{y'.y''}{3y'''}}$$

**2.1.2.3. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là.**

$$AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}}\ \text{với}\ e=\frac{b^2-3ac}{9a}$$

## 2.2. Cực trị của hàm đa thức bậc bốn (trùng phương).

### 2.2.1. Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

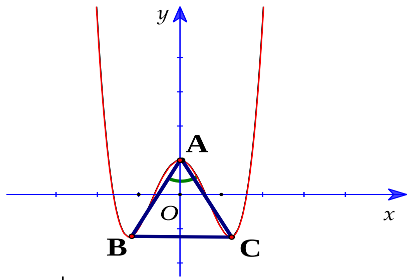
Xét hàm số bậc bốn $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$.

| Điều kiện | Tổng quát | Cụ thể | |
|---|---|---|---|
| *Có **một** điểm cực trị (một cực trị)* | $ab\geq 0$ | Đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu | $\Leftrightarrow\begin{cases} a>0 \\ b\geq 0 \end{cases}$ |
| | | Đúng một cực trị và cực trị là cực đại | $\Leftrightarrow\begin{cases} a<0 \\ b\leq 0 \end{cases}$ |
| *Có **ba** điểm cực trị (hai cực trị).* | $ab<0$ | Hai cực tiểu và một cực đại | $\Leftrightarrow\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$ |
| | | Một cực tiểu và hai cực đại | $\Leftrightarrow\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$ |

### 2.2.2. Cực trị thỏa mãn điều kiện hình học.

Giả sử hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị: $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành tam giác $ABC$ thỏa mãn dữ kiện: $ab<0$. Đặt $BAC=\alpha$.

Tổng quát: $\boxed{\cot^2\frac{\alpha}{2}=\frac{-b^3}{8a}}$




| DỮ KIỆN CỤ THỂ | | CÔNG THỨC |
|---|---|---|
| **Tính chất (vuông/đều/nhọn)** | $\Delta ABC$ vuông cân tại $A$. | $b^3=-8a$. |
| | $\Delta ABC$ đều. | $b^3=-24a$. |
| | $\Delta ABC$ có 3 góc nhọn. | $b(8a+b^3)>0$. |
| **Diện tích** | $\Delta ABC$ có $S_{\Delta ABC}=S_0$. | $32a^3(S_0)^2+b^5=0$. |
| | $\Delta ABC$ có $\max(S_0)$. | $S_0=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$. |
| **Thỏa độ dài cạnh** | $\Delta ABC$ có $BC=m_0$. | $am_0^2+2b=0$. |
| | $\Delta ABC$ có $AB=AC=n_0$. | $16a^2n_0^2-b^4+8ab=0$. |
| | $\Delta ABC$ có $BC=kAB=kAC$. | $b^3.k^2-8a(k^2-4)=0$ |
| **Trọng/trực tâm** | $\Delta ABC$ có trọng tâm $O$. | $b^2=6ac$. |
| | $\Delta ABC$ có trực tâm $O$. | $b^3+8a-4ac=0$. |
| **Nội/ngoại tiếp đường tròn** | $\Delta ABC$ có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC}=r_0$. | $r=\frac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$ |
| | $\Delta ABC$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC}=R$. | $R=\frac{b^3-8a}{8\lvert a\rvert b}$. |
| | $\Delta ABC$ có $O$ là tâm đường tròn nội tiếp | $b^3-8a-4abc=0$. |
| | $\Delta ABC$ có $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp | $b^3-8a-8abc=0$. |
| Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ là: $x^2+y^2-\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}\right)=0$ | | |
| **Liên quan trục tọa độ** | $\Delta ABC$ có cực trị $B,C\in Ox$ | $b^2=4ac$ |
| | $\Delta ABC$ có điểm cực trị cách đều $Ox$. | $b^2=8ac$. |
| | Trục hoành chia tam giác $ABC$ thành hai phần có diện tích bằng nhau | $b^2=4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$. |
| **Liên quan tứ giác** | $\Delta ABC$ cùng gốc $O$ tạo thành hình thoi | $b^2=2ac$. |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

## *Dạng 2.1.* Tìm cực trị của hàm số y=f(x) khi cho BBT hoặc Đồ Thị

❶ Đề cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ hoặc Bảng biến thiên $\to$ nhìn vị trí "cù chỏ":

- ☑ Thấy "đi lên" rồi "đi xuống" $\to$ "cù chỏ" là cực đại.
- ☑ Thấy "đi xuống" rồi "đi lên" $\to$ "cù chỏ" là cực tiểu.

❷ Đề cho bảng xét dấu $f'(x) \to$ nếu đề hỏi:

- ☑ Số điểm cực trị $\to$ đếm số lần $f'(x)$ đổi dấu ( $f'(x)$ đổi dấu bao nhiêu lần thì $f(x)$ có bấy nhiêu cực trị).
- ☑ Số điểm cực đại/cực tiểu $\to$ từ bảng xét dấu $f'(x)$ "phác họa" đường đi $f(x)$.

| *Tên gọi* | *Ký hiệu* |
|---|---|
| ↳ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là ***điểm cực trị***. | $x_0$ |
| ↳ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là ***cực trị (giá trị cực trị)***. | $y_0$ |
| ↳ Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số***. | $M(x_0;f(x_0))$ |

Khi đó ta có hệ quả:

| Khoảng cách giữa: | *Công thức* |
|---|---|
| ① Hai điểm cực trị của hàm số: | $\lvert x_2-x_1\rvert$ |
| ② Hai cực trị của hàm số: | $\lvert y_2-y_1\rvert$ |
| ③ Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: | $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ |

## *Dạng 2.2.* Tìm cực trị của hàm số tường minh

### ❒ *Quy tắc 01:*

- ☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định của hàm số.
- ☑ **Bước 02.** Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
- ☑ **Bước 03.** Lập bảng biến thiên.
- ☑ **Bước 04.** Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

### ❒ *Quy tắc 02:*

- ☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định của hàm số.
- ☑ **Bước 02.** Tính $f'(x)$. Giải $f'(x)=0$ và ký hiệu $x_i$ $(i=1,2,3,...)$ là các nghiệm của nó.
- ☑ **Bước 03.** Tính $f''(x) \to f''(x_i)$.
- ☑ **Bước 04.** Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm $x_i$.
  - ↳ $f''(x_i)>0 \to x_i$ là điểm cực tiểu.
  - ↳ $f''(x_i)<0 \to x_i$ là điểm cực đại.

## *Dạng 2.3.* Tìm m để hàm số y=f(x) đạt cực trị tại $x_0$

*Bài toán:* Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f'(x)=0$ đạt cực trị tại $x=x_0$.

- ☑ **Bước 01.** Tính $f'(x) \to f''(x)$.
- ☑ **Bước 02.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

❒ Hàm số đạt cực đại tại $x=x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)<0 \end{cases}$.

❒ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$.

## *Dạng 2.4.* Tìm m để hàm số y=f(x) có n cực trị.

☑ **Hàm bậc 3** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$:

| | |
|---|---|
| Có 2 điểm cực trị | $b^2 - 3ac > 0$ |
| Không có điểm cực trị | $b^2 - 3ac \le 0$ |

☑ **Hàm bậc 4 (trùng phương)** $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Có 3 điểm cực trị | $ab < 0$ | Có 1 Đại – 2 Tiểu | $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ |
| | | Có 2 Đại – 1 Tiểu | $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ |
| Có 1 điểm cực trị | $ab \ge 0$ | Chỉ có Đại | $\begin{cases} a < 0 \\ b \le 0 \end{cases}$ |
| | | Chỉ có Tiểu | $\begin{cases} a > 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$ |

## *Dạng 2.5.* Đường thẳng qua hai điểm cực trị.

***Bài toán:*** Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

☑ Sử dụng một trong các cách sau:

① $g(x) = \left(\dfrac{2c}{3} - \dfrac{2b^2}{9a}\right)x + d - \dfrac{bc}{9a}$.

② $g(x) = y - \dfrac{y'.y''}{18a} = y - \dfrac{y'.y''}{3y'''}$.

③ Dùng phép chia đa thức: đề chia đạo → lấy dư.

***Bài toán:*** Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$:

☑ Sử dụng tính chất: Nếu $x_0$ là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương ứng của hàm số là $y_0 = \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)} = \dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$ (đạo tử chia đạo mẫu).

## *Dạng 2.6.* Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện với đường thẳng.

❍ ***Vị trí tương đối:***

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$.

Xét biểu thức $T=(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)$. Khi đó:

☑ Nếu $T<0$ thì hai điểm $A,\ B$ nằm khác phía so với đường thẳng $\Delta$.

☑ Nếu $T>0$ thì hai điểm $A,\ B$ nằm cùng phía so với đường thẳng $\Delta$.

❍ ***Đặc biệt***

① Các điểm cực trị của đồ thị nằm ***cùng phía đối với trục Oy***

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có *hai nghiệm* phân biệt *cùng dấu* .

② Các điểm cực trị của đồ thị nằm ***khác phía đối với trục Oy***

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có *hai nghiệm* phân biệt *trái dấu*.

③ Các điểm cực trị của đồ thị nằm ***cùng phía đối với trục Ox***

$\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD}.y_{CT}>0$.

☑ Cùng ***phía trên*** đối với trục $Ox \Leftrightarrow$ $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT}>0 \\ y_{CD}+y_{CT}>0 \end{cases}$

☑ Cùng ***phía dưới*** đối với trục $Ox \Leftrightarrow$ $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT}>0 \\ y_{CD}+y_{CT}<0 \end{cases}$.

④ Các điểm cực trị của đồ thị nằm ***khác phía đối với trục Ox***

$\Leftrightarrow$ $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $y_{CD}.y_{CT}<0$, hoặc

$\Leftrightarrow$ $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt (*khi nhẩm được nghiệm*).

❍ ***Bài toán:*** Hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d$.

☑ **Bước 01.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m\in D_1$.

☑ **Bước 02.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị $A,\ B.$ Có 2 trường hợp thường gặp:

↳ ***Trường hợp 1:*** $y'=0$ có nghiệm đẹp $x_1,\ x_2,$ tức có $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$.

↳ ***Trường hợp 2:*** $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là $\Delta$ và lấy $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)\in\Delta$.

☑ **Bước 03.** Gọi $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB.$

Do $A,\ B$ đối xứng qua $d$ nên thỏa hệ $\begin{cases} \Delta\perp d \\ I\in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d}=0 \\ I\in d \end{cases} \Rightarrow m\in D_2.$

☑ **Bước 04.** Kết luận $m=D_1\cap D_2$.

❍ ***Bài toán:*** Hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $d$.

☑ **Bước 01.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m\in D_1$.

☑ **Bước 02.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị $A,\ B.$ Có 2 trường hợp thường gặp:

↳ ***Trường hợp 1:*** $y'=0$ có nghiệm đẹp $x_1,\ x_2,$ tức có $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$.

↳ ***Trường hợp 2:*** $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là $\Delta$ và lấy $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)\in\Delta$.

☑ **Bước 03.** Do $A,\ B$ cách đều đường thẳng $d$ nên $d(A;d)=d(B;d)\Rightarrow m\in D_2$.

☑ **Bước 04.** Kết luận $m=D_1\cap D_2$.

## Dạng 2.7. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện $x_1,x_2$.

❍ **Bài toán:** Hàm số có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ thỏa điều kiện:

☑ **Bước 01.** Tính $y'$.

☑ **Bước 02.** Tìm điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ $(1)$.

☑ **Bước 03.** Áp dụng định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$ $(*)$.

☑ **Bước 04.** Biến đổi ycbt về dạng $S;P \to$ thay $(*)$ vào ycbt giải tìm $m$ $(2)$.

☑ **Bước 05.** Từ $(1);(2) \to m \in ?$

## Dạng 2.8. Cực trị hàm trùng phương.

| Điều kiện | Tổng quát | Cụ thể | |
|---|---|---|---|
| Có **một** điểm cực trị (một cực trị) | $ab \ge 0$ | Đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu | $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$ |
| | | Đúng một cực trị và cực trị là cực đại | $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \le 0 \end{cases}$ |
| Có **ba** điểm cực trị (hai cực trị). | $ab < 0$ | Hai cực tiểu và một cực đại | $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ |
| | | Một cực tiểu và hai cực đại | $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ |

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành tam giác $ABC$ thỏa mãn dữ kiện: $ab < 0$ và có $AB = AC = \sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2} - \dfrac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

☑ Đặt $BAC = \alpha$, luôn có: $8a(1+\cos\alpha) + b^3(1-\cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$ và $S^2 = -\dfrac{b^5}{32a^3}$

☑ Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

☑ Phương trình đường tròn đi qua $A,B,C: x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0$, với $n = \dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \left|\dfrac{b^3 - 8a}{8ab}\right|$

☑ Xem thêm các dạng ở mục **"2.2.2. Cực trị thỏa mãn điều kiện hình học".**

## *Dạng 2.9.* Cực trị hàm hợp y=f(u(x)).

❍ ***Bài toán:*** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ *(đề có thể ra bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của* $f\left(x\right),f'\left(x\right)$*).*
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(u\right)$.

### CÁCH 01.

☑ **Bước 01.** Tính $y'=u'.f'\left(u\right)$.

☑ **Bước 02.** Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'=0\\f'\left(u\right)=0\end{array}\right.$

☑ **Bước 03.** Giải lần lượt $u'=0$ và $f'\left(u\right)=0$ thông thường giải $u'=0$ sẽ đơn giản,

Để giải $f'\left(u\right)=0$, ta tìm $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\\vdots\\x=b\end{array}\right.$ (đồ thị cắt $Ox$) $\to f'\left(u\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=a\\\vdots\\u=b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=?\\\vdots\\x=?\end{array}\right.$.

☑ **Bước 04.** Lập bảng xét dấu của $y'=u'.f'\left(u\right)$.

☑ **Bước 05.** Từ bảng xét dấu kết luận yêu cầu bài toán.

### CÁCH 02.

☑ **Bước 01.** Tính $y'=u'.f'\left(u\right)$.

☑ **Bước 02.** Từ đề ra ta tìm được $f'\left(x\right)$, giả sử đề ra:

① Bảng xét dấu của $f'\left(x\right)\to$ nhìn những vị trí $f'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\\vdots\\x=b\end{array}\right.\Rightarrow f'\left(x\right)=\left(x-a\right)...\left(x-b\right)$.

② Đồ thị của $f'\left(x\right)\to$ nhìn những vị trí đồ thị cắt $Ox\to\left[\begin{array}{l}x=a\\\vdots\\x=b\end{array}\right.\Rightarrow f'\left(x\right)=\left(x-a\right)...\left(x-b\right)$.

③ Đồ thị của $f\left(x\right)\to$ nhìn những vị trí "cù chỏ" $\to\left[\begin{array}{l}x=a\\\vdots\\x=b\end{array}\right.\Rightarrow f'\left(x\right)=\left(x-a\right)...\left(x-b\right)$.

☑ **Bước 03.** Từ $f'\left(x\right)\to f'\left(u\right)$ bằng cách chỗ nào có $x$ thay bằng $u$.

☑ **Bước 04.** Ta có được $y'=u'\left(x\right).f'\left(u\left(x\right)\right)\to$ lập bảng xét dấu của hàm này.

☑ **Bước 05.** Từ bảng xét dấu kết luận yêu cầu bài toán.

Chương 01

Chủ đề 03

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

# GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### Định nghĩa.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên tập $D$.

❒ Số $M$ gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên $D$ nếu: $\begin{cases} f\left(x\right)\le M,\forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f\left(x_0\right)=M \end{cases}$.

***Kí hiệu:*** $M=\max\limits_{x\in D} f\left(x\right)$.

❒ Số $m$ gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên $D$ nếu: $\begin{cases} f\left(x\right)\ge m,\forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f\left(x_0\right)=m \end{cases}$.

***Kí hiệu:*** $m=\min\limits_{x\in D} f\left(x\right)$.

**Chú ý**

– Nếu $y=f\left(x\right)$ *đồng biến* trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \\ \max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \end{cases}$.

– Nếu $y=f\left(x\right)$ *nghịch biến* trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x)=f\left(b\right) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f\left(a\right) \end{cases}$.

– Hàm số liên tục trên một khoảng ***có thể*** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 3.1.* Max – Min hàm số cho trước đoạn [a;b].

☑ **Bước 01.** Tính $f'\left(x\right)\to f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ \vdots \\ x=x_n \end{array}\right.$, nghiệm nào $\in\left[a;b\right]\to$ nhận và tất cả các điểm $\alpha_i\in\left(a;b\right)$ làm cho $f'\left(x\right)$ không xác định.

☑ **Bước 02.** Tính $f\left(a\right),f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(b\right)$.

☑ **Bước 03.** Khi đó: ➯ $\max\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=\max\left\{f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$.

➯ $\min\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=\min\left\{f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$.

☞ Nếu $y=f\left(x\right)$:

*đồng biến* trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \\ \max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \end{cases}$. *nghịch biến* trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x)=f\left(b\right) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f\left(a\right) \end{cases}$.

## *Dạng 3.2.* Max – Min hàm số cho trước đồ thị hoặc BBT.

☑ **Bước 01.** Xác định chính xác đoạn cần xét:

☞ Nếu đề ra đồ thị thì xác định trên trục $Ox$ → đoạn không cần xét gạch bỏ.

☞ Nếu đề ra BBT thì xác định trên hàng $x$ → đoạn không cần xét gạch bỏ.

☑ **Bước 02.** Tra các vị trí cao nhất và thấp nhất → kết luận $\max\limits_{[a,b]} f(x); \min\limits_{[a,b]} f(x)$.

## *Dạng 3.3.* Max – min trên khoảng (a;b).

☑ **Bước 01.** Tính $f'(x) \to f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{array}\right.$, nghiệm nào $\in [a;b] \to$ nhận và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

☑ **Bước 02.** Tính $A = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

☑ **Bước 03.** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m = \min\limits_{(a;b)} f(x)$.

*Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

## *Dạng 3.4.* Max – min hàm vô tỷ.

☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định $D = ?$, khi đó sẽ xét max – min trên $D = ?$ nếu đề không yêu cầu xét trên đâu.

☑ **Bước 02.** Tính $f'(x) \to f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{array}\right.$, nghiệm nào $\in [a;b] \to$ nhận.

☑ **Bước 03.** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m = \min\limits_{(a;b)} f(x)$.

## *Dạng 3.5.* Max – min hàm lượng giác.

❍ Lưu ý:

① $\begin{cases} -1 \le \sin X \le 1 \\ -1 \le \cos X \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \sin^2 X \le 1 \\ 0 \le \cos^2 X \le 1 \end{cases}$.

② Đổi biến $\begin{cases} t = \sin X \\ t = \cos X \end{cases} \Rightarrow t \in [-1;1] \to f(t)$.

③ Dùng điều kiện để phương trình $a\sin X \pm b\cos X = c$ có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$.

## Dạng 3.6. Max – min hàm trị tuyệt đối.

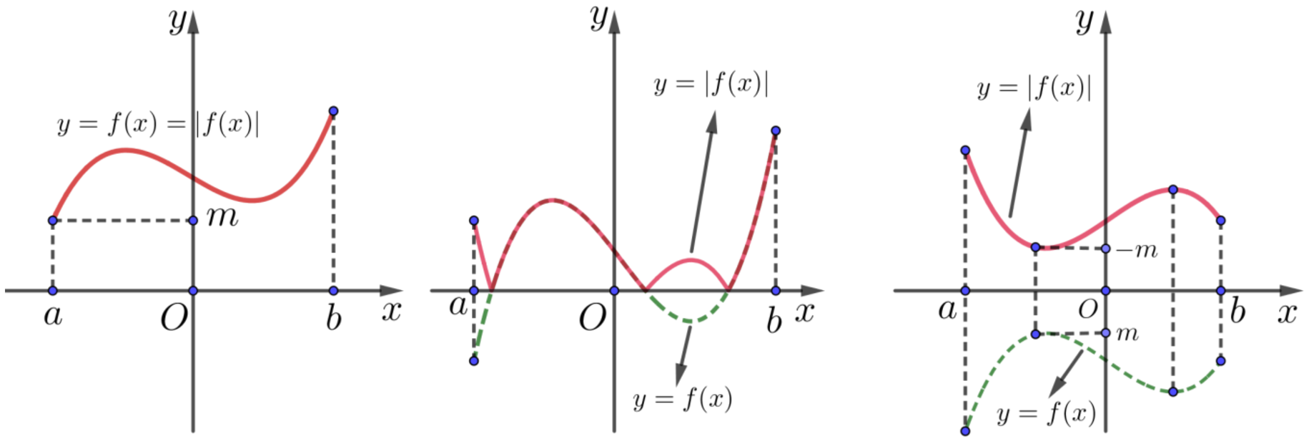
***Bài toán:*** Cho hàm số $y=f(x;m)$ liên tục trên $D$. Tìm $\max\limits_D\left|f(x)\right|$ hoặc $\min\limits_D\left|f(x)\right|$.

***Các tính chất quan trọng:***

① Giả sử $y=f(x;m)$ xác định trên $D$ và tồn tại $\begin{cases} m=\min\limits_D f(x) \\ M=\max\limits_D f(x) \end{cases}$. Khi đó

☑ $\max\limits_D\left|f(x)\right|=\max\limits_D\left\{|m|;|M|\right\}$.

☑ $\min\limits_D\left|f(x)\right|=\begin{cases} m & \text{khi } m>0 \\ 0 & \text{khi } m\le 0\le M \\ -M & \text{khi } M<0 \end{cases}$.




② Nếu $\begin{cases} \max\limits_D\left|f(x)\right|=M \\ \min\limits_D\left|f(x)\right|=m \end{cases}$ thì $\begin{cases} M\ge\left|f(x)\right|, \forall x\in D \\ m\le\left|f(x)\right|, \forall x\in D \end{cases}$.

③ $|x|+|y|\ge|x+y|$, dấu "=" xảy ra khi $xy\ge 0$ *(mục tiêu để khử biến).*

***Bên cạnh đó ta có các bước làm như sau:***

☑ **Bước 01.** Tính $f'(x)$ và lập bảng biến thiên trên đoạn $[a;b]$.

☑ **Bước 02.** Biện luận $\begin{cases} m=\min\limits_{[a;b]} f(x)\ge 0 \\ M=\max\limits_{[a;b]} f(x)\le 0 \end{cases}$, từ đó kết luận $M=\max\limits_{[a;b]}\left|f(x)\right|$.

☑ **Bước 03.** Kết luận $m$.

Chương 01
Chủ đề 04

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

# TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### Định nghĩa tiệm cận ngang.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn $(a;+\infty);(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$.

Đường thẳng $y=y_0$ là đường *tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$. ② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$.

### Định nghĩa tiệm cận đứng.

Đường thẳng $y=y_0$ là đường *tiệm cận đứng* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

① $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$. ② $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$.

③ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$. ④ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$.

**Nhận xét**

Với đồ thị hàm phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$ luôn có TCN $y=\dfrac{a}{c}$ và TCĐ $x=-\dfrac{d}{c}$.

*Chú ý:*

① Hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ac\neq 0$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

② Hàm $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là hàm đa thức, gọi bậc $f(x), g(x)$ lần lượt là $p;q$. Khi đó:

- Nếu $p<q$ thì có tiệm cận ngang duy nhất $y=0$.
- Nếu $p=q$ thì có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{b}$ với $a;b$ là hệ số của lũy thừa cao nhất tử và mẫu.
- Nếu $p>q$ thì không có tiệm cận ngang.

③ $x=x_0$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x_0)=0;\ f(x_0)\neq 0 \\ \begin{cases} g(x_0)=f(x_0)=0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty \end{cases}\end{array}\right.$.

④ Dùng CASIO để tìm TCĐ hoặc TCN của hàm số qua CASIO, ta sử dụng CALC trên máy.

| Giới hạn | Trên máy tính |
|---|---|
| $x\to x_o^+$ | CALC $x_o+10^{-10}$ |
| $x\to x_o^-$ | CALC $x_o-10^{-10}$ |
| $x\to+\infty$ | CALC $10^{10}$ |
| $x\to-\infty$ | CALC $-10^{10}$ |

## *Dạng 4.1.* Lý thuyết về đường tiệm cận.

- Đường thẳng $y = y_0$ là đường ***tiệm cận ngang*** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

  ① $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$. ② $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.

- Đường thẳng $y = y_0$ là đường ***tiệm cận đứng*** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

  ① $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$. ② $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

  ③ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$. ④ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

## *Dạng 4.2.* Tìm đường tiệm cận từ đồ thị hoặc bbt.

- Đề cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ $\to$ nhìn đường thẳng mà đồ thị không cắt.
- Đề cho BBT $\to$ nhìn theo những vị trí sau:

☑ Hai vị trí $-\infty$ và $+\infty$ (trên hàng $x$) gióng xuống hàng $y$ nếu hữu hạn thì đó là TCN.

☑ Vị trí $x_0$ mà $y$ có "2 gạch" $\to$ ta xem thử tại $x_0^+;x_0^-$ thì $y$ có chứa $\infty$ thì đó là TCĐ. (*chỉ cần một trong hai vị trí hoặc cả hai vị trí $x_0^+;x_0^-$ làm cho $y$ có chứa $\infty$ thì đó là TCĐ*).

## *Dạng 4.3.* Tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số tường minh.

### 1. *Các bước tìm Tiệm cận ngang:*

☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định của $y = f(x)$. Giả sử $x \in (a;b)$.

① Nếu $a;b$ hữu hạn $\to$ ĐTHS không có Tiệm cận ngang.

② Nếu $a/b$ là vô cùng $\to$ Bước 2.

☑ **Bước 02.** Tính $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_2 \end{cases}$ $(*)$.

☑ **Bước 03.** Kết luận:

***Trường hợp 1.*** Nếu $y_1 = y_2$ (hữu hạn) $\to$ Có 1 tiệm cận ngang.

***Trường hợp 2.*** Nếu $y_1 \neq y_2$ (hữu hạn) $\to$ Có 2 tiệm cận ngang.

***Trường hợp 3.*** Nếu

① $y_1$ hữu hạn và $\left[\begin{array}{l} y_2 = \pm\infty \\ y_2 \nexists \end{array}\right.$ $\to$ Có 1 tiệm cận ngang.

② $y_2$ hữu hạn và $\left[\begin{array}{l} y_1 = \pm\infty \\ y_1 \nexists \end{array}\right.$ $\to$ Có 1 tiệm cận ngang.

***Cách xác định nhanh tiệm cận ngang:*** Hàm $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ gọi bậc của $f(x)$, $g(x)$ lần lượt là $p;q$.

Khi đó:

- Nếu $p < q$ thì có TCN duy nhất $y = 0$.
- Nếu $p = q$ thì có TCN $y = \dfrac{a}{b}$ với $a;b$ là hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử và dưới mẫu.
- Nếu $p > q$ thì không có tiệm cận ngang.

### 2. *Các bước tìm Tiệm cận đứng:*

Xét hàm $y=f\left(x\right)=\dfrac{h\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ có $D;E;F$ lần lượt là tập xác định của $f\left(x\right);h\left(x\right);g\left(x\right)$.

☑ **Bước 01.** Giải $g\left(x\right)=0\to x_0$. Nếu $\left\langle\begin{matrix} x_0\in E \\ x_0\in F \\ x_0\notin D\end{matrix}\right.\longrightarrow$ bước 2, ngược lại không thỏa thì loại.

☑ **Bước 02.** Thay $x_0$ vào $h\left(x\right)$ ta có các trường hợp sau:

*Trường hợp 1.* Nếu $x_0$ không là nghiệm của tử $\to$ $x=x_0$ là TCĐ.

*Trường hợp 2.* Nếu $x_0$ là nghiệm tử (bội $m$) và là nghiệm mẫu (bội $n$) với $m<n\to$ $x=x_0$ là tiệm cận đứng.

## Dạng 4.4. Biện luận tiệm cận chứa tham số m.

***Bài toán 1.*** Tiệm cận đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(C\right)$.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thì $\begin{cases} c\ne 0 \\ ad-bc\ne 0\end{cases}$.

***Bài toán 2.*** Tiệm cận đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{f\left(x\right)}$ $\left(C'\right)$ với $a$ là hằng số; $f\left(x\right)$ là đa thức bậc $n>0$.

☑ Ta có $a$ là hằng số và $f\left(x\right)$ là đa thức bậc $n>0$ nên đồ thị hàm số $\left(C'\right)$ luôn có *tiệm cận ngang* duy nhất là $y=0$ (*bậc tử* $<$ *bậc mẫu*).

☑ Tìm tiệm cận đứng bằng cách giải $f\left(x\right)=0\to x=x_0$.

***Bài toán 3.*** Tiệm cận đồ thị hàm số $y=\dfrac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}$ $\left(C''\right)$ với $f\left(x\right);g\left(x\right)$ là đa thức bậc $n>0$.

- Tìm *tiệm cận ngang* ta có các trường hợp sau:
  - ☑ Bậc tử $>$ bậc mẫu $\longrightarrow$ ĐTHS không có TCN.
  - ☑ Bậc tử $<$ bậc mẫu $\longrightarrow$ ĐTHS có một TCN duy nhất $y=0$.
  - ☑ Bậc tử $=$ bậc mẫu $\longrightarrow$ ĐTHS có TCN $y=\dfrac{a}{b}$.
- Tìm *tiệm cận đứng* ta có các trường hợp sau:
  - ☑ **Bước 01.** Tìm điều kiện $f\left(x\right)=0$ có nghiệm $\left(1\right)$.
  - ☑ **Bước 02.** Giả sử $g\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=x_0$, khi đó $f\left(x_0\right)\ne 0$ $\left(2\right)$.
  - ☑ **Bước 03.** Từ $\left(1\right)\&\left(2\right)\longrightarrow$ kết luận.

***Bài toán 4.*** Tiệm cận đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ $\left(C'''\right)$, với $f\left(x\right)$ là hàm vô tỉ.

☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số.

☑ **Bước 02.** Để tồn tại tiệm cận ngang của ĐTHS $\left(C'''\right)$ thì tập $D$ phải chứa ký hiệu $\infty$ hoặc tồn tại ít nhất $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=y_0$ với $y_0$ hữu hạn.

## *Dạng 4.5.* Tìm đường tiệm cận hàm ẩn.

***Bài toán 1.*** Cho đồ thị/ bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$ tìm tiệm cận đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{g\left(x\right)}$ với $a$ là hằng số khác 0 và $g\left(x\right)$ xác định theo $f\left(x\right)$.

☑ Tìm TCN: nhìn vào vị trí $\lim\limits_{x\to+\infty} y=y_1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=y_2$ để xác định $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{a}{g\left(x\right)}\right)$.

☑ Tìm TCĐ: giải $g\left(x\right)=0$ (dựa vào đồ thị/ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ để xác định số nghiệm).

***Bài toán 2.*** Cho đồ thị/ bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$ tìm tiệm cận đồ thị hàm số $y=\dfrac{h\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ với $h\left(x\right)$ là một biểu thức theo $x$ và $g\left(x\right)$ là biểu thức theo $f\left(x\right)$.

☑ Từ đồ thị/BBT tìm nghiệm $g\left(x\right)=0\to$ biểu thức $g\left(x\right)$.

☑ Rút gọn biểu thức $\dfrac{h\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ rồi các đường tiệm cận.

**Lưu ý:** điều kiện tồn tại của $h\left(x\right)$.

Chương 01
Chủ đề 05

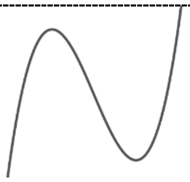
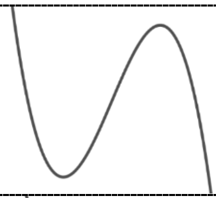
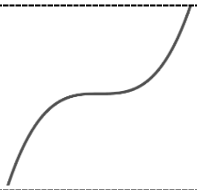
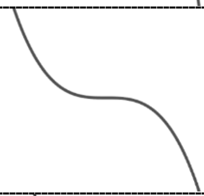
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

# ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Đồ thị hàm số bậc ba.

#### 1.1. Hình dạng cơ bản:

| *Trường hợp* | $a>0$ | $a<0$ |
|---|---|---|
| *Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt* |  |  |
| *Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép* |  |  |
| *Phương trình $y'=0$ vô nghiệm* |  |  |

#### 1.2. Từ đồ thị xác định hàm số.

Xét hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

❍ **Bước 1.** Xác định bậc.
❍ **Bước 2.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
❍ **Bước 3.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
❍ **Bước 4.** Xác định số cực trị.
❍ **Bước 5.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

Trên là các bước tổng quát, giờ ta sẽ xét từng hệ số cụ thể như sau:

| *Xác định* | *Nhìn vào* | *Trường hợp xảy ra* |
|---|---|---|
| ❒ Dấu của $a$ | Nhánh cuối của đồ thị | ① Đi lên $\rightarrow a>0$.<br>② Đi xuống $\rightarrow a<0$. |
| ❒ Dấu của $d$ | Vị trí đồ thị cắt $Oy$ | ① Cắt trên gốc $O \rightarrow d>0$.<br>② Cắt dưới gốc $O \rightarrow d<0$.<br>③ Cắt ngay gốc $O \rightarrow d=0$. |
| ❒ Dấu của $c$ | **Cách 1:**<br>Đồ thị đã cho có ? cực trị | ① Có 2 cực trị $\rightarrow ac\le 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$.<br>② Có 0 cực trị $\rightarrow ac>0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$. |

| | | |
|---|---|---|
| | **Cách 2:**<br>Sử dụng Vi-ét. | + Từ đồ thị xác định hai điểm cực trị của hàm số.<br>+ Tính tích hai điểm cực trị đó, giả sử là $P$:<br>① $P>0\to\frac{c}{a}>0$ kết hợp dấu của $a\to c$.<br>② $P<0\to\frac{c}{a}<0$ kết hợp dấu của $a\to c$. |
| ❐ Dấu của $b$ | **Cách 1:**<br>Sử dụng điểm uốn<br>Với $x_{uon}=-\frac{b}{3a}$. | + Kẻ đường thẳng nối 2 điểm cực trị $\to$ cắt đồ thị tại 1 điểm.<br>+ Chiếu điểm đó xuống $Ox$:<br>① Bên phải gốc $O\to-\frac{b}{a}>0$ kết hợp dấu của $a\to b$.<br>② Bên trái gốc $O\to-\frac{b}{a}<0$ kết hợp dấu của $a\to b$. |
| | **Cách 2:**<br>Sử dụng Vi-ét (dùng khi xác định được tổng hai điểm cực trị âm hoặc dương) | + Từ đồ thị xác định hai điểm cực trị của hàm số.<br>+ Tính tổng hai điểm cực trị đó, giả sử là $S$:<br>① $S>0\to-\frac{2b}{3a}>0$ kết hợp dấu của $a\to b$.<br>② $S<0\to-\frac{2b}{3a}<0$ kết hợp dấu của $a\to b$. |

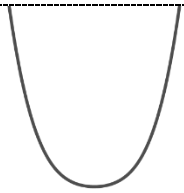
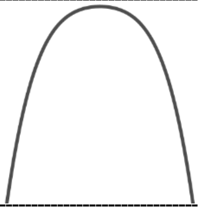
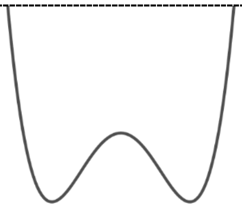
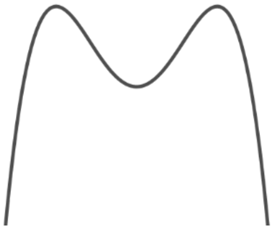
❐ **Lưu ý:** Đồ thị hàm số bậc ba có TÂM ĐỐI XỨNG là điểm uốn.

Cách tìm tâm đối xứng như sau:

- Với đồ thị hàm số: kẻ đường thẳng nối 2 điểm cực trị $\to$ cắt đồ thị tại 1 điểm thì điểm này là điểm uốn.
- Với hàm số: ta tìm nghiệm của $f''(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$ thì đây là hoành độ của điểm uốn.

## 2. Đồ thị hàm số bậc bốn.

### 2.1. Hình dạng cơ bản:

| *Trường hợp* | $a>0$ | $a<0$ |
|---|---|---|
| *Phương trình $y'=0$ có 1 nghiệm phân biệt* |  |  |
| *Phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt* |  |  |

### 2.2. Từ đồ thị xác định hàm số.

Xét hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ \left(a\neq 0\right)$.

Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

❍ **Bước 1.** Xác định bậc.
❍ **Bước 2.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
❍ **Bước 3.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
❍ **Bước 4.** Xác định số cực trị.
❍ **Bước 5.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

Trên là các bước tổng quát, giờ ta sẽ xét từng hệ số cụ thể như sau:

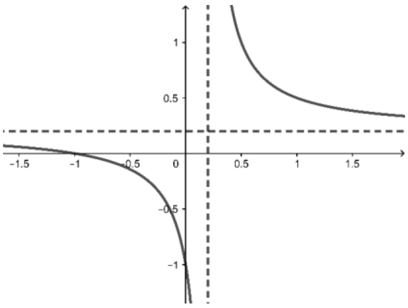
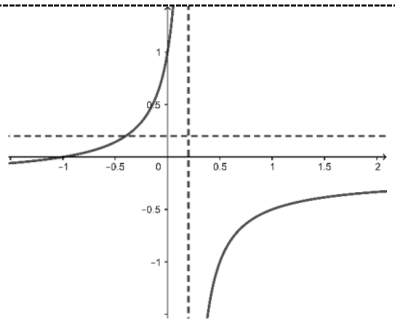
| *Xác định* | *Nhìn vào* | *Trường hợp xảy ra* |
|---|---|---|
| ❒ Dấu của $a$ | Nhánh cuối của đồ thị | ① Đi lên $\rightarrow a>0$.<br>② Đi xuống $\rightarrow a<0$. |
| ❒ Dấu của $c$ | Vị trí đồ thị cắt $Oy$ | ① Cắt trên gốc $O \rightarrow c>0$.<br>② Cắt dưới gốc $O \rightarrow c<0$.<br>③ Cắt ngay gốc $O \rightarrow c=0$. |
| ❒ Dấu của $b$ | Đồ thị đã cho có ? điểm cực trị | ① Có 3 điểm cực trị $\rightarrow ab\leq 0$ kết hợp dấu $a\rightarrow b$.<br>② Có 1 điểm cực trị $\rightarrow ab>0$ kết hợp dấu $a\rightarrow b$. |

❒ **Lưu ý:**

- Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) có TRỤC ĐỐI XỨNG là trục tung ($Oy$).
- Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) không có tâm đối xứng.
- Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) là hàm số chẵn.

## 3. Đồ thị hàm số hữu tỉ.

### 3.1. Hình dạng cơ bản:

| *Trường hợp* | $y' < 0$ | $y' > 0$ |
|---|---|---|
| |  |  |

### 3.2. Từ đồ thị xác định hàm số.

Xét hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\left(ad - cb \neq 0\right)$.

Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

❍ **Bước 1.** Xác định hai đường tiệm cận.

❍ **Bước 2.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.

❍ **Bước 3.** Chiều biến thiên.

Trên là các bước tổng quát, giờ ta sẽ xét từng hệ số cụ thể như sau:

| *Nhìn vào* | *Trường hợp xảy ra* |
|---|---|
| ❒ Tiệm cận đứng | ① TCĐ nằm bên phải $Oy$ $\rightarrow -{}^{d}\!/_{c} > 0$.<br>② TCĐ nằm bên trái $Oy$ $\rightarrow -{}^{d}\!/_{c} < 0$.<br>③ TCĐ là $Oy$ $\rightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ d = 0 \end{cases}$.<br>Một trong các điều trên ta sẽ kết luận $d \& c$ cùng hoặc trái dấu. |
| ❒ Tiệm cận ngang | ① TCN nằm trên $Ox$ $\rightarrow {}^{a}\!/_{c} > 0$.<br>② TCN nằm dưới $Ox$ $\rightarrow {}^{a}\!/_{c} < 0$.<br>③ TCĐ là $Ox$ $\rightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ a = 0 \end{cases}$.<br>Một trong các điều trên ta sẽ kết luận $a \& c$ cùng hoặc trái dấu. |
| ❒ Điểm giao với trục $Oy$ | ① Điểm nằm trên $Ox$ $\rightarrow {}^{b}\!/_{d} > 0$.<br>② Điểm nằm dưới $Ox$ $\rightarrow {}^{b}\!/_{d} < 0$.<br>③ Điểm là $O$ $\rightarrow \begin{cases} d \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$.<br>Một trong các điều trên ta sẽ kết luận $a \& c$ cùng hoặc trái dấu. |

❒ **Lưu ý:**

↬ Đồ thị hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có TÂM ĐỐI XỨNG là giao điểm hai đường tiệm cận.

↬ Đồ thị hàm số bậc bốn $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn có 1 TCĐ và 1 TCN.

### 4. Các phép biến đổi đồ thị.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ với số $a>0$ ta có:

| *Hàm số* | *Cách biến đổi* |
|---|---|
| ❒ $y=f\left(x\right)+a$ có đồ thị $\left(C'\right)$. | Tịnh tiến $\left(C\right)$ theo phương của $Oy$ lên trên $a$ đơn vị. |
| ❒ $y=f\left(x\right)-a$ có đồ thị $\left(C'\right)$. | Tịnh tiến $\left(C\right)$ theo phương của $Oy$ xuống dưới $a$ đơn vị. |
| ❒ $y=f\left(x+a\right)$ có đồ thị $\left(C'\right)$. | Tịnh tiến $\left(C\right)$ theo phương của $Ox$ qua trái $a$ đơn vị. |
| ❒ $y=f\left(x-a\right)$ có đồ thị $\left(C'\right)$. | Tịnh tiến $\left(C\right)$ theo phương của $Ox$ qua phải $a$ đơn vị. |
| ❒ $y=-f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C'\right)$. | Đối xứng của $\left(C\right)$ qua trục $Ox$. |
| ❒ $y=f\left(-x\right)$ có đồ thị $\left(C'\right)$. | Đối xứng của $\left(C\right)$ qua trục $Oy$. |

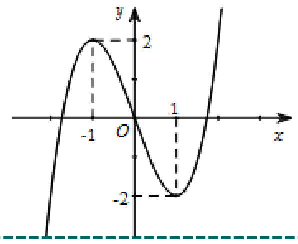
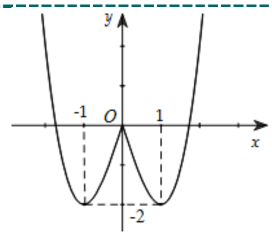
**❖ Biến đổi đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối.**

Từ đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ suy ra:

① ***Đồ thị*** $y=f\left(\left|x\right|\right)$ $\left(C'\right)$

| | |
|---|---|
| **Nhận xét:** | Ta có: $y=f\left(\left|x\right|\right)=\begin{cases}f\left(x\right) & \text{khi } x\ge 0\\ f\left(-x\right) & \text{khi } x<0\end{cases}$<br>Và $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm chẵn nên đồ thị $\left(C'\right)$ nhận $Oy$ làm trục đối xứng. |
| **Cách vẽ:** | ❍ Giữ nguyên phần đồ thị bên phải $Oy$ của đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)$.<br>❍ Bỏ phần đồ thị bên trái $Oy$ của $\left(C\right)$, lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua $Oy$. |

***Ví dụ 1.*** Từ đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)=x^3-3x$ suy ra đồ thị $\left(C'\right):y=\left|x\right|^3-3\left|x\right|$.

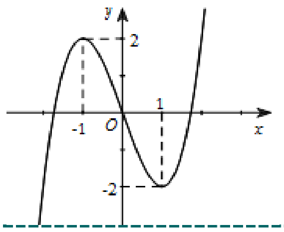
| | |
|---|---|
| **Khảo sát và vẽ** $\left(C\right)$ | Ta có đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)=x^3-3x$:<br> |
| **Biến đổi** $\left(C\right)$: | ❍ Bỏ phần đồ thị của $\left(C\right)$ bên trái $Oy$, giữ nguyên $\left(C\right)$ bên phải $Oy$.<br>❍ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua $Oy$<br> |

② ***Đồ thị*** $y=\left|f\left(x\right)\right|$ $\left(C'\right)$.

| | |
|---|---|
| **Nhận xét:** | Ta có: $y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases}f\left(x\right) & \text{khi } f\left(x\right)\ge 0\\ -f\left(x\right) & \text{khi } f\left(x\right)<0\end{cases}$ |
| **Cách vẽ:** | ❍ Giữ nguyên phần đồ thị phía trên $Ox$ của đồ thị (C): $y=f\left(x\right)$.<br>❍ Bỏ phần đồ thị phía dưới $Ox$ của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua $Ox$. |

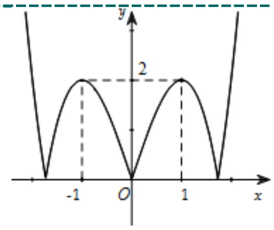
***Ví dụ 2.*** Từ đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)=x^3-3x$ suy ra đồ thị $y=\left|x^3-3x\right|$.

| | |
|---|---|
| **Khảo sát và vẽ** $\left(C\right)$ | Ta có đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)=x^3-3x$: |




**Biến đổi $(C)$:**

- Bỏ phần đồ thị của $(C)$ dưới $Ox$, giữ nguyên $(C)$ phía trên $Ox$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua $Ox$.




③ ***Đồ thị*** $y=|u(x)|.v(x)$ $(C')$.

**Nhận xét:**

Ta có: $y=|u(x)|.v(x)=\begin{cases} u(x).v(x)=f(x) & \text{khi } u(x)\ge 0 \\ -u(x).v(x)=f(x) & \text{khi } u(x)<0 \end{cases}$

**Cách vẽ:**

- Giữ nguyên phần trên miền $u(x)\ge 0$ của đồ thị $(C): y=f(x)$.
- Bỏ phần trên miền $u(x)<0$ của $(C)$, lấy đối xứng phần bị bỏ qua $Ox$.

***Ví dụ 3.*** Từ đồ thị $(C): y=f(x)=2x^3-3x^2+1$ suy ra đồ thị $(C'): y=|x-1|(2x^2-x-1)$.

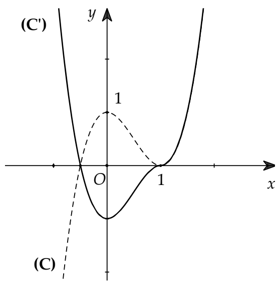
**Nhận xét**

$y=|x-1|(2x^2-x-1)=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\ge 1 \\ -f(x) & \text{khi } x<1 \end{cases}$

**Biến đổi $(C)$:**

- Giữ nguyên $(C)$ với $x\ge 1$.
- Bỏ $(C)$ với $x<1$. Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua $Ox$.

**Chú ý:** Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên lấy đối xứng các điểm đặc biệt của $(C)$: giao điểm với *Ox, Oy, CĐ, CT…*




***Ví dụ 4.*** Từ đồ thị $(C): y=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y=\dfrac{x}{|x-1|}$.

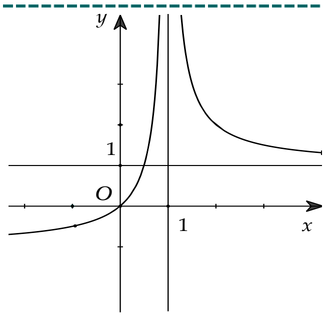
**Nhận xét**

$y=\dfrac{x}{|x-1|}=\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x\in(1;+\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x\in(-\infty;1) \end{cases}$.

**Biến đổi $(C)$:**

- Bỏ phần đồ thị của $(C)$ với $x<1$, giữ nguyên $(C)$ với $x>1$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua $Ox$.

**Chú ý:** Đối với hàm phân thức thì nên lấy đối xứng các đường tiệm cận để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.




**Chú ý:** với dạng: $y=|f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y=f(|x|)$ và $y=|f(x)|$

## *Dạng 5.1.* Từ đồ thị/bbt đã cho xác định hàm số.

☑ **Bước 01.** Xác định bậc.
☑ **Bước 02.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
☑ **Bước 03.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
☑ **Bước 04.** Xác định số cực trị.
☑ **Bước 05.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

## *Dạng 5.2.* Từ đồ thị/bbt đã cho xác định các hệ số.

☑ Xem lại các mục **"Từ đồ thị xác định hàm số."**

## *Dạng 5.3.* Đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối.

**1. Cách vẽ ĐTHS** $y=f\left(|x|\right)$

☑ Giữ nguyên phần đồ thị bên phải $Oy$ của đồ thị $\left(C\right): y=f\left(x\right)$.

☑ Bỏ phần đồ thị bên trái $Oy$ của $\left(C\right)$, lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua $Oy$.

**2. Cách vẽ ĐTHS** $y=\left|f\left(x\right)\right|$

☑ Giữ nguyên phần đồ thị phía trên $Ox$ của đồ thị (C): $y=f\left(x\right)$.

☑ Bỏ phần đồ thị phía dưới $Ox$ của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua $Ox$.

**3. Cách vẽ ĐTHS** $y=\left|u\left(x\right)\right|v\left(x\right)$

☑ Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u\left(x\right)\geq 0$ của đồ thị $\left(C\right): y=f\left(x\right)$.

☑ Bỏ phần đồ thị trên miền $u\left(x\right)<0$ của $\left(C\right)$, lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua $Ox$.

Chương 01
Chủ đề 06

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

# SỰ TƯƠNG GIAO

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

**Phương pháp tổng quát.**

- Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1);(C_2)$. Khi đó số giao điểm (điểm chung) của hai đồ thị $(C_1);(C_2)$ chính là số nghiệm $f(x)=g(x)$.
- Với $g(x)=0$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm với trục hoành.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 6.1.* Đếm số giao điểm (điểm chung) biết hàm tường minh.

☑ Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1);(C_2)$. Khi đó số giao điểm (điểm chung) của hai đồ thị $(C_1);(C_2)$ chính là số nghiệm $f(x)=g(x)$.

### *Dạng 6.2.* Đếm số giao điểm (điểm chung) biết đồ thị/bbt.

☑ Giải phương trình $f(x)=a$ với $a$ là hằng số ta kẻ đường thẳng $y=a$ song song với $Ox$ cắt đồ thị $f(x)$ tại bao nhiêu điểm thì có bấy nhiêu điểm chung.

☑ Áp dụng các phép biến đổi đồ thị ở "**Chủ đề 05. Đồ thị hàm số**"

### *Dạng 6.3.* Tìm m để đths giao với (c') tại n nghiệm.

❍ *Với đồ thị hàm số bậc ba:*

**01**

- Nhẩm được $(*)$ có nghiệm nghiệm $x=x_0$, khi đó:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \Leftrightarrow (x-x_0)(a_1x^2+b_1x+c_1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ a_1x^2+b_1x+c_1=0 \end{array}\right..$$

*Để tách ra được như thế ta chia hookne.*

- Tùy theo yêu cầu bài toán mà có điều kiện cho $a_1x^2+b_1x+c_1=0$.

**02**

- Cô lập được $m$ về một vế (vế phải) và biến số ở vế còn lại (vế trái) có dạng:

$$\boxed{h(x)=k(m)}$$

Khi đó thực hiện các bước sau:

❍ **Bước 1.** Tính $h'(x)\to$ lập BBT của hàm số $h(x)$.

❍ **Bước 2.** Từ BBT của hàm số $h(x)$ ta thực hiện yêu cầu bài toán.

**03**

- Hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có các điểm cực trị là "số đẹp", khi đó:

❍ $(*)$ có một nghiệm $\Leftrightarrow f(x)$ không có cực trị hoặc có cực trị thỏa $f_{CD}.f_{CT}>0$.

❍ $(*)$ có hai nghiệm pb $\Leftrightarrow f(x)$ có cực trị thỏa $f_{CD}.f_{CT}=0$.

❍ $(*)$ có ba nghiệm pb $\Leftrightarrow f(x)$ có cực trị thỏa $f_{CD}.f_{CT}<0$.

**04**

- Hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có các điểm cực trị là "số không đẹp", khi đó ta dùng *phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị* kết hợp định lý Vi-ét để tính $f_{CD}.f_{CT}$

❍ *Với đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương):*

| | |
|---|---|
| **01** | Phương pháp nhẩm nghiệm:<br>⚐ Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.<br>⚐ Khi đó ta phân tích: $f(x,m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$<br>⚐ Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$ |
| **02** | Phương pháp đặt ẩn phụ:<br>⚐ Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).<br>① Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{array}\right.$<br>② Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{array}\right.$<br>③ Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$<br>④ Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$ |

❍ *Với đồ thị hàm số phân thức:*

❒ Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(C)$ và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$: $\boxed{\dfrac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x,m) = 0}$ (phương trình bậc 2 ẩn $x$ tham số $m$).

❒ Một số câu hỏi thường gặp:

| | |
|---|---|
| **01** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$. |
| **02** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của $(C)$ $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ và thỏa mãn : $-\dfrac{d}{c} < x_1 < x_2$. |
| **03** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của $(C)$ $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\dfrac{d}{c}$. |
| **04** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của $(C)$ $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ và thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{d}{c} < x_2$. |
| **05** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:<br>① Đoạn thẳng $AB = k$<br>② Tam giác $ABC$ vuông.<br>③ Tam giác ABC có diện tích $S_0$ |

## *Dạng 6.4.* Tìm m để đths phân thức giao với (c') thỏa điều kiện.

❍ *Với đồ thị hàm số phân thức:*

❒ Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(C)$ và đường thẳng $d: y=px+q$. Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$: $\boxed{\dfrac{ax+b}{cx+d}=px+q \Leftrightarrow F(x,m)=0}$ (phương trình bậc 2 ẩn $x$ tham số $m$).

❒ Một số câu hỏi thường gặp:

| | |
|---|---|
| **01** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$ |
| **02** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của $(C)$ $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ và thỏa mãn : $-\dfrac{d}{c}<x_1<x_2$. |
| **03** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của $(C)$ $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ và thỏa mãn $x_1<x_2<-\dfrac{d}{c}$. |
| **04** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của $(C)$ $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ và thỏa mãn $x_1<-\dfrac{d}{c}<x_2$. |
| **05** | Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:<br>① Đoạn thẳng $AB=k$<br>② Tam giác $ABC$ vuông.<br>③ Tam giác ABC có diện tích $S_0$ |

Chương 02
Chủ đề 01

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

# LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Lũy thừa:

#### 1.1. Định nghĩa.

Cho số thực $b$ và số nguyên dương $n(n \geq 2)$.

Số $a$ được gọi là căn bậc $n$ của số $b$ nếu $a^n = b$.

*Chú ý:*

| | | |
|---|---|---|
| *n lẻ* | $b \in \mathbb{R}$ | • Có duy nhất một căn bậc n của b, ký hiệu $\sqrt[n]{b}$. |
| *n chẵn* | $b < 0$ | • Không tồn tại căn bậc n của b |
| | $b = 0$ | • Có một căn bậc $n$ của $b$ là 0 |
| | $b > 0$ | • Có hai bậc $n$ của $a$ là hai số đối nhau,<br>• Căn có giá trị dương ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$, căn có giá trị âm ký hiệu là $-\sqrt[n]{b}$. |

#### 1.2. Công thức.

| *Số mũ* $\alpha$ | *Cơ số* $a$ | *Lũy thừa* $a^\alpha$ |
|---|---|---|
| $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ | $a \in \mathbb{R}$ | $a^\alpha = a^n = a.a...a$ ($n$ là thừa số $a$) |
| $\alpha = 0$ | $a \neq 0$ | $a^\alpha = a^0 = 1$ |
| $\alpha = -n, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ | $a \neq 0$ | $a^\alpha = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ |
| $\alpha = \dfrac{m}{n}, \left(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right)$ | $a > 0$ | $a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \left(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n\right)$ |

#### 1.3. Tính chất.

① $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

② $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

③ $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha.\beta}$

④ $(ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$

⑥ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^\alpha$

⑦ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

⑧ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

**CHÚ Ý**

- Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không.nguyên
- Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số $\alpha$ phải khác 0.
- Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số $\alpha$ phải dương.

### 1.4. Tính chất căn bậc n.

Với $a,b\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*$ ta có

① $\sqrt[n]{a^n}=a,\forall a$ ② $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b},\forall a;b$

③ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\forall a,\forall b\neq 0$

④ $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m,\forall a>0,n$ nguyên dương, $m$ nguyên.

⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a},\forall a\geq 0,n,m$ nguyên dương.

⑥ Nếu $\dfrac{p}{n}=\dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p}=\sqrt[m]{a^q},\forall a>0,m,n$ nguyên dương, $p,q$ nguyên.

Đặc biệt: $\sqrt[n]{a}=\sqrt[m.n]{a^m}$ .

## 2. Hàm số lũy thừa:

### 2.1. Khái niệm.

Hàm số $y=x^\alpha$ với $\alpha\in\mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

### 2.2. Tập xác định.

Tập xác định của hàm số $y=x^\alpha$ là:

| | |
|---|---|
| ① Nếu $\alpha$ là số nguyên dương | $D=\mathbb{R}$ |
| ② Nếu $\alpha$ nguyên âm hoặc bằng $0$. | $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ |
| ③ Nếu $\alpha$ không nguyên | $D=(0;+\infty)$ |

※ **Tổng quát:** Tập xác định của hàm số $y=\left(f(x)\right)^\alpha$ .

Khi $\alpha$ NGUYÊN DƯƠNG → Hàm số $y=\left(f(x)\right)^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

Khi $\alpha$ NGUYÊN ÂM → Hàm số $y=\left(f(x)\right)^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\neq 0$ .

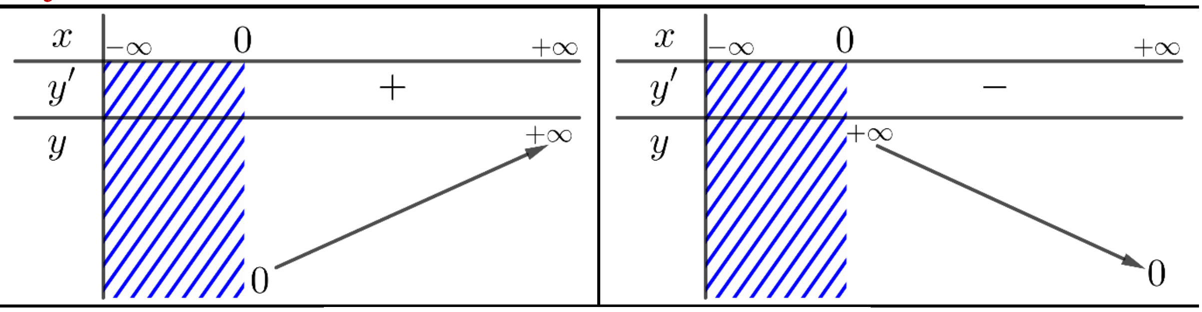
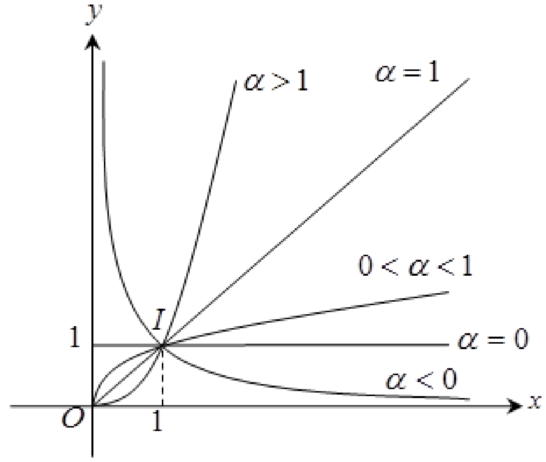
Khi $\alpha$ KHÔNG NGUYÊN → Hàm số $y=\left(f(x)\right)^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x)>0$

### 2.3. Đạo hàm.

Hàm số $y=x^\alpha$, $(\alpha\in\mathbb{R})$ có đạo hàm $\forall x>0$ và $\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$.

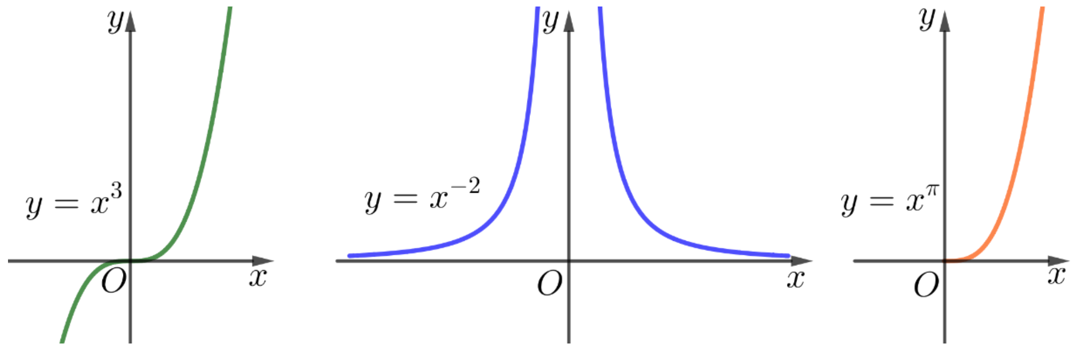
### 2.4. Khảo sát hàm số lũy thừa $y=x^\alpha$, $(\alpha\in\mathbb{R})$.

| | | $y=x^\alpha$ với $\alpha>0$ | $y=x^\alpha$ với $\alpha<0$ |
|---|---|---|---|
| *Tập khảo sát* | | $(0;+\infty)$ | $(0;+\infty)$ |
| *Sự biến thiên* | *Đạo hàm* | $y'=\alpha x^{\alpha-1}>0,\ \forall x>0.$ | $y'=\alpha x^{\alpha-1}<0,\ \forall x>0.$ |
| | *Giới hạn* | $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty.$ | $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0.$ |
| | *Tiệm cận* | Không có. | Nhận $Ox$ là tiệm cận ngang.<br>Nhận $Oy$ là tiệm cận đứng. |

| | |
|---|---|
| *Bảng biến thiên* |  |
| *Đồ thị* |  Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$. |

*Lưu ý:*

- Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.
- Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^{\pi}$.




## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### Dạng 1.1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức

☑ Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.

☑ Chọn $a;b$ là các số thực dương và $x;y$ là các số thực tùy ý, ta có:

① $a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ ② $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ ③ $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha.\beta}$

④ $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}.b^{\alpha}$ ⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ ⑥ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}$

⑦ Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$. ⑧ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

### Dạng 1.2. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa

☑ Ta có hai cách làm như sau:

| | |
|---|---|
| **01** | *Đưa về cùng cơ số*<br>Cho $a \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó<br>① Với $a > 1 \longrightarrow a^{m} > a^{n} \Leftrightarrow m > n$; |

| | |
|---|---|
| | ② Với $0<a<1 \longrightarrow a^m > a^n \Leftrightarrow m<n$ . |
| **02** | *Đưa về cùng số mũ*<br>Với $0<a<b$ và $m$ là số nguyên thì<br>① $a^m<b^m \Leftrightarrow m>0$ ② $a^m>b^m \Leftrightarrow m<0$ . |

## *Dạng 1.3.* Tập xác định hàm số lũy thừa

☑ Tập xác định của hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^{\alpha}$ là:

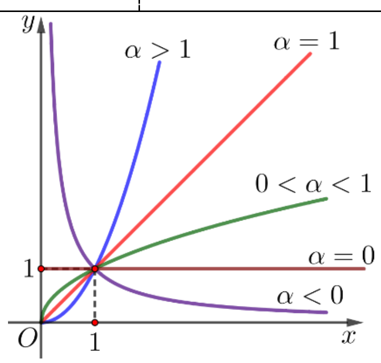
| | |
|---|---|
| ① $\alpha$ là số nguyên dương | $f\left(x\right)$ xác định. |
| ② $\alpha$ nguyên âm hoặc bằng 0. | $f\left(x\right)\neq 0$ |
| ③ $\alpha$ không nguyên | $f\left(x\right)>0$ |

## *Dạng 1.4.* Đạo hàm số lũy thừa

☑ Hàm số $y=x^{\alpha}$, $\left(\alpha\in\mathbb{R}\right)$ có đạo hàm $\forall x>0$ và $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha.x^{\alpha-1} \longrightarrow \left(u^{\alpha}\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$ .

## *Dạng 1.5.* Đồ thị hàm số lũy thừa

☑ Ta lưu ý các yếu tố trong sự biến thiên của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ với

| | $\alpha>0$ | $\alpha<0$ |
|---|---|---|
| ***Đạo hàm*** | $y'=\alpha x^{\alpha-1}>0$ | $y'=\alpha x^{\alpha-1}<0,\ \forall x>0.$ |
| ***Giới hạn*** | $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}=+\infty.$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}=0.$ |
| ***Tiệm cận*** | Không có. | Nhận $Ox$ là tiệm cận ngang.<br>Nhận $Oy$ là tiệm cận đứng. |
| ***Đồ thị*** |   Đồ thị của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I\left(1;1\right)$. | |

Chương 02
Chủ đề 02

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

# LOGARIT

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Định nghĩa.

Cho hai số dương $a, b$ với $a \neq 1$.

- Số $\alpha$ thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là lôgarit cơ số $a$ của $b$ và kí hiệu là $\log_a b$.
- Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b$.

### 2. Tính chất.

TÍNH CHẤT — Cho $a, b > 0, a \neq 1$

- $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b,\ \log_a\left(a^{\alpha}\right) = \alpha$

### 3. Công thức.

Cho 3 số dương $a, b, c$ với $a \neq 1; c \neq 1$ và $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ta có các công thức sau:

**1. Tích tổng - Thương hiệu**

- $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

**2. Lũy thừa**

- $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$
- Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$

**3. Đổi cơ số**

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- Đặc biệt: $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$; $\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$

❍ Logarit thập phân và Logarit tự nhiên

- Logarit thập phân là logarit cơ số 10. Viết : $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Logarit tự nhiên là logarit cơ số $e$ . Viết : $\log_e b = \ln b$

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 2.1.* Tính giá trị biểu thức

☑ Áp dụng các tính chất – công thức để biến đổi:

| | | |
|---|---|---|
| **01** | *Tính chất* | ① $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$<br>② $a^{\log_a b} = b,\ \log_a\left(a^\alpha\right) = \alpha$<br>③ $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$ (Tích – tổng)<br>④ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Thương – hiệu)<br>Đặc biệt : với $a,\ b > 0,\ a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ |
| **02** | *Công thức bay* | ① $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ ② $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$<br>Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$ |
| **03** | *Đổi cơ số* | ① $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ② $\log_a b = \log_a c.\log_c b$<br>Đặc biệt : $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$. |

### *Dạng 2.2.* Biểu diễn logarit

❒ *Ta thực hiện theo các bước sau*

☑ **Bước 01.** Biến đổi các biểu thức logarit phụ thuộc vào tham số $a$ và $b$.

☑ **Bước 02.** Đặt các biểu thức logarit của các số nguyên tố là các ẩn $x, y, z$.... Từ đó ta thu được phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn $x, y, z$.... Ta tìm các ẩn này theo $a, b$

☑ **Bước 03.** Giải hệ tìm được tìm $x, y, z$... theo $a, b$. Từ đó tính được biểu thức theo các tham số $a, b$Các công thức nền tảng là $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ và $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$

### *Dạng 2.3.* Mệnh đề đúng - sai

☑ Ta lưu ý các công thức sau

| | | |
|---|---|---|
| **01** | *Tính chất* | ① $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$<br>② $a^{\log_a b} = b,\ \log_a\left(a^\alpha\right) = \alpha$<br>③ $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$ (Tích – tổng)<br>④ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Thương – hiệu)<br>Đặc biệt : với $a,\ b > 0,\ a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ |
| **02** | *Công thức bay* | ① $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ ② $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$<br>Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$ |
| **03** | *Đổi cơ số* | ① $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ② $\log_a b = \log_a c.\log_c b$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | Đặc biệt : $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$. |

Chương 02
Chủ đề 03

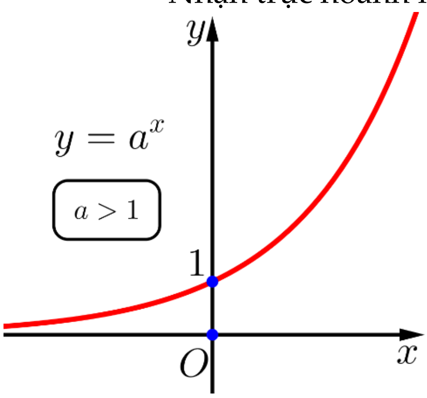
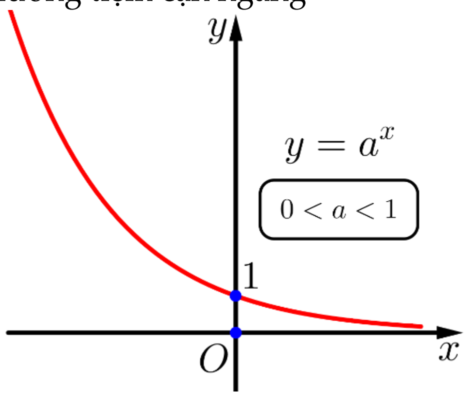
LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

# HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Hàm số mũ.

Hàm số mũ $y=a^x$, $(a>0, a\neq 1)$

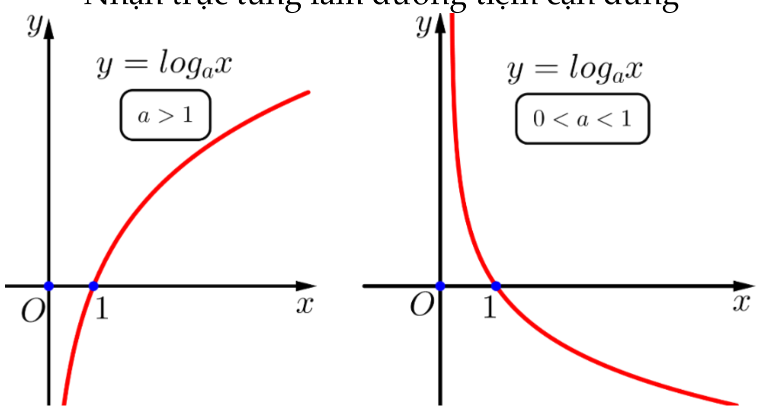
| | | |
|---|---|---|
| *Tập xác định* | $D=\mathbb{R}$. | |
| *Tập giá trị* | $T=(0;+\infty)$, nghĩa là khi giải phương trình mà đặt $t=a^{f(x)}$ thì $t>0$. | |
| *Đơn điệu* | $a>1$ | Hàm số $y=a^x$ đồng biến, khi đó: $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$. |
| | $0<a<1$ | Hàm số $y=a^x$ nghịch biến, khi đó: $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$. |
| *Đạo hàm* | $\boxed{\begin{array}{l}(a^x)'=a^x.\ln a\Rightarrow(a^u)'=u'.a^u.\ln a\\(e^x)'=e^x\Rightarrow(e^u)'=e^u.u'\\(\sqrt[n]{u})'=\dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}\end{array}}$ | |
| *Đồ thị* | Nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang     | |

❍ ***Nhận xét:***

Đồ thị hàm số $y=a^x$ $(a>1)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=a^x$ $(0<a<1)$ qua $Oy$.

### 2. Hàm số logarit.

Hàm số logarit $y=\log_a x,\ \left(a>0,a\neq 1;x>0\right)$

<table>
<tr><td>Tập xác định</td><td colspan="2">$D=\left(0;+\infty\right)$.</td></tr>
<tr><td>Tập giá trị</td><td colspan="2">$T=\mathbb{R}$, nghĩa là khi giải PT mà đặt $t=\log_a x$ thì $t$ không có điều kiện.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Đơn điệu</td><td>$a>1$</td><td>Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên $D$, khi đó:<br>$\log_a f\left(x\right)>\log_a g\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)>g\left(x\right)$.</td></tr>
<tr><td>$0<a<1$</td><td>Hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $D$, khi đó:<br>$\log_a f\left(x\right)>\log_a g\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)<g\left(x\right)$.</td></tr>
<tr><td>Đạo hàm</td><td colspan="2">$\boxed{\begin{array}{l}\left(\log_a\left|x\right|\right)'=\dfrac{1}{x.\ln a}\Rightarrow\left(\log_a\left|u\right|\right)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}\\ \left(\ln x\right)=\dfrac{1}{x},\ \left(x>0\right)\Rightarrow(\ln\left|u\right|)'=\dfrac{u'}{u}\end{array}}\Rightarrow\boxed{\left(\ln^n\left|u\right|\right)'=n\cdot\dfrac{u'}{u}\cdot\ln^{n-1}\left|u\right|}$</td></tr>
<tr><td>Đồ thị</td><td colspan="2">Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng<br></td></tr>
</table>



❍ ***Nhận xét:***

Đồ thị hàm số $y=\log_a x\left(a>1\right)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x\left(0<a<1\right)$ qua $Ox$.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 3.1.* Tập xác định của hàm số logarit

❍ Điều kiện xác định của hàm số $y=\log_a f\left(x\right)$: $\begin{cases}a>0\\ a\neq 1\\ f\left(x\right)>0\end{cases}$.

❍ Đặc biệt: với hàm số $y=\log_{g(x)}\left[f\left(x\right)\right]^n$ ta lưu ý "***mũ n***" của $f\left(x\right)$:

❒ Nếu $n\,\vdots\,2\longrightarrow$ĐKXĐ của hàm số $y=\log_{g(x)}\left[f\left(x\right)\right]^n$: $\begin{cases}g\left(x\right)>0\\ g\left(x\right)\neq 1\\ f\left(x\right)\neq 0\end{cases}$.

❒ Nếu $n\,\not\vdots\,2\longrightarrow$ĐKXĐ của hàm số $y=\log_{g(x)}\left[f\left(x\right)\right]^n$: $\begin{cases}g\left(x\right)>0\\ g\left(x\right)\neq 1\\ f\left(x\right)>0\end{cases}$.

⇨Tóm lại nếu $f\left(x\right)$ hoặc $g\left(x\right)$ có "***mũ n***" ta chú ý xem "***n***" chẵn hay lẻ.

## Dạng 3.2. Đạo hàm hàm số mũ – logarit

❍ Đạo hàm hàm số logarit:

$$\left(\log_a|x|\right)'=\frac{1}{x.\ln a}\Rightarrow\left(\log_a|u|\right)'=\frac{u'}{u.\ln a}$$
$$\left(\ln x\right)=\frac{1}{x},\ \left(x>0\right)\Rightarrow(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$$
$$\Rightarrow \boxed{\left(\ln^n|u|\right)'=n\cdot\frac{u'}{u}\cdot\ln^{n-1}|u|}$$

❍ Đạo hàm hàm số mũ:

$$\left(a^x\right)'=a^x.\ln a\Rightarrow\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$$
$$\left(e^x\right)'=e^x\Rightarrow\left(e^u\right)'=e^u.u'$$
$$\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

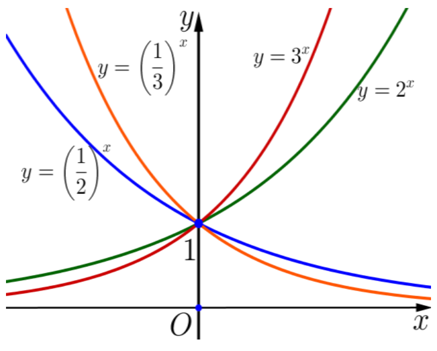
## Dạng 3.3. Khảo sát hàm số mũ – logarit

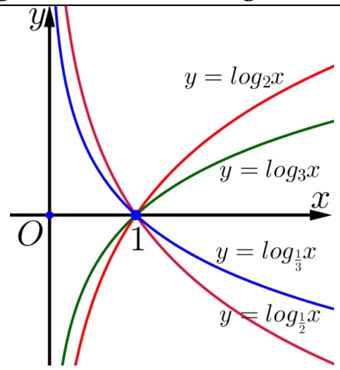
❍ Ta cần lưu ý các vấn đề sau:

| | | *Hàm số Mũ* $y=a^x\left(1\neq a>0\right)$ | *Hàm số Logarit* $y=\log_a x\left(1\neq a>0\right)$ |
|---|---|---|---|
| **01** | ***Đơn điệu*** | ◆ $a>1\to$HS đồng biến.<br>◆ $0<a<1\to$HS nghịch biến. | ◆ $a>1\to$HS đồng biến.<br>◆ $0<a<1\to$HS nghịch biến. |
| **02** | ***Tiệm cận*** | Nhận $Ox$ làm TCN. | Nhận $Oy$ làm TCĐ. |
| **03** | ***Đồ thị*** | Nằm bên trên $Ox$.<br>Luôn đi qua điểm $\left(0;1\right)$. | Nằm bên phải $Oy$.<br>Luôn đi qua điểm $\left(1;0\right)$. |
| | | ĐTHS $y=a^x\left(1\neq a>0\right)$ đối xứng $y=\log_a x\left(1\neq a>0\right)$ qua $y=x$ (đường phân xác góc phần tư thứ nhất). | |

❍ Với bài toán xét thứ tự cơ số ta nhớ như sau:

| | | *Hàm số Mũ* $y=a^x\left(1\neq a>0\right)$ | *Hàm số Logarit* $y=\log_a x\left(1\neq a>0\right)$ |
|---|---|---|---|
| ***Cơ số*** | $>1$ | Càng gần $Oy$ cơ số càng lớn. | Càng gần $Ox$ cơ số càng lớn. |
| | $0<a<1$ | Càng gần $Oy$ cơ số càng bé. | Càng gần $Ox$ cơ số càng bé. |
| ***Hình minh họa*** | | | |



Chương 02
Chủ đề 04

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

# BÀI TOÁN LÃI SUẤT

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Lãi đơn.

- Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.
- Công thức tính lãi đơn:

$$\boxed{V_n = V_0\left(1 + r.n\right)}$$

Trong đó:
$V_n$ : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
$V_0$ : Số tiền gửi ban đầu;
$n$ : Số kỳ hạn tính lãi;
$r$ : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

### 2. Lãi kép.

- Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

- Ta có các loại lãi kép sau:

#### 2.1. Lãi kép, gửi một lần:

$$\boxed{T_n = T_0\left(1 + r\right)^n}$$

Trong đó:
$T_n$ : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
$T_0$ : Số tiền gửi ban đầu;
$n$ : Số kỳ hạn tính lãi;
$r$ : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

#### 2.2. Lãi kép liên tục:

$$\boxed{T_n = T_0.e^{nr}}$$

Trong đó:
$T_n$ : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
$T_0$ : Số tiền gửi ban đầu;
$n$ : Số kỳ hạn tính lãi;
$r$ : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

#### 2.3. Lãi kép, gửi định kỳ.

2.3.1. *Trường hợp gửi tiền định kì cuối tháng.*

**Bài toán 1**

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng $m$ triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau $n$ (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \dfrac{m}{r}\left[\left(1+r\right)^n - 1\right]$.

*Chứng minh*

| Tháng | Đầu tháng | Cuối tháng |
|---|---|---|
| 1 | Chưa gửi | $m$ |
| 2 | $m$ | $m\left(1+r\right)+m$ |
| 3 | $m\left(1+r\right)+m$ | $m\left(1+r\right)^2+m\left(1+r\right)+m$ |
| … | … | … |

| | | |
|---|---|---|
| $n$ | | $m(1+r)^{n-1}+...+m(1+r)+m$ |

- Vậy sau tháng n ta được số tiền $T_n=m(1+r)^{n-1}+...+m(1+r)+m=m\left[(1+r)^{n-1}+...+(1+r)+1\right]$,
- Ta thấy trong ngoặc là tổng $n$ số hạng của cấp số nhân có $u_1=1,\ u_n=(1+r)^{n-1},\ q=1+r$
- Biết rằng: $S_n=u_1+...+u_n=u_1.\dfrac{q^n-1}{q-1}$ nên $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$

**Bài toán 2**

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng $m$ triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau $n$ (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng $m$ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m=\dfrac{Ar}{(1+r)^n-1}$.

*Chứng minh*

- Áp dụng **bài toán 1** ta có số tiền thu được là $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$,
- Mà đề cho số tiền đó chính là A nên $A=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]\Leftrightarrow m=\dfrac{Ar}{(1+r)^n-1}$.

**Bài toán 3**

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng $m$ triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau $n$ (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm $n$ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n=\log_{1+r}\left(\dfrac{Ar}{m}+1\right)$.

*Chứng minh*

- Áp dụng **bài toán 1** ta có số tiền thu được là $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$.
- Đề cho số tiền đó chính là A nên:

$$A=\frac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]\Leftrightarrow m=\frac{Ar}{(1+r)^n-1}\Leftrightarrow (1+r)^n=\frac{Ar}{m}+1\Leftrightarrow n=\log_{1+r}\left(\frac{Ar}{m}+1\right)$$

⇨ Như vậy trong *trường hợp* **2.3.1** này ta cần nắm vững công thức **bài toán 1** từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở **bài toán 2, bài toán 3.**

### 2.3.2. *Trường hợp gửi tiền định kì đầu tháng.*

**Bài toán 4**

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng $m$ triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm).
Hỏi sau $n$ (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$.

*Chứng minh*

- Ta xây dựng bảng sau:

| *Tháng* | *Đầu tháng* | *Cuối tháng* |
|---|---|---|
| 1 | $m$ | $m(1+r)$ |
| 2 | $m(1+r)+m$ | $m(1+r)^2+m(1+r)$ |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $m(1+r)^2+m(1+r)+m$ | $m(1+r)^3+m(1+r)^2+m(1+r)$ |
| ... | ... | ... |
| $n$ | ... | $m(1+r)^n+...+m(1+r)$ |

- Vậy sau tháng $n$ ta được số tiền:

$$T_n=m(1+r)^n+...+m(1+r)=m\left[(1+r)^n+...+(1+r)\right]=m(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

**Bài toán 5**

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng $m$ triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau $n$ (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng $m$ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m=\dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}$.

*Chứng minh*

- Áp dụng **bài toán 4**. Ta có số tiền thu được là: $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$,
- Mà đề cho số tiền đó là A nên $A=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)\Leftrightarrow m=\dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}$.

**Bài toán 6**

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau $n$ (tháng hoặc năm) số tiền thu được là $A$ triệu. Hỏi số tháng hoặc năm $n$ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n=\log_{1+r}\left[\dfrac{Ar}{m(1+r)}+1\right]$.

*Chứng minh*

- Áp dụng **bài toán 4**. Ta có: số tiền thu được là: $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$.
- Đề cho số tiền đó là A nên: $A=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$

$$\Leftrightarrow m=\frac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}\Leftrightarrow(1+r)^n=\frac{Ar}{m(1+r)}+1\Rightarrow n=\log_{1+r}\left[\frac{Ar}{m(1+r)}+1\right].$$

⇨ Như vậy trong *trường hợp* 2.3.2 ta cần nắm vững công thức **bài toán 4** từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở **bài toán 5, bài toán 6.**

### 2.3.3. *Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì đầu tháng.*

**Bài toán 7**

Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n = A(1+r)^n - m(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$.

*Chứng minh*

- Ta xây dựng bảng sau:

| *Tháng* | *Đầu tháng* | *Cuối tháng* |
|---|---|---|
| 1 | $A-m$ | $(A-m)(1+r)=A(1+r)-m(1+r)$ |
| 2 | $A(1+r)-m(1+r)-m$ | $A(1+r)^2-m(1+r)^2-m(1+r)$ |
| 3 | $A(1+r)^2-m(1+r)^2-m(1+r)-m$ | $A(1+r)^3-m(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)$ |
| … | … | … |
| $n$ | … | $A(1+r)^n-m(1+r)^n-\ldots-m(1+r)^2-m(1+r)$ |

- Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$T_n = A(1+r)^n - m(1+r)^n - \ldots - m(1+r)^2 - m(1+r)$$

$$= A(1+r)^n - m\left[(1+r)^n + \ldots + (1+r)\right] = A(1+r)^n - m(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

## 3. Bài toán tăng trưởng dân số.

Công thức tính:

$$\boxed{X_m = X_n(1+r)^{m-n}}$$

$$(m, n \in \mathbb{Z}^+; m \ge n)$$

Trong đó:

$r$ : tỉ lệ tăng dân số từ năm $n$ đến năm $m$.

$X_m$ : dân số năm $m$.

$X_n$ : dân số năm $n$.

Từ đó ra có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $\boxed{r = \sqrt[m-n]{\dfrac{X_m}{X_m}} - 1}$.

Chương 02
Chủ đề 05

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

# PHƯƠNG TRÌNH MŨ

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Phương trình mũ cơ bản: $a^x = b\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 5.1.* Phương trình mũ cơ bản

Giải phương trình mũ cơ bản: $a^x = b\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

Khi đó $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

***Lưu ý:***

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

### *Dạng 5.2.* Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0,\ a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

### *Dạng 5.3.* Logarit hóa

- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1,\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$.

### *Dạng 5.4.* Đặt ẩn phụ dễ thấy

- Biến đổi quy về dạng: $f\left[a^{g(x)}\right] = 0\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.
- Thông thường sẽ gặp các cơ số: $\left\langle \begin{array}{l} 9^x \longrightarrow t = 3^x \\ 4^x \longrightarrow t = 2^x \\ 25^x \longrightarrow t = 5^x \end{array} \right.$ ; $t > 0$.

### *Dạng 5.5.* Đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp

- Phương trình đẳng cấp có dạng: $\boxed{m.X^2 + n.XY + p.Y^2 = 0}$.
- Khi đó với phương trình mũ đẳng cấp có dạng: $\boxed{m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0}$
- Phương pháp làm như sau:

| | | |
|---|---|---|
| **01** | Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, đặt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$. | $m.\dfrac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + n.\dfrac{(a.b)^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + p.\dfrac{b^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} = 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | $\Leftrightarrow m.\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}\right]^2+n.\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+p=0$<br>$\Leftrightarrow m.t^2+n.t+p=0$. |
| **02** | Chia 2 vế cho $a^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}=t>0$. | $m.\frac{a^{2f(x)}}{a^{2f(x)}}+n.\frac{(a.b)^{f(x)}}{a^{2f(x)}}+p.\frac{b^{2f(x)}}{a^{2f(x)}}=0$<br>$\Leftrightarrow m+n.\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}+p.\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}\right]^2=0$<br>$\Leftrightarrow m+n.t+p.t^2=0$. |

## *Dạng 5.6.* Đặt ẩn phụ với tích hai cơ số bằng 1

- Phương trình đẳng cấp có dạng: $\boxed{m.X^2+n.XY+p.Y^2=0}$.
- Phương trình mũ ta xét có dạng: $\boxed{m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p=0}$ $(*)$ trong đó $a.b=1$.
- Phương pháp làm như sau:

$$\text{Vì } a.b=1\Rightarrow b=\frac{1}{a}\longrightarrow \text{Đặt } t=a^{f(x)},t>0\Rightarrow b^{f(x)}=\frac{1}{t}.$$

$$\text{Khi đó } (*)\Leftrightarrow m.t+n.\frac{1}{t}+p=0\Leftrightarrow m.t^2+n+p.t=0.$$

## *Dạng 5.7.* Phương pháp hàm số

**Định lí.** Nếu hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(a;b)$, $y=g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ có tối đa một nghiệm trên $(a;b)$.

- Phương pháp làm như sau:

| | |
|---|---|
| **01** | ⇨ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x)=k$, với $k$ là hằng số<br>• Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến( nghịch biến) trên tập xác định.<br>• Tìm $x_0$ sao cho $f(x_0)=k$<br>• Kết luận $x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=k$. |
| **02** | ⇨ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x)=g(x)$, với $D_1,D_2$ lần lượt là tập xác định của hai hàm số $f(x),g(x)$<br>• Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên tập $D_1\cap D_2$ *(hay ngược lại)*<br>• Tìm $x_0$ sao cho $f(x_0)=g(x_0)$<br>• Kết luận $x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=g(x)$. |
| **03** | ⇨ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(u)=f(v)$, với hàm số $f(t)$ là hàm đồng biến(hay nghịch biến).<br>• Phương trình $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$. |

**Lưu ý:**

① Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm đồng biến(nghịch biến) trên $(a;b)$ thì $f(x)+g(x)$ cũng là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a;b)$.

② Hàm số $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$ và nghịch biến khi $0<a<1$.

### *Dạng 5.8.* Phương trình chứa tham số

❍ Để giải bài toán tìm tham số $m$ trong phương trình mũ ta có hai cách phổ biến:

| | |
|---|---|
| **01** | ⇨ Cô lập được tham số $m$.<br>◆ Ta dùng đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm (bài toán tương giao). |
| **02** | ⇨ Không cô lập được tham số $m$ và có liên quan đến Vi-ét.<br>◆ Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai/bậc ba.<br>◆ Kết hợp định lý Vi-ét để giải quyết yêu cầu bài toán |

Chương 02
Chủ đề 06

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

# PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

- Phương trình logarit cơ bản: $\log_a f(x) = b \ (a > 0,\ a \neq 1)$.
- **Lưu ý:** khi giải phương trình logarit cần phải có điều kiện để logarit tồn tại.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 6.1.* Phương trình logarit cơ bản

- Giải phương trình logarit cơ bản: $\log_a x = b$
- Khi đó $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b \ (a > 0,\ a \neq 1)$

### *Dạng 6.2.* Đưa về cùng cơ số

❍ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

**Loại 1:** $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$.

**Loại 2:** $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

### *Dạng 6.3.* Mũ hóa

❍ Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

$$\log_a f(x) = g(x) \ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$$

### *Dạng 6.4.* Đặt ẩn phụ dễ thấy

❍ Giải phương trình $f(\log_a g(x)) = 0$, $(0 < a \neq 1)$.

☑ **Bước 01.** Đặt $t = \log_a g(x) \ (*)$

☑ **Bước 02.** Tìm điều kiện của $t$ (nếu có)

☑ **Bước 03.** Đưa về giải phương trình $f(t) = 0$ đã biết cách giải.

☑ **Bước 04.** Thay vào $(*)$ để tìm $x$.

### *Dạng 6.5.* Phương pháp hàm số

❒ **Định lí.** Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(a;b)$, $y = g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên $(a;b)$.

❍ Phương pháp làm như sau:

| | |
|---|---|
| **01** | ⇨ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x)=k$, với $k$ là hằng số<br>◆ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến( nghịch biến) trên tập xác định.<br>◆ Tìm $x_0$ sao cho $f(x_0)=k$<br>◆ Kết luận $x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=k$. |
| **02** | ⇨ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x)=g(x)$, với $D_1,D_2$ lần lượt là tập xác định của hai hàm số $f(x),g(x)$<br>◆ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên tập $D_1 \cap D_2$ *(hay ngược lại)*<br>◆ Tìm $x_0$ sao cho $f(x_0)=g(x_0)$<br>◆ Kết luận $x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=g(x)$. |
| **03** | ⇨ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(u)=f(v)$, với hàm số $f(t)$ là hàm đồng biến(hay nghịch biến).<br>◆ Phương trình $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$. |

✍ **Lưu ý:**

① Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm đồng biến(nghịch biến) trên $(a;b)$ thì $f(x)+g(x)$ cũng là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a;b)$.

② Hàm số $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$ và nghịch biến khi $0<a<1$.

## *Dạng 6.6.* Phương trình chứa tham số

❍ Để giải bài toán tìm tham số $m$ trong phương trình logarit ta có hai cách phổ biến:

| | |
|---|---|
| **01** | ⇨ Cô lập được tham số $m$.<br>◆ Ta dùng đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm (bài toán tương giao). |
| **02** | ⇨ Không cô lập được tham số $m$ và có liên quan đến Vi-ét.<br>◆ Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai/bậc ba.<br>◆ Kết hợp định lý Vi-ét để giải quyết yêu cầu bài toán |

Chương 02
Chủ đề 07

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

# BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Dạng 01.** $a^x > b\ (a>0; a\ne 1)$. | $b\le 0$ | Tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$. | |
| | $b>0$ | $a>1$ | $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$. |
| | | $0<a<1$ | $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$. |
| **Dạng 02.** $a^x < b\ (a>0; a\ne 1)$. | $b\le 0$ | Tập nghiệm của bất phương trình là $\varnothing$. | |
| | $b>0$ | $a>1$ | $a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b$. |
| | | $0<a<1$ | $a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b$. |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 7.1.* Bất phương trình mũ cơ bản

☞ Xem lại mục "Lý thuyết chung"

☞ Bất phương trình mũ cơ bản: $a^x > b\ (a>0; a\ne 1)$. Chú ý đến cơ số.

### *Dạng 7.2.* Đưa về cùng cơ số

☞ Ta có hai chú ý như sau:

① Với $a>1$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$

② Với $0<a<1$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$

### *Dạng 7.3.* Đặt ẩn phụ

❍ Phương pháp đặt ẩn phụ ta thường sử dụng một số phương pháp sau:

Ở đây ta xét bất phương trình dạng $f(x)\ge 0$, các trường hợp khác tiến hành tương tự.

① Bất phương trình dạng $A_n a^{nx} + A_{n-1} a^{(n-1)x} + \ldots + A_1 a^x + A_0 \ge 0$.

Đặt $t = a^x$ $(t>0)$, ta thu được bất phương trình dạng $A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \ldots + A_1 t + A_0 \ge 0$.

② Bất phương trình dạng $Aa^{2x} + B(ab)^x + Cb^{2x} \ge 0$.

Chia cả hai vế cho $b^{2x}$ rồi đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, $t>0$, ta được $A.t^2 + B.t + C \ge 0$.

③ Bất phương trình dạng $Aa^{f(x)} + Bb^{g(x)} + C \ge 0$, trong đó $a^{f(x)} b^{g(x)} = k$.

Đặt $a^{f(x)} = t (t>0) \Rightarrow b^{g(x)} = k.$, ta thu được bất phương trình mới $At + \frac{Bk}{t} + C \ge 0$.

### *Dạng 7.4.* Logarit hóa

❍ Phương trình $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\ne 1,\ b>0 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$.

❍ Phương trình $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).\log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)} > \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a > g(x)$.

## *Dạng 7.5.* **Chứa tham số**

- Sử dụng PP giải BPT logarit kết hợp công thức, tính chất của mũ, lũy thừa, logarit.
- Khai thác điều kiện bài toán.
- Xử lý bài toán và chọn giá trị $m$ thỏa ĐK bài toán (cách *"mò"*).

Chương 02
Chủ đề 08

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

# BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

| | | |
|---|---|---|
| *Dạng 01.* $\log_a x > b\ (a>0; a\neq 1)$. | $a>1$ | $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$ |
| | $0<a<1$ | $\log_a x > b \Leftrightarrow x < a^b$. |
| *Dạng 02.* $\log_a x < b\ (a>0; a\neq 1)$. | $a>1$ | $\log_a x < b \Leftrightarrow x < a^b$ |
| | $0<a<1$ | $\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b$. |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 8.1.* Bất phương trình logarit cơ bản

❍ Ta có hai chú ý sau:

☑ $\log_a u < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 0<u<a^b & \text{khi } a>0 \\ u>a^b & \text{khi } 0<a<1 \end{array}\right.$. ☑ $\log_a u > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u>a^b & \text{khi } a>1 \\ 0<u<a^b & \text{khi } 0<a<1 \end{array}\right.$.

### *Dạng 8.2.* Đưa về cùng cơ số

☞ Dùng biến đổi logarit để đưa về cùng cơ số $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 0<u<v & \text{khi } a>1 \\ u>v>0 & \text{khi } 0<a<1 \end{array}\right.$.

### *Dạng 8.3.* Đặt ẩn phụ

❍ Tìm một $\log_a f(x)$ chung, đặt làm ẩn phụ $t$ để đưa bất phương trình về bất phương trình ẩn $t$ giải bất phương trình tìm $t$ sau đó tìm $x$.

★ ***Chú ý:*** Nếu đặt $t=\log_a x \Rightarrow \log_{\frac{1}{a}} x = -t, \log_{a^2} x = \frac{1}{2}t, \log_a^2 x = (\log_a x)^2 = t^2, \log_x a = \frac{1}{t}$.

### *Dạng 8.4.* Mũ hóa

❍ Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các bất phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

$$\log_a f(x) > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)>a^{g(x)} \end{cases} & \textit{khi } a>1 \\ \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<a^{g(x)} \end{cases} & \textit{khi } 0<a<1 \end{array}\right..$$

### *Dạng 8.5.* Chứa tham số

❍ Sử dụng PP giải BPT logarit kết hợp công thức, tính chất của mũ, lũy thừa, logarit.
❍ Khai thác điều kiện bài toán.
❍ Xử lý bài toán và chọn giá trị $m$ thỏa ĐK bài toán (cách *"mò"*).

Chương 03
Chủ đề 01

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

# NGUYÊN HÀM

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $K$ ($K$ là khoảng, đoạn hay nửa khoảng).

Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $K$ nếu $F'(x)=f(x)\ \forall x\in K$.

***Ký hiệu:*** $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

### 2. Định lý:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$ thì:

- Với mỗi hằng số $C$, hàm $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$.
- Mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$ đều có dạng $F(x)+C$, với $C$ là một hằng số.

$\longrightarrow$ Do đó $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$.

### 3. Tính chất:

- $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$ và $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.
- $\int k\cdot f(x)\mathrm{d}x=k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k\neq 0$.
- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

### 4. Định lí:

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $K$ đều có nguyên hàm trên $K$.

### 5. Bảng nguyên hàm cơ bản:

| | |
|---|---|
| **(1).** $\int 0\,dx = C$ | **(2).** $\int dx = x + C$ |
| **(3).** $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\left(\alpha \neq -1\right)$ | **(14).** $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\left(\alpha \neq -1\right)$ |
| **(4).** $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$ | **(15).** $\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{(ax+b)^2} + C$ |
| **(5).** $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$ | **(16).** $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$ |
| **(6).** $\int e^x dx = e^x + C$ | **(17).** $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ |
| **(7).** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | **(18).** $\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$ |
| **(8).** $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ | **(19).** $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ |
| **(9).** $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ | **(20).** $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ |
| **(10).** $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ | **(21).** $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$ |
| **(11).** $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ | **(22).** $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$ |
| **(12).** $\int \left(1+\tan^2 x\right)dx = \tan x + C$ | **(23).** $\int \left(1+\tan^2(ax+b)\right)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$ |
| **(13).** $\int \left(1+\cot^2 x\right)dx = -\cot x + C$ | **(24).** $\int \left(1+\cot^2(ax+b)\right)dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$ |

### 6. Bảng nguyên hàm mở rộng:

| | |
|---|---|
| **(1).** $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ | **(8).** $\int \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$ |
| **(2).** $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$ | **(9).** $\int \arccos\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$ |
| **(3).** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$ | **(10).** $\int \arctan\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right) + C$ |
| **(4).** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + C$ | **(11).** $\int \mathrm{arc}\cot\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\,\mathrm{arc}\cot\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right) + C$ |
| **(5).** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert + C$ | **(12).** $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert + C$ |
| **(6).** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert + C$ | **(13).** $\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)}{a^2+b^2} + C$ |
| **(7).** $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$ | **(14).** $\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$ |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 1.1.* Nguyên hàm cơ bản

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

**Định nghĩa:**

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $K$ ($K$ là khoảng, đoạn hay nửa khoảng).

Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $K$ nếu $F'(x)=f(x)\ \forall x\in K$.

***Ký hiệu:*** $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

**Tính chất:**

- $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$ và $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.
- $\int k\cdot f(x)\mathrm{d}x=k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k\neq 0$.
- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

### *Dạng 1.2.* Nguyên hàm đổi biến

#### 1.2.1. Đổi biến loại 1 *(Lượng giác hóa)*

❍ Dấu hiệu để ta dùng phương pháp "Đổi biến loại 01":

| *Dấu hiệu* | *Cách đặt* |
|---|---|
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x=a\sin t$, với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ |
| $\sqrt{2ax-x^2}$ | $x-a=a\sin t$, với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ |
| $a^2+x^2$ | $x=a\tan t$, với $-\frac{\pi}{2}< t<\frac{\pi}{2}$ |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x=\frac{a}{\sin t}$ với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ và $t\neq 0$ |
| $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ | $x=a\cos 2t$, với $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ |
| $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ | $x-a=(b-a)\sin^2 t$, với $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ |

Khi đó ta có các bước giải như sau:

**Bước 1:** Đặt $x=\varphi(t)$ với $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $K$, được chọn hợp lý.

**Bước 2:** Lấy vi phân của $x$ theo biến số $t$, cụ thể là $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

**Bước 3:** Thay cả $x=\varphi(t)$ lẫn $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$ vào $\int f(x)\mathrm{d}x$ được bài toán mới theo $t$.

**Bước 4:** Giải nguyên hàm mới $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ được kết quả $F(t)$ theo $t$, sau đó thay biểu thức $x=\varphi(t)$ vào $F(t)$ để tìm được nguyên hàm theo biến $x$.

#### 1.2.2. Đổi biến loại 2

❍ Dấu hiệu để ta dùng phương pháp "Đổi biến loại 02": $\int f(t(x))\cdot t'(x)\mathrm{d}x$

| *Dấu hiệu* | *Cách đặt* |
|---|---|
| $\int\frac{\alpha\cdot t'(x)}{t(x)}\mathrm{d}x$ | Biểu thức cần đặt $t$ là mẫu thức $t(x)$ |

| | |
|---|---|
| $\int f\left(e^{t(x)}\right)\cdot t'(x)\mathrm{d}x$ | Biểu thức cần đặt $t$ là phần số mũ của $e$ |
| $\int f\left(t(x)\right)\cdot t'(x)\mathrm{d}x$ | Biểu thức cần đặt $t$ là biểu thức chứa trong dấu ngoặc |
| $\int f\left(\sqrt[n]{t(x)}\right)\cdot t'(x)\mathrm{d}x$ | Đặt căn thức có trong dấu tích phân |
| $\int f(\ln x)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ | Đặt biểu thức chứa $\ln x$ nếu có $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ kèm theo |

Khi đó ta có các bước giải như sau:

**Bước 1:** Đặt $t=t(x)$. (hoặc đặt $t=a\cdot t(x)+b$ tùy vào bài cụ thể).

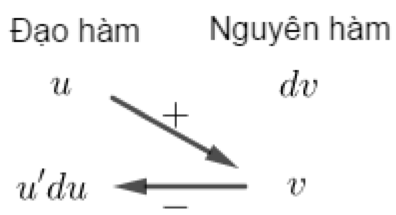
**Bước 2:** Lấy vi phân của $t$ theo $x$ , cụ thể $\mathrm{d}t=t'(x)\mathrm{d}x$.

**Bước 3:** Thay cả $t=t(x)$ lẫn $\mathrm{d}t=t'(x)\mathrm{d}x$ vào $\int f\left(t(x)\right)\cdot t'(x)\mathrm{d}x$.

**Bước 4:** Giải nguyên hàm mới $\int f(t)dt$, được kết quả $F(t)$ theo $t$ , sau đó thay biến vào kết quả để tìm được nguyên hàm theo biến $x$.

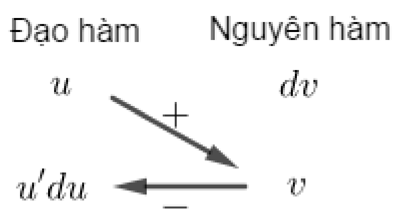
## *Dạng 1.3.* Nguyên hàm từng phần

❍ Kẻ bảng có dạng:




Tích phân có dạng $\int u\,\mathrm{d}v$, với $u$ và $v$ là 2 trong 4 loại ***log – đa – lượng - mũ***.

Tính $I=\int u\,\mathrm{d}v$ bằng cách kẻ bảng:




**Bước 1:** Chọn $u$ đặt vào cột "Đạo hàm".
**Bước 2:** Chọn $dv$ đặt vào cột "Nguyên hàm".
**Bước 3:** Tính theo tính chất từng cột.
**Bước 4:** Ta có kết quả $I=\int u\,\mathrm{d}v=u.v-\int v\,\mathrm{d}u$.

***Quy tắc:***

- Trong đó ta chọn $u$ theo qui tắc: **Nhất – log; Nhì – đa; Tam – mũ; Tứ – lượng**.
- Còn $dv$ là phần còn lại trong dấu $\int$ .
- Dấu ở các mũi tên: *mũi tên đầu tiên* luôn luôn là dấu $+$ và *đan xen dấu* cho nhau.

## *Dạng 1.4.* Nguyên hàm hàm số hữu tỉ

Xét $f(x)$ là hàm hữu tỉ có dạng $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

### Trường hợp 1: Bậc tử $\geq$ Bậc mẫu

$\longrightarrow$ Chia đa thức được: $M$ là thương, $N$ là dư.

Khi đó: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = \int\left(M + \frac{N}{Q(x)}\right)\mathrm{d}x$.

### Trường hợp 2: Bậc tử < Bậc mẫu

Ta có các loại sau:

**Loại 2.1.** $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \ (const) \\ Q(x) = ax+b \end{cases}$ thì: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\gamma}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{\gamma}{a}\ln|ax+b| + C$

**Loại 2.2.** $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \ (const) \\ Q(x) = ax^2+bx+c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

**2.2.1.** $Q(x)$ có $\Delta > 0$

*Nhận dạng:* ① Tử là hằng số.
② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

$$\rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \int \frac{\gamma}{a(x-x_1)(x-x_2)}\mathrm{d}x = \frac{\gamma}{a(x_2-x_1)}\int\left(\frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_1}\right)\mathrm{d}x \text{ với } x_2 > x_1$$

**2.2.2.** $Q(x)$ có $\Delta = 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \int \frac{\gamma}{a(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\gamma}{a(x-x_0)} + C$.

*Nhận dạng:* ① Tử là hằng số.
② Mẫu có nghiệm kép.

**2.2.3.** $Q(x)$ có $\Delta < 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \frac{\gamma}{a}\int \frac{1}{(x-x_0)^2+k^2}\mathrm{d}x \rightarrow$ Lượng giác hóa.

*Nhận dạng:* ① Tử là hằng số.
② Mẫu vô nghiệm.

**Loại 2.3.** $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = mx+n \\ Q(x) = ax^2+bx+c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

**2.3.1.** $Q(x)$ có $\Delta > 0$.

*Nhận dạng:* ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

❒ **Cách 1:** $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \int \frac{C(x-x_1)+D(x-x_2)}{a(x-x_1)(x-x_2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int\left(\frac{C}{x-x_2} + \frac{D}{x-x_1}\right)\mathrm{d}x$

❒ **Cách 2:** Xét $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \int \frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)}\mathrm{d}x$

Khi đó ta có: $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \int \frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(X\cdot\ln|x-x_1| + Y\cdot\ln|x-x_2|\right) + C$.

Đến đây ta chỉ cần tìm $X \& Y$ bằng cách giải hệ: $\begin{cases} \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{m} \longleftarrow he\,so\,truoc\,x \\ \boxed{-x_2} \quad \boxed{-x_1} \quad \boxed{n} \longleftarrow he\,so\,tu\,do \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = ? \\ Y = ? \end{cases}$

*Lưu ý:* **(1)** Cách lấy các "hệ số" bỏ vào hệ ta lấy theo thứ tự từ **PHẢI** qua **TRÁI**.
**(2)** Với tử là hằng số, ta vẫn có thể áp dụng được cách này.
*(Áp dụng được cho* **2.2.1***)*

*Ví dụ:* $I=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ ta xem hệ số $m=0$ & $n=1$.

**(3)** Khuyết vị trí nào thì xem hệ số đó $=0$.

*Ví dụ:* $I=\int \frac{n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ khuyết "$mx$" nên hệ số $m=0$.

**(4)** Chú ý hệ số $a$, bài đơn giản thường thấy $a=1$, bài ít thấy $a\neq 1$.

**2.3.2.** $Q(x)$ có $\Delta=0 \to \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\int \frac{mx+n}{a(x-x_0)^2}\mathrm{d}x \to$ Đặt $\begin{cases} t=x-x_0 \to x=t+x_0 \\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{cases}$.

*Nhận dạng:* ① Bậc tử < Bậc mẫu.

② Mẫu có nghiệm kép.

**2.3.3.** $Q(x)$ có $\Delta<0$

*Nhận dạng:* ① Bậc tử < Bậc mẫu.

② Mẫu có nghiệm kép.

$$\to \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)'+\varepsilon}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\underbrace{\int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x}_{H}+\underbrace{\int \frac{\varepsilon}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x}_{K}.$$

Tính $H=\int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x \to$ Đặt $t=ax^2+bx+c \Rightarrow \mathrm{d}t=(ax^2+bx+c)'\mathrm{d}x$.

Tính $K=\int \frac{\varepsilon}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x \to$ Lượng giác hóa.

**Chú ý:** Một vài cách tách phân thức cần nhớ:

① $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$

② $\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ với $\Delta=b^2-4ac<0$

③ $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$

## *Dạng 1.5.* Nguyên hàm hàm số vô tỉ

Xét $f(x)$ là hàm vô tỉ có dạng $f(x)=P(x)\cdot\sqrt{Q(x)}\rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=\int P(x)\cdot\sqrt{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Thông thường ở dạng hàm vô tỉ ta sẽ dùng *phương pháp đổi biến*.

Và ta nhẩm được $\left(Q(x)\right)'=P(x)$. Khi đó:

**Bước 1:** Đặt $t=\sqrt{Q(x)}$.

**Bước 2:** Tính vi phân $\mathrm{d}t$:

Nhưng để vi phân thuận tiện, ta bình phương hai vế $t^2=Q(x)$.

$\longrightarrow 2t\cdot\mathrm{d}t=\underbrace{Q'(x)}_{P(x)}\cdot\mathrm{d}x\Rightarrow 2t\cdot\mathrm{d}t=P(x)\cdot\mathrm{d}x$

**Bước 3:** Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\int 2t^2\,\mathrm{d}t=\ldots$

## *Dạng 1.6.* Nguyên hàm hàm số lượng giác

| | | |
|---|---|---|
| **01** | *Công thức cơ bản* | ① $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$<br>② $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$<br>③ $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq k\pi$<br>④ $\tan\alpha.\cot\alpha=1,\ \alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}$ |
| **02** | *Công thức cộng* | ① $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$<br>② $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$<br>③ $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$ |
| **03** | *Công thức nhân đôi* | ① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$<br>② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$<br>③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \begin{cases}\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$ |
| **04** | *Công thức hạ bậc* | ① $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$<br>② $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$<br>③ $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ |
| **05** | *Công thức tích thành tổng* | ① $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$<br>② $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$<br>③ $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$<br>④ $\cos a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$ |

## *Dạng 1.7.* Nguyên hàm có điều kiện

### Bài toán 01:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=....$ Tính $F(x)$ biết $F(a)=b$.

**Bước 1:** Dùng các phương pháp tính nguyên hàm để tìm được $F(x;C)$.

**Bước 2:** Xử lý $F(a)=b$ bằng cách thay vào $F(x;C)$. Ta được $F(a;C)=b\Rightarrow C=?$

**Bước 3:** Khi đó ta được $F(x)$ có cụ thể hằng số $C$.

### Bài toán 02:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=....$ Tính $F(c)$ biết $F(a)=b$.

**Bước 1:** Dùng các phương pháp tính nguyên hàm để tìm được $F(x;C)$.

**Bước 2:** Xử lý $F(a)=b$ bằng cách thay vào $F(x;C)$. Ta được $F(a;C)=b\Rightarrow C=?$

**Bước 3:** Khi đó ta được $F(x)$ có cụ thể hằng số $C$ và tính $F(c)$.

Bên cạnh đó, ta có thể dùng cách "***Tích phân***" để xử lý bài toán:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=....$ Tính $F(c)$ biết $F(a)=b$.

***Lời giải***

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$

Xét $a<c$, khi đó: $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^c=F(c)-F(a)\Leftrightarrow F(c)=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+F(a)$

Chương 03

Chủ đề 02

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

# TÍCH PHÂN

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ $a \to b$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

### 2. Ý nghĩa hình học:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và ***không âm*** trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích $S$ của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục $Ox$ và hai đường thẳng $x=a;x=b$.

Vậy diện tích hình thang cong: $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

### 3. Tính chất.

| | |
|---|---|
| 1 | $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0). |
| 2 | $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ (Tích phân đảo cận $\to$ thêm dấu trừ). |
| 3 | $\int_a^b \alpha.f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $\alpha \in \mathbb{R}$. |
| 4 | $\int_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. |
| 5 | Trong đoạn $[a;b]$, tồn tại $c\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. |
| 6 | Nếu $f(x)$ là hàm chẵn $(f(-x)=f(x))$ thì $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$. |
| 7 | Nếu $f(x)$ là hàm lẻ $(f(-x)=-f(x))$ thì $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

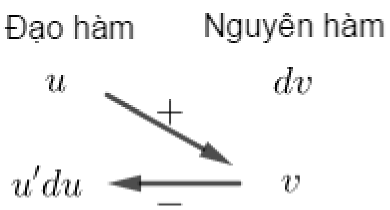
### *Dạng 2.1.* Tích phân áp dụng tính chất & bảng nguyên hàm cơ bản

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

| | |
|---|---|
| 1 | $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0). |
| 2 | $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ (Tích phân đảo cận $\to$ thêm dấu trừ). |
| 3 | $\int_a^b \alpha.f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $\alpha \in \mathbb{R}$. |
| 4 | $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. |
| 5 | Trong đoạn $[a;b]$, tồn tại $c \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. |
| 6 | Nếu $f(x)$ là hàm chẵn $\left(f(-x) = f(x)\right)$ thì $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$. |
| 7 | Nếu $f(x)$ là hàm lẻ $\left(f(-x) = -f(x)\right)$ thì $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. |

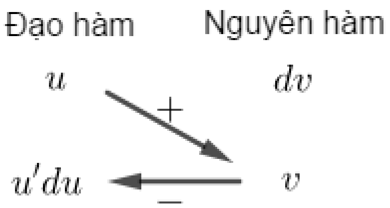
### *Dạng 2.2.* Tích phân từng phần

❍ Kẻ bảng có dạng:




Tích phân có dạng $\int u\mathrm{d}v$, với $u$ và $v$ là 2 trong 4 loại *log – đa – lượng - mũ*.

Tính $I = \int u\mathrm{d}v$ bằng cách kẻ bảng:




**Bước 1:** Chọn $u$ đặt vào cột "Đạo hàm".
**Bước 2:** Chọn $dv$ đặt vào cột "Nguyên hàm".
**Bước 3:** Tính theo tính chất từng cột.
**Bước 4:** Ta có kết quả $I = \int u\mathrm{d}v = u.v - \int v\mathrm{d}u$.

*Quy tắc:*

- Trong đó ta chọn $u$ theo qui tắc: **Nhất – log; Nhì – đa; Tam – mũ; Tứ – lượng**.
- Còn $dv$ là phần còn lại trong dấu $\int$ .
- Dấu ở các mũi tên: *mũi tên đầu tiên* luôn luôn là dấu $+$ và *đan xen dấu* cho nhau.

## Dạng 2.3. Tích phân đổi biến loại 1

Tính tích phân $J=\int_a^b \underbrace{\varphi(x).\varphi'(x)}_{f(x)}\mathrm{d}x$

**Bước 1:** Đặt $t=\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta nhẩm được $\varphi'(x).\mathrm{d}x$.

**Bước 2:** Tính vi phân $dt=\varphi'(x)\mathrm{d}x$ và đổi cận $\begin{cases} x=a\to t=\varphi(a) \\ x=b\to t=\varphi(b)\end{cases}$.

**Bước 3:** Biểu thị $f(x)\mathrm{d}x$ theo $t$ và $\mathrm{d}t$.

**Bước 4:** Khi đó $J=\int_a^b \underbrace{\varphi(x).\varphi'(x)}_{f(x)}\mathrm{d}x=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t$.

① Nếu $\sqrt{a^2-x^2}$ đặt $x=a\sin t$ hoặc $x=a\cos t$

② Nếu $\sqrt{x^2-a^2}$ đặt $x=\frac{a}{\sin t}$ hoặc $x=\frac{a}{\cos t}$

③ Nếu $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ thì đặt $x=a\cos 2t$

④ Nếu $\sqrt{(x-a)(b-x)},(a<b)$ đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$

⑤ Nếu $\sqrt{x^2+a^2}$ đặt $x=a\tan t$ hoặc $x=a\cos t$

## Dạng 2.4. Tích phân đổi biến loại 2

Tính tích phân $J=\int_a^b \underbrace{\varphi(x).\varphi'(x)}_{f(x)}\mathrm{d}x$

**Bước 1:** Đặt $t=\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta nhẩm được $\varphi'(x).\mathrm{d}x$.

**Bước 2:** Tính vi phân $dt=\varphi'(x)\mathrm{d}x$ và đổi cận $\begin{cases} x=a\to t=\varphi(a) \\ x=b\to t=\varphi(b)\end{cases}$.

**Bước 3:** Biểu thị $f(x)\mathrm{d}x$ theo $t$ và $\mathrm{d}t$.

**Bước 4:** Khi đó $J=\int_a^b \underbrace{\varphi(x).\varphi'(x)}_{f(x)}\mathrm{d}x=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t$.

## Dạng 2.5. Tích phân kết hợp đổi biến & từng phần

**Trường hợp 1:** Từng phần – Đổi biến:

Tính $I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, áp dụng "*Từng phần*" ta được $I=h(x)\Big|_a^b+\int_a^b p(x)\mathrm{d}x$.

Lúc này ta áp dụng "*Đổi biến*" để tính $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x$.

**Trường hợp 2:** Đổi biến – Từng phần:

Tính $I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, áp dụng "*Đổi biến*" ta được $I=\int_{t=u(a)}^{t=u(b)} k(x)p(x)\mathrm{d}x$.

Lúc này ta áp dụng "*Từng phần*" để tính $\int_{t=u(a)}^{t=u(b)} k(x)p(x)\mathrm{d}x$.

## *Dạng 2.6.* Tích phân chứa trị tuyệt đối

### Cách 1:

✈ Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1;x_2;...x_n\in[a;b]$

✈ Khi đó $I=\int_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow I=\left|\int_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

✈ Tính mỗi tích phân thành phần

### Cách 2:

✈ Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$.

✈ Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.

✈ Áp dụng $|A|=\begin{cases}A & khi\ A>0\\ -A & khi\ A<0\end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int_a^b ...$.

✈ Tính mỗi tích phân thành phần

## *Dạng 2.7.* Tích phân dựa vào đồ thị

### Áp dụng ý nghĩa hình học:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$ là diện tích $S$ của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục $Ox$ và hai đường thẳng $x=a;x=b$.

## *Dạng 2.8.* Tích phân hàm chẵn lẻ

### Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền $D$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số ***chẵn*** nếu thỏa $\begin{cases}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ \forall x\in D: f(-x)=f(x)\end{cases}$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số ***lẻ*** nếu thỏa $\begin{cases}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ \forall x\in D: f(-x)=-f(x)\end{cases}$.

Khi đó, trong dấu $\int$ :

- Nếu hàm $f(x)$ CHẴN thì, $\begin{cases}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\\ \int_{-a}^{a}\dfrac{f(x)}{1+c^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\end{cases}$.
- Nếu hàm $f(x)$ LẺ thì, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

## *Dạng 2.9.* Tích phân hàm cho nhiều công thức

### ⌘ Bài toán 1:

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}g(x) & \text{khi } x\le b\\ h(x) & \text{khi } x>b\end{cases}$ liên tục trên $D$. Tính $J=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

*Xét* $b\in[a;c]$.

✈ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$

✈ **Bước 2.** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

✈ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

**⌘ Bài toán 2:**

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\le b \\ h(x;m) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên $D$. Tính $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

*Xét* $b\in[a;c]$.

✈ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

Tức là kiểm tra:

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$

✈ **Bước 2.** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

✈ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

## *Dạng 2.10.* Tích phân liên quan max – min

**⌘ Bài toán:** Tính $I=\int\limits_a^b \min\{f(x);g(x)\}\mathrm{d}x$ hoặc $I=\int\limits_a^b \max\{f(x);g(x)\}\mathrm{d}x$.

Ta xét $I=\int\limits_a^b \min\{f(x);g(x)\}\mathrm{d}x$:

✈ **Bước 1.** Giải phương trình $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x\in[a;b]$ thì nhận nghiệm đó.

Giả sử ta được $x=m\in[a;b]$.

✈ **Bước 2.** Xét hiệu $f(x)-g(x)$, giả sử:

- Trên $[a;m]: f(x)-g(x)>0 \Rightarrow \min\{f(x);g(x)\}=g(x)$.
- Trên $[m;b]: f(x)-g(x)<0 \Rightarrow \min\{f(x);g(x)\}=f(x)$.

✈ **Bước 3.** Khi đó $I=\int\limits_a^b \min\{f(x);g(x)\}\mathrm{d}x=\int\limits_a^m g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_m^b f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $I=\int\limits_a^b \max\{f(x);g(x)\}\mathrm{d}x$ ta áp dụng tương tự.

## *Dạng 2.11.* Tích phân hàm "ẩn"

### 2.11.1. Dùng phương pháp đổi biến

**Dạng 1:** Cho $\int\limits_a^b u'(x).f[u(x)]\mathrm{d}x$, tính $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hoặc $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, tính $\int\limits_a^b u'(x).f[u(x)]\mathrm{d}x$.

Đối với loại bài tập này chúng ta sẽ đổi biến $t=u(x)$

✈ **Lưu ý :** $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u$

**Dạng 2:** Tính $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, biết $f(x)$ thỏa: $A.f(x)+B.u'.f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$.

Đối với loại bài tập này, trước khi lấy tích phân hai về ta cần chú ý rằng :

① Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số $A,B,C$.

② Nếu $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì $\int\limits_a^b f\left(a+b-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$

③ Với $\begin{cases} u\left(a\right)=a \\ u\left(b\right)=b \end{cases}$ thì $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{A+B+C}\int\limits_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

③ Với $\begin{cases} u\left(a\right)=b \\ u\left(b\right)=a \end{cases}$ thì $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{A-B+C}\int\limits_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

### 2.11.2. Dùng phương pháp từng phần

Xuất phát từ đạo hàm hàm số tích, ta có: $\left[u\left(x\right).v\left(x\right)\right]'=u'\left(x\right).v\left(x\right)+v'\left(x\right).\mathrm{u}\left(x\right)$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\int\limits_a^b\left[u\left(x\right).v\left(x\right)\right]'\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left[u'\left(x\right).v\left(x\right)+v'\left(x\right).u\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_a^b u\left(x\right)\mathrm{d}\left(v\left(x\right)\right)=u\left(x\right)v\left(x\right)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\left(x\right)\mathrm{d}\left(u\left(x\right)\right)$$

$$\text{Hay }\int\limits_a^b u\left(x\right).v'\left(x\right)\mathrm{d}x=u\left(x\right)v\left(x\right)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\left(x\right).u'\left(x\right)\mathrm{d}x$$

## *Dạng 2.12.* Tích phân liên quan phương trình vi phân

### 2.12.1. Biểu thức đạo hàm

**(1) .** $u(x)\cdot f'(x)+u'(x)\cdot f(x)=h(x)$ **(2).** $\dfrac{u'(x).f(x)-u(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}=h(x)$

***Phương pháp giải:***

Áp dụng các công thức: $(uv)'=u'v+v'u$ và $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

**(1).** $u(x)\cdot f'(x)+u'(x)\cdot f(x)=h(x)\Leftrightarrow\left[u(x)\cdot f(x)\right]'=h(x)\Rightarrow u(x)\cdot f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

**(2).** $\dfrac{u'(x)\cdot f(x)-u(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}=h(x)\Leftrightarrow\left[\dfrac{u(x)}{f(x)}\right]'=h(x)\Rightarrow\dfrac{u(x)}{f(x)}=\int h(x)\mathrm{d}x$

### 2.12.2. Biểu thức tổng hiệu

**(1) .** $f'(x)+f(x)=h(x)$ **(2).** $f'(x)-f(x)=h(x)$

***Phương pháp giải:***

**(1).** Biến đổi: $f'(x)+f(x)=h(x)\Rightarrow \mathrm{e}^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x.h(x)$

$$\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow e^x\cdot f(x)=\int e^x\cdot h(x)\mathrm{d}x$$

**(2).** Biến đổi: $f'(x)-f(x)=h(x)\Rightarrow \mathrm{e}^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}.h(x)$

$$\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow e^{-x}\cdot f(x)=\int e^{-x}\cdot h(x)\mathrm{d}x$$

### 2.12.2. Bài toán tổng quát $\boldsymbol{f'(x)+p(x).f(x)=h(x)}$

***Phương pháp giải:***

Nhân 2 vế với $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ ta được: $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.f'(x)+e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot p(x)\cdot f(x)=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow\left[e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot f(x)\right]'=h(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.f(x)=\int h(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

***Tổng quát:*** $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.f(x)=\int h(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

## Dạng 2.13. Bất đẳng thức tích phân

### ⌘ Tính chất 01:

Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó:

① Nếu $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

② Nếu $f(x)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0$. Hệ quả $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

③ $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

### ⌘ Tính chất 02:

Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$, $g(x)\ne 0$. Khi đó:

④ Bất đẳng thức Holder (*Cauchy – Schwarz*): $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=k.g(x)$ với $k\in\mathbb{R}$

⑤ $\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\cdot\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

**Bài toán:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[a;b]$ thỏa mãn các điều kiện:

**(1)** $f(m)=n$ **(2)** $\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x=A$ **(3)** $\int_a^b g(x).f(x)\mathrm{d}x=B$

*Với $g(x)$ là hàm số đã biết và liên tục trên $[a;b]$*

Tính $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**Lời giải:** Tính tích phân $\int_a^b g(x).f(x)\mathrm{d}x=B$ bằng phương pháp từng phần $\to \int_a^b h(x).f'(x)\mathrm{d}x=B'$

### ☺ Hướng 1:

**Bước 1.** Mặt khác

$$\int_a^b h(x).f'(x)\mathrm{d}x \le \underbrace{\int_a^b h^2(x)\mathrm{d}x}_{casio}\cdot\underbrace{\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x}_{giathiet}$$

**Bước 2.** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'(x)=k\cdot h(x)$.

Nguyên hàm 2 vế $\Rightarrow f(x;k;C)=?$

**Bước 3.** Dùng $f(m)=n\Rightarrow C(k)=?$

**Bước 4.** Dùng $\int_a^b h(x).f'(x)\mathrm{d}x=B'$ *(Ở bước 1)*

$\Rightarrow k=?$

$\longrightarrow$ Cuối cùng có đủ $x;k;C\Rightarrow f(x)$ hoàn chỉnh

$\longrightarrow$ YCBT.

### ☺ Hướng 2:

**Bước 1.** Giả sử tính được $\int_a^b h^2(x)\mathrm{d}x=C$

**Bước 2.** Tìm $\gamma$ thỏa:

$$\underbrace{\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x}_{A}-2\boxed{\gamma}\underbrace{\int_a^b h(x).f'(x)\mathrm{d}x}_{B'}+\boxed{\gamma^2}\underbrace{\int_a^b h^2(x)\mathrm{d}x}_{C}=0$$

$\Leftrightarrow A-2\boxed{\gamma}B'+\boxed{\gamma}C=0\Leftrightarrow \gamma=?$.

**Bước 3.** Lúc này $\int_a^b (f'(x)-\gamma.h(x))^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f'(x)-\gamma.h(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\gamma.h(x)$

**Bước 4.** Nguyên hàm 2 vế $\Rightarrow f(x;C)=?$

Dùng $f(m)=n\Rightarrow C=?$

$\longrightarrow$ $f(x)$ hoàn chỉnh

Chương 03
Chủ đề 03

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

# ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

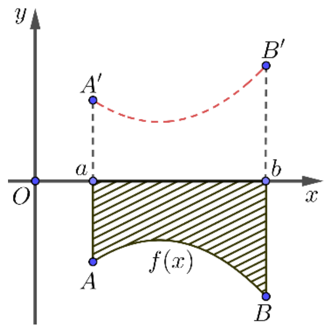
## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong & trục hoành:

- Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$.

  Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f\left(x\right)$, $Ox$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$.

  Khi đó diện tích hình thang cong được tính: $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.




- Trường hợp $f\left(x\right)\le 0$ trên $\left[a;b\right]$, ta có $-f\left(x\right)\ge 0$.

  $S$ hình thang cong $aABb=S$ hình thang cong $aA'B'b$.

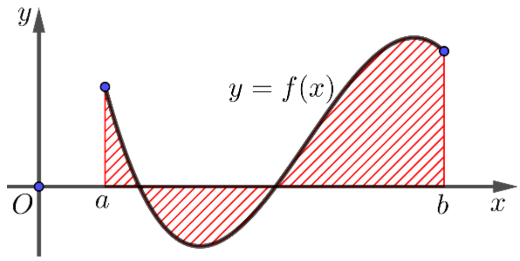
  ($aA'B'b$ *là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành*).

  Do đó: $S=S_{aABb}=S_{aA'B'b}=\int\limits_a^b\left(-f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x$

⌘ **Tổng quát:**

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính:

$$S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$$




### 2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong:

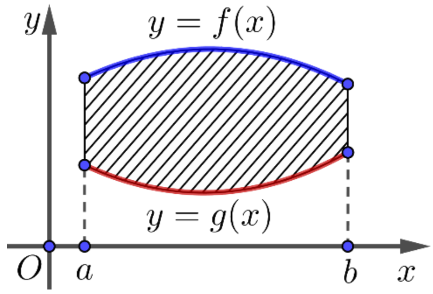
- Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

  Gọi $D$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $x=a$, $x=b$.

  Xét trường hợp $f\left(x\right)\ge g\left(x\right)\forall x\in\left[a;b\right]$.

  Gọi $S_1;S_2$ là diện tích hai hình thang cong giới hạn bởi

  $\begin{cases}Ox\\ x=a\\ x=b\end{cases}$ và $y=f\left(x\right);y=g\left(x\right)$.




  Khi đó diện tích: $S=S_1-S_2=\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

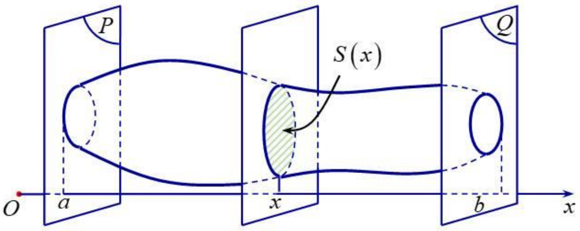
⌘ **Tổng quát:**

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính:

$$S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$$

### 3. Thể tích vật thể:

- Gọi $B$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại các điểm $a$ và $b$, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm $x$, $(a \le x \le b)$.



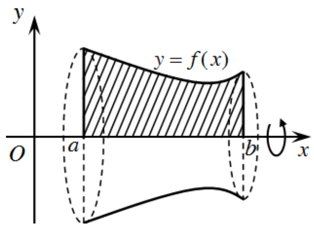

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

Khi đó, thể tích của vật thể $B$ được xác định: $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

### 4. Thể tích khối tròn xoay:

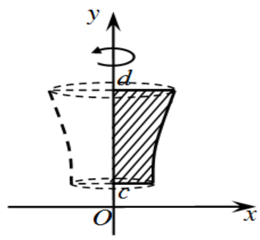
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục $Ox$:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$



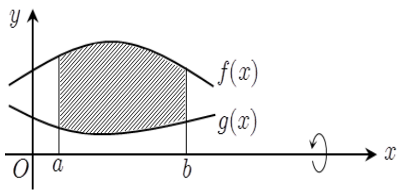

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục $Oy$:

$$V = \pi\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y$$




- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với $Ox$) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục $Ox$:

$$V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|\mathrm{d}x$$



## *Dạng 3.1.* Câu hỏi lý thuyết

### ⌘ *Diện tích hình phẳng:*

**(1)** Giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=a \\ x=b \end{cases} \rightarrow S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

**(2)** Giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases} \rightarrow S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

### ⌘ *Thể tích vật thể:*

Gọi $B$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc trục $Ox$ tại các điểm $a$ và $b$, $S(x)$ là diện tích thiết diện vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc trục $Ox$ tại điểm $x$, $(a \le x \le b)$.

Khi đó, thể tích của vật thể $B$ được xác định: $V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

### ⌘ *Thể tích khối tròn xoay:*

**(1)** Giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ và quay quanh trục $Ox \rightarrow V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

**(2)** Giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ và quay quanh trục $Ox \rightarrow V=\pi\int_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|\mathrm{d}x$.

**(3)** Giới hạn: $\begin{cases} x=g(y) \\ Oy \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ và quay quanh trục $Oy \rightarrow V=\pi\int_a^b g^2(y)\,\mathrm{d}y$.

## *Dạng 3.2.* Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), Ox, x=a, x=b

⌘ ***Diện tích hình phẳng giới hạn:*** $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=a \\ x=b \end{cases} \rightarrow S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

**Bước 1:** Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.

**Bước 2:** Tính $S=\int_a^{x_1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,\mathrm{d}x+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)|\,\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

✈ Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

## *Dạng 3.3.* Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), y=g(x), x=a, x=b

⌘ *Diện tích hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases} \to S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

**Bước 1:** Giải $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.

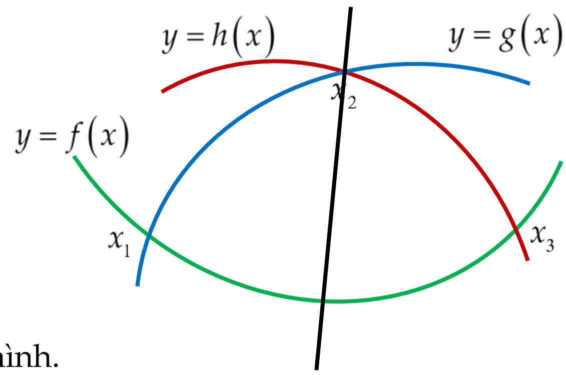
**Bước 2:** Tính $S=\int_a^{x_1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_a^{x_1}(f(x)-g(x))\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}(f(x)-g(x))\mathrm{d}x\right|$$

✈ Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

## *Dạng 3.4.* Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), y=g(x), y=h(x)

⌘ *Diện tích hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ y=h(x) \end{cases}$.




**Bước 1:** Giải $f(x)=g(x)$ có nghiệm $x_1$.

Giải $g(x)=h(x)$ có nghiệm $x_2$.

Giải $g(x)=h(x)$ có nghiệm $x_3$.

Giả sử $x_1<x_2<x_3$ được biểu diễn như hình.

**Bước 2:** Khi đó $S=\int_{x_1}^{x_2}|g(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}|h(x)-f(x)|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}(g(x)-f(x))\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}(h(x)-f(x))\mathrm{d}x\right|$$

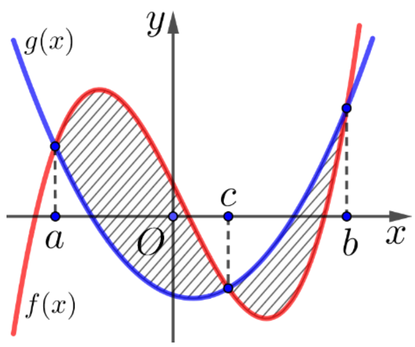
## *Dạng 3.5.* Diện tích hình phẳng dựa vào đồ thị

● **Trường hợp 1:** $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases} \to$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

**Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow x=c; c\in[a;b]$.

**Bước 2:** Xét hiệu $f(x)-g(x)$ trên các đoạn $[a;c];[c;b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a;c]: f(x)-g(x)>0 \\ [c;b]: f(x)-g(x)<0 \end{cases}$.




**Bước 3:** Khi đó $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$

$$=\int_a^c(f(x)-g(x))\mathrm{d}x+\int_c^b(g(x)-f(x))\mathrm{d}x$$

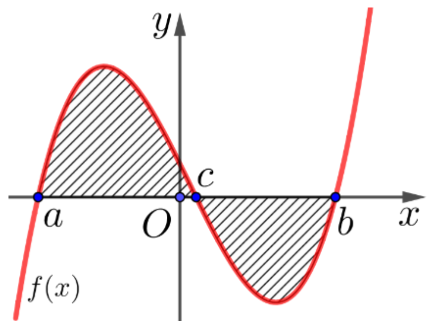
• **Trường hợp 2:** $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_a^b \left| f(x) - 0 \right| dx$ .

**Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy $f(x) - 0 = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

**Bước 2:** Xét hiệu $f(x) - 0$ trên các đoạn $[a;c];[c;b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a;c]: f(x) - 0 > 0 \\ [c;b]: f(x) - 0 < 0 \end{cases}$.

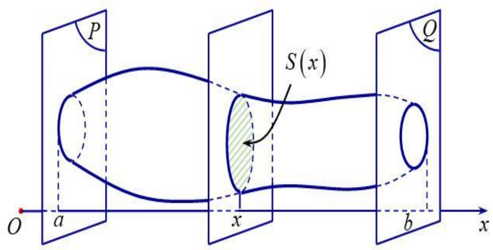
**Bước 3:** Khi đó $S = \int_a^b \left| f(x) - 0 \right| dx = \int_a^c \left( f(x) - 0 \right) dx + \int_c^b \left( 0 - f(x) \right) dx$.




## Dạng 3.6. Thể tích vật thể

Gọi $B$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại các điểm $a$ và $b$, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm $x$, $(a \le x \le b)$

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$




Khi đó, thể tích của vật thể $B$ được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$.

## Dạng 3.7. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi f(x), Ox, x=a, x=b quay quanh Ox

**Bước 1:** Giải phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

**Bước 2:** Khi đó $V = \pi \int_a^b \left( f(x) \right)^2 dx$.

## Dạng 3.8. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi f(x), g(x), x=a, x=b quay quanh Ox

**Bước 1:** Giải phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

**Bước 2:** Khi đó $V = \pi \int_a^c \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx + \pi \int_c^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$.

## Dạng 3.9. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi f(y), g(y), y=a, y=b quay quanh Oy

**Bước 1:** Giải phương trình $f(y) = g(y) \Leftrightarrow y = c; c \in [a;b]$.

**Bước 2:** Khi đó $V = \pi \int_a^c \left| f^2(y) - g^2(y) \right| dy + \pi \int_c^b \left| f^2(y) - g^2(y) \right| dy$.

## Dạng 3.10. Tính giá trị hàm qua diện tích hình phẳng

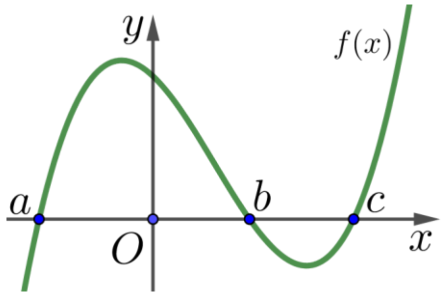
Áp dụng định nghĩa tích phân: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Thì lúc này đề bài yêu cầu so sánh $F(b)$; $F(a)$.

**Bài toán:**

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục có đồ thị như hình. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;c]$.

So sánh $F(a);F(c);F(x_i)\ x_i\in[a;c]$.




**Bước 1:** So sánh $F(a);F(b)$.

Trên $[a;b]: f(x)>0\to\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

Mà $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0\Rightarrow F(b)-F(a)>0\Leftrightarrow F(b)>F(a)$.

**Bước 2:** Tương tự so sánh $F(b);F(c)$.

**Bước 3:** Ta thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}y=f(x)\\Ox\\x=a;x=b\end{cases}$ lớn hơn $\begin{cases}y=f(x)\\Ox\\x=b;x=c\end{cases}$.

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x>\int_b^c|f(x)|\mathrm{d}x\Rightarrow F(b)-F(a)>-F(c)+F(b)\Leftrightarrow -F(a)>-F(c)\to F(a)<F(c).$$

# CHƯƠNG 4. SỐ PHỨC

## 1. Định nghĩa số phức

**Định nghĩa:**

Số phức $z$ có dạng $z = a + bi \quad \left(a, b \in R, i^2 = -1\right)$.

Phần thực của $z$ là $a$, phần ảo của $z$ là $b$.

- Số phức $z = a = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực.
- Số phức $z = bi = 0 + bi$ có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (hay số thuần ảo).
- Số 0 vừa là số thực, vừa là số ảo.

## 2. Số phức liên hợp – số phức nghịch đảo

**Định nghĩa:**

*Số phức liên hợp:*

- Số phức $z = a + bi$ có số phức liên hợp: $z' = a - bi$, ký hiệu: $\overline{z}$

*Số phức nghịch đảo:*

- Số phức $z = a + bi$ có số phức nghịch đảo: $z' = \dfrac{1}{z}$

## 3. Các phép toán

(1) *Phép cộng:* $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(2) *Phép trừ:* $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

(3) *Phép nhân:* $z_1 . z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

(4) *Phép chia:* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$

(5) *Hai số phức bằng nhau:* $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

## 4. Căn bậc hai của số phức

- Cho số phức $w$. Số phức $z$ thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của $w$.
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0
- Số thực $a > 0$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.
- Số thực $a < 0$ có hai căn bậc hai là $i\sqrt{|a|}$ và $-i\sqrt{|a|}$.

## 5. Tính chất

**Các tính chất:**

✓ Môđun của số phức $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ là $\overline{z} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Như vậy, *môđun của số phức* $z$ chính là khoảng cách từ điểm $M$ biểu diễn số phức $z = a + bi$ đến gốc tọa độ $O$ của mặt phẳng phức là: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$ .

✓ Một số tính chất của môđun:

(1) $|z| \ge 0; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $\left|z^2\right| = |z|^2$; $|-z| = |z|$; $|\overline{z}| = |z|$

(3) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

(4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

(5) $\big||z| - |z'|\big| \le |z - z'| \le |z| + |z'|$

(6) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

## 6. Phương trình phức

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \ne 0$.
Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Khi đó

» Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.

» Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

» Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

⁂ **Định lý Viete:**

» Phương trình $az^2 + bz + c = 0\ (a \ne 0)\ a \ne 0$ có 2 nghiệm $z_1$ và $z_2$ thì: $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Và $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\dfrac{c}{a}}$; $z_2 = \overline{z}_1$

⁂ **Nhận xét:** Trên tập hợp $\mathbb{C}$:

» Mọi phương trình bậc 2 đều có 2 nghiệm *(không nhất thiết phân biệt)*.

» Phương trình bậc $n$ sẽ có $n$ nghiệm.

## 7. Số phức mũ n

⁂ Tính $i^N$ với $N \in \mathbb{Z}$

Thấy rằng:

$i^0 = 1$ (1) **Và** $i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^1 = i$ (2) $i^5 = i.i^4 = i.1 = i$

$i^2 = -1$ (3) $i^6 = i.i^5 = i.i = -1$

$i^3 = i.i^2 i = i(-1) = -i$ (4) $i^7 = i.i^6 = i.(-1) = -i$

Do đó ta nhận xét: $\begin{cases} i^{4n} = 1 \\ i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \end{cases} (n \in \mathbb{Z})$ và $\begin{cases} i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0 \\ i^{4n}.i^{4n+1}.i^{4n+2}.i^{4n+3} = -1 \end{cases}$

### Lượng giác hóa số phức:

Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$, được gọi là dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$.

Dạng $z = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$, được gọi là dạng đại số của số phức $z$.

***Trong đó:*** $r$ là $|z|$.

$\varphi$ là *acgumen* của số phức thỏa $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

***Công thức Moivre:***

» Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì $z^n = r^n(\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi))$.

» Hằng đẳng thức quan trọng $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)$

**Chú ý**

(1) $(1+i)^2 = 2i$ và $(1-i)^2 = -2i$

(2) Nếu gặp $(1+i)^{2n+1}$ thì $(1+i)^{2n+1} = (1+i)^1(1+i)^{2n} = (1+i)^1\left[\underbrace{(1+i)^2}_{2i}\right]^n$.

(3) Nếu gặp $(1-i)^{2n+1}$ thì $(1-i)^{2n+1} = (1-i)^1(1-i)^{2n} = (1-i)^1\left[\underbrace{(1-i)^2}_{-2i}\right]^n$.

### 8. Tập hợp điểm biểu diễn

***Bài toán:*** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, hãy tìm tập hợp các điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn các điều kiện cho trước

» ***Bước 1:*** Gọi $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

» ***Bước 2:*** Biến đổi điều kiện $K$ để tìm mối liên hệ giữa $x,y$ và kết luận.

Một số tập hợp điểm thường gặp:

| ***Mối liên hệ giữa*** $x,y$ | ***Kết luận tập hợp điểm*** $M\left(x;y\right)$ |
|---|---|
| $Ax+By+C=0$ | Là đường thẳng $d$: $Ax+By+C=0$ |
| $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$ | Là đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(a;b\right)$ và $R=\sqrt{Ve\ Phai}$ |
| $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ | Là đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(-a;-b\right)$ và $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ |
| $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2\le R^2$ | Là hình tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính $R$ |
| $x^2+y^2+2ax+2by+c\le0$ | Là hình tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(-a;-b\right)$ và $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ |
| $R_1^2\le\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2\le R_2^2$ | Là hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính $R_1;R_2$. |
| $y=ax^2+bx+c$ | Là Parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ |
| $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases}MF_1+MF_2=2a\\F_1F_2=2c<2a\end{cases}$ | Là đường Elip $\left(E\right)$ có trục lớn $2a$, trục nhỏ $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2-b^2}$ |
| | Là đường trung trực của đoạn thẳng |

--------------------Hết--------------------

# HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1.

## KHỐI ĐA DIỆN

CHƯƠNG 2.

## KHỐI TRÒN XOAY

CHƯƠNG 3.

## TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

# Mục lục

Hình học
Chủ đề 01

KHỐI ĐA DIỆN

# HÌNH ĐA DIỆN – KHỐI ĐA DIỆN

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

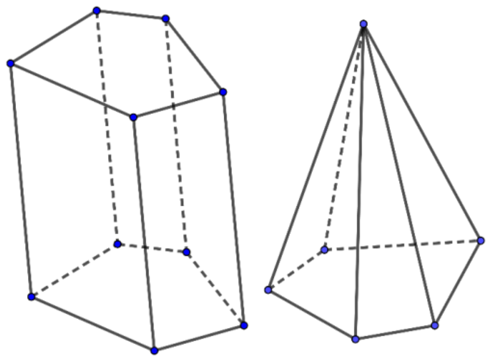
### 1. Khái niệm về hình đa diện – khối đa diện.

- ***Hình lăng trụ, hình chóp*** ta thấy chúng là những hình không gian được tạo bởi hữu hạn đa giác.

Các đa giác ấy có *tính chất*:

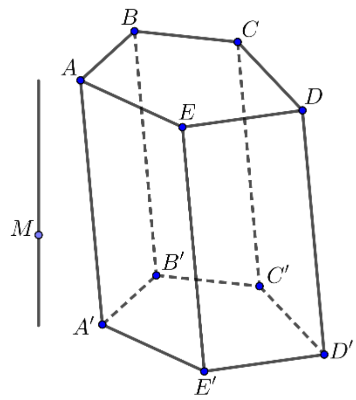
- *Hai đa giác phân biệt chỉ có thể:*
  *hoặc không giao nhau, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.*
- *Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.*
  *Mỗi đa giác như thế được gọi là một mặt của hình đa diện* $(H)$.
  *Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện* $(H)$

### 2. Khái niệm về khối đa diện.



- *Khối đa diện là phần không gian được giới hạn* ***bởi 1 hình đa diện****, kể cả hình đa diện đó.*
- Những điểm *không thuộc* khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện.
- *Điểm trong*:

  Những điểm ***thuộc*** khối đa diện nhưng ***không thuộc*** hình đa diện giới hạn khối đa diện ấy.




- *Miền trong khối đa diện*:

  Là tập hợp các **điểm trong**.
- *Miền ngoài khối đa diện*:

  Là tập hợp các **điểm ngoài**.
- Mỗi đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau: *miền trong* và *miền ngoài*.
- Trong đó chỉ có duy nhất miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng d nào đấy.

  Khối đa diện $(H)$ là hợp của hình đa diện $(H)$ và miền trong của nó.

### 3. Phép biến hình.

- *Phép biến hình trong không gian:*

  Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M′ xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

- *Phép dời hình* :

  Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

**Nhận xét:**

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến:

  (+) Một đa diện $(H)$ thành một đa diện $(H')$,

  (+) Các đỉnh, cạnh, mặt của $(H)$ thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của $(H')$.

① ***Phép dời hình tịnh tiến theo vector*** $\vec{v}$ **:** là phép biến hình biến điểm $M$ thành $M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

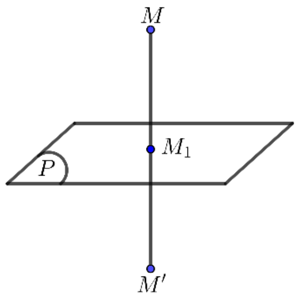
② ***Phép đối xứng qua mặt phẳng*** $(P)$ **:** là phép biến hình

biến mọi điểm thuộc $(P)$ thành chính nó,

biến điểm $M \notin (P)$ thành điểm $M'$

sao cho $(P)$ là mặt phẳng trung trực của $MM'$.

*Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng* $(P)$ *biến hình* $(H)$ *thành chính nó thì* $(P)$ *được gọi là mặt phẳng đối xứng của* $(H)$.



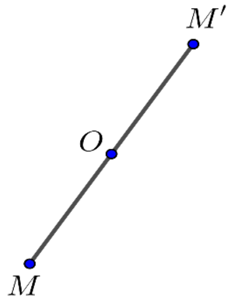

③ ***Phép đối xứng tâm*** $O$ **:** là phép biến hình

biến điểm $O$ thành chính nó,

biến điểm $M$ khác $O$ thành điểm $M'$

sao cho $O$ là trung điểm của $MM'$.

*Nếu phép đối xứng tâm* $O$ *biến hình* $(H)$ *thành chính nó thì* $O$ *được gọi là tâm đối xứng của* $(H)$.



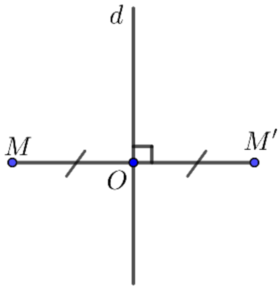

④ ***Phép đối xứng qua đường thẳng*** $d$ **:** là phép biến hình

biến mọi điểm thuộc $d$ thành chính nó,

biến điểm $M \notin d$ thành điểm $M'$

sao cho $d$ là trung trực của $MM'$.

*Nếu phép đối xứng qua đường thẳng* $d$ *biến hình* $(H)$ *thành chính nó thì* $d$ *được gọi là trục đối xứng của* $(H)$.




Phép đối xứng qua đường thẳng $d$ còn được gọi là *phép đối xứng qua trục* $d$.

### 4. Hai hình bằng nhau.

*Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.*

**Nhận xét:**

- Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình đa diện này thành hình đa diện kia.
- Hai tứ diện có các cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

### 5. Phân chia và lắp ghép khối đa diện.

Nếu khối đa diện $(H)$ là hợp của hai khối đa diện $(H_1);(H_2)$, sao cho $(H_1)$ và $(H_2)$ không có điểm trong chung thì ta nói:

(+) *có thể chia được khối đa diện $(H)$ thành hai khối đa diện $(H_1)$ và $(H_2)$,*

(+) *có thể lắp ghép được hai khối đa diện $(H_1)$ và $(H_2)$ với nhau để được khối đa diện $(H)$.*

**Ví dụ.**

Xét khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

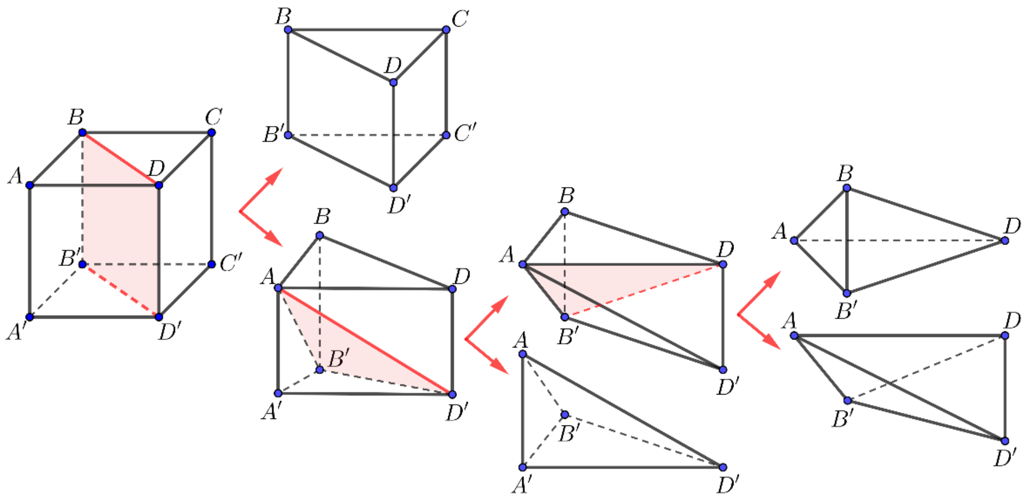
Mặt $(BDD'B')$ cắt khối lập phương đó theo một thiết diện là hình chữ nhật $BDD'B'$.

*Thiết diện này chia các điểm còn lại của khối lập phương ra làm hai phần.*

Mỗi phần cùng với hình chữ nhật $BDD'B'$ tạo thành khối lăng trụ, như vậy có hai khối lăng trụ: $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.

$\longrightarrow$Khi đó ta nói mặt phẳng $(P)$ chia khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.

Tương tự trên ta có thể chia tiếp khối trụ $ABD.A'B'D'$ thành ba khối tứ diện: $ADBB'$, $ADB'D'$ và $AA'B'D'$.




**Nhận xét:**

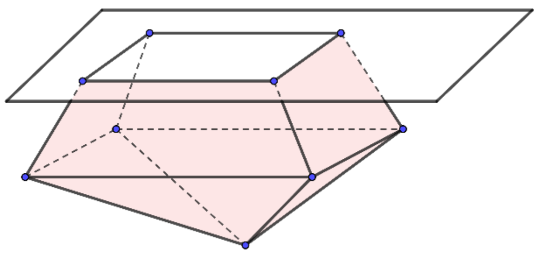
Một khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành các khối tứ diện.

### 6. Khối đa diện lồi.

Khối đa diện $(H)$ được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của $(H)$ luôn thuộc $(H)$. Khi đó đa diện giới hạn $(H)$ được gọi là ***đa diện lồi***.

***Lưu ý:***

Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó. *(Hình 6.1)*



Hình 6.1

***Công thức ƠLE:***

Trong một đa diện lồi nếu gọi *Đ* là số đỉnh, *C* là số cạnh, *M* là số mặt

Tức là: *Đ* – *C* + *M*=2

### 7. Khối đa diện đều.

**Định nghĩa:**

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có các tính chất sau:

**(1)** Mỗi mặt của nó là một đa giác đều $p$ cạnh.

**(2)** Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng $q$ mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p;q\}$.

**Nhận xét:**

Các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều và bằng nhau.

**Định lý:**

Chỉ có năm loại khối đa diện đều.

loại $\{3;3\}$, loại $\{3;4\}$, loại $\{4;3\}$, loại $\{5;3\}$, và loại $\{3;5\}$.

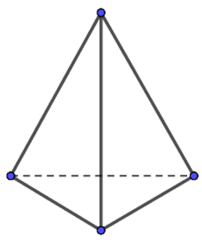
**Nhận xét:**

Hai khối đa diện đều có cùng số mặt và có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.
Hai khối đa diện đều có cùng số mặt thì đồng dạng với nhau.

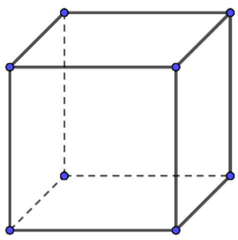
**Ví dụ.**

- Quan sát khối tứ diện đều (Hình 7.1), ta thấy các mặt của nó là những tam giác đều, mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng 3 mặt.
- Quan sát khối lập phương (Hình 7.2), ta thấy các mặt của nó là những hình vuông, mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung đúng 3 mặt.

Những khối đa diện nói trên được gọi là khối đa diện đều

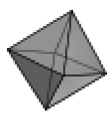


Hình 7.1



Hình 7.2

***Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều***

| ***Khối đa diện đều*** | | *Số đỉnh* | *Số cạnh* | *Số mặt* | ***Ký hiệu*** $\{p;q\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Tứ diện đều* |  | 4 | 6 | 4 | $\{3;3\}$ |
| *Khối Lập Phương* |  | 8 | 12 | 6 | $\{4;3\}$ |
| *Khối Tám Mặt Đều* |  | 6 | 12 | 8 | $\{3;4\}$ |
| *Khối Mười Hai Mặt Đều* |  | 20 | 30 | 12 | $\{5;3\}$ |
| *Khối Hai Mươi Mặt Đều* |  | 12 | 30 | 20 | $\{3;5\}$ |

Hình học
Chủ đề 01

KHỐI ĐA DIỆN

# THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Định nghĩa:

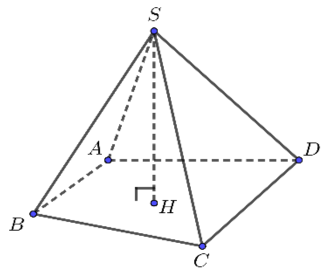
*Hình chóp* là hình có đáy là một đa giác, các mặt bên là tam giác có chung một đỉnh.

### 2. Thể tích khối chóp.

*Công thức tính thể tích khối chóp:*

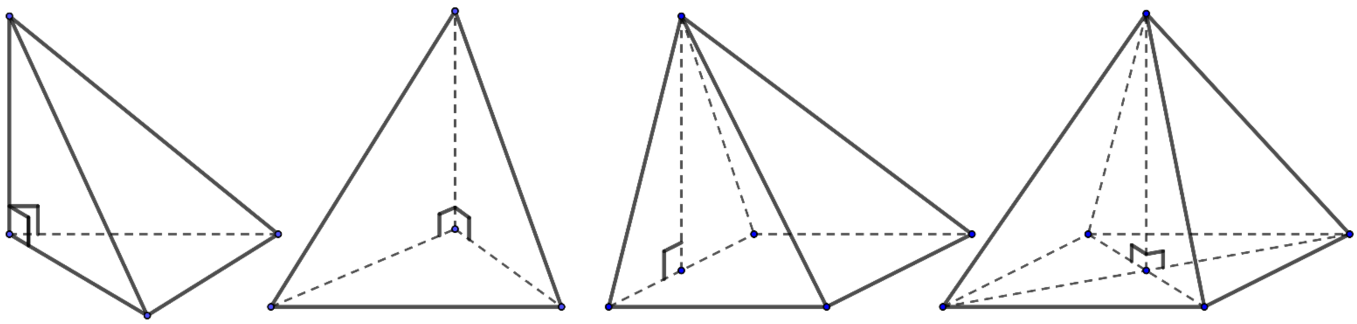
$$V = \frac{1}{3}S.h$$

Trong đó:
$S$ là diện tích đáy
$h$ là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).




Cách xác định đường cao khối chóp:

| *Loại* | *Đường cao* |
|---|---|
| Cạnh bên vuông đáy *Hình 1.1* | Đường cao chính là cạnh bên. |
| Hai mặt bên vuông đáy *Hình 1.2* | Đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy. |
| Mặt bên vuông đáy *Hình 1.3* | Đường cao của mặt bên vuông góc đáy. |
| Chóp đều *Hình 1.4* | Đường cao hạ từ đỉnh đến tâm đa giác đáy. |

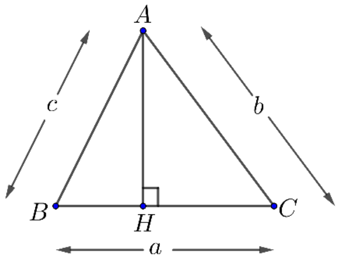


*Hình 1.1* *Hình 1.2* *Hình 1.3* *Hình 1.4*

### 4. Công thức tính diện tích đáy.

Ta có các đa giác thường gặp sau:

*Tam giác*




$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$

$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$

$S=\frac{1}{2}ba.\sin A=\frac{1}{2}ca.\sin B=\frac{1}{2}ba.\sin C$

$S=\frac{abc}{4R}=2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$

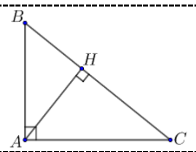
với $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

$S=p.r$

với $p$ là nửa chu vi và $r$ là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$

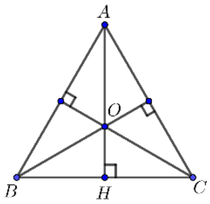
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$

hoặc $S=\frac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}$




*Tam giác vuông* $\Delta ABC$ vuông tại $A$:

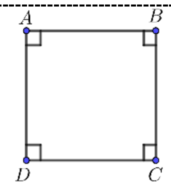
$$S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}BC.AH.$$




*Tam giác đều*

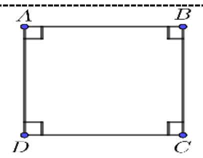
$\Delta ABC$ đều, cạnh $AB$: $S=(AB)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$;

Chiều cao tam giác đều $h=AB.\frac{\sqrt{3}}{2}$.



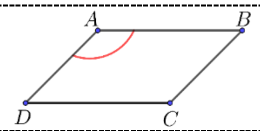

*Hình vuông cạnh* $AB$

Diện tích hình vuông $ABCD: S=(AB)^2$



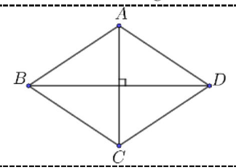

*Hình chữ nhật*

Diện tích hình chữ nhật $ABCD: S=AB.CD$



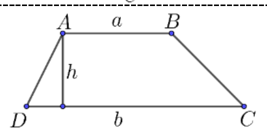

*Hình bình hành*

Diện tích hình bình hành $ABCD: S=AB.AD.\sin BAD$




*Hình thoi*

Diện tích hình thoi $ABCD: S=AB.AD.\sin BAD=\frac{1}{2}AC.BD$



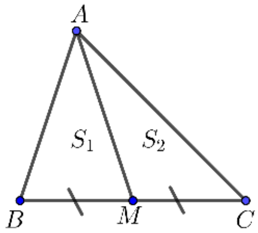

*Hình thang*

Diện tích hình thang $ABCD: S=\frac{1}{2}(AB+CD).h$

*Tứ giác có hai đường chéo vuông góc:* $S=\frac{1}{2}AC.BD$

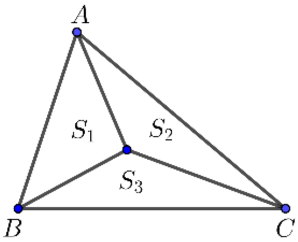
### 5. Tỷ số diện tích.

Ta có các tỷ số thường gặp sau:



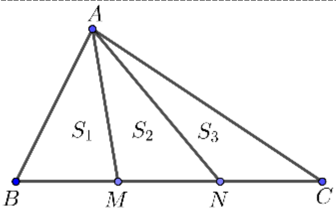

$AM$ trung tuyến,

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = \frac{S}{2}$.



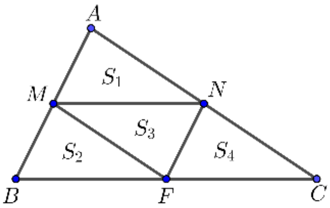

$G$ là trọng tâm,

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$.



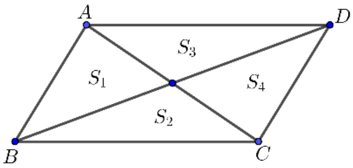

$BM = MN = NC$

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$.

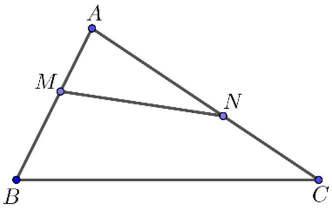



$M; N; F$ lần lượt là trung điểm $AB; AC; BC$

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S}{4}$.




$S_{ABCD} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S}{4}$




$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$$

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 1.1.* Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

☑ Đây là dạng dễ xác định được đường cao ($h$).

☑ Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3}S.h$

### *Dạng 1.2.* Chóp có mặt bên vuông góc với đáy

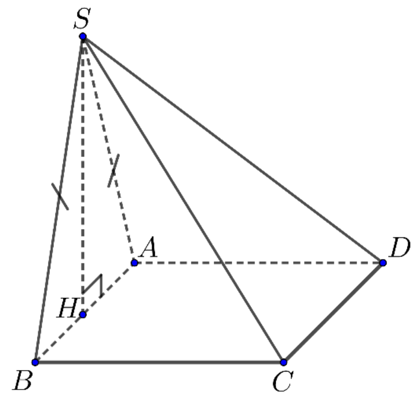
☑ Khối chóp có mặt bên vuông góc mặt phẳng đáy.

- Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3}S.h$.
- Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh của chóp ta kẻ vuông góc vào giao tuyến của mặt bên và mặt đáy.

☑ Một số kiểu thường gặp:

① Mặt bên $(SAB)$ vuông với đáy $(ABCD)$ và $SAB$ là tam giác đều cạnh $x \to SH \perp (ABCD) \to h = SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ với $H$ là trung điểm $AB$.

② Mặt bên $(SAB)$ vuông với đáy $(ABCD)$ và $SAB$ là tam giác cân tại $S \to SH \perp (ABCD) \to h = SH$ với $H$ là trung điểm $AB$.




### *Dạng 1.3.* Chóp đều

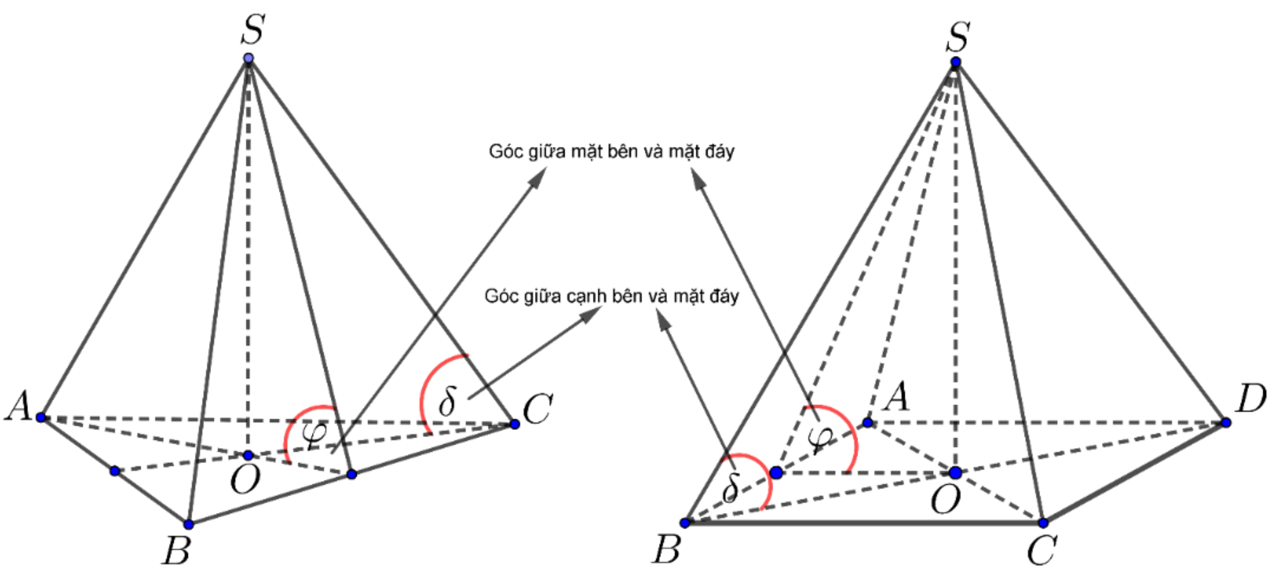
☑ Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

- Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3}S.h$.
- Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh chóp hạ vuông góc xuống tâm mặt đáy.

☑ Một số kiểu thường gặp:

① Chóp đều $S.ABCD$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là $\varphi$ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\delta$.

② Chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là $\varphi$ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\delta$.



***Một số công thức tính nhanh:***

| | |
|---|---|
| Chóp đều cạnh $x$, đáy là tam giác | $V=(x)^3.\frac{\sqrt{2}}{12}$ |
| Chóp đều cạnh $x$, đáy là tứ giác | $V=(x)^3.\frac{\sqrt{2}}{6}$ |
| Chóp đều, cạnh bên bằng $x$, đáy là tam giác cạnh $y$. | $V=\frac{(y)^2\sqrt{3(x)^2-(y)^2}}{12}$ |
| Chóp đều, cạnh bên bằng $x$, đáy là tứ giác cạnh $y$. | $V=\frac{(y)^2\sqrt{4(x)^2-2(y)^2}}{6}$ |
| Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc $\varphi$, đáy là tam giác cạnh $x$. | $V=\frac{(x)^3\tan\varphi}{24}$ |
| Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc $\varphi$, đáy là tứ giác cạnh $x$. | $V=\frac{(x)^3\tan\varphi}{6}$ |

## *Dạng 1.4.* **Tỷ số thể tích**

☑ Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

✈ Áp dụng công thức: $V=\frac{1}{3}S.h$.

**A. *Cho khối chóp*** $S.ABC$ ***có*** $A';B';C'$ ***lần lượt là nằm trên*** $SA;SB;SC$ ***khi đó:***

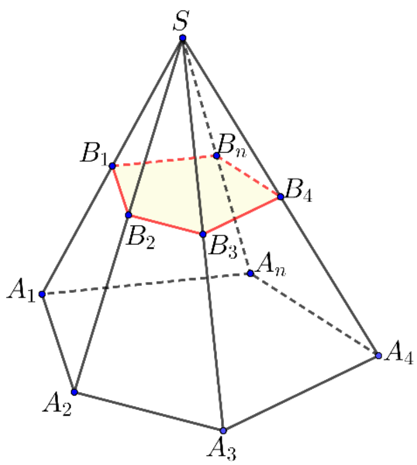
1. Nếu $A\equiv A';B\equiv B';C\equiv C'$ thì

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}$$ *(Hai khối chóp chung đỉnh và chung mặt đáy).*

2. Định lý SIMSON cho khối chóp tam giác

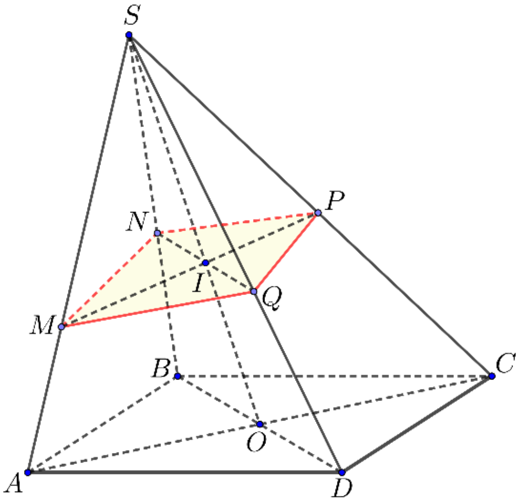
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

3. Cắt khối chóp bởi mặt phẳng song song với đáy sao cho $\frac{SB_1}{SA_1}=k$ thì




$$\frac{V_{S.B_1B_2...B_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}}=k^3$$

**B. *Mặt phẳng cắt các cạnh của khối chóp tứ giác*** $S.ABCD$ ***có đáy là hình bình hành lần lượt tại*** $M;N;P;Q$**:** $\frac{SM}{SA}=\alpha;\frac{SN}{SB}=\beta;\frac{SP}{SC}=\gamma;\frac{SQ}{SD}=\lambda$ **:**




$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{\alpha.\beta.\gamma.\lambda}{4}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\lambda}\right) \text{ và } \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\lambda}\ .$$

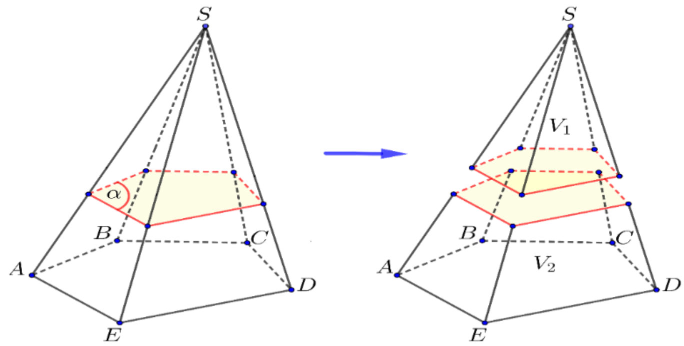
## *Dạng 1.5.* **Tổng hiệu thể tích**

☑ Trong quá trình tính thể tích một khối đa diện lồng ghép trong khối chóp ta gặp khó khăn với cách tính thực tiếp thì khi đó:

- ❍ Ta có thể tách khối chóp ra thành các khối nhỏ và tính trực tiếp từng khối đã tách.
- ❍ Phần cần tính sẽ là phần khối chóp bỏ đi những khối nhỏ đã tính.

✈ ***Ví dụ:*** Cho khối chóp $S.ABCD$, $(\alpha)$ chia khối chóp thành $V_1;V_2$. Tính thể tích khối $V_2$.

✈ ***Giải:***




Để tính trực tiếp thể tích khối $V_2$ ta sẽ khó áp dụng công thức vì thế ta sẽ cắt khối chóp thành hai phần:

+ $V_1$ là phần chứa đỉnh $S$.

+ $V_2$ là phần dưới mặt phẳng $(\alpha)$.

Gọi thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V$, vậy $V=V_1+V_2 \Rightarrow V_2=V-V_1$.

Hình học
Chủ đề 02

KHỐI ĐA DIỆN

# THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Định nghĩa:

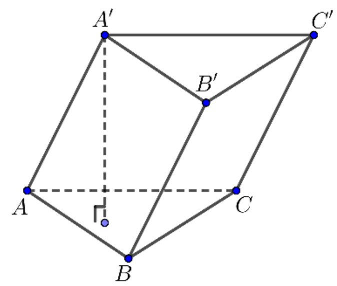
- ***Hình lăng trụ*** là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.
- ***Hình hộp*** là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

### 2. Thể tích khối lăng trụ.

- ***Công thức tính thể tích khối chóp:***

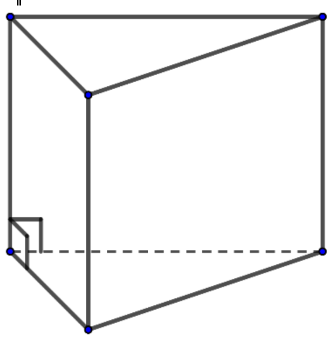
$$V = S.h$$

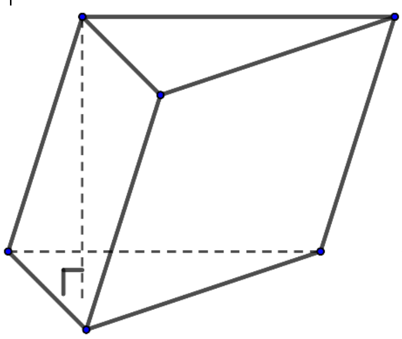
Trong đó:
$S$ là diện tích đáy
$h$ là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

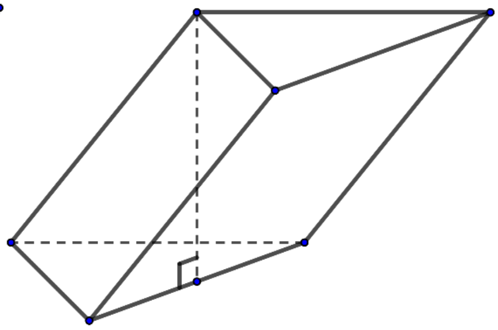



Cách xác định đường cao lăng trụ:

| *Loại* | *Đường cao* |
|---|---|
| Cạnh bên vuông đáy *Hình 2.1* | Đường cao chính là cạnh bên. |
| Lăng trụ đứng *Hình 2.1* | Đường cao chính là cạnh bên. |
| Lăng trụ xiên *Hình 2.2* | Đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đáy. |
| Lăng trụ có hình chiếu *Hình 2.3* | Đường cao là hình chiếu vuông góc của 1 đỉnh xuống đáy. |


*Hình 2.1*


*Hình 2.2*


*Hình 2.3*

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 2.1.* Thể tích lăng trụ đứng

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

❍ Tính được diện tích đáy ta xem lại "**Công thức tính diện tích đáy**"

❍ Lăng trụ đứng sẽ có các đường cao song song nhau, tùy vào trường hợp đề ra ta sẽ sử dụng đường cao hợp lý.

| | *Định nghĩa* | *Tính chất* |
|---|---|---|
| *Hình lăng trụ đứng* | Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy. | Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy. |
| *Hình lăng trụ đều* | Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. | Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy. |

### *Dạng 2.2.* Thể tích lăng trụ xiên

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

❍ Tính được diện tích đáy ta xem lại "**Công thức tính diện tích đáy**"

❍ Lăng trụ xiên sẽ có các đường cao đề ra cụ thể.

### *Dạng 2.3.* Thể tích khối lập phương – khối hộp

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

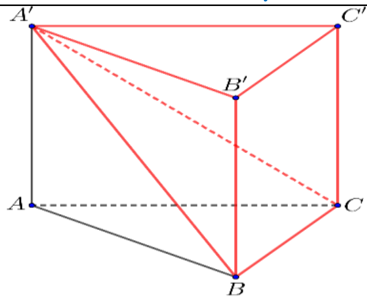
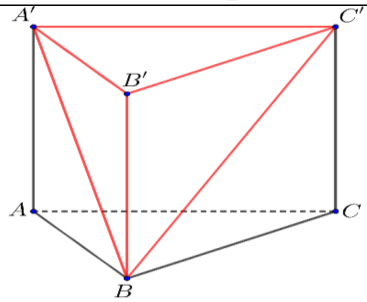
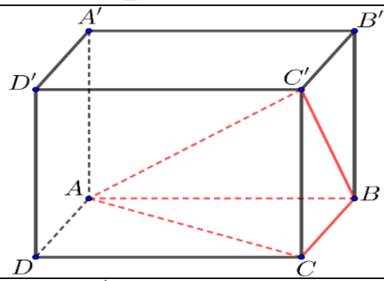
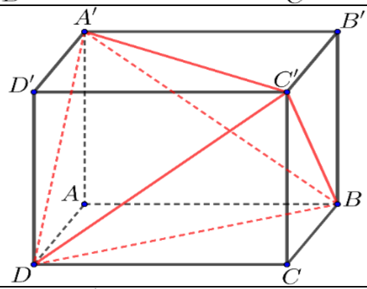
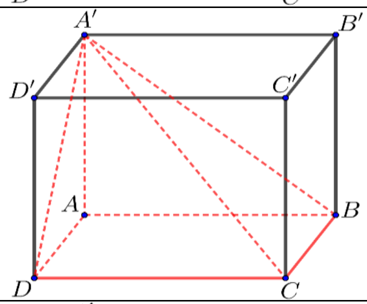
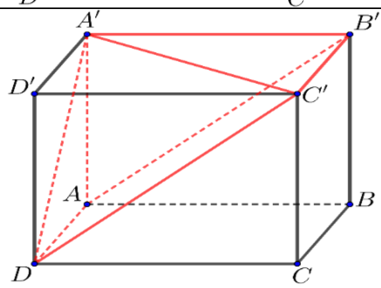
| | *Định nghĩa* | *Tính chất* |
|---|---|---|
| *Hình hộp đứng* | Là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy | Có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật. |
| *Hình hộp chữ nhật* | Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. | Có 6 mặt là 6 hình chữ nhật. |
| *Hình lập phương* | Là hình hộp chữ nhật $2$ đáy và $4$ mặt bên đều là hình vuông | Có 6 mặt đều là hình vuông. |

❍ Đường chéo hình hộp $= \sqrt{d^2 + r^2 + c^2}$ với $d; r; c$ là ba kích thước của hình hộp.

***Hệ quả:*** Đường chéo hình lập phương $= a\sqrt{3}$ với $a$ là cạnh của hình lập phương.

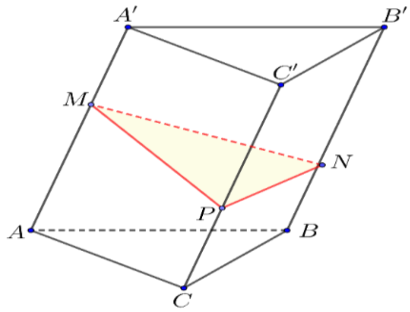
## Dạng 2.4. Khối đa diện được cắt ra từ khối lăng trụ

**A.** ***Một số mối liên hệ thường gặp giữa chóp – lăng trụ và chóp – thể tích:***

<table>
<tr><th colspan="2">Mối liên hệ giữa</th><th>Công thức</th><th>Hình minh họa</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Chóp</td><td rowspan="2">Lăng trụ</td><td>$V_{C(5d)}=\frac{2}{3}V_{L.Tr}$<br>4 điểm thuộc mặt đáy</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$V_{C(4d)}=\frac{1}{3}V_{L.Tr}$<br>3 điểm thuộc mặt đáy</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Chóp</td><td rowspan="4">Hình hộp</td><td>$V_{C(4d)}=\frac{1}{6}V_{Hop}$<br>Với 3 điểm thuộc đáy và 1 điểm thuộc mặt bên</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$V_{C(4d)}=\frac{1}{3}V_{Hop}$<br>Với 3 điểm thuộc mặt chéo</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$V_{C(5d)}=\frac{1}{3}V_{Hop}$<br>Với 4 điểm thuộc mặt bên hoặc mặt đáy</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$V_{C(5d)}=\frac{1}{3}V_{Hop}$<br>Với 4 điểm thuộc mặt chéo</td><td>
</td></tr>
</table>

**B.** ***Mặt phẳng cắt các cạnh của khối lăng trụ tam giác*** $ABC.A'B'C'$ ***lần lượt tại*** $M;N;P$ ***sao cho*** $\frac{AM}{AA'}=\alpha;\frac{BN}{BB'}=\beta;\frac{CP}{CC'}=\delta$**:**

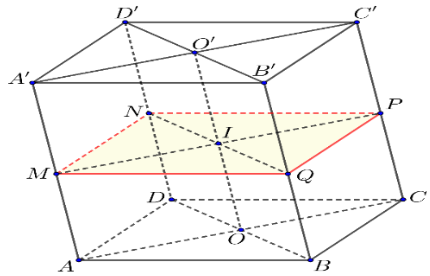
$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$




**C.** ***Mặt phẳng cắt các cạnh của khối hộp*** $ABCD.A'B'C'D'$ ***lần lượt tại*** $M;N;P;Q$ ***sao cho*** $\frac{AM}{AA'}=\alpha;\frac{BN}{BB'}=\beta;\frac{CP}{CC'}=\delta;\frac{DQ}{DD'}=\lambda$**:**

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}{4}$$

và $\alpha+\gamma=\beta+\lambda$.




### *Dạng 2.5.* **Max – min thể tích**

| | *Dạng* | *Dấu "=" xảy ra khi* |
|---|---|---|
| **BĐT *Bunyakovsky*** | $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge\left(ac+bd\right)^2$ | $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ |
| | $\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$ | $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$ |
| **BĐT *AM – GM*** | $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ | $a=b$ |
| | $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n}\quad\left(n\ge1\right)$ | $a_1=a_2=...=a_n$ |
| ***Khảo sát hàm số trên khoảng xác định*** | Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán. | |

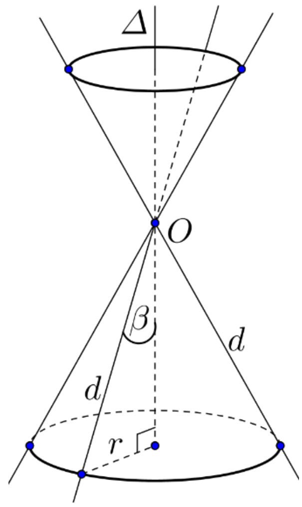
Hình học
Chủ đề 01

KHỐI TRÒN XOAY

# KHỐI NÓN

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Định nghĩa.

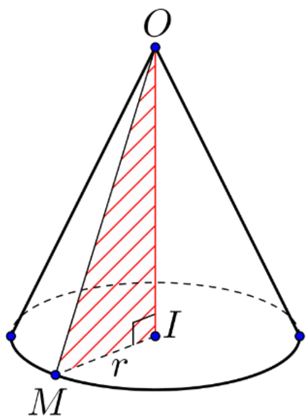



Trong mặt phẳng $(P)$:

- Cho 2 đường thẳng $d$, $\Delta$ cắt nhau tại $O$ và chúng tạo thành góc $\beta$ với $0^0 < \beta < 90^0$.
- Quay $(P)$ xung quanh trục $\Delta$ với góc $\beta$ không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh $O$.

⟶Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón.
⟶Đường thẳng $\Delta$ gọi là trục,
⟶Đường thẳng $d$ được gọi là đường sinh,
⟶Góc $2\beta$ gọi là góc ở đỉnh.

### 2. Hình nón tròn xoay.




Cho $\Delta OIM$ vuông tại $I$ quay quanh cạnh góc vuông $OI$ thì đường gấp khúc $OIM$ tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

⟶Đường thẳng $OI$ gọi là trục,
⟶ $O$ là đỉnh,
⟶ $OI$ gọi là đường cao,
⟶ $OM$ gọi là đường sinh của hình nón.
⟶Hình tròn tâm $I$, bán kính $R = IM$ là đáy của hình nón.

### 3. Diện tích – Thể tích.

Cho hình nón có chiều cao là $h$, bán kính đáy $r$ và đường sinh là $\ell$ thì có:

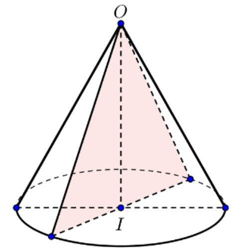
⟶Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi.r.l$.
⟶Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.
⟶Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_{xq} + S_d$
⟶Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h$

### 4. Tính chất.

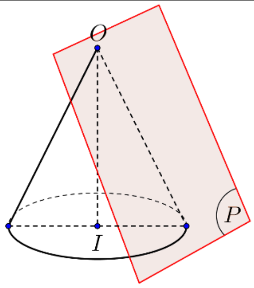
Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng:

✈ ***Đi qua đỉnh*** thì có các trường hợp sau xảy ra:

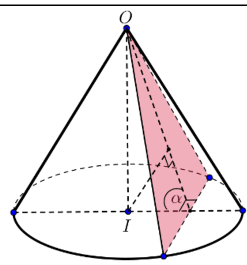
① Mặt phẳng cắt mặt nón theo 2 đường sinh
→Thiết diện là tam giác cân.




② Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh
→Mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

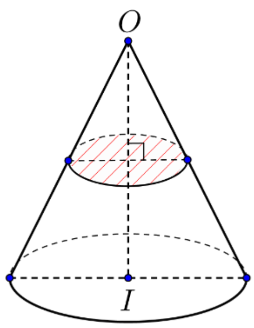



③ Mặt phẳng cắt mặt nón tạo góc $\alpha$

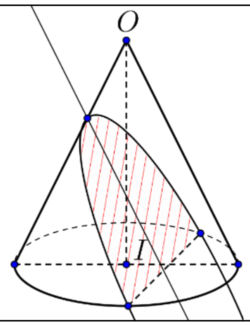



✈ ***Không đi qua đỉnh*** thì có các trường hợp sau xảy ra:

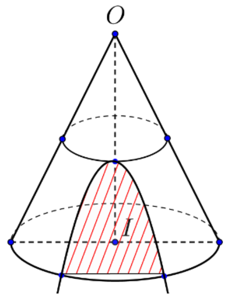
① Mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón
→Giao tuyến là một đường tròn.



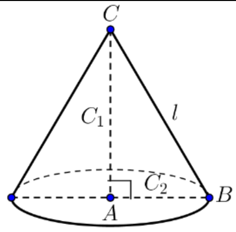
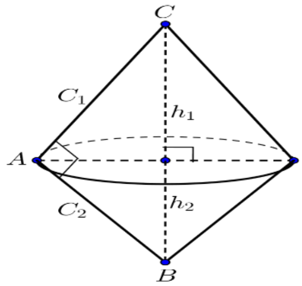
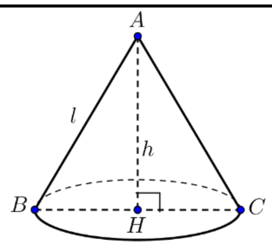
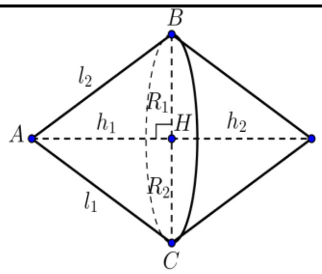
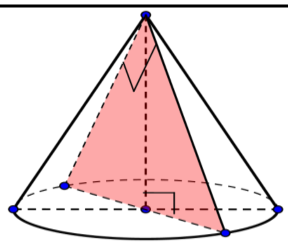
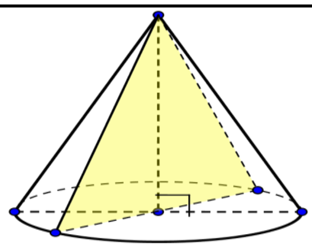
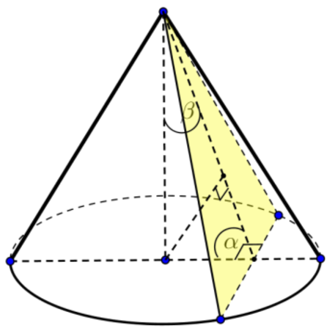

② Mặt phẳng cắt song song với 1 đường sinh hình nón
→Giao tuyến là đường parabol.




③ Mặt phẳng cắt song song với 2 đường sinh hình nón
→Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.



### 5. Mối liên hệ thường gặp.

| | Trường hợp | Nội dung | Công thức | Hình minh họa |
|---|---|---|---|---|
| **Loại 1** | $\Delta$ VUÔNG | Quay quanh cạnh góc vuông $C_1$ và $C_2$ là cạnh góc vuông còn lại. | $\begin{cases} h = C_1 \\ R = C_2 \\ l = c/huyen \end{cases}$ |  |
| **Loại 2** | | Quay quanh cạnh huyền $\rightarrow$ tạo 2 nón:<br>+ Nón trên (nón chứa C).<br>+ Nón dưới (nón chứa B). | $\begin{cases} c/huyen = h_1 + h_2 \\ \dfrac{1}{R_1^2} = \dfrac{1}{R_2^2} = \dfrac{1}{C_1^2} + \dfrac{1}{C_2^2} \\ l_1 = C_1 \ \& \ l_2 = C_2 \end{cases}$ |  |
| **Loại 3** | $\Delta$ ĐỀU | Quay quanh đường cao = Thiết diện qua trục là tam giác đều. | $\begin{cases} h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \\ l = 2R \end{cases}$ |  |
| **Loại 4** | | Quay quanh 1 cạnh $\rightarrow$ tạo 2 nón bằng nhau. | $\begin{cases} l_1 = l_2 = C \\ R_1 = R_2 = \dfrac{C}{2} \\ h_1 = h_2 = \dfrac{C\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ |  |
| **Thiết diện** | Qua trục | $\Delta$ VUÔNG | $\begin{cases} h = R \\ 2R = l\sqrt{2} \end{cases}$ |  |
| | | $\Delta$ ĐỀU | $\begin{cases} l = 2R \\ h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ |  |
| | Không qua trục | + Vẽ trung điểm của dây.<br>+ Nối với tâm $\rightarrow$ kí hiệu vuông góc.<br>+ Xem giả thiết:<br>☞ $\left(t/dien; m/day\right) = \alpha$ .<br>☞ $\left(t/dien; d/cao\right) = \beta$ .<br>☞ $d\left(O; t/dien\right) = d$ . | |  |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 1.1.* Tính độ dài đường sinh, bán kính đáy, đường cao

☑ Trường hợp đơn giản, áp dụng công thức đã có.

⟶Diện tích xung quanh: $S_{xq}=\pi.r.l$.

⟶Diện tích đáy (hình tròn): $S_d=\pi r^2$.

⟶Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp}=S_{xq}+S_d$

⟶Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}\pi r^2.h$

### *Dạng 1.2.* Tính diện tích xung quanh – toàn phần – thể tích

☑ Cho hình nón $(H)$ có bán kính đáy bằng $r$, chiều cao $SO=h$ và độ dài đường sinh là $l$. Ký hiệu $S_{xq}$, $S_{tp}$ lần lượt là diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón $(H)$, khi đó ta có

⟶Diện tích xung quanh: $S_{xq}=\pi.r.l$.

⟶Diện tích đáy (hình tròn): $S_d=\pi r^2$.

⟶Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp}=S_{xq}+S_d$

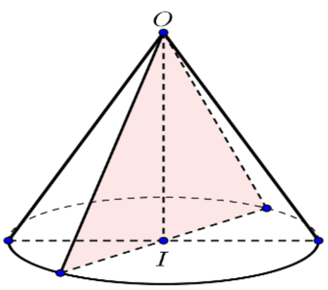
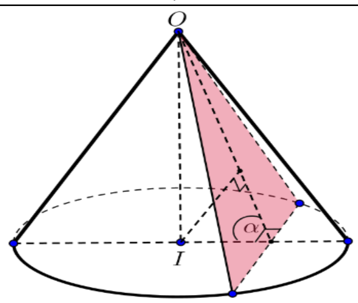
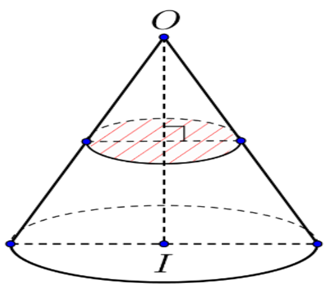
⟶Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}\pi r^2.h$

☑ ***Lưu ý:***

① $\Delta SAB$ là tam giác cân đỉnh $S$ và được gọi là thiết diện qua trục của khối nón.

② $l^2=h^2+r^2$ .

### *Dạng 1.3.* Thiết diện

| | | |
|---|---|---|
| ☑ Mặt phẳng $(P)$ đi qua trục, cắt khối chóp theo một thiết diện là $\Delta SAB$ cân tại đỉnh $S$. | ☑ Mặt phẳng $(P)$ đi qua đỉnh của hình nón và cắt mặt nón theo 2 đường sinh $\Rightarrow$ Thiết diện là $\Delta$ cân. | ☑ Mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón $\Rightarrow$ Thiết diện là đường tròn. |
|  |  |  |

### *Dạng 1.4.* Nội – ngoại tiếp

☑ ***Bài toán 1:*** Hình nón ngoại tiếp hình chóp

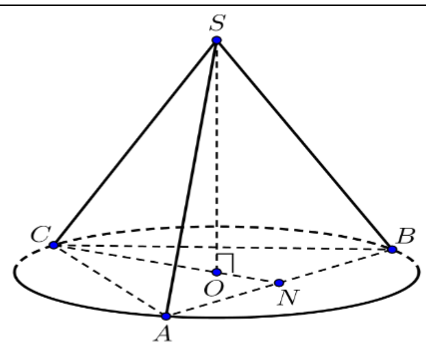
◆ ***Loại 1:*** Hình nón ngoại tiếp hình chóp tam giác đều

Khi đó hình nón có:

+ *Đường sinh* $l$ là *cạnh bên* của hình chóp

+ *Chiều cao* $h$ là *chiều cao* của hình chóp

+ *Bán kính* đáy $r$ bằng $\frac{AB\sqrt{3}}{3}$.



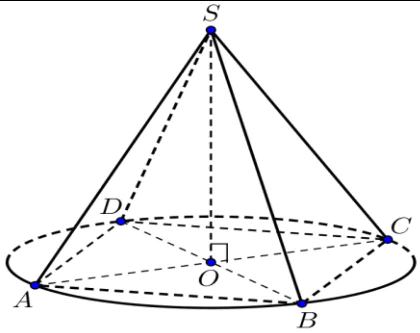
◆ ***Loại 2:*** Hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều

Khi đó hình nón có:

+ *Đường sinh* $l$ là *cạnh bên* của hình chóp

+ *Chiều cao* $h$ là *chiều cao* của hình chóp

+ *Bán kính* đáy $r$ bằng $\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$




☑ **Bài toán 1:** Hình nón ngoại tiếp hình chóp

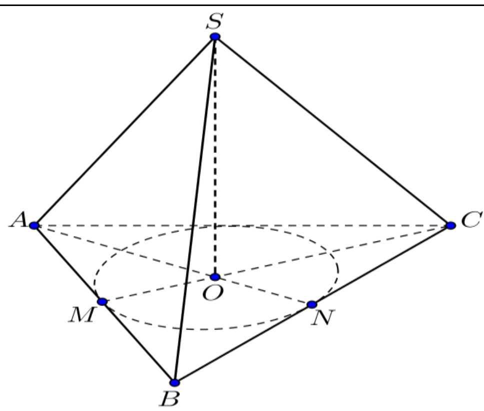
◆ ***Loại 1:*** Hình nón nội tiếp hình chóp tam giác đều

Khi đó hình nón có:

+ *Đường sinh* $l$ là $SN$.

+ *Chiều cao* $h$ là chiều cao của hình chóp.

+ *Bán kính đáy* $r = OM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{6}$.



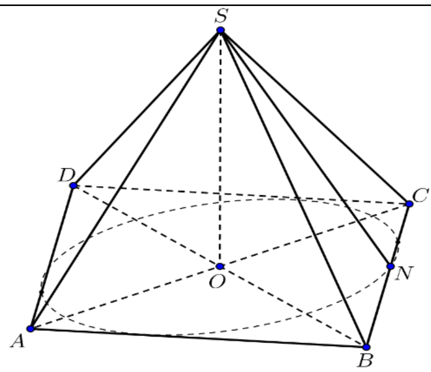

◆ ***Loại 2:*** Hình nón nội tiếp hình chóp tứ giác đều

Khi đó hình nón có:

+ *Đường sinh* $l$ là $SN$.

+ *Chiều cao* $h$ là chiều cao của hình chóp.

+ *Bán kính đáy* $r = \dfrac{AB}{2}$




## *Dạng 1.5.* Min – max liên quan khối nón

☑ Xây dựng công thức cần tìm *min – max*.

☑ Dùng các cách dưới đây để tìm *min – max*.

| | *Dạng* | *Dấu "=" xảy ra khi* |
|---|---|---|
| **BĐT *Bunyakovsky*** | $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \ge \left(ac+bd\right)^2$ | $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ |
| | $\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$ | $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$ |
| **BĐT *AM – GM*** | $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ | $a=b$ |
| | $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2....a_n}\ \left(n \ge 1\right)$ | $a_1=a_2=...=a_n$ |
| ***Khảo sát hàm số trên khoảng xác định*** | Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán. | |

| | |
|---|---|
| ***Đánh giá lượng giác*** | $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\left(AB;AC\right)$.<br>Khi đó, để $\left[S_{ABC}\right]_{\max}$<br>$\Leftrightarrow\left[\sin\left(AB;AC\right)\right]_{\max}\Leftrightarrow\sin\left(AB;AC\right)=1\Leftrightarrow\left(AB;AC\right)=90^0\Leftrightarrow AB\perp AC$ |

## *Dạng 1.6.* Bài toán thực tế

☑ ***Bài toán 1:*** Các bài toán thực tế đã được mô hình hóa bằng một bài toán hình học.

$\longrightarrow$ Sử dụng công cụ hình học, đại số (nếu cần) giải quyết bài toán.

$\longrightarrow$ Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa .

☑ ***Bài toán 2:*** Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học.

***Bước 1:*** Dựa trên các giả thiết và yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình Hình học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả "dưới dạng ngôn ngữ Hình học" cho mô hình mô phỏng thực tiễn.

***Bước 2:*** Sử dụng công cụ giải quyết bài toán hình học được hình thành từ *bước 1*.

$\longrightarrow$ Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa .

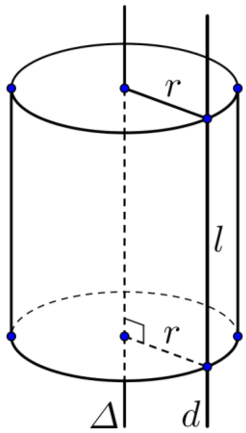
Hình học
Chủ đề 02

KHỐI TRÒN XOAY

# KHỐI TRỤ

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Định nghĩa.




- Trong mặt phẳng $(P)$:
  - Cho 2 đường thẳng $d$, $\Delta$ song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng $r$.
  - Quay $(P)$ xung quanh trục $\Delta$ thì $\ell$ sinh ra một mặt tròn xoay, được gọi là mặt trụ.

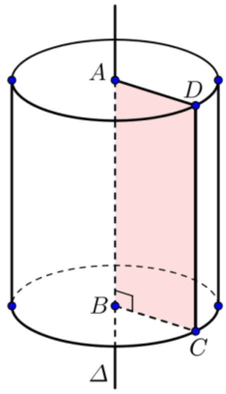
⟶ Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón.

⟶ Đường thẳng $\Delta$ gọi là trục,

⟶ Đường thẳng $\ell$ được gọi là đường sinh,

⟶ $r$ gọi là bán kính.

### 2. Hình trụ tròn xoay.




- Cho hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh $AB$ thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành một hình, gọi là hình trụ tròn xoay (gọi tắt là hình trụ).

⟶ Đường thẳng $\Delta$ gọi là trục,

⟶ $AB$ gọi là đường cao,

⟶ $CD$ gọi là đường sinh của hình nón.

⟶ Hình tròn tâm $B$, bán kính $R = BC$ là đáy của hình nón.

### 3. Diện tích – Thể tích.

- Cho hình trụ có chiều cao là $h$, bán kính đáy $r$ và đường sinh là $\ell$ thì có:

⟶ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$.

⟶ Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.

⟶ Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$

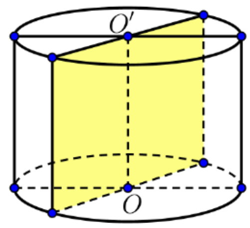
⟶ Thể tích khối nón: $V = B.h = \pi r^2.h$

**4. Tính chất.**

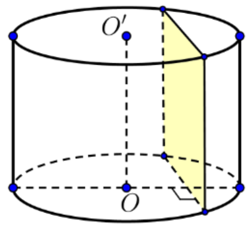
Nếu cắt mặt trụ tròn xoay bởi mặt phẳng:

✈ ***Cắt 2 mặt đáy*** thì có các trường hợp sau xảy ra:

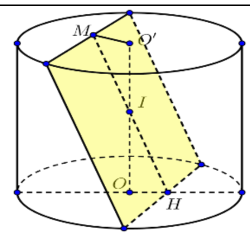
① Mặt phẳng cắt mặt trụ theo 2 đường sinh
→Thiết diện là tứ giác (hình vuông/hình chữ nhật).




② Mặt phẳng cắt mặt trụ theo 2 đường sinh, song song với trục

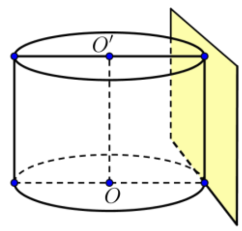



③ Mặt phẳng cắt mặt trụ theo 2 đường sinh, cắt trục

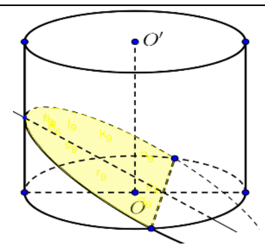



✈ ***Chỉ cắt 1 mặt đáy*** thì có các trường hợp sau xảy ra:

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh
→Mặt phẳng tiếp diện của mặt trụ.

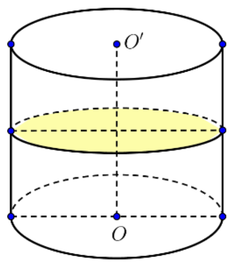



④ Mặt phẳng cắt 1 đường sinh hình trụ và 1 mặt đáy
→Giao tuyến là đường parabol.

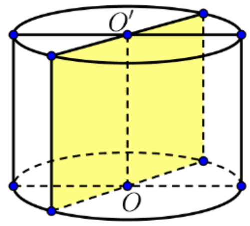
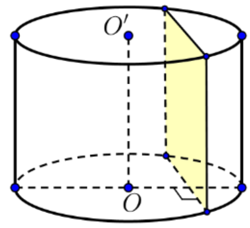
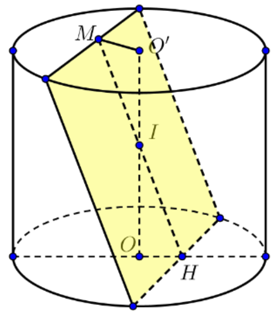
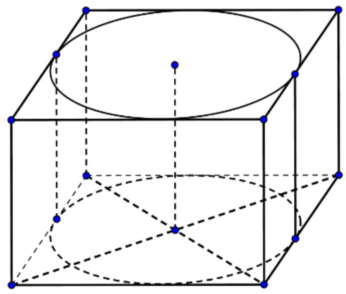
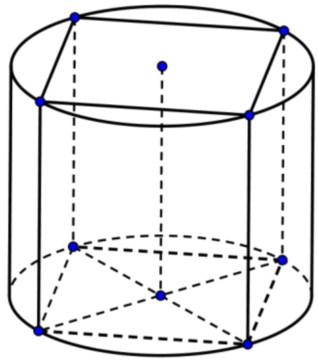
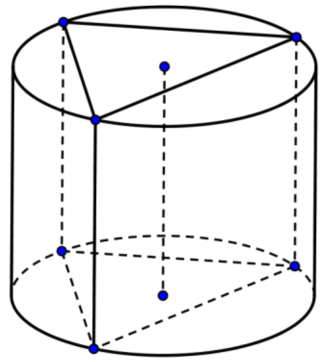



✈ ***Song song 2 đáy*** thì có trường hợp sau xảy ra:

① Mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón
→Giao tuyến là một đường tròn.



5. Mối liên hệ thường gặp.

| | Trường hợp | Nội dung | Công thức | Hình minh họa |
|---|---|---|---|---|
| Thiết diện | Qua trục | Thiết diện là hình vuông | $h=l=2R$ |  |
| | Không qua trục | ***Song song với trục:***<br>+ Vẽ trung điểm của dây.<br>+ Nối với tâm mặt đáy.<br>+ Xem giả thiết: cách trục 1 khoảng $d \to d=OH$ | |  |
| | | ***Cắt trục tại*** $I$ ***:***<br>+ Vẽ trung điểm hai dây.<br>+ Nối hai trung điểm $\to$ cắt trục tại $I$.<br>+ Xem giả thiết:<br>☞ $\left(t/dien;m/day\right)=O'MI=OHI$.<br>☞ $\left(t/dien;truc\right)=OIH=O'IM$. | |  |
| Liên quan với khối hộp – lăng trụ | Nội tiếp | Nội tiếp hình hộp đứng $\to \begin{cases} h=l=c/ben \\ R=\frac{1}{2}c/day \end{cases}$. | |  |
| | Ngoại tiếp | Ngoại tiếp hình hộp đứng $\to \begin{cases} h=canh \\ R=\dfrac{c/day\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. | |  |
| | | Ngoại tiếp lăng trụ đứng $\to \begin{cases} h=c/ben \\ R=r \end{cases}$.<br>Với $r$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy. | |  |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 2.1.* Tính độ dài đường sinh, bán kính đáy, đường cao

☑ Trường hợp đơn giản, áp dụng công thức đã có.

⟶Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$ .

⟶Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.

⟶Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$

⟶Thể tích khối trụ: $V = B.h = \pi r^2.h$

### *Dạng 2.2.* Tính diện tích xung quanh – toàn phần – thể tích

☑ Cho hình trụ $(H)$ có bán kính đáy bằng $r$, chiều cao $h$ và độ dài đường sinh là $l$. Ký hiệu $S_{xq}$, $S_{tp}$ lần lượt là diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ $(H)$, khi đó ta có

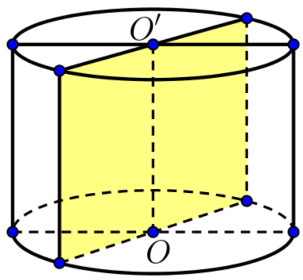
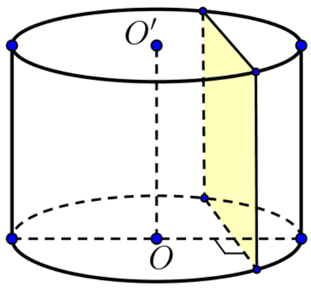
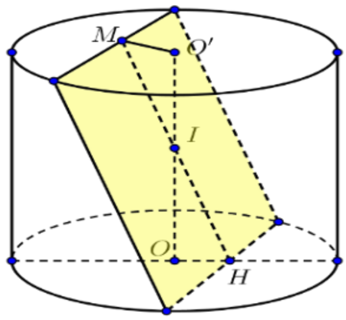
⟶Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$ .

⟶Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.

⟶Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$

⟶Thể tích khối trụ: $V = B.h = \pi r^2.h$

### *Dạng 2.3.* Thiết diện

| *Qua trục* | *Không qua trục* | *Cắt trục* |
|---|---|---|
| ☑ Thiết diện là hình vuông<br>$h = l = 2R$ | ☑ ***Song song với trục:***<br>+ Vẽ trung điểm của dây.<br>+ Nối với tâm mặt đáy.<br>+ Xem giả thiết: cách trục 1 khoảng $d \to d = OH$ | ☑ ***Cắt trục tại*** $I$ **:**<br>+ Vẽ trung điểm hai dây.<br>+ Nối hai trung điểm → cắt trục tại $I$ .<br>+ Xem giả thiết:<br>☞ $(t/dien;m/day) = O'MI = OHI$ .<br>☞ $(t/dien;truc) = OIH = O'IM$ . |
|  |  |  |

### *Dạng 2.4.* Nội – ngoại tiếp

☑ ***Bài toán 1:*** Hình trụ ngoại tiếp

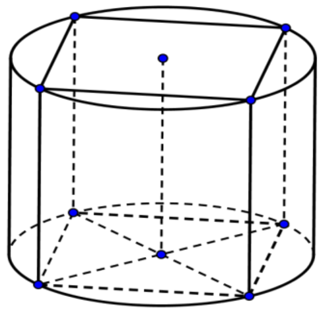
◆ ***Loại 1:*** Hình trụ ngoại tiếp hình hộp đứng

Khi đó hình trụ có:

+ *Đường sinh* $l$ là *cạnh bên* của hình hộp

+ *Chiều cao* $h$ là *chiều cao* của hình hộp

+ *Bán kính* đáy $r$ bằng $\dfrac{c/day\sqrt{2}}{2}$.

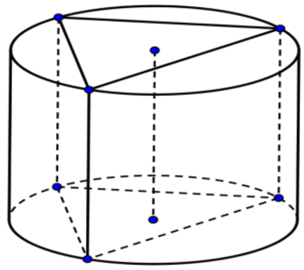


◆ ***Loại 2:*** Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đứng

Khi đó hình trụ có:

+ *Đường sinh* $l$ là *cạnh bên* của hình lăng trụ
+ *Chiều cao* $h$ là *chiều cao* của hình lăng trụ
+ *Bán kính* đáy $r$ bằng $r_d$.

Với $r_d$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy

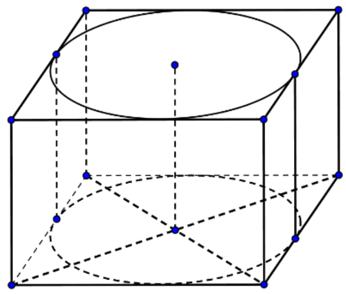


☑ ***Bài toán 2:*** Hình trụ nội tiếp

◆ ***Loại 1:*** Hình trụ nội tiếp hình hộp đứng

Khi đó hình trụ có:

+ *Đường sinh* $l$ là *cạnh bên* của hình hộp
+ *Chiều cao* $h$ là *chiều cao* của hình hộp
+ *Bán kính* đáy $r$ bằng $\dfrac{c/day}{2}$.

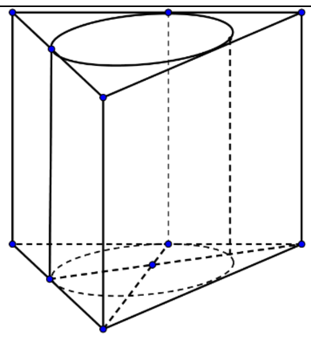


◆ ***Loại 2:*** Hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đứng

Khi đó hình trụ có:

+ *Đường sinh* $l$ là *cạnh bên* của hình lăng trụ
+ *Chiều cao* $h$ là *chiều cao* của hình lăng trụ
+ *Bán kính* đáy $r$ bằng $r_d = \dfrac{2}{3}h_d = \dfrac{c/day.\sqrt{3}}{3}$.

Với $r_d$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy



## *Dạng 2.5.* Min – max liên quan khối trụ

☑ Xây dựng công thức cần tìm *min – max*.

☑ Dùng các cách dưới đây để tìm *min – max*.

| | *Dạng* | *Dấu "=" xảy ra khi* |
|---|---|---|
| **BĐT** *Bunyakovsky* | $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$ | $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ |
| | $(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$ | $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$ |
| **BĐT** *AM – GM* | $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ | $a = b$ |
| | $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2....a_n}\ (n \ge 1)$ | $a_1 = a_2 = ... = a_n$ |
| *Khảo sát hàm số trên khoảng xác định* | Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán. | |
| *Đánh giá lượng giác* | $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin(AB;AC)$.<br>Khi đó, để $[S_{ABC}]_{\max}$<br>$\Leftrightarrow [\sin(AB;AC)]_{\max} \Leftrightarrow \sin(AB;AC) = 1 \Leftrightarrow (AB;AC) = 90^0 \Leftrightarrow AB \perp AC$ | |

## *Dạng 2.6.* Bài toán thực tế

☑ ***Bài toán 1:*** Các bài toán thực tế đã được mô hình hóa bằng một bài toán hình học.

⟶ Sử dụng công cụ hình học, đại số (nếu cần) giải quyết bài toán.

⟶ Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa .

☑ ***Bài toán 2:*** Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học.

*Bước 1:* Dựa trên các giả thiết và yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình Hình học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả “dưới dạng ngôn ngữ Hình học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn.

*Bước 2:* Sử dụng công cụ giải quyết bài toán hình học được hình thành từ *bước 1*.

⟶ Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa .

Hình học
Chủ đề 03

KHỐI TRÒN XOAY

# KHỐI CẦU

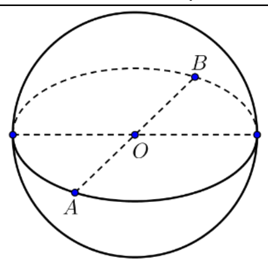
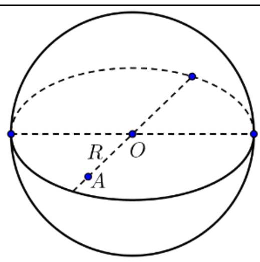
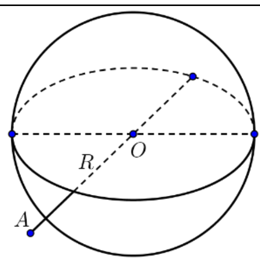
## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Định nghĩa.

- Tập hợp các điểm $M$ trong không gian cách điểm $O$ cố định một khoảng $R$.
  Gọi là mặt cầu tâm $O$, bán kính $R$, ký hiệu: $S(O;R)$. Khi đó $S(O;R)=\{M \mid OM=R\}$.

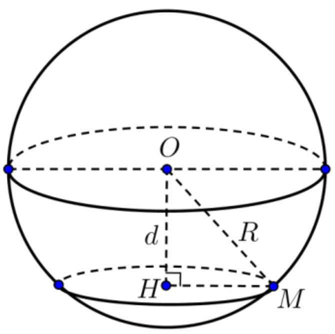
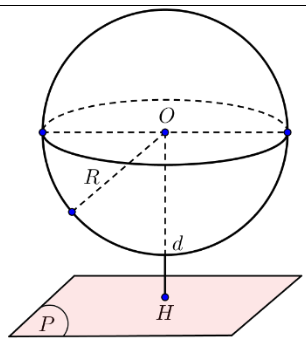
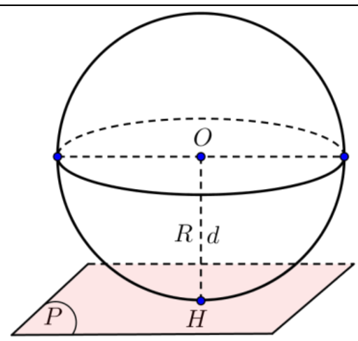
### 2. Vị trí tương đối của một điểm với mặt cầu.

- Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm $A$ bất kì, khi đó:

| | | |
|---|---|---|
| ① Nếu $OA=R$ $\Leftrightarrow A\in S(O;R)$. $OA$ là bán kính mặt cầu. | ② Nếu $OA<R\Leftrightarrow A$ nằm trong mặt cầu. | ③ Nếu $OA>R\Leftrightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu. |
|  |  |  |

### 3. Vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu.

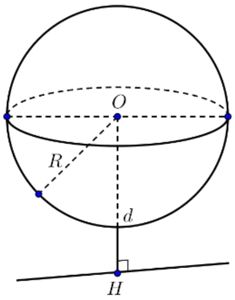
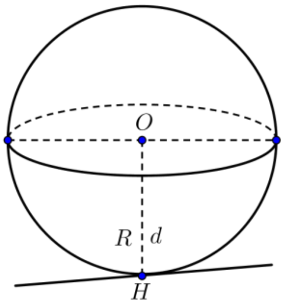
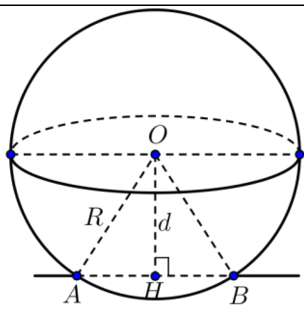
- Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một $(P)$. Gọi $d$ là khoảng cách từ tâm $O$ của mặt cầu đến $(P)$ và $H$ là hình chiếu của $O$ trên $(P)$ $\Rightarrow d=OH$.

| | | |
|---|---|---|
| ① Nếu $d<R\Leftrightarrow(P)\cap S(O;R)$ theo giao tuyến là đường tròn trên $(P)$ tâm $H$, bán kính $r=HM$ $=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{R^2-OH^2}$. | ② Nếu $d>R\Leftrightarrow(P)$ không cắt mặt cầu $S(O;R)$. | ③ Nếu $d=R\Leftrightarrow(P)$ có một điểm chung duy nhất. Ta nói mặt cầu $S(O;R)$ tiếp xúc $(P)$. |
|  |  |  |

Do đó, điều kiện cần và đủ để $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ là $d(O,(P))=R$.

### 4. Vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu.

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một đường thẳng $\Delta$. Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ trên đường thẳng $\Delta$ và $d=OH$ là khoảng cách từ tâm $O$ của mặt cầu đến $\Delta$.
Khi đó:

<table>
<tr>
<td>① Nếu $d>R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O;R)$.</td>
<td>② Nếu $d<R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu $S(O;R)$ tại hai điểm phân biệt.</td>
<td>③ Nếu $d=R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu tiếp xúc nhau (tại một điểm duy nhất).</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Do đó: điều kiện cần và đủ để $\Delta$ tiếp xúc với mặt cầu là $d=d(O,\Delta)=R$.

### 5. Định lý.

Nếu điểm $A$ nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$ thì:

- Qua $A$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu $S(O;R)$.
- Độ dài đoạn thẳng nối $A$ với các tiếp điểm đều bằng nhau.
- Tập hợp các điểm này là một đường tròn nằm trên mặt cầu $S(O;R)$.

### 6. Diện tích – Thể tích.

Diện tích mặt cầu: $S_C=4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu: $V_C=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

### 7. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện.

***Trục đa giác đáy (Trục đáy):***
Đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy.
*Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.*

***Đường trung trực của đoạn thẳng:***
Đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.
*Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.*

***Mặt trung trực của đoạn thẳng:***
Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.
*Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.*

### 8. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

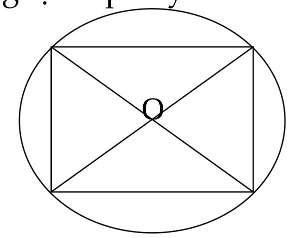
***Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:***
Là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp.
Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm $I$ của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

***Bán kính:***
Là khoảng cách từ $I$ đến các đỉnh của hình chóp.

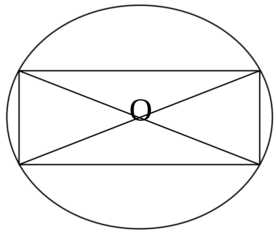
## 9. Mặt cầu ngoại tiếp đa diện:

### 9.1. Kỹ thuật xác định đường tròn ngoại tiếp đa giác:

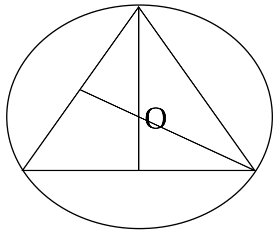
- Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy.
  Trục đáy là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy.



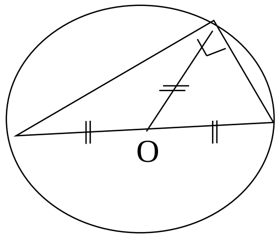

Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



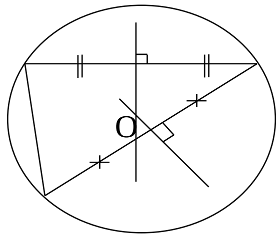

Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.




Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).

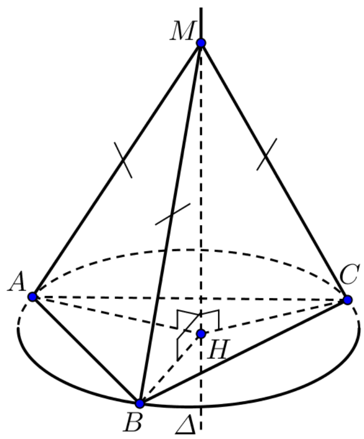



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.

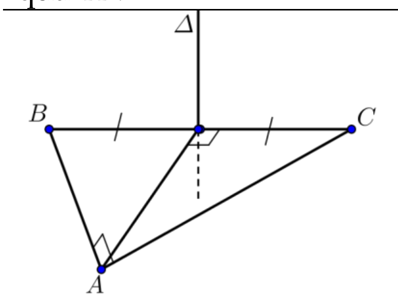
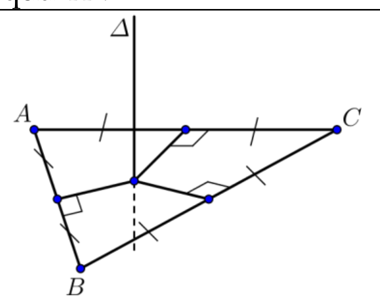
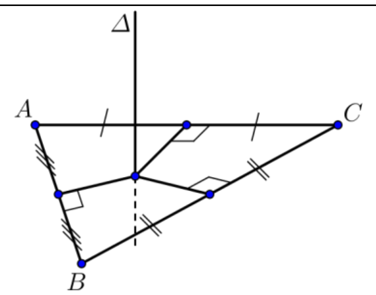



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ.

### 9.2. Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

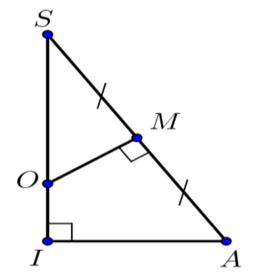



- ***Định nghĩa:***
  *Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy* là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.
- ***Tính chất:***
  $\forall M \in \Delta : MA = MB = MC$. Suy ra:
  $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$.
  ❖ ***Bước 1***:
  Xác định tâm $H$ của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
  ❖ ***Bước 2:***
  Qua $H$ dựng $\Delta$ vuông góc với mặt phẳng đáy.
- ***Một số trường hợp đặc biệt:***

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta ABC$ vuông tại $A$, có $H$ là trung điểm $BC$. $\to$ Khi đó trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ là $\Delta$ qua $H$. | $\Delta$ đều $ABC$, có $H$ là trọng tâm $\Delta ABC$. $\to$ Khi đó trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ là $\Delta$ qua $H$. | $\Delta$ thường $ABC$, gọi $H$ là giao điểm của 3 đường trung trực. $\to$ Khi đó trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ là $\Delta$ qua $H$ |
|   |   |   |

### 9.3. Kỹ năng tam giác đồng dạng:

$\Delta SMO$ đồng dạng với $\Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SO}{SA}=\dfrac{SM}{SI}$.




### 9.4. Nhận xét quan trọng:

$\exists M,S:\begin{cases}MA=MB=MC\\SA=SB=SC\end{cases}\Rightarrow SM$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$

### 9.5. Kỹ thuật xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ *(thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp).*

Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:

❖ ***Bước 1***:

Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Dựng $\Delta$: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

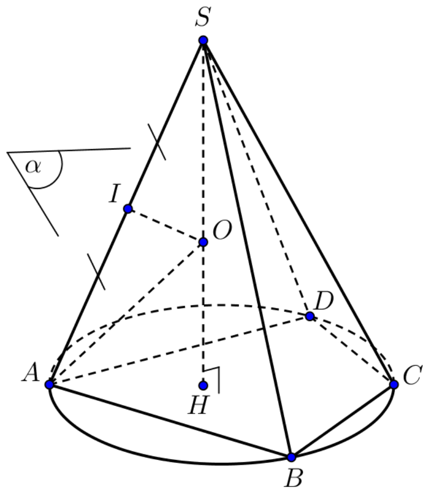
❖ ***Bước 2:***

Lập mặt phẳng trung trực $(\alpha)$ của một cạnh bên.

Lúc đó:

– Tâm $O$ của mặt cầu: $\Delta\cap(\alpha)=\{O\}$

– Bán kính: $R=SA(=SO)$. Tuỳ vào từng trường hợp.




### 9.2. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện:

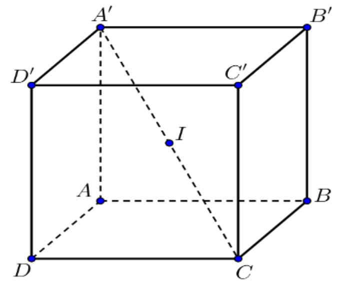
**1.** ***Hình hộp chữ nhật, hình lập phương:***

✈ ***Tâm:***

$\Rightarrow$Tâm là $I$, là trung điểm của $AC'$.

✈ ***Bán kính:***

$\Rightarrow$Bán kính: $R=\dfrac{AC'}{2}$.




**2.** ***Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn:***

Xét hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó có 2 đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và $(O')$.

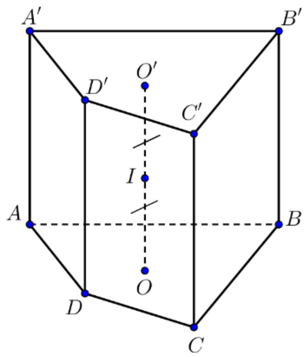
Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

✈ ***Tâm:***

$\Rightarrow I$ với $I$ là trung điểm của $OO'$.

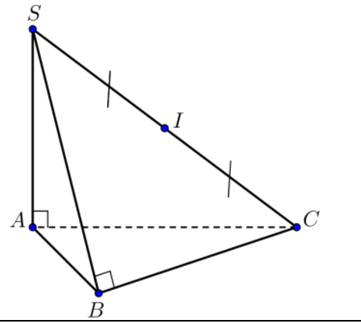
✈ ***Bán kính:***

$\Rightarrow$Bán kính: $R=IA'=IA=IB=IB'=...$.

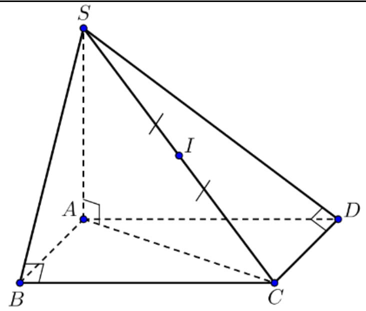



**3.** ***Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông:***

Chóp $S.ABC$ có $SAC = SBC = 90^0$.
Lúc đó, mặt cầu nội tiếp chóp có:
✈ *Tâm:*
$\Rightarrow I$ là trung điểm của $SC$.
✈ *Bán kính:*
$\Rightarrow$Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$.

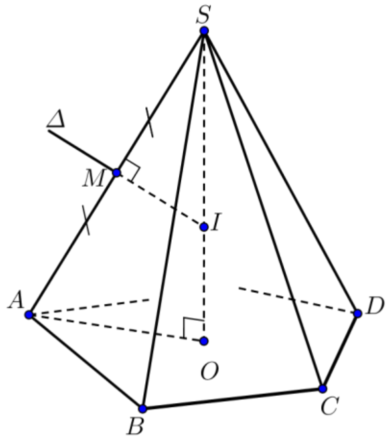



Chóp $S.ABCD$ có $SAC = SBC = SDC = 90^0$.
Lúc đó, mặt cầu nội tiếp chóp có:
✈ *Tâm:*
$\Rightarrow I$ là trung điểm của $SC$.
✈ *Bán kính:*
$\Rightarrow$Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.



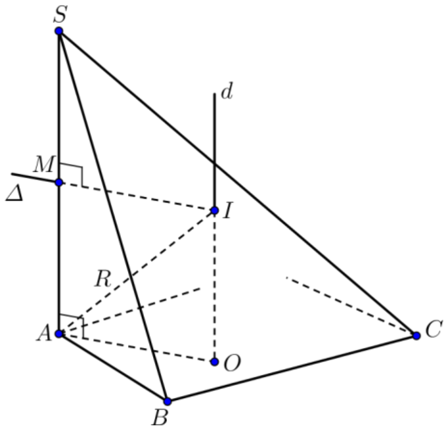

**4.** ***Hình chóp đều:***

Cho hình chóp đều $S.ABC....$
✈ *Tâm:*
$\Rightarrow$Gọi $O$ là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.
$\Rightarrow$Trong $(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh $SA$ là $\Delta \cap SA = M$ và $\Delta \cap SO = I$
$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu
✈ *Bán kính:* $\Delta SMI \backsim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA}$
$\Rightarrow$Bán kính: $R = IS = \dfrac{SM.SA}{SO} = \dfrac{SA^2}{2SO} = IA = IB = ....$




**5.** ***Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy:***

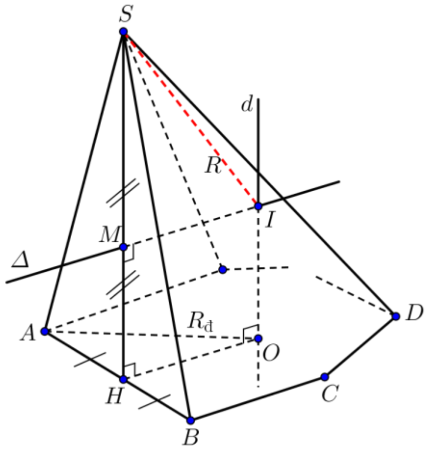
Cho hình chóp $S.ABC....$ có cạnh bên $SA \perp (ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm $O$.
✈ *Tâm:*
$\Rightarrow$Từ tâm $O$ ngoại tiếp của đường trònđáy, ta vẽ đường thẳng $d$ vuông góc với $(ABC...)$ tại $O$.
$\Rightarrow$Trong $(d;SA)$, dựng đường trung trực $\Delta$ của cạnh $SA$ là $\Delta \cap SA = M$ và $\Delta \cap d = I$
$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu




✈ *Bán kính:*
$\Rightarrow$Ta có: $MIOA$là hình chữ nhật.
$\Rightarrow$Xét $\Delta MAI$ vuông tại $M$ có: $R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\dfrac{SA}{2}\right)^2}$.

**6.** ***Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt phẳng đáy:***

Cho hình chóp $S.ABC....$ có mặt bên $(SAB)\perp(ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm $O$.




✈ *Tâm:*

⇒Từ tâm $O$ ngoại tiếp của đường trònđáy, ta vẽ đường thẳng $d$ vuông góc với $(ABC...)$ tại $O$.

⇒Trong $(d;SH)$, dựng đường trung trực $\Delta$ của cạnh $SH$ là $\Delta\cap SH=M$ và $\Delta\cap d=I$

⇒ $I$ là tâm mặt cầu.

✈ *Bán kính:*

⇒Xét $\Delta SMI$ vuông tại $M$ có: $R=SI=\sqrt{\underbrace{SM^2}_{=R_b}+\underbrace{MI^2}_{=HO}}=\sqrt{R_b^2+HO^2}\ (*)$.

⇒Xét $\Delta AHO$ vuông tại $H$ có: $HO=\sqrt{\underbrace{AO^2}_{=R_d}-\underbrace{AH^2}_{=\frac{1}{2}AB}}=\sqrt{R_d^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}\ (**)$

⇒Từ $(*)\&(**)\to R=\sqrt{R_b^2+R_d^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

## 7. *Hình chóp khác:*

✈ *Tâm:*

⇒ Dựng trục $\Delta$ của đáy.

⇒ Dựng mặt phẳng trung trực $(\alpha)$ của một cạnh bên bất kì.

⇒ $\Delta\cap(\alpha)=I\to I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

⇒ $I$ là tâm mặt cầu

✈ *Bán kính:*

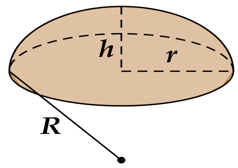
⇒khoảng cách từ $I$ đến các đỉnh của hình chóp.

## 10.Tổng hợp các công thức đặc biệt về khối tròn xoay:

**1.** ***Chỏm cầu:***

$$S_{xq}=2\pi Rh=\pi\left(r^2+h^2\right)$$

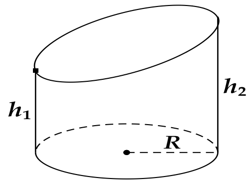
$$V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\frac{\pi h}{6}\left(h^2+3r^2\right)$$




**2.** ***Hình trụ cụt:***

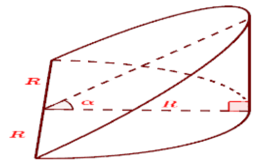
$$S_{xq}=\pi R\left(h_1+h_2\right)$$

$$V=\pi R^2\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)$$



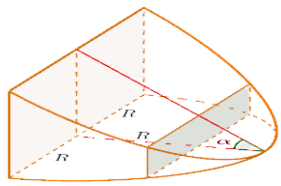

**3.** ***Hình nêm loại 1:***

$$V=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$



**4.** ***Hình nêm loại 2:***

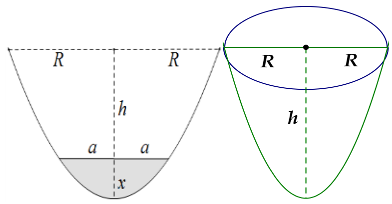
$$V=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3\tan\alpha$$



**5.** ***Parabol bậc hai-Paraboloid tròn xoay:***

$$S_{parabol}=\frac{4}{3}Rh$$

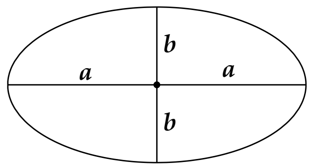
$$V=\frac{1}{2}\pi R^2h=\frac{1}{2}V_{tru}$$




**6.** ***Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip:***

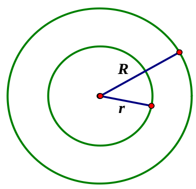
$$S=\pi a.b$$

$$V_{xoay\,quanh\,2b}=\frac{4}{3}\pi a^2b \qquad V_{xoay\,quanh\,2a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$



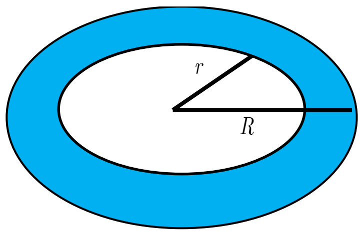

**7.** ***Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip:***

$$S=\pi\left(R^2-r^2\right)$$




**8.** ***Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip:***

$$V=2\pi^2\left(\frac{R+r}{2}\right)\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$$



**11. Tổng hợp tính bán kính mặt cầu:**

| | *Nội dung* | | *Công thức* |
|---|---|---|---|
| ***Loại 1*** | Cạnh bên $SA\perp(day)$. | Đáy bất kỳ. | $R_{mc}=\sqrt{R_d^2+\dfrac{h^2}{4}}$ |
| | | $\Delta ABC$ vuông tại $B$. | $R=\dfrac{SC}{2}$ |
| | | $\Delta ABC$ vuông tại $C$. | $R=\dfrac{SB}{2}$ |
| ***Loại 2*** | Chóp đều. | | $R=\dfrac{SA^2}{2.SO}$ |
| ***Loại 3*** | Mặt bên vuông góc với đáy. | | $R=\sqrt{R_b^2+R_d^2-\dfrac{AB^2}{4}}$ |
| ***Loại 4*** | Ngoại tiếp khối lăng trụ đứng và đáy nội tiếp đường tròn. | | $R_{mc}=\sqrt{R_d^2+\dfrac{h^2}{4}}$ |
| ***Loại 5*** | Ngoại tiếp khối hộp chữ nhật dài; rộng; cao lần lượt $a;b;c$. | | $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$ |
| ***Loại 6*** | Nội tiếp hình lập phương cạnh $a$. | | $R=\dfrac{a}{2}$ |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 3.1.* Tính bán kính khối cầu cơ bản

☑ Trường hợp đơn giản, áp dụng công thức đã có.

$*$ Diện tích mặt cầu: $S_C=4\pi R^2$. $*$ Thể tích khối cầu: $V_C=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

### *Dạng 3.2.* Tính diện tích mặt cầu – thể tích khối cầu

☑ Trường hợp đơn giản, áp dụng công thức đã có.

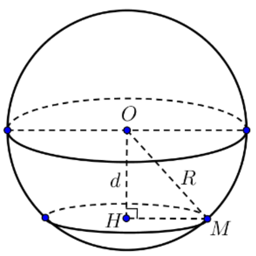
$\longrightarrow$ Diện tích mặt cầu: $S_C=4\pi R^2$.

$\longrightarrow$ Thể tích khối cầu: $V_C=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

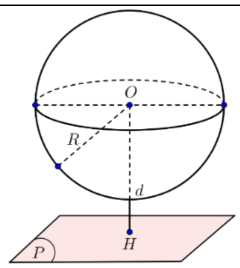
### *Dạng 3.3.* Thiết diện

✈ Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một $(P)$. Gọi $d$ là khoảng cách từ tâm $O$ của mặt cầu đến $(P)$ và $H$ là hình chiếu của $O$ trên $(P)\Rightarrow d=OH$.

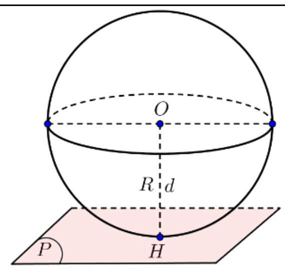
① Nếu $d<R\Leftrightarrow(P)\cap S(O;R)$ theo giao tuyến là đường tròn trên $(P)$ tâm $H$, bán kính $r=HM=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{R^2-OH^2}$.




② Nếu $d>R\Leftrightarrow(P)$ không cắt mặt cầu $S(O;R)$.




③ Nếu $d=R\Leftrightarrow(P)$ có một điểm chung duy nhất. Ta nói mặt cầu $S(O;R)$ tiếp xúc $(P)$.




Do đó, điều kiện cần và đủ để $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ là $d(O,(P))=R$.

## *Dạng 3.5.* Nội – ngoại tiếp

✈ Tóm tắt các dạng bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện.

| | *Nội dung* | | *Công thức* |
|---|---|---|---|
| *Loại 1* | Cạnh bên $SA\perp(day)$. | Đáy bất kỳ. | $R_{mc}=\sqrt{R_d^2+\dfrac{h^2}{4}}$ |
| | | $\Delta ABC$ vuông tại $B$. | $R=\dfrac{SC}{2}$ |
| | | $\Delta ABC$ vuông tại $C$. | $R=\dfrac{SB}{2}$ |
| *Loại 2* | Chóp đều. | | $R=\dfrac{SA^2}{2.SO}$ |
| *Loại 3* | Mặt bên vuông góc với đáy. | | $R=\sqrt{R_b^2+R_d^2-\dfrac{AB^2}{4}}$ |
| *Loại 4* | Ngoại tiếp khối lăng trụ đứng và đáy nội tiếp đường tròn. | | $R_{mc}=\sqrt{R_d^2+\dfrac{h^2}{4}}$ |
| *Loại 5* | Ngoại tiếp khối hộp chữ nhật dài; rộng; cao lần lượt $a;b;c$. | | $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$ |
| *Loại 6* | Nội tiếp hình lập phương cạnh $a$. | | $R=\dfrac{a}{2}$ |

## *Dạng 3.6.* Min – max liên quan khối nón

☑ Xây dựng công thức cần tìm $min-max$.

☑ Dùng các cách dưới đây để tìm $min-max$.

| | *Dạng* | *Dấu "=" xảy ra khi* |
|---|---|---|
| **BĐT** ***Bunyakovsky*** | $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge\left(ac+bd\right)^2$ | $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ |
| | $\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$ | $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$ |
| **BĐT** ***AM – GM*** | $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ | $a=b$ |
| | $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1.a_2....a_n}\ (n\ge1)$ | $a_1=a_2=...=a_n$ |
| ***Khảo sát hàm số trên khoảng xác định*** | Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán. | |
| ***Đánh giá lượng giác*** | $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\left(AB;AC\right)$.<br>Khi đó, để $\left[S_{ABC}\right]_{\max}$<br>$\Leftrightarrow\left[\sin\left(AB;AC\right)\right]_{\max}\Leftrightarrow\sin\left(AB;AC\right)=1\Leftrightarrow\left(AB;AC\right)=90^0\Leftrightarrow AB\perp AC$ | |

Hình học
Chủ đề 01

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

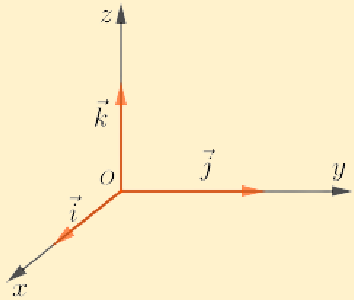
# TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

**Định nghĩa:**

Trong không gian $Oxyz$, trục $Ox;Oy;Oz$ đôi một vuông góc với nhau như hình. Các vectơ đơn vị trên từng trục $Ox;Oy;Oz$ lần lượt là $\boxed{\vec{i}=(1;0;0);\vec{j}=(0;1;0);\vec{k}=(0;0;1)}$.

$\longrightarrow$ Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ thì $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.




### 1. Véctơ

Xét hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

(1) Hai véctơ bằng nhau: ................................... $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$.

(2) Cộng – Trừ véctơ: ........................................ $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$.

(3) Tích của một số với véctơ: ........................... $k.\vec{a}\pm\vec{b}=(k.a_1;k.a_2;k.a_3)$.

(4) Độ dài véctơ $\vec{a}$ : ........................................ $|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}$ .

(5) Tích vô hướng hai véctơ: ............................ $\left[\begin{array}{l}\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})\\ \vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3\end{array}\right.$

$\longrightarrow$ Góc giữa 2 véctơ: $\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}.\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2}}$.

***Chú ý:*** Khi $\vec{a}.\vec{b}>0$ thì $\cos(\vec{a};\vec{b})>0\Rightarrow(\vec{a};\vec{b})$ là góc nhọn,

Ngược lại nếu $\vec{a}.\vec{b}<0$ thì $\cos(\vec{a};\vec{b})<0\Rightarrow(\vec{a};\vec{b})$ là góc tù.

(6) Véctơ $\vec{a}$ vuông góc véctơ $\vec{b}$ : ......................... $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$

(7) Véctơ $\vec{a}$ cùng phương véctơ $\vec{b}$ : ...................... $[\vec{a};\vec{b}]=\vec{0}$ hoặc $\vec{a}=k.\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=k.b_1\\a_2=k.b_2\\a_3=k.b_3\end{cases}$.

(8) Véctơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ đồng phẳng: ........................... $[\vec{a};\vec{b}].\vec{c}=0$.

(9) $ABCD$ là hình bình hành ............................... $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

(10) Tích có hướng của hai véctơ ............................ $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$

*Qui tắc*: Che từ trước ra sau – ở giữa đổi dấu

Hoặc ........................................................................ $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$

(11) Diện tích tam giác $ABC$ ..................................... $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$

(12) Thể tích tứ diện $ABCD$ ..................................... $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

(13) Thể tích hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ............................ $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

## 2. Điểm

Xét hai điểm $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ ta có:

(1) Tọa độ véctơ $\overrightarrow{AB}$: ......................................... $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$.

(2) Độ dài véctơ $\overrightarrow{AB}$: ........................................ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

(3) $M$ thuộc các trục tọa độ: ..................................... $\left|\begin{array}{l}M\in Ox\to M\left(x;0;0\right)\\ M\in Oy\to M\left(0;y;0\right)\\ M\in Oz\to M\left(0;0;z\right)\end{array}\right.$

*Cách nhớ*: Thuộc cái gì $\to$ cái đó có.

(4) $M$ thuộc các mặt phẳng tọa độ: ........................ $\left|\begin{array}{l}M\in\left(Oxy\right)\to M\left(x;y;0\right)\\ M\in\left(Oxz\right)\to M\left(x;0;z\right)\\ M\in\left(Oyz\right)\to M\left(0;y;z\right)\end{array}\right.$

*Cách nhớ*: Thuộc cái gì $\to$ cái đó có.

(5) $I$ là trung điểm $AB$: $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

$$\to\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$$

(6) $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

$$\to\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

(7) $G$ là trọng tâm chóp $ABCD$: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right)$

$$\to\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

(8) Nếu điểm $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số $k$ $\left(\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}\right)$ thì ta có:

$$\begin{cases}x_A-x_M=k\left(x_B-x_M\right)\\ y_A-y_M=k\left(y_B-y_M\right)\\ z_A-z_M=k\left(z_B-z_M\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A-k.x_B}{1-k}\\ y_M=\dfrac{y_A-k.y_B}{1-k}\\ z_M=\dfrac{z_A-k.z_B}{1-k}\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{x_A-k.x_B}{1-k};\dfrac{y_A-k.y_B}{1-k};\dfrac{z_A-k.z_B}{1-k}\right)\text{ với } k\neq1.$$

(9) Ứng dụng tâm tỉ cự của $n$ điểm:

**Cực trị độ dài vecto:**

Cho $n$ điểm $A_1; A_2; \ldots; A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \ldots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$ và đường thẳng $d$ hoặc mặt phẳng $(P)$. Tìm điểm $M$ trên đường thẳng $d$ hoặc mặt phẳng $(P)$, sao cho $\left|k_1.\overrightarrow{MA_1} + k_2.\overrightarrow{MA_2} + \ldots + k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất.

***Hướng giải quyết:***

**Bước 1:** Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $k_1.\overrightarrow{IA_1} + k_2.\overrightarrow{IA_2} + \ldots + k_n.\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

**Bước 2:** Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\left|k_1.\overrightarrow{MA_1} + k_2.\overrightarrow{MA_2} + \ldots + k_n.\overrightarrow{MA_n}\right| = \left|(k_1 + k_2 + \ldots k_n)\overrightarrow{MI}\right| = |k|\left|\overrightarrow{MI}\right|$$

**Bước 3:** Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi $M$ xảy ra ở vị trí nào?

**Ví dụ 1.**

Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;1;1); B(3;1;0)$ và mặt phẳng $(P)$. Tìm $M$ trên mặt phẳng $(P)$ để $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

***Lời giải***

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Để thỏa được điều này ta thấy $I$ là trung điểm $AB$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} + \left(\underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}}\right) = 2\overrightarrow{MI}$.

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|2\overrightarrow{MI}\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(P)$.

**Cực trị độ dài bình phương vecto:**

Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \ldots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n > 0$. Tìm điểm $M$ trên đường thẳng $d$ hoặc mặt phẳng $(P)$, sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \ldots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

***Hướng giải quyết:***

**Bước 1:** Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $k_1.\overrightarrow{IA_1} + k_2.\overrightarrow{IA_2} + \ldots + k_n.\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

**Bước 2:** Thấy rằng $MA_1^2 = \left|\overrightarrow{MA_1}\right|^2 = \left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MI}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_1}\right) + \left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \ldots + k_n \cdot MA_n^2$$

$$= k_1\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_1}\right) + \left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2\right] + \ldots + k_n\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_n}\right) + \left(\overrightarrow{IA_n}\right)^2\right]$$

$$= (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)MI^2 + \left(k_1 \cdot IA_1^2 + \ldots + k_n \cdot IA_n^2\right) + \ldots + 2\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{k_1.\overrightarrow{IA_1} + \ldots + k_n.\overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}}\right)$$

$=\left(k_1+k_2+...+k_n\right)MI^2+\left(k_1\cdot IA_1^2+...+k_n\cdot IA_n^2\right)$

**Bước 3:** Do $k>0$, để $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+...+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm $M$ cần tìm.

▶ ***Chú ý:*** Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n<0$. Tìm điểm $M$ trên $d$ hoặc $(P)$, sao cho tổng $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+...+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.

### Ví dụ 2.

Trong không gian $Oxyz$, tìm điểm $M$ nằm trên mặt phẳng $(P)$ chứa $\Delta ABC$ sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

***Lời giải***

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Với mọi điểm $M$ ta có:

$$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{MI}^2+4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2+3\overrightarrow{MI}^2+6\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}^2$$

$$=6MI^2+\left(IA^2+2IB^2+3IC^2\right)+2\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}}\right)$$

$$=6MI^2+\left(IA^2+2IB^2+3IC^2\right)$$

Vậy $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI=0$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M\equiv I$

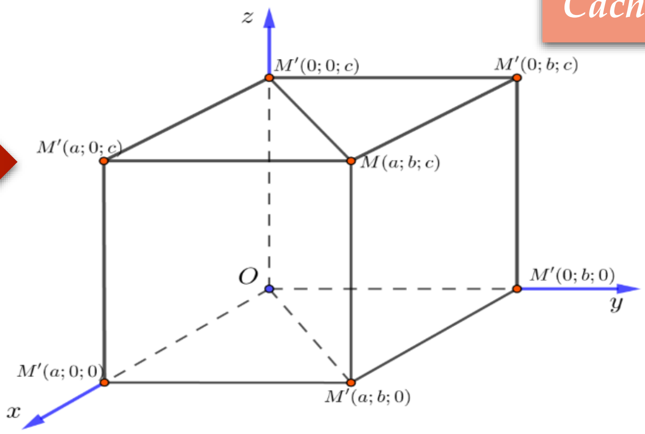
### 3. Hình chiếu vuông góc

**Hình chiếu vuông góc** lên
- Trục $Ox$: $M'(a;0;0)$
- Trục $Oy$: $M'(0;b;0)$
- Trục $Oz$: $M'(0;0;c)$

*HCVG lên (Oxy); (Oxz); (Oyz) tương tự*

**Cách nhớ:** *Chiếu lên cái gì cái đó có.*

*Hình vẽ minh họa:*



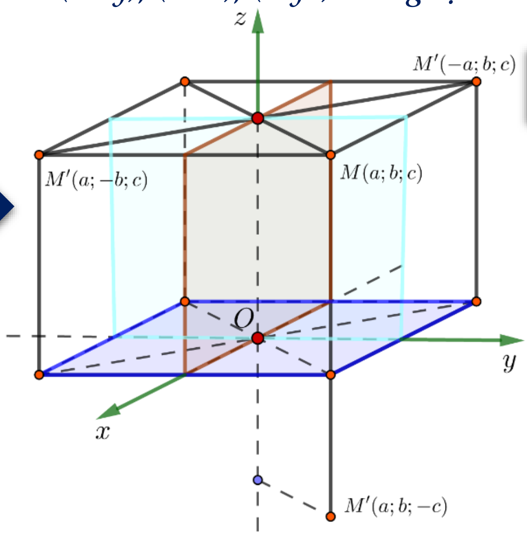

### 4. Đối xứng

**Đối xứng** qua
- Trục $Ox$: $M'(a;-b;-c)$
- Trục $Oy$: $M'(-a;b;-c)$
- Trục $Oz$: $M'(-a;-b;c)$

*HCVG lên (Oxy); (Oxz); (Oyz) tương tự*

**Cách nhớ:** *Đối xứng qua cái gì cái đó giữ. Còn lại đổi (tức thêm dấu trừ).*

*Hình vẽ minh họa:*



### 5. Góc

Góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\boxed{\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}}$

$\longrightarrow$ Góc giữa:

(1) Hai đường thẳng $d_1;d_2$: ...................................... $\left|\cos\left(d_1;d_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}$.

(2) Hai mặt phẳng $(\alpha_1);(\alpha_2)$: ................................. $\left|\cos\left((\alpha_1);(\alpha_2)\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}$.

(3) Đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$: ................ $\left|\sin\left(d;(\alpha)\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{u}_d\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|.\left|\vec{u}_d\right|}$.

### 6. Khoảng cách

(1) Hai điểm $A;B$: ............................................................ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

(2) Điểm $M_0$ và $\Delta$ : ............................................. $d\left(M_0;\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{MM_0}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

$$\xrightarrow[M_0\in\Delta']{\Delta'//\Delta} d\left(\Delta';\Delta\right)=d\left(M_0;\Delta\right)$$

(3) Hai đường $\Delta_1;\Delta_2$ $\left(M\in\Delta_1;N\in\Delta_2\right)$: ............. $d\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u}_1;\vec{u}_2\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1;\vec{u}_2\right]\right|}$.

$$\xrightarrow[\text{cheo nhau}]{AB\&CD} d\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right]\right|}$$

(4) Điểm $M_0$ và mặt $(\alpha): ax+by+cz+d=0$: ....... $d\left(M_0;(\alpha)\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|}$.

$$\xrightarrow[\begin{cases}\Delta//(\alpha)\\ M_0\in\Delta\end{cases}]{\begin{cases}(\beta)//(\alpha)\\ M_0\in(\beta)\end{cases}} d\left(M_0;(\alpha)\right)=d\left((\beta);(\alpha)\right)=\left(\Delta;(\alpha)\right)$$

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 1.1.* Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước

**▶ Công thức liên quan thường dùng:**

Cho ba điểm $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B), C(x_C;y_C;z_C)$

• Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ thì $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

Khi đó $\overrightarrow{OM}=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k}$ thì $\overrightarrow{OM}=(m_1;m_2;m_3)\Rightarrow M(m_1;m_2;m_3)$.

Khi đó $\overrightarrow{MO}=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k}$ thì $\overrightarrow{MO}=(m_1;m_2;m_3)\Rightarrow M(-m_1;-m_2;-m_3)$.

(1) Tọa độ véctơ $\overrightarrow{AB}$: ........................................ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

(2) Độ dài véctơ $\overrightarrow{AB}$: ........................................ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

(3) $M$ thuộc các trục tọa độ: ................................ $\left|\begin{array}{l} M\in Ox\to M(x;0;0)\\ M\in Oy\to M(0;y;0)\\ M\in Oz\to M(0;0;z)\end{array}\right.$

*Cách nhớ*: Thuộc cái gì $\to$ cái đó có.

(4) $M$ thuộc các mặt phẳng tọa độ: ...................... $\left|\begin{array}{l} M\in(Oxy)\to M(x;y;0)\\ M\in(Oxz)\to M(x;0;z)\\ M\in(Oyz)\to M(0;y;z)\end{array}\right.$

*Cách nhớ*: Thuộc cái gì $\to$ cái đó có.

(5) $I$ là trung điểm $AB$: $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

$$\to\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$$

(6) $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

$$\to\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

(7) $G$ là trọng tâm chóp $ABCD$: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right)$

$$\to\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

(8) Nếu điểm $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số $k$ $\left(\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}\right)$ thì ta có:

$$\begin{cases} x_A-x_M=k(x_B-x_M)\\ y_A-y_M=k(y_B-y_M)\\ z_A-z_M=k(z_B-z_M)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A-k.x_B}{1-k}\\ y_M=\dfrac{y_A-k.y_B}{1-k}\\ z_M=\dfrac{z_A-k.z_B}{1-k}\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{x_A-k.x_B}{1-k};\dfrac{y_A-k.y_B}{1-k};\dfrac{z_A-k.z_B}{1-k}\right)\text{ với } k\neq1.$$

## Dạng 1.2. Tìm tọa độ điểm đặc biệt

| | | |
|---|---|---|
| **01** | **Chân đường cao** | • **Định nghĩa đường cao:** là đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến cạnh đáy thì gọi là đường cao của tam giác đó.<br>• **Chân đường cao:** là giao điểm của đường cao và cạnh đáy. |
| | | • **Bài toán:** Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh $A$ trong $\Delta ABC$.<br>***Bước 1:*** Tìm tọa độ $\overrightarrow{AH};\ \overrightarrow{BH};\ \overrightarrow{BC}$.<br>***Bước 2:*** Do $\begin{cases} H \in AH \\ AH \perp BC \end{cases} \to \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$<br>Do $H \in BC \to \overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{BC}$ cùng phương $\to \overrightarrow{BH} = k.\overrightarrow{BC}$<br>***Bước 3:*** Từ các yếu tố trên ta có hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \dfrac{x_{\overrightarrow{BH}}}{x_{\overrightarrow{BC}}} = \dfrac{y_{\overrightarrow{BH}}}{y_{\overrightarrow{BC}}} = \dfrac{z_{\overrightarrow{BH}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = k \end{cases} \to H(?)$ |
| **02** | **Trực tâm** | • **Định nghĩa trực tâm:** là giao điểm của ba đường cao. |
| | | • **Bài toán:** Tìm tọa độ trực tâm $H$ của $\Delta ABC$.<br>***Bước 1:*** Tìm tọa độ $\overrightarrow{AH};\ \overrightarrow{BH};\ \overrightarrow{CH};\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BC}$.<br>***Bước 2:*** Do $\begin{cases} H \in AH \\ AH \perp BC \end{cases} \to \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$<br>Tương tự ta được $\to \begin{cases} \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$.<br>***Bước 3:*** Từ các yếu tố trên ta có hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \to H(?)$. |
| **03** | **Chân đường phân giác trong** | • **Định nghĩa đường phân giác:** là đường thẳng chia góc đó thành 2 góc bằng nhau.<br>• **Chân đường phân giác:** là giao điểm của đường phân giác và cạnh đáy. |
| | | • **Bài toán:** Tìm tọa độ chân đường phân giác trong $D$ kẻ từ đỉnh $A$ trong $\Delta ABC$.<br>***Bước 1:*** Theo tính chất đường phân giác: $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC}$.<br>Do $D \in AC \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \dfrac{BA}{BC}.\overrightarrow{DC}$.<br>*Tính tỷ số $\dfrac{BA}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra.*<br>***Bước 2:*** Áp dụng $\vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{a}} = k.x_{\vec{b}} \\ y_{\vec{a}} = k.y_{\vec{b}} \\ z_{\vec{a}} = k.z_{\vec{b}} \end{cases}$. Để tìm tọa độ $D$. |

<table>
<tr><td rowspan="2">04</td><td rowspan="2">Tâm đường tròn nội tiếp</td><td>• Định nghĩa tâm đường tròn nội tiếp tam giác:<br>là giao điểm của 3 đường phân giác trong.</td></tr>
<tr><td>• Bài toán: Tìm tọa độ chân tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$.<br>
▶ Cách 1. Áp dụng tính chất:<br>
“Cho $\Delta ABC$, $I$ là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\vec{0}\,(*)$”<br>
Bước 1: Tính $AC;\ AB;\ BC$ ta được các hằng số.<br>
Bước 2: Tính $\overrightarrow{IA};\ \overrightarrow{IB};\ \overrightarrow{IC}$.<br>
Bước 3: Thay vào $(*)$ và thu gọn $\to I(?)$.<br>
▶ Cách 2. Áp dụng tính chất giao điểm 3 đường phân giác (2 lần):<br>
Lần 1: Xét $\Delta ABC$, gọi $D$ là chân đường phân giác góc $A$<br>
Bước 1: Theo tính chất đường phân giác: $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{BA}{BC}$.<br>
Do $D\in AC \Rightarrow \overrightarrow{DA}=\dfrac{BA}{BC}.\overrightarrow{DC}$.<br>
Tính tỷ số $\dfrac{BA}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra.<br>
Bước 2: Áp dụng $\vec{a}=k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{a}}=k.x_{\vec{b}} \\ y_{\vec{a}}=k.y_{\vec{b}} \\ z_{\vec{a}}=k.z_{\vec{b}} \end{cases}$. Để tìm tọa độ $D$.<br>
Lần 2: Xét $\Delta ABD$, gọi $I$ là chân đường phân giác góc $B$<br>
Bước 3: Theo tính chất đường phân giác: $\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{BD}{BA}$.<br>
Do $I\in AD \Rightarrow \overrightarrow{ID}=-\dfrac{BD}{BC}.\overrightarrow{IA}$.<br>
Tính tỷ số $\dfrac{BD}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra.<br>
Bước 4: Áp dụng $\vec{a}=k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{a}}=k.x_{\vec{b}} \\ y_{\vec{a}}=k.y_{\vec{b}} \\ z_{\vec{a}}=k.z_{\vec{b}} \end{cases}$. Để tìm tọa độ $I$.</td></tr>
</table>

## *Dạng 1.3.* Tìm tọa độ vecto thỏa điều kiện cho trước

Xét hai vécto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

(1) Hai vécto bằng nhau: .......................................... $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \end{cases}$.

(2) Cộng – Trừ véctơ: .............................................. $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$.

(3) Tích của một số với véctơ: ............................... $k.\vec{a}\pm\vec{b}=(k.a_1;k.a_2;k.a_3)$.

(4) Độ dài véctơ $\vec{a}$: ................................................ $|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}$.

(5) Véctơ $\vec{a}$ cùng phương véctơ $\vec{b}$: ....................... $[\vec{a};\vec{b}]=\vec{0}$ hoặc $\vec{a}=k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=k.b_1 \\ a_2=k.b_2 \\ a_3=k.b_3 \end{cases}$.

(6) $ABCD$ là hình bình hành ................................ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

## *Dạng 1.4.* Liên quan độ dài

Xét hai véctơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$ và $A\left(x_A;y_A;z_A\right),B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ ta có:

(1) Độ dài véctơ $\vec{a}$: ............................................ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(a_1\right)^2+\left(a_2\right)^2+\left(a_3\right)^2}$.

$\longrightarrow \left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^2=\left(a_1\right)^2+\left(a_2\right)^2+\left(a_3\right)^2$

(2) Độ dài véctơ $\overrightarrow{AB}$: ........................................ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

(3) Tích vô hướng hai véctơ: ................................ $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$

(4) Góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: ............................ $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

### ▶ Bài toán liên quan thường gặp:

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $\left|\vec{u}\right|=m;\ \left|\vec{v}\right|=n$ và tạo với nhau một góc $\alpha$. Tính $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ hoặc $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$ hoặc tùy vào yêu cầu bài toán.

**Hướng giải quyết**

***Bước 1:*** Biến đổi $\left(\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

***Bước 2:*** Áp dụng: $\begin{cases}\vec{u}^2=\left|\vec{u}\right|^2\\ \vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\end{cases}$

Để biến đổi:

$$\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\left|\vec{u}\right|^2+2\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)+\left|\vec{v}\right|^2 \quad (*)$$

***Bước 3:*** Lắp các dữ kiện giả thiết vào $(*)\Rightarrow\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=?$

## *Dạng 1.5.* Sự cùng phương

Xét hai véctơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$ ta có:

(1) Hai véctơ bằng nhau: ....................................... $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$.

(2) Véctơ $\vec{a}$ cùng phương véctơ $\vec{b}$: ........................ $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\vec{0}$ hoặc $\vec{a}=k.\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=k.b_1\\a_2=k.b_2\\a_3=k.b_3\end{cases}$.

## *Dạng 1.6.* Sự đồng phẳng

Xét hai véctơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$ ta có:

(1) Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$: ............. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$

$=\left(a_2b_3-a_3b_2;\ a_3b_1-a_1b_3;\ a_1b_2-a_2b_1\right)$.

(2) Ba véctơ $\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}$ đồng phẳng: .......................... $\left[\vec{a};\vec{b}\right].\vec{c}=0$.

(3) Bốn điểm $A,B,C,D$ tạo thành tứ diện: ........... $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq0$.

## Dạng 1.7. Ứng dụng tích có hướng

Xét hai véctơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$ ta có:

(1) Bốn điểm $A,B,C,D$ tạo thành tứ diện: ............ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0$.

$\Leftrightarrow$ $A,B,C,D$ không đồng phẳng

(2) Diện tích $\Delta ABC$: ........................................... $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

$\Rightarrow$Đường cao $\Delta ABC$: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

(3) Diện tích hình bình hành $ABCD$: .................. $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

(4) Thể tích tứ diện $ABCD$: ................................... $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

$\Rightarrow$Đường cao chóp $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).S_{\Delta BCD}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}$$

### ▶ Bài toán tính diện tích tam giác:

Trong không gian $Oxyz$, cho $A\left(...\right),B\left(...\right),C\left(...\right)$. Tính diện tích tam giác $ABC$

**Hướng giải quyết**

***Bước 1:*** Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

***Bước 2:*** Tìm tọa độ của vectơ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

***Bước 3:*** Sử dụng $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$ để tính diện tích $\Delta ABC$.

*Nếu bài toán yêu cầu tính đường cao trong tam giác:*

***Bước 4:*** Sử dụng $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AH.OB\Rightarrow AH=\frac{2S_{\Delta OAB}}{OB}$ để tính độ dài đường cao $AH$.

### ▶ Bài toán tính thể tích tứ diện:

Trong không gian $Oxyz$, cho $A\left(...\right),B\left(...\right),C\left(...\right),D\left(...\right)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

**Hướng giải quyết**

***Bước 1:*** Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

***Bước 2:*** Tính $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}$.

***Bước 3:*** Sử dụng $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$ để tính thể tích tứ diện $ABCD$.

*Nếu bài toán yêu cầu tính khoảng cách hạ từ đỉnh:*

***Bước 4:*** Sử dụng $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).S_{\Delta BCD}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}$ để tính độ dài khoảng cách

## Dạng 1.8. Liên quan góc

Xét hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

(1) Tích vô hướng hai véctơ: ................................ $\left[\begin{array}{l}\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})\\ \vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3\end{array}\right.$

$\longrightarrow$ Góc giữa 2 véctơ: $\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}.\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2}}$.

*Chú ý:* Khi $\vec{a}.\vec{b}>0$ thì $\cos(\vec{a};\vec{b})>0\Rightarrow(\vec{a};\vec{b})$ là góc nhọn,

Ngược lại nếu $\vec{a}.\vec{b}<0$ thì $\cos(\vec{a};\vec{b})<0\Rightarrow(\vec{a};\vec{b})$ là góc tù.

(2) Véctơ $\vec{a}$ vuông góc véctơ $\vec{b}$: ........................... $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$

## Dạng 1.9. Tâm tỷ cự

### ▶ Bài toán cực trị độ dài vecto:

*Cho $n$ điểm $A_1;A_2;\ldots;A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n\neq 0$ và đường thẳng $d$ hoặc mặt phẳng $(P)$. Tìm điểm $M$ trên đường thẳng $d$ hoặc mặt phẳng $(P)$, sao cho $\left|k_1.\overrightarrow{MA_1}+k_2.\overrightarrow{MA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất.*

**Hướng giải quyết**

**Bước 1:** Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $k_1.\overrightarrow{IA_1}+k_2.\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

**Bước 2:** Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$\left|k_1.\overrightarrow{MA_1}+k_2.\overrightarrow{MA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|=\left|(k_1+k_2+\ldots k_n)\overrightarrow{MI}\right|=|k|\left|\overrightarrow{MI}\right|$

**Bước 3:** Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi $M$ xảy ra ở vị trí nào?

### ▶ Bài toán cực trị độ dài bình phương vecto:

*Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n>0$. Tìm điểm $M$ trên đường thẳng $d$ hoặc mặt phẳng $(P)$, sao cho tổng $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

**Hướng giải quyết**

**Bước 1:** Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $k_1.\overrightarrow{IA_1}+k_2.\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

**Bước 2:** Thấy rằng $MA_1^2=\left|\overrightarrow{MA_1}\right|^2=\left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$

$=k_1\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2\right]+\ldots+k_n\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_n}\right)+\left(\overrightarrow{IA_n}\right)^2\right]$

$=(k_1+k_2+\ldots+k_n)MI^2+\left(k_1\cdot IA_1^2+\ldots+k_n\cdot IA_n^2\right)+\ldots+2\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{k_1.\overrightarrow{IA_1}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}}\right)$

$=(k_1+k_2+\ldots+k_n)MI^2+\left(k_1\cdot IA_1^2+\ldots+k_n\cdot IA_n^2\right)$

**Bước 3:** Do $k>0$, để $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm $M$ cần tìm.

## *Dạng 1.10.* Tọa độ hóa

### ▶ Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

(1) Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ : ............. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

$=\left(a_2b_3-a_3b_2;\ a_3b_1-a_1b_3;\ a_1b_2-a_2b_1\right)$.

(2) Véctơ $\vec{a}$ cùng phương véctơ $\vec{b}$: ........................ $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\vec{0}$ hoặc $\vec{a}=k.\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases} a_1=k.b_1 \\ a_2=k.b_2 \\ a_3=k.b_3 \end{cases}$.

(3) Ba véctơ $\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}$ đồng phẳng: ......................... $\left[\vec{a};\vec{b}\right].\vec{c}=0$.

(4) Diện tích $\Delta ABC$: ............................................ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

(5) Thể tích tứ diện $ABCD$: .................................. $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

(6) Thể tích khối hộp $ABCD$: .............................. $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

(7) Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: ................. $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

(8) Góc:

- Giữa hai mặt phẳng: ...................................... $\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}_P.\vec{n}_Q\right|}{\left|\vec{n}_P\right|.\left|\vec{n}_Q\right|}$
- Giữa hai đường thẳng: ................................. $\cos\varphi=\cos\left(\vec{a},\vec{a}'\right)=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a}'\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}'\right|}$
- Giữa đường thẳng và mặt phẳng: ................. $\sin\varphi=\left|\sin\left(\vec{a},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{n}\right|}$

*Mẹo nhớ công thức về góc trong hình học Oxyz:*

- ***Cùng*** loại dùng Cos (Góc giữa đường với đường , mặt phẳng với mặt phẳng).
- ***Khác*** loại dùng Sin (Góc giữa đường và mặt).

(9) Khoảng cách

- Từ điểm đến mặt phẳng :............................... $d\left(M_o,(\alpha)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
- Từ điểm đến đường thẳng:............................ $d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_oM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$
- Hai đường thẳng chéo nhau:.......................... $d\left(d,d'\right)=\frac{\left|\left[\vec{a},\vec{a}'\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{a}'\right]\right|}=\frac{V_{hop}}{V_{day}}$

▶ **Cách "gắn" trục:**

- **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ Oxyz
  - Xác định ba đường đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (*như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều* …),
  - Dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ.
- **Bước 2:** Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.
  - Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. *Tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu bài toán.*
- **Bước 3:** Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.
  - Lập các phương trình đường, mặt liên quan.
  - Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.
- **Bước 4:** Giải quyết bài toán.
  - Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

## ⌘ Cách chọn hệ tọa độ một số hình không gian.

### A. Hộp.

**❒ Hình hộp lập phương – Hình hộp chữ nhật** $ABCD.A'B'C'D'$

• ***Với hình lập phương .***

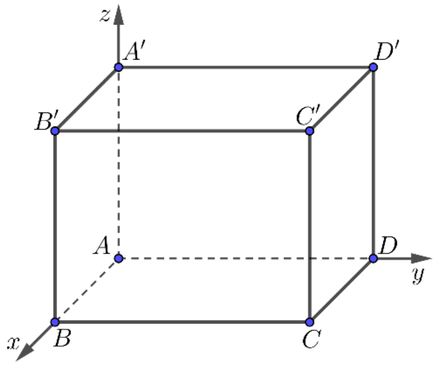
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0),$$
$$A'(0;0;a),\ B'(a;0;a),\ C'(a;a;a),\ D'(0;a;a)$$

• ***Với hình hộp chữ nhật.***

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0),\ B(a;0;0),\ C(a;b;0),\ D(0;b;0),$$
$$A'(0;0;c),\ B'(a;0;c),\ C'(a;b;c),\ D'(0;b;c)$$




▶ **Chú ý:** Tam diện vuông là một nửa của hình hộp chữ nhật nên ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như hình hộp chữ nhật.

**❒ Hình hộp đứng có đáy là hình thoi** $ABCD.A'B'C'D'$

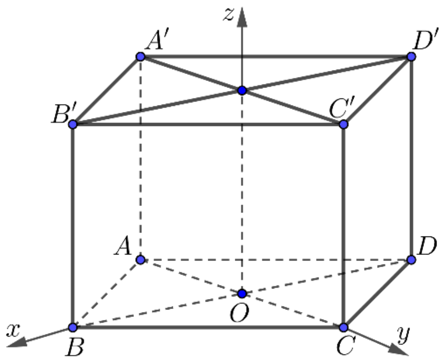
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

≫ Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$.

≫ Trục $Oz$ đi qua 2 tâm của 2 đáy

≫ Đặt $AC = a, BD = b, AA' = c$ thì

$$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right), B\left(\frac{b}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a}{2};0\right), D\left(-\frac{b}{2};0;0\right),$$
$$A'\left(0;-\frac{a}{2};c\right), B'\left(\frac{b}{2};0;c\right), C'\left(0;\frac{a}{2};c\right), D'\left(-\frac{b}{2};0;c\right).$$




▶ **Chú ý:** Với lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác cân tại $B$ thì ta chọn hệ tọa độ tương tự như trên với gốc tọa độ là trung điểm $AC$, $B \in Ox, C \in Oy$ còn trục $Oz$ đi qua trung điểm hai cạnh $AC, AC'$.

### B. Chóp.

#### ❒ Hình chóp đều

(1) Hình chóp tam giác đều $S.ABC$, $AB = a, SH = h$.

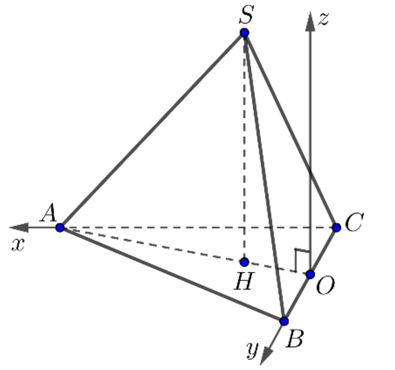
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

≫ Gốc tọa độ trùng với $O$ là trung điểm $BC$

≫ $A \in Ox$.

≫ $B \in Oy$

Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$, $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;h\right)$




(2) Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, $AB = a, SH = h$.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

≫ Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$

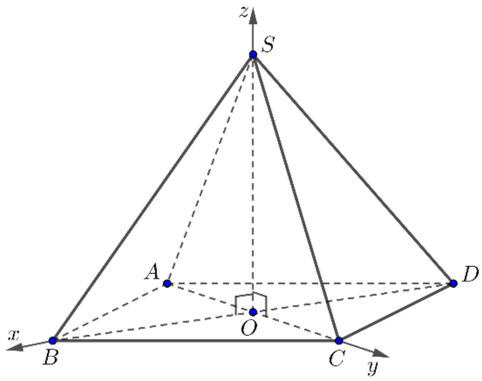
≫ $B \in Ox$.

≫ $C \in Oy$.

≫ $S \in Oz$.

Khi đó: $A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S(0;0;h)$.




▶ **Chú ý:** Ngoài cách chọn hệ trục như trên ta có thể chọn hệ trục bằng cách khác.
Chẳng hạn với hình chóp tam giác đều ta có thể chọn $H \equiv O$, trục $Oy$ đi qua $H$ và song song với $BC$.

#### ❒ Hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), SA = h$

Nếu đáy là hình chữ nhật.

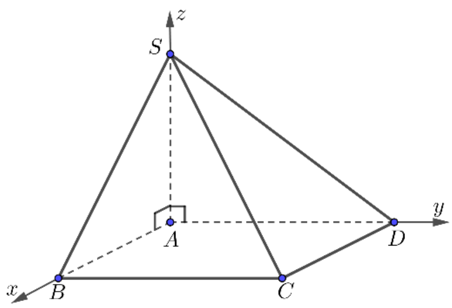
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

≫ Gốc tọa độ trùng với $A \equiv O$

≫ $B \in Ox$.

≫ $D \in Oy$.

≫ $S \in Oz$.




Nếu đáy là hình thoi.

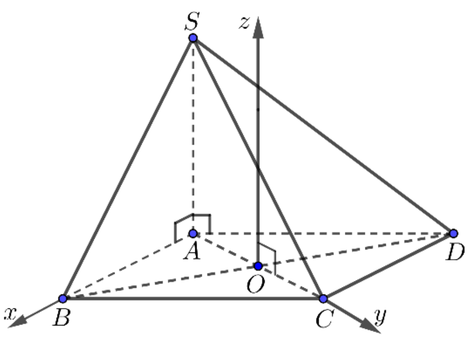
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

≫ Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$

≫ $B \in Ox$.

≫ $C \in Oy$.

≫ $Oz // SA$.




▶ **Chú ý:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, nếu đáy $ABC$ là:

- Tam giác vuông tại $A$ thì cách chọn hệ trục như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật.

- Tam giác cân tại $B$ thì ta chọn hệ trục tọa độ như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, khi đó gốc tọa độ là trung điểm cạnh $AC$.

❒ **Hình chóp** $S.ABC$ **có** $(SAB)\perp(ABCD)$

Đường cao $SH=h$ của $\Delta SAB$ là đường cao của hình chóp.
Nếu $\Delta ABC$ vuông tại $A$, $AB=a$, $AC=b$
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

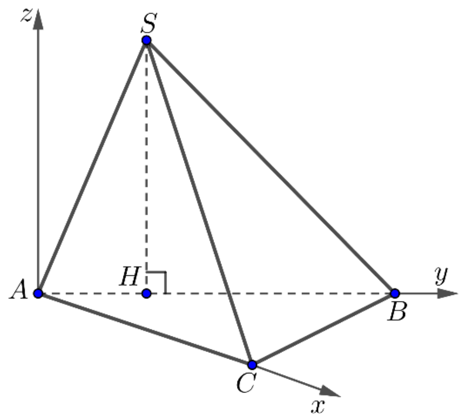
≫ Gốc tọa độ trùng với $A\equiv O$

≫ $B\in Oy$.

≫ $C\in Oz$.

≫ $Oz//SH$.

Khi đó $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(b;0;0)$, $AH=c\Rightarrow H(0;c;0)$, $S(0;c;h)$




▶ **Chú ý:** Cho hình chóp có $SA\perp(ABC)$, nếu đáy $ABC$ là:

- Tam giác vuông tại $B$ ta chọn $B\equiv O$, vuông tại $C$ chọn $C\equiv O$.
- $\Delta ASB$ cân tại $S$, $\Delta ABC$ cân tại $C$ thì ta chọn $H\equiv O, C\in Ox, B\in Oy, S\in Oz$

----------*Hết*----------

Hình học
Chủ đề 02

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

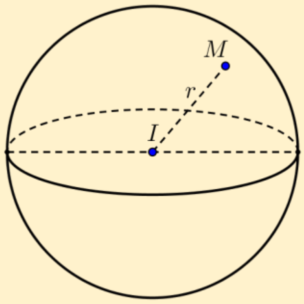
# PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

**Định nghĩa:**

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ tâm $I(a;b;c)$ bán kính $r$ có phương trình là.

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$$




### 1. Phương trình

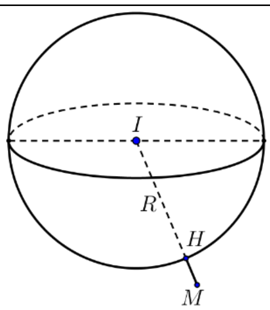
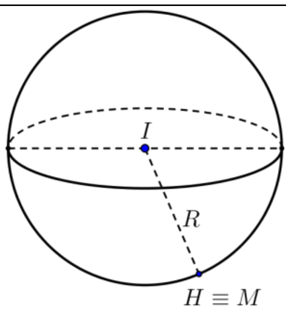
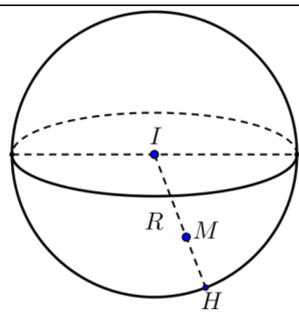
| | | LOẠI 1 | LOẠI 2 |
|---|---|---|---|
| **Phương Trình** | | $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ | $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ |
| **Xác Định** | *Tâm* | Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$. | Lấy hệ số trước $x;y;z$ $\div -2$. |
| | *Bán Kính* | Lấy căn bậc 2 vế phải. | $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.<br>Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$. |

### 2. Vị trí tương đối

Trong không gian $Oxyz$, ta có 3 đối tượng để xét vị trí tương đối với mặt cầu:

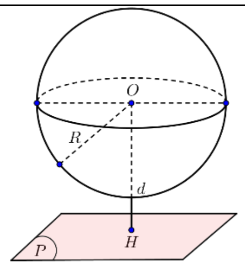
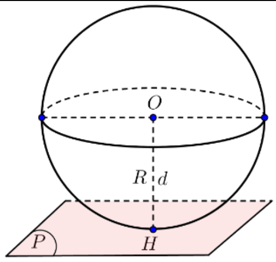
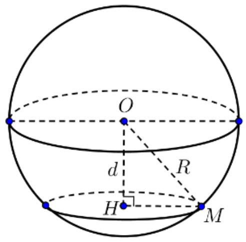
(1) Điểm $M(a;b;c)$.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M$ và mặt cầu $S(I;R)$. Khi đó:

| | **Điểm** | | |
|---|---|---|---|
| | *Nằm ngoài*<br>$\Leftrightarrow IM\cap(S)=H$ | *Nằm trên*<br>$\Leftrightarrow IM\cap(S)=M\equiv H$ | *Nằm trong*<br>$\Leftrightarrow IM\cap(S)=\varnothing$ |
| | $IM>R$ | $IM=R$ | $IM<R$ |
| **Mặt cầu** |  |  |  |

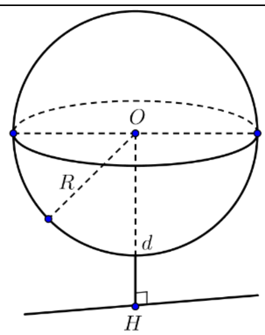
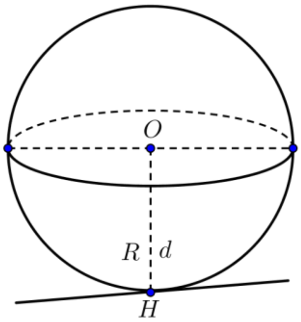
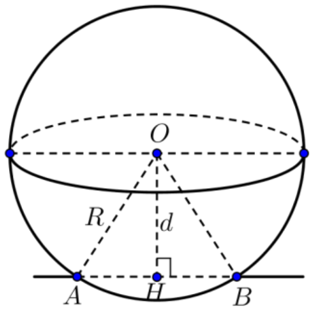
(2) Mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và mặt cầu $S(I;R)$. Khi đó:

| | **Mặt phẳng** | | |
|---|---|---|---|
| | *Không cắt* <br> $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=\varnothing$ | *Tiếp xúc* <br> $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=\{M\}$ | *Cắt theo giao tuyến là đường tròn* <br> $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=C(I';r)$ |
| **Mặt cầu** | $d(I;(\alpha))>R$ | $d(I;(\alpha))=R$ <br> $\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm $M$. | $d(I;(\alpha))<R$ <br> $\Leftrightarrow (\alpha)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I'$ và bán kính $r$. <br> $R=\sqrt{r^2+d^2(I;(\alpha))}$. |
| |  |  |  |

(3) Đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ và mặt cầu $S(I;R)$. Khi đó:

| | **Đường thẳng** | | |
|---|---|---|---|
| | *Không cắt* <br> $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\varnothing$ | *Tiếp xúc* <br> $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{H\}$ | *Cắt tại hai điểm A;B* <br> $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{A;B\}$ |
| **Mặt cầu** | $d(I;\Delta)>R$ | $d(I;\Delta)=R$ <br> $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm $H$ | $d(I;\Delta)<R$ <br> $\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{AB^2}{4}+d^2(I;\Delta)}$. |
| |  |  |  |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 2.1.* Xác định tâm – bán kính – nhận biết phương trình mặt cầu

| | | LOẠI 1 | LOẠI 2 |
|---|---|---|---|
| **Phương Trình** | | $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ | $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ |
| **Nhận xét** | | (1) Hệ số trước $x,y,z$ bằng nhau và bằng 1.<br>(2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1.<br>(3) Vế phải là hằng số dương. | (1) Hệ số trước $x^2,y^2,z^2$ bằng nhau và bằng 1.<br>(2) Phương trình đầy đủ $x^2,y^2,z^2$<br>(3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2+b^2+c^2-d>0$ |
| **Xác Định** | *Tâm* | Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$. | Lấy hệ số trước $x;y;z$ $\div -2$. |
| | *Bán Kính* | Lấy căn bậc 2 vế phải. | $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.<br>Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$. |

### *Dạng 2.2.* Phương trình mặt cầu có tâm và đi qua một điểm

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu $(S)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R$. | Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm $I$ và bán kính $R$.<br>Phương trình $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. |
| Tâm $I(a;b;c)$ và qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$<br>. | ≫ Bán kính mặt cầu<br>$R=IM=\left\|\overrightarrow{IM}\right\|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$.<br>≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IM$. |

### *Dạng 2.3.* Phương trình mặt cầu nhận hai điểm làm đường kính

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu $(S)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Nhận $M(x_M;y_M;z_M)$ và $N(x_N;y_N;z_N)$ làm đường kính | ≫ Gọi $I$ là tâm mặt cầu $(S)$<br>$\Rightarrow I$ là trung điểm của $MN$<br>$\Rightarrow I\left(\dfrac{x_M+x_N}{2};\dfrac{y_M+y_N}{2};\dfrac{z_M+z_N}{2}\right)$.<br>≫ Bán kính mặt cầu $R=\dfrac{MN}{2}=IM$. |

### *Dạng 2.4.* Phương trình mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu $(S)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Đi qua 4 điểm $A;B;C;D$ không đồng phẳng | ≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm. |

| | |
|---|---|
| | » Mặt cầu $(S)$ đi qua 4 điểm<br>$\Leftrightarrow IA=IB=IC=ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \\ IA^2=ID^2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ $I$.<br>» Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$. |

## Dạng 2.5. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc (P) và qua ba điểm

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu $(S)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Tâm $I\in(P)$ và đi qua $A;B;C$.<br>*Với* $(P):\alpha.x+\beta.y+\gamma.z+\delta=0$ *hoặc* $(P)$ *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$.<br>⌘ **Nhận xét:**<br>*Trong trường hợp* $I\in$ *một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.* | » Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu<br>» Ta có $I\in(P)\Rightarrow \alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta=0\ (1)$.<br>» Mặt cầu $(S)$ đi qua ba điểm $A;B;C$<br>$\Leftrightarrow IA=IB=IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2\ (2) \\ IA^2=IC^2\ (3) \end{cases}$.<br>» Từ $(1);(2)$ và $(3)\Rightarrow I$ là thỏa hệ:<br>$\begin{cases} \alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta=0 \\ IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ $I$.<br>» Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$. |

## Dạng 2.6. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc d và qua hai điểm

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu $(S)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Tâm $I\in d$ và đi qua $A;B$.<br>*Với* $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* $d$ *là các trục* $Ox;Oy;Oz$.<br>⌘ **Nhận xét:**<br>*Trong trường hợp* $I\in$ *một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn* | » Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu<br>» Ta có $I\in d\Rightarrow I(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.<br>» Viết $\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}$ theo $t$ và tính độ dài $\left\|\overrightarrow{IA}\right\|;\left\|\overrightarrow{IB}\right\|$<br>» Mặt cầu $(S)$ đi qua hai điểm $A;B$<br>$\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IA}\right\|=\left\|\overrightarrow{IB}\right\|\Rightarrow t=?$.<br>» Từ $t=?\Rightarrow$ tọa độ $I$.<br>» Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$. |

## Dạng 2.7. Phương trình mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng – đường thẳng

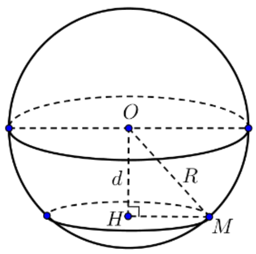
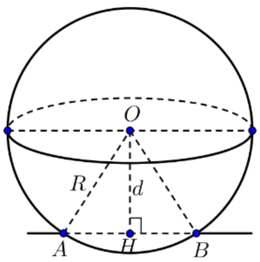
▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu $(S)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $(P)$.<br>*Với* $(P): Ax+By+Cz+D=0$ *hoặc* $(P)$ *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$.<br>⌘ **Nhận xét:** | » Bán kính mặt cầu |

| | |
|---|---|
| *Trong trường hợp $I$ tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.* | $R=\left[\begin{array}{ll} d(I;(\alpha))=\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & Tiep\ xuc\ (\alpha) \\ d(I;(Oxy))=\sqrt{z_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oxy) \\ d(I;(Oxz))=\sqrt{y_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oxz) \\ d(I;(Oyz))=\sqrt{x_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oyz) \end{array}\right.$.<br>≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;(\alpha))$. |
| Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $\Delta$.<br>*Với* $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* $\Delta$ *là các trục* $Ox;Oy;Oz$.<br>⌘ **Nhận xét:**<br>*Trong trường hợp $I$ tiếp xúc một trong các trục $Ox;Oy;Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.* | ≫ Bán kính mặt cầu<br>$R=\left[\begin{array}{ll} d(I;\Delta)=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert} & Tiep\ xuc\ \Delta \\ d(I;Ox)=\sqrt{y_I^2+z_I^2} & Tiep\ xuc\ Ox \\ d(I;Oy)=\sqrt{x_I^2+z_I^2} & Tiep\ xuc\ Oy \\ d(I;Oz)=\sqrt{x_I^2+y_I^2} & Tiep\ xuc\ Oz \end{array}\right.$.<br>≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;\Delta)$. |

## Dạng 2.8. Phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng – đường thẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu $(S)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Tâm $I(a;b;c)$ và cắt $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm $I'$ bán kính $r$.<br>*Với* $(P): Ax+By+Cz+D=0$ *hoặc* $(P)$ *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$.<br>⌘ **Nhận xét:**<br>*Trong trường hợp $I$ tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.* | ≫ Tính $d(I;(\alpha))=\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$<br>≫ Bán kính: $R^2=d^2(I;(\alpha))+r^2=OH^2+HM^2$<br>≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R$.<br> |
| Tâm $I(a;b;c)$ và cắt $\Delta$ tại $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và $H$ là trung điểm $AB$.<br>*Với* $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* $\Delta$ *là các trục* $Ox;Oy;Oz$.<br>⌘ **Nhận xét:**<br>*Trong trường hợp $I$ tiếp xúc một trong các trục $Ox;Oy;Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.* | ≫ Tính $d(I;\Delta)=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$<br>≫ Bán kính: $R^2=d^2(I;(\alpha))+AH^2=OH^2+\dfrac{AB^2}{4}$<br>≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;\Delta)$.<br> |

----------Hết----------

Hình học

Chủ đề 03

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

# PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Phương trình

- Phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$. Có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.
- Mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{n}=(A;B;C)$ làm vectơ pháp tuyến có dạng $(P): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

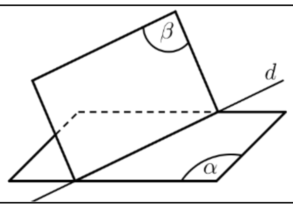
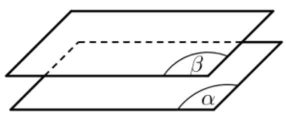
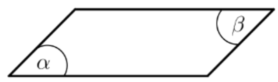
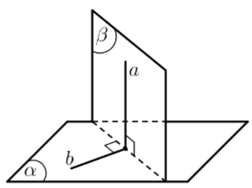
Các mặt phẳng đặc biệt:

| TÍNH CHẤT MẶT PHẲNG | PHƯƠNG TRÌNH | HỆ SỐ ĐẶC BIỆT |
|---|---|---|
| $(\alpha)$ đi qua/chứa gốc $O$. | $(\alpha): Ax+By+Cz=0$ | $D=0$ |
| $(\alpha)$ song song/chứa $Ox$. | $(\alpha): By+Cz+D=0$ | $A=0$ |
| $(\alpha)$ song song/chứa $Oy$. | $(\alpha): Ax+Cz+D=0$ | $B=0$ |
| $(\alpha)$ song song/chứa $Oz$. | $(\alpha): Ax+By+D=0$ | $C=0$ |
| $(\alpha)$ song song/trùng $(Oxy)$. | $(\alpha): Cz+D=0$ | $A=B=0$ |
| $(\alpha)$ song song/trùng $(Oxz)$. | $(\alpha): By+D=0$ | $A=C=0$ |
| $(\alpha)$ song song/trùng $(Oyz)$. | $(\alpha): Ax+D=0$ | $B=C=0$ |

» ***Nhận xét:*** Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song hoặc chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song hoặc chứa mặt phẳng đó.

### 2. Vị trí tương đối hai mặt phẳng

Cho mặt $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ ; $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$. Khi đó có các trường hợp sau:

| *Trường hợp* | $(\alpha)\cap(\beta)=d$ | $(\alpha)//(\beta)$ | $(\alpha)\equiv(\beta)$ | $(\alpha)\perp(\beta)$ |
|---|---|---|---|---|
| *Hình vẽ* |  |  |  |  |
| *Xảy ra khi & chỉ khi* | $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$ | $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$ | $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$ | $A.A'+B.B'+C.C'=0$ |

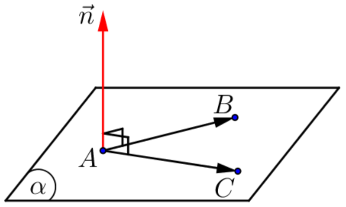
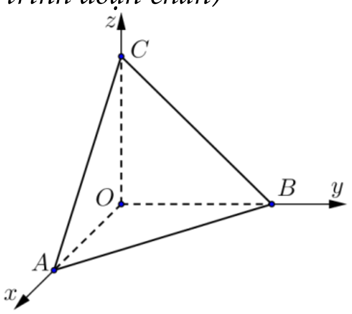
## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### Dạng 3.1. Xác định vecto pháp tuyến

- Trong không gian $Oxyz$, vecto $\vec{n}=(a;b;c)\neq\vec{0}$ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ thì vecto $\vec{m}=k.\vec{n}$ cũng là vecto pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$.
- Mặt phẳng trong không gian đều có phương trình dạng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ trong đó $A^2+B^2+C^2>0$. Khi đó vecto $\vec{n}=(A;B;C)$ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng.
- Nhận xét:
  - Khi lấy hệ số, lưu ý lấy đúng thứ tự hệ số trước *x-y-z*.
  - Thêm/bớt, phải thêm/bớt cả hoành – tung – cao độ

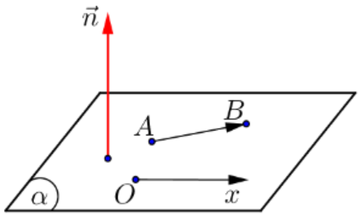
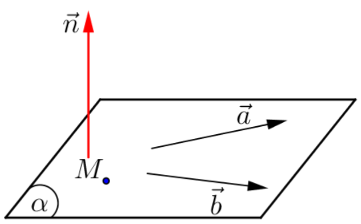
### Dạng 3.2. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm đồng phẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| (1) Đi qua $A;B;C$ không thẳng hàng.<br> | ≫ Tìm vécto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.<br>≫ Véctơ pháp tuyến của $(\alpha)$: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]$. |
| (2) Đi qua $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$.<br>*(Phương trình đoạn chắn)*<br> | ≫ Phương trình $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.<br>***Lưu ý:***<br>• Với phương trình đoạn chắn thì vế phải $=1$<br>• Bài toán có thể "gài" như sau: $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ |

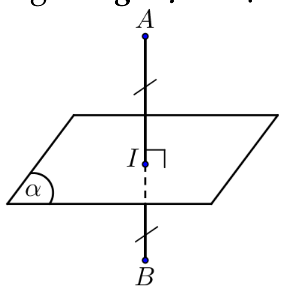
### Dạng 3.3. Phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm và chứa vectơ

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $A;B$ và chứa $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ hoặc chứa/song song trục tọa độ.<br><br> | ≫ Tìm vécto $\overrightarrow{AB}$ và có sẵn véctơ $\vec{a}$.<br>≫ Véctơ pháp tuyến của $(\alpha)$: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{a}\right]$. |

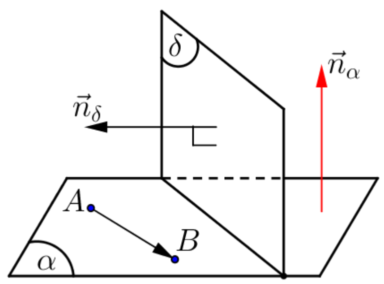
## *Dạng 3.4.* Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Là mặt phẳng ***trung trực*** đoạn thẳng $AB$   | ≫ Véctơ pháp tuyến của mặt $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.<br>≫ Tìm tọa độ trung điểm $I$ của đoạn $AB$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $I$. |

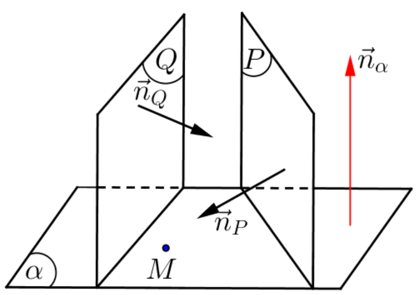
## *Dạng 3.5.* Phương trình mặt phẳng qua 2 điểm, vuông góc mặt phẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua điểm $A;B$ và vuông góc<br>$(\delta): Ax+By+Cz+D=0$.<br>  | ≫ Tìm cặp véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}\right]$.<br>≫ Véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}\right]$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $A$. |

## *Dạng 3.6.* Phương trình mặt phẳng qua điểm, vuông góc 2 mặt phẳng

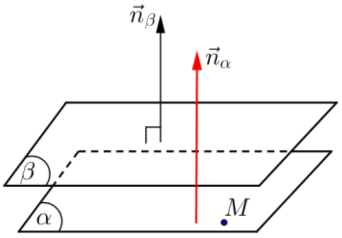
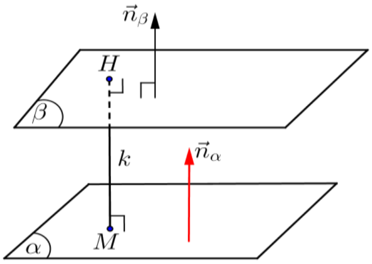
▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và $\perp$ 2 mặt<br>$(P): Ax+By+Cz+D=0$,<br>$(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$.<br>  | ≫ Tìm cặp véctơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$.<br>≫ Véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\left[\vec{n}_{(Q)};\vec{n}_{(P)}\right]$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.<br>***Hoặc bài toán sẽ gặp:***<br>"Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax+By+Cz+D=0$; $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$" |

## *Dạng 3.7.* Phương trình mặt phẳng song song mặt phẳng khác

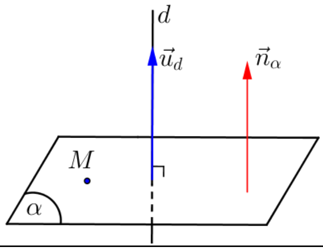
▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| (1) Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$. | ⌘ *Cách 1:*<br>≫ Véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(A;B;C)$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $M$. |

| | |
|---|---|
|  | ⌘ ***Cách 2:***<br>≫ Do $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow (\alpha): Ax+By+Cz+D'=0 \ (D \neq D')$<br>≫ Thay điểm $M$ vào $(\alpha) \Rightarrow D'=? \Rightarrow (\alpha)$. |
| **(2)** Song song $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và cách $(P)$ một khoảng bằng $k$.<br> | ≫ Vì $(\alpha)//(P) \Rightarrow (\alpha): Ax+By+Cz+D'=0 \ (D \neq D')$.<br>≫ Vì $(\alpha)$ cách $(P)$ một khoảng bằng $k$<br>$\Rightarrow d((\alpha);(P))=k \xLeftrightarrow{M\in(\alpha)} d(M;(P))=k$<br>$\Leftrightarrow \dfrac{\lvert D-D'\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=k \Rightarrow D'=?$<br>≫ Có $D' \Rightarrow$ phương trình mặt $(P)$ hoàn chỉnh. |

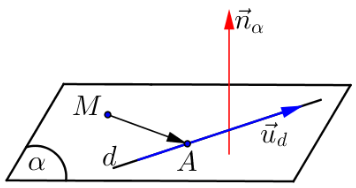
## *Dạng 3.8.* Phương trình mặt phẳng qua điểm, song song/vuông góc đường thẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc $d: \dfrac{x-X}{a}=\dfrac{y-Y}{b}=\dfrac{z-Z}{c}$.<br> | ≫ Tìm véctơ $\vec{u}_d=(a;b;c)$.<br>≫ Vì $(\alpha)\perp d \Rightarrow$ véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\vec{u}_d$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. |
| Qua $M(x_0;y_0;z_0), N(x'_0;y'_0{}'z'_0)$ và song song $d: \dfrac{x-X}{a}=\dfrac{y-Y}{b}=\dfrac{z-Z}{c}$. | ≫ Tìm véctơ $\vec{u}_d=(a;b;c);\overrightarrow{MN}$.<br>≫ Vì $(\alpha)//d \Rightarrow$ véctơ pháp tuyến $(\alpha)$: $\vec{n}=\left[\vec{u}_d;\overrightarrow{MN}\right]$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. |

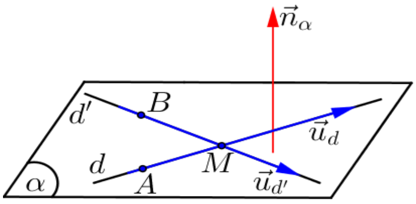
## *Dạng 3.9.* Phương trình mặt phẳng qua điểm, chứa đường thẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và ***chứa*** $d: \dfrac{x-X}{a}=\dfrac{y-Y}{b}=\dfrac{z-Z}{c}$.<br> | ≫ Lấy $A$ tùy ý thuộc $d$, dễ nhất ta lấy $A(X;Y;Z)$.<br>≫ Tìm véctơ $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}_d$.<br>≫ Véctơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha)$ là:<br>$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM};\vec{u}_d\right]$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. |

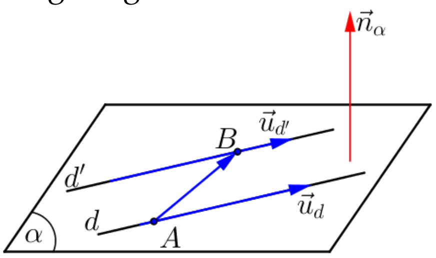
## *Dạng 3.10.* Phương trình mặt phẳng chứa d,d’ và d cắt d’

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Chứa $d:\dfrac{x-X}{a}=\dfrac{y-Y}{b}=\dfrac{z-Z}{c}$ và <br> $d':\dfrac{x-X'}{a'}=\dfrac{y-Y'}{b'}=\dfrac{z-Z'}{c'}$, $d,d'$ cắt nhau <br>   | ≫ Tìm véctơ $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. <br> ≫ Véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\left[\vec{u}_{d'};\vec{u}_d\right]$. <br> ≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $A\in d$ hoặc $B\in d'$. |

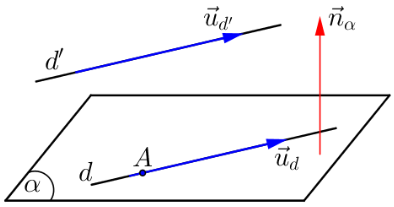
## *Dạng 3.11.* Phương trình mặt phẳng chứa d, d’ và d song song d’

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Chứa $d:\dfrac{x-X}{a}=\dfrac{y-Y}{b}=\dfrac{z-Z}{c}$, <br> $d':\dfrac{x-X'}{a'}=\dfrac{y-Y'}{b'}=\dfrac{z-Z'}{c'}$ <br> và $d$ song song $d'$. <br>   | ≫ Tìm $A\in d$ và $B\in d'$ <br> ≫ Tìm véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. <br> ≫ Véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}_d\right]$ hoặc $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}_{d'}\right]$. <br> ≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $A\in d$ hoặc $B\in d'$ |

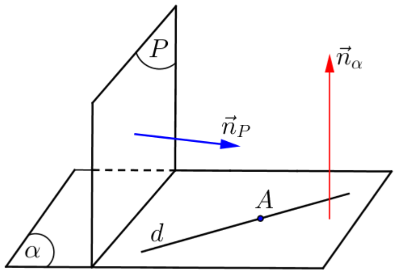
## *Dạng 3.12.* Phương trình mặt phẳng chứa d và song song d’

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Chứa $d:\dfrac{x-X}{a}=\dfrac{y-Y}{b}=\dfrac{z-Z}{c}$ và song song với $d':\dfrac{x-X'}{a'}=\dfrac{y-Y'}{b'}=\dfrac{z-Z'}{c'}$. <br>   | ≫ Tìm $A\in d$, do $d\subset(\alpha)\Rightarrow A\in(\alpha)$. <br> ≫ Tìm véctơ $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. <br> ≫ Véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\left[\vec{u}_{d'};\vec{u}_d\right]$. <br> ≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $A\in d$. |

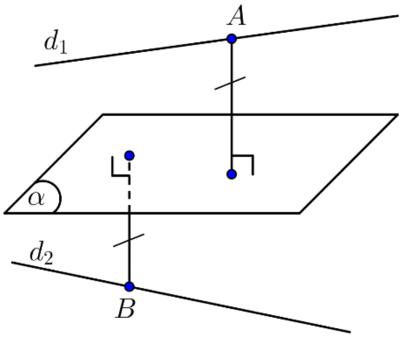
## Dạng 3.13. Phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc mặt khác

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Chứa $d:\frac{x-X}{a}=\frac{y-Y}{b}=\frac{z-Z}{c}$ và vuông góc $(P): Ax+By+Cz+D=0$.   | ≫ Tìm $A\in d\Rightarrow A\in(P)$.<br>≫ Tìm véctơ $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_{(P)}$.<br>≫ Véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\left[\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d\right]$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $A\in d$. |

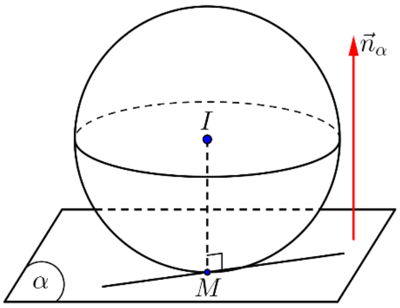
## Dạng 3.14. Phương trình mặt phẳng cách đều 2 đường thẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Cách đều hai đường thẳng $d_1;d_2$   | ≫ Kiểm tra $d_1;d_2$ chéo nhau nên VTPT của mặt phẳng $(\alpha)$ là $\vec{n}_\alpha=\left[\vec{u}_{d_1};\vec{u}_{d_2}\right]$.<br>≫ Do $(\alpha)$ cách đều $d_1;d_2$ nên $d\left(A,(\alpha)\right)=d\left(B,(\alpha)\right)$. Tìm $D$.<br>≫ Viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$. |

## Dạng 3.15. Phương trình mặt phẳng liên quan mặt cầu

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $A$ và tiếp xúc mặt cầu $(S)$ tại $M$   | ≫ Tìm tâm $I$ và tính bán kính $(S)$.<br>≫ $(\alpha)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại $M\in(S)$ thì $(\alpha)$ đi qua điểm $M$.<br>≫ Véctơ pháp tuyến $(\alpha)$ là: $\vec{n}=\overrightarrow{MI}$.<br>≫ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua điểm $M\in(S)$.<br>❒ *Lưu ý:*<br>Khi bài toán không cho tiếp điểm thì ta phải sử dụng các dữ kiện của bài toán tìm được $\vec{n}$ của $(\alpha)$ và $(\alpha)$ có dạng: $Ax+By+Cz+D=0$ ($D$ chưa biết).<br>Sử dụng điều kiện tiếp xúc: $d\left(I,(\alpha)\right)=R$ để tìm $D$. |

Hình học

Chủ đề 04

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

# PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Phương trình

▶ Phương trình tham số đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có điểm $M(x_0;y_0;z_0) \in \Delta$ Véctơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$.

▶ Phương trình chính tắc đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ có điểm $M(x_0;y_0;z_0) \in \Delta$ Véctơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$.

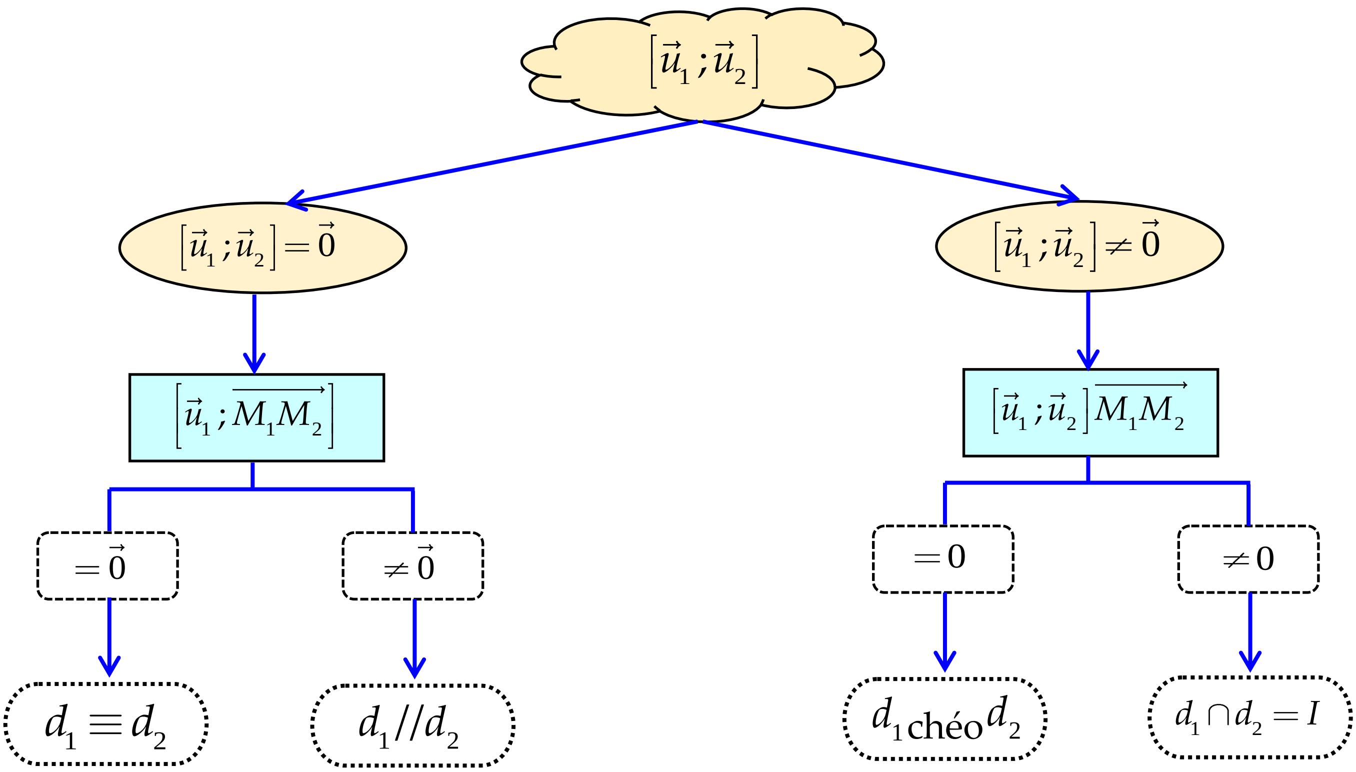
≫ ***Giao tuyến hai mặt phẳng:***

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\gamma): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ cắt nhau.

Gọi $\Delta$ là giao tuyến của chúng. Khi đó, đường thẳng $\Delta$ có VTCP là $\boxed{\vec{u} = \left[\vec{n}_{(\alpha)}; \vec{n}_{(\beta)}\right]}$.

### 2. Vị trí tương đối hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt có VTCP $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ và các điểm $M_1;M_2$ nằm trên $d_1;d_2$.



### 3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

≫ Trong không gian $Oxyz$,

cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$.

Ta viết lại phương trình $\Delta$ dưới dạng tham số: $\Delta : \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ thay $x;y;z$ vào mặt phẳng $(\alpha)$.

Được phương trình: $A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0$.

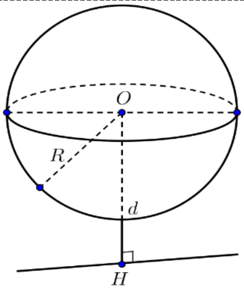
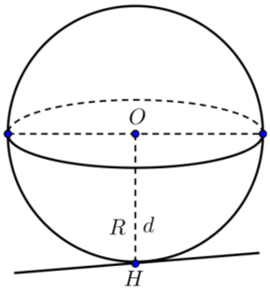
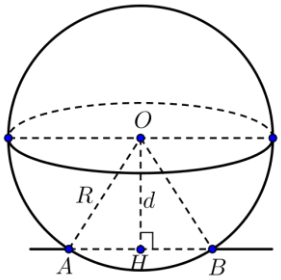
Đặt $f(t)=A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D$.

Khi đó: $A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0 \Leftrightarrow f(t)=0$

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Ta có các trường hợp sau:</td></tr>
<tr><td>Nếu</td><td>$f(t)=0$ vô nghiệm</td><td>$f(t)=0$ có 1 nghiệm</td><td>$f(t)=0$ vô số nghiệm</td></tr>
<tr><td>Thì</td><td>Đường thẳng $\Delta \,//\, (\alpha)$.</td><td>Đường thẳng $\Delta \cap (\alpha) = I$.</td><td>Đường thẳng $\Delta \subset (\alpha)$.</td></tr>
</table>

### 4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ và mặt cầu $S(I;R)$. Khi đó:

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">**Đường thẳng**</td></tr>
<tr><td rowspan="3">**Mặt cầu**</td><td>*Không cắt*<br>$\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \varnothing$</td><td>*Tiếp xúc*<br>$\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{H\}$</td><td>*Cắt tại hai điểm A;B*<br>$\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{A;B\}$</td></tr>
<tr><td>$d(I;\Delta) > R$</td><td>$d(I;\Delta) = R$<br>$\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm $H$</td><td>$d(I;\Delta) < R$<br>$\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{AB^2}{4}+d^2(I;\Delta)}$.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

### 5. Khoảng cách liên quan đến đường thẳng

| | *Phương pháp 1* | *Phương pháp 2* |
|---|---|---|
| Khoảng cách từ $M$ đến $\Delta$. | ≫ Lập $(\alpha): \begin{cases} qua\ M \\ \perp \Delta \end{cases}$<br>≫ Tìm tọa độ $H=(\alpha)\cap\Delta$.<br>≫ Khi đó, $d(M;\Delta)=MH$. | $d(M;\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$ |
| Khoảng cách $\Delta_1$ và $\Delta_2$ chéo nhau. | ≫ Lập $(\alpha): \begin{cases} \supset \Delta_1 \\ //\Delta_2 \end{cases}$.<br>≫ Khi đó $d(\Delta_1;\Delta_2)=d(N;(\alpha))$ | $d(\Delta_1;\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$ |

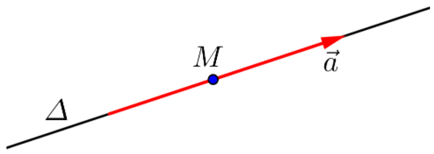
## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### *Dạng 4.1.* Xác định vecto chỉ phương

- Trong không gian $Oxyz$, vecto $\vec{u}=(a;b;c)\neq\vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ thì vecto $\vec{m}=k.\vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$.
- Phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$.
- Phương trình chính tắc $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$.
- ***Nhận xét:***
  - Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước *tham số t*.
  - Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
  - Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số

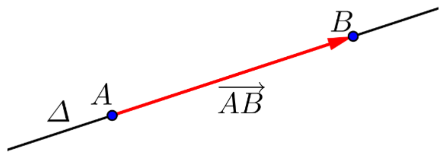
### *Dạng 4.2.* Phương trình đường thẳng qua điểm & có sẵn VTCP

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M$, có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(a;b;c)$<br> | ≫ Phương trình $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$<br>hoặc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ nếu $\{a;b;c\}\neq0$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |

### *Dạng 4.3.* Phương trình đường thẳng qua hai điểm

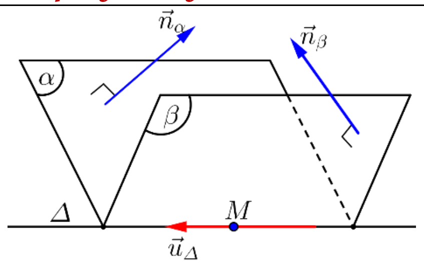
▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua hai điểm $A$ và $B$.<br> | ≫ Chọn $A$ hoặc $B$ là điểm mà $\Delta$ đi qua.<br>≫ Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\to\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra. |

### *Dạng 4.4.* Phương trình đường thẳng là giao tuyến hai mặt phẳng

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Giao tuyến của hai mặt phẳng<br>$(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ và<br>$(\beta):A'x+B'y+C'z+D'=0$ | ≫ Cho 1 trong 3 ẩn $x;y;z=0$ để tìm 2 ẩn còn lại<br>$x=0\longrightarrow\begin{cases}By+Cz+D=0\\B'y+C'z+D'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=?\\z=?\end{cases}\Rightarrow M(0;?;?)$<br>≫ Vecto chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]$. |

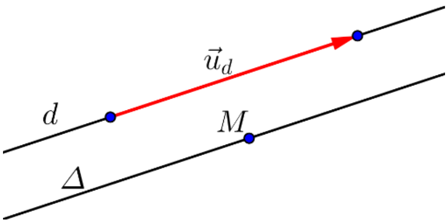



▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

## *Dạng 4.5.* Phương trình đường thẳng qua điểm, song song d

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

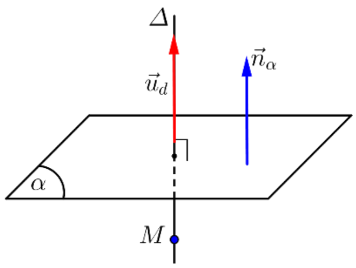
| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với $d$. | ≫ Chọn $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm mà $\Delta$ đi qua.<br>≫ Do $\Delta // d \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{u}_d$<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |




## *Dạng 4.6.* Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc mặt

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

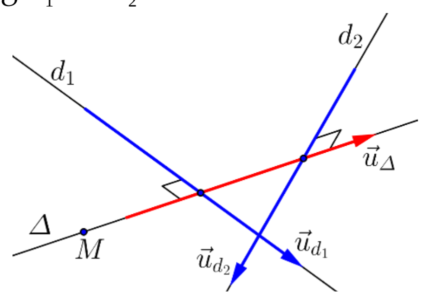
| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. | ≫ Chọn $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm mà $\Delta$ đi qua.<br>≫ Do $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)}$<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |




## *Dạng 4.7.* Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d,d'

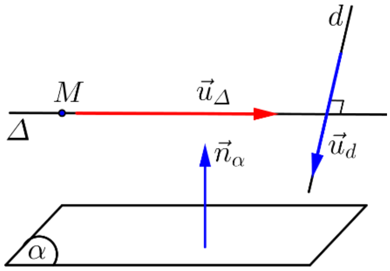
▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc hai đường $d_1$ và $d_2$. | ≫ Chọn $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm mà $\Delta$ đi qua.<br>≫ VTCP: $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{u}_{d_1};\vec{u}_{d_2}\right]$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |



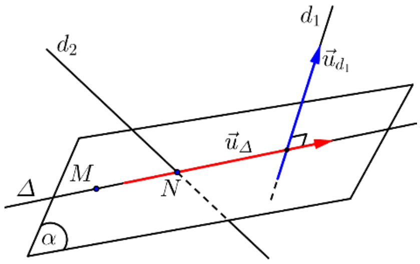
## *Dạng 4.8.* Phương trình đường thẳng qua điểm, // $(\alpha)$ vuông góc d

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và vuông góc $d$<br> | ≫ Chọn $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm mà $\Delta$ đi qua.<br>≫ VTCP: $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u}_\Delta;\vec{n}_{(\alpha)}\right]$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |

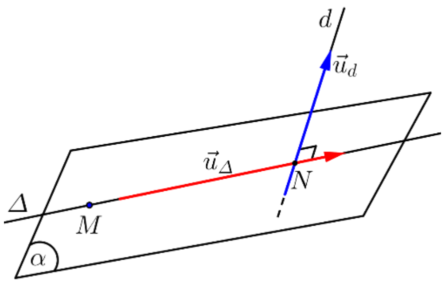
## *Dạng 4.9.* Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d, cắt d'

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc $d_1$ và cắt $d_2$ .<br> | ≫ Lập $(\alpha):\begin{cases}\perp d_1\\ qua\, M(x_0;y_0;y_0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{u}_{d_1}\\ qua\, M(x_0;y_0;y_0)\end{cases}$.<br>≫ Gọi $N=d_2\cap(\alpha)\to$ giải hệ theo $t\to N(?)$.<br>≫ Khi đó đường thẳng $\Delta:\begin{cases}qua\left[\begin{matrix}M\\N\end{matrix}\right.\\ \vec{u}_\Delta=\overrightarrow{MN}\end{cases}$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |

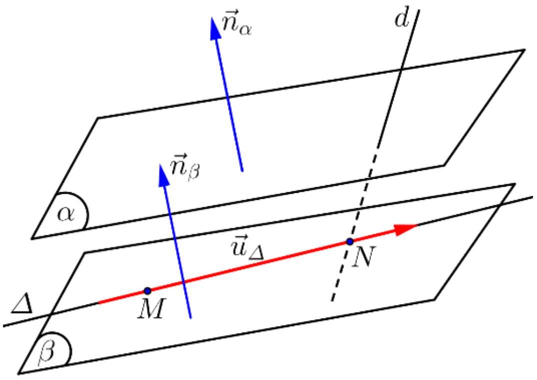
## *Dạng 4.10.* Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc & cắt d

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc và $d$ .<br> | ≫ Lập $(\alpha):\begin{cases}\perp d\\ qua\, M(x_0;y_0;y_0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{u}_d\\ qua\, M(x_0;y_0;y_0)\end{cases}$.<br>≫ Gọi $N=d\cap(\alpha)\to$ giải hệ theo $t\to N(?)$.<br>≫ Khi đó đường thẳng $\Delta:\begin{cases}qua\left[\begin{matrix}M\\N\end{matrix}\right.\\ \vec{u}_\Delta=\overrightarrow{MN}\end{cases}$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |

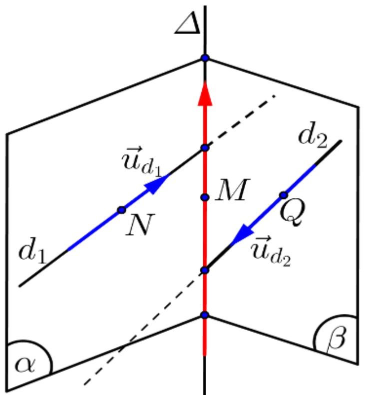
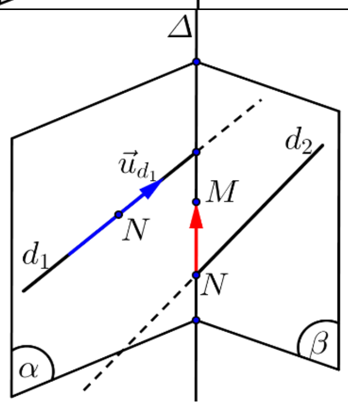
## *Dạng 4.11.* Phương trình đường thẳng qua điểm, song song $(\alpha)$ & cắt d

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và cắt $d$.<br><br> | ≫ Lập $(\beta): \begin{cases} song\,song\,(\alpha) \\ qua\,M(x_0;y_0;y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(\beta)} = \vec{n}_{(\alpha)} \\ qua\,M(x_0;y_0;y_0) \end{cases}$.<br>≫ Gọi $N = d \cap (\beta) \to$ giải hệ theo $t \to N(?)$.<br>≫ Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua \left[\begin{matrix} M \\ N \end{matrix}\right. \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |

## *Dạng 4.12.* Phương trình đường thẳng qua điểm & cắt $d_1$, $d_2$

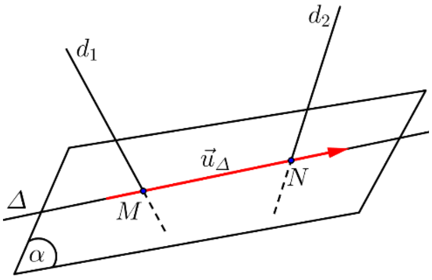
▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và cắt $d_1$ và $d_2$.<br><br> | ▶ *Cách 1:*<br>≫ Viết $(\alpha): \begin{cases} qua\,M \\ \supset d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\,M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$, lấy $N \in d_1$ bất kỳ.<br>≫ Viết $(\beta): \begin{cases} qua\,M \\ \supset \Delta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\,M \\ \vec{n}_{(\beta)} = \overrightarrow{MQ} \end{cases}$, lấy $Q \in d_2$ bất kỳ.<br>≫ Khi đó đường thẳng $\Delta = (\alpha) \cap (\beta) \to$ phương trình giao tuyến. |
| <br> | ▶ *Cách 2:*<br>≫ Viết $(\alpha): \begin{cases} qua\,M \\ \supset \Delta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\,M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{MQ} \end{cases}$, lấy $Q \in \Delta_1$ bất kỳ.<br>≫ Gọi $N = (\alpha) \cap \Delta_2 \to$ giải hệ theo $t \Rightarrow N(?)$.<br>≫ Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua\,M \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$. |

▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

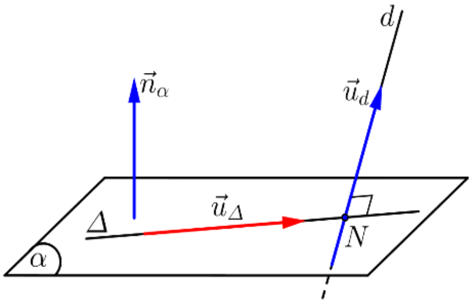
## *Dạng 4.13.* Phương trình đường thẳng nằm trong $(\alpha)$ & cắt $d_1$ $d_2$

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Nằm trong $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và cắt $d_1$ và $d_2$.<br> | » Gọi $\begin{cases} M=d_1\cap(\alpha) \\ N=d_2\cap(\alpha)\end{cases}$.<br>» Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua \left[\begin{array}{l} M \\ N\end{array}\right. \\ \vec{u}_\Delta=\overrightarrow{MN}\end{cases}$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |

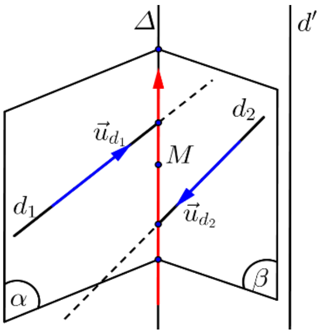
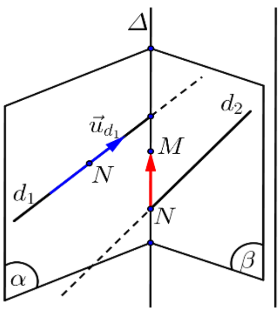
## *Dạng 4.14.* Phương trình đường thẳng nằm trong $(\alpha)$ & vuông góc d

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Nằm trong $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và vuông góc $d$.<br> | » Gọi $N=d\cap(\alpha)$.<br>» Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua\, N \\ \vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{(\alpha)};\vec{u}_d\right]\end{cases}$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |

## *Dạng 4.15.* Phương trình đường thẳng qua điểm và // d' cắt $d_1$, $d_2$

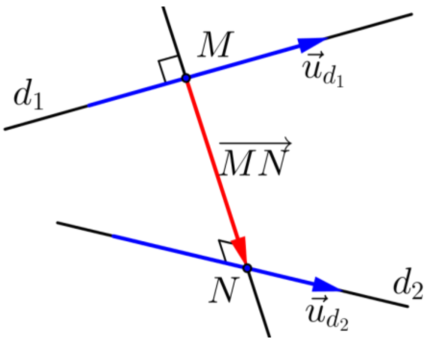
▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và $//d'$ và cắt $d_1$ và $d_2$<br> | ▶ *Cách 1:*<br>» Viết $(\alpha): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\, M \\ \vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{u}_{d'};\vec{u}_{d_1}\right]\end{cases}$<br>» Viết $(\beta): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\, M \\ \vec{n}_{(\beta)}=\left[\vec{u}_{d'};\vec{u}_{d_2}\right]\end{cases}$<br>» Khi đó đường thẳng $d=(\alpha)\cap(\beta)\to$ phương trình giao tuyến. |
|  | ▶ *Cách 2:*<br>» Viết $(\alpha): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\, M \\ \vec{n}_{(\alpha)}=\vec{u}_{d'}\end{cases}$, lấy $M\in d_1$ bất kỳ.<br>» Gọi $N=(\alpha)\cap d_2\to$ giải hệ theo $t\Rightarrow N(?)$.<br>» Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua\, N \\ \vec{u}_\Delta=\vec{u}_{d'}\end{cases}$. |

▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

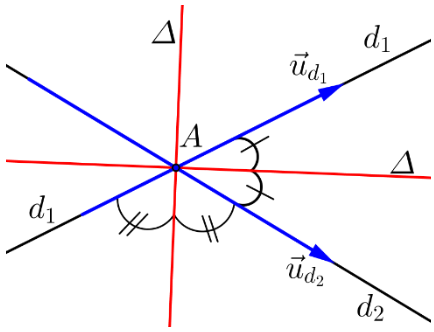
### *Dạng 4.16.* Phương trình đường thẳng là đường vuông góc chung

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

| Loại | Phương pháp |
| --- | --- |
| Là đường vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$   | ≫ Gọi $\begin{cases} M \in d_1 \\ N \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN}(?)$ (tọa độ theo $t;k$).<br>≫ $MN$ là đường vuông góc chung<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1.\overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{u}_2.\overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ? \\ k = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(?) \\ N(?) \end{cases}$.<br>≫ Khi đó đường thẳng $\Delta : \begin{cases} qua \left[ \begin{array}{l} M \\ N \end{array} \right. \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$.<br>▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra |

### *Dạng 4.17.* Phương trình đường thẳng là đường phân giác

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$

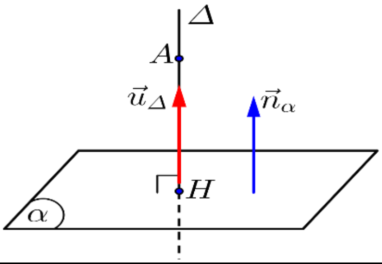
| Loại | Phương pháp |
| --- | --- |
| Đường phân giác góc trong,<br>Đường phân giác góc ngoài tạo bởi hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$.   | Xét 2 đường thẳng $d_1$ và $d_2$. có 2 vécto chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1;b_1;c_1); \vec{u}_2 = (a_2;b_2;c_2)$ thỏa mãn $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$.<br>• Nếu $\vec{u}_1.\vec{u}_2 > 0$ thì *véctơ chỉ phương của phân giác trong* $\boxed{\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2}$, *phân giác ngoài* $\boxed{\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2}$.<br>• Nếu $\vec{u}_1.\vec{u}_2 < 0$ thì *véctơ chỉ phương của phân giác trong* $\boxed{\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2}$, *phân giác ngoài* $\boxed{\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2}$.<br>≫ Điểm đi qua thỏa $A = d_1 \cap d_2$. |

## *Dạng 4.18.* Liên quan hình chiếu

▶ Trong không gian $Oxyz$, tìm

<table>
<tr><th>Loại</th><th>Phương pháp</th></tr>
<tr><td>

(1) Hình chiếu vuông góc $A(x_A;y_A;z_A)$ lên $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$.




</td><td>

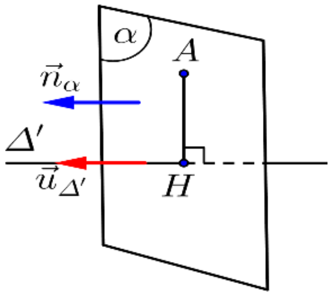
≫ Viết $\Delta:\begin{cases} qua\ A\\ \perp(\alpha)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\ A\\ \vec{u}_\Delta=\vec{n}_{(\alpha)}\end{cases}$.

≫ Gọi $H$ là HCVG của $A$ lên $(\alpha)\Rightarrow H=d\cap(\alpha)\to t=?\Rightarrow H(?)$.

❖ *CT nhanh:* $H(x_M-At;y_M-Bt;z_M-Ct)$ với $t=\dfrac{Ax_M+By_M+Cz_M+D}{A^2+B^2+C^2}$.

</td></tr>
<tr><td>

(2) Hình chiếu vuông góc $A(x_A;y_A;z_A)$ lên $\Delta':\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.




</td><td>

*Cách 1:*

≫ Viết $(\alpha):\begin{cases} qua\ A\\ \perp\Delta'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\ A\\ \vec{n}_{(\alpha)}=\vec{u}_{\Delta'}\end{cases}$.

≫ Gọi $H$ là HCVG của $A$ lên $\Delta'$ $\Rightarrow H=\Delta'\cap(\alpha)\to t=?\Rightarrow H(?)$.

*Cách 2:*

≫ Tham số hóa $H\in\Delta\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(?t)$.

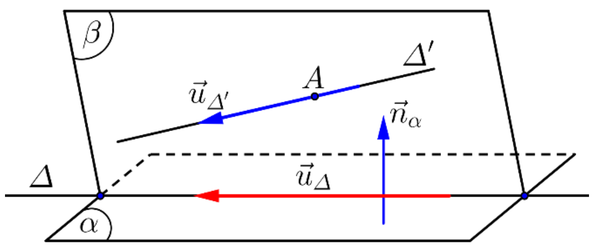
≫ $H$ là hình chiếu của $A$ thì $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0\Rightarrow t=?$

≫ Tọa độ $H$.

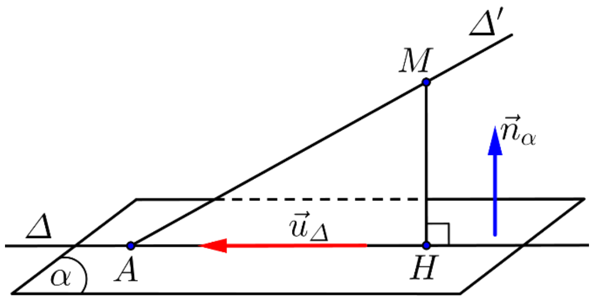
</td></tr>
<tr><td>

(3) Hình chiếu vuông góc của $\Delta'$ lên $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$.

*Cách 1.*




*Cách 2.*




</td><td>

*Cách 1:*

≫ Viết $(\beta):\begin{cases} \supset\Delta'\\ \perp(\alpha)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\ A\\ \vec{n}_{(\beta)}=[\vec{n}_{(\alpha)};\vec{u}_{\Delta'}]\end{cases}$.

≫ $\Delta$ là hình chiếu vuông góc của $\Delta'$ lên $(\alpha)$ $\Rightarrow\Delta=(\alpha)\cap(\beta)\to$ phương trình giao tuyến.

*Cách 2:*

≫ Tìm $A=(\alpha)\cap d\to$ giải hệ tìm $t\Rightarrow A(?)$.

≫ Lấy $M\in d\ (M\neq A)$.

≫ Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $M$ lên $(\alpha)$

≫ Gọi $\Delta$ là hình chiếu vuông góc của $d$ lên $(\alpha)$

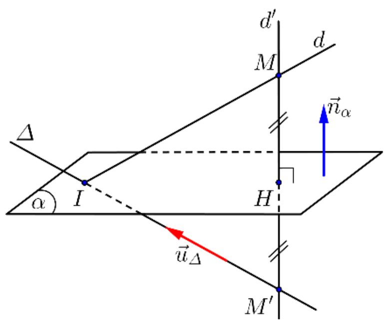
$\to\Delta:\begin{cases} qua\left[\begin{array}{l}A\\H\end{array}\right.\\ \overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{AH}\end{cases}$.

</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | ❖ *CT nhanh:* <br> $\Delta' : \begin{cases} x = x_0 - at + \left(a\left(B^2+C^2\right) - A\left(b.B+c.C\right)\right)k \\ y = y_0 - bt + \left(b\left(A^2+C^2\right) - B\left(a.A+c.C\right)\right)k \\ z = z_0 - ct + \left(c\left(A^2+B^2\right) - C\left(a.A+b.B\right)\right)k \end{cases}$ với <br> $t = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A.a + B.b + C.c}$. |

## *Dạng 4.19.* Liên quan đối xứng

▶ Trong không gian $Oxyz$, tìm

| Loại | Phương pháp |
|---|---|
| **(1)** $M'$ là điểm đối xứng của $M$ qua $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. <br> ❖ *CT nhanh:* <br> $M' \begin{cases} \left(x_M + 2At; y_M + 2Bt; z_M + 2Ct\right) \\ t = \dfrac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2} \end{cases}$. | ≫ Viết $\Delta : \begin{cases} qua\, M \\ \perp(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\, M \\ \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)} \end{cases}$. <br> ≫ Gọi $H$ là HCVG của $M$ lên $(\alpha)$ <br> $\Rightarrow H = d \cap (\alpha) \to t = ? \Rightarrow H(?)$. <br> ≫ Gọi $M'$ là điểm *đối xứng* của $M$ qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$. |
| **(2)** $M'$ là điểm đối xứng của $M$ qua $\Delta : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$. <br> ❖ *CT nhanh:* <br> $M' \begin{cases} \left(2x_0 - x_M + 2at; 2y_0 - y_M + 2bt; 2z_0 - z_M + 2ct\right) \\ t = \dfrac{a\left(x_M - x_0\right) + b\left(y_M - y_0\right) + c\left(z_M - z_0\right)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$ | ≫ Viết $(\alpha) : \begin{cases} qua\, M \\ \perp \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\, M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_\Delta \end{cases}$. <br> ≫ Gọi $H$ là HCVG của $M$ lên $\Delta$ <br> $\Rightarrow H = \Delta \cap (\alpha) \to t = ? \Rightarrow H(?)$. <br> ≫ Gọi $M'$ là điểm đối xứng của $M$ qua $\Delta \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$. |
| **(3)** $\Delta$ là đường thẳng đối xứng $d$ qua $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. <br>   | ≫ Tìm giao điểm $I = d \cap (\alpha)$ và lấy $M \in d$ (bất kỳ). <br> ≫ Viết $d' : \begin{cases} qua\, M \\ \perp(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua\, M \\ \vec{u}_{d'} = \vec{n}_\alpha \end{cases}$ <br> ≫ Tìm giao điểm $H = d' \cap (\alpha)$ <br> ≫ Gọi $M'$ là điểm đối xứng của $M$ qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$. <br> ≫ Hình chiếu của $d$ là $\Delta : \begin{cases} qua\, M' \\ qua\, I \end{cases}$. |

----------Hết----------

Hình học
Chủ đề 05

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

# VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

## A. LÝ THUYẾT CHUNG.

### 1. Điểm và mặt cầu, mặt phẳng và đường thẳng

Xét điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ với:

» Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ tâm $I$, bán kính $R$.

» Mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$,

» Đường thẳng $d: \dfrac{x-X_0}{a}=\dfrac{y-Y_0}{b}=\dfrac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

Ta có các vị trí tương đối sau:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Điểm</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Mặt cầu</td><td colspan="2">Tính $IM$ và so sánh với bán kính $R$</td></tr>
<tr><td>$IM>R$</td><td>Điểm $M$ nằm ngoài mặt cầu</td></tr>
<tr><td>$IM=R$</td><td>Điểm $M$ nằm trên mặt cầu</td></tr>
<tr><td>$IM<R$</td><td>Điểm $M$ nằm trong mặt cầu</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mặt phẳng</td><td colspan="2">Thay tọa độ $M(x_0;y_0;z_0)$ vào $(P): Ax+By+Cz+D=0$</td></tr>
<tr><td>$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$</td><td>Điểm $M$ nằm trong mặt phẳng</td></tr>
<tr><td>$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$</td><td>Điểm $M$ nằm ngoài mặt phẳng</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Đường thẳng</td><td colspan="2">Thay tọa độ $M(x_0;y_0;z_0)$ vào $d: \dfrac{x-X_0}{a}=\dfrac{y-Y_0}{b}=\dfrac{z-Z_0}{c}$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{x_0-X_0}{a}=\dfrac{y_0-Y_0}{b}=\dfrac{z_0-Z_0}{c}$</td><td>Điểm $M$ nằm trên đường thẳng</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{x_0-X_0}{a}\neq\dfrac{y_0-Y_0}{b}\neq\dfrac{z_0-Z_0}{c}$<br>1 trong 3 phân số ≠ nhau</td><td>Điểm $M$ nằm ngoài đường thẳng</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thay tọa độ $M(x_0;y_0;z_0)$ vào $d: \begin{cases} x=X_0+at \\ y=Y_0+bt \\ z=Z_0+ct \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x_0=X_0+at \\ y_0=Y_0+bt \\ z_0=Z_0+ct \end{cases}$ $\rightarrow$ cho cùng giá trị $t$</td><td>Điểm $M$ nằm trên đường thẳng</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x_0=X_0+at \\ y_0=Y_0+bt \\ z_0=Z_0+ct \end{cases}$ $\rightarrow$ không cho cùng giá trị $t$</td><td>Điểm $M$ nằm ngoài đường thẳng</td></tr>
</table>

## 2. Mặt cầu và mặt phẳng, đường thẳng

Xét điểm mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ tâm $I$, bán kính $R$, với:

» Mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$,

» Đường thẳng $d: \frac{x-X_0}{a}=\frac{y-Y_0}{b}=\frac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

Ta có các vị trí tương đối sau:

| | | |
|---|---|---|
| | ***Mặt cầu*** | |
| ***Mặt phẳng*** | Tính $d(I;(P))$ và so sánh với bán kính $R$ | |
| | $d(I;(P))>R$ | Mặt phẳng ***không cắt*** mặt cầu |
| | $d(I;(P))=R$ | Mặt phẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu tại $M$ |
| | $d(I;(P))<R$ | Mặt phẳng ***cắt*** mặt cầu $(*)$ |
| ***Đường thẳng*** | Tính $d(I;(d))$ và so sánh với bán kính $R$ | |
| | $d(I;d)>R$ | Đường thẳng ***không cắt*** mặt cầu |
| | $d(I;d)=R$ | Đường thẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu |
| | $d(I;d)<R$ | Đường thẳng ***cắt*** mặt cầu $(**)$ |

$(*)$: Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I'$ và bán kính $r$.

Biểu thức liên hệ $R=\sqrt{r^2+d^2(I;(P))}$

$(**)$: Đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm $A;B$.

Biểu thức liên hệ $R=\sqrt{\frac{AB^2}{4}+d^2(I;\Delta)}$

## 3. Mặt phẳng và mặt phẳng, đường thẳng

Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:

» Mặt phẳng $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,

» Đường thẳng $d: \frac{x-X_0}{a}=\frac{y-Y_0}{b}=\frac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

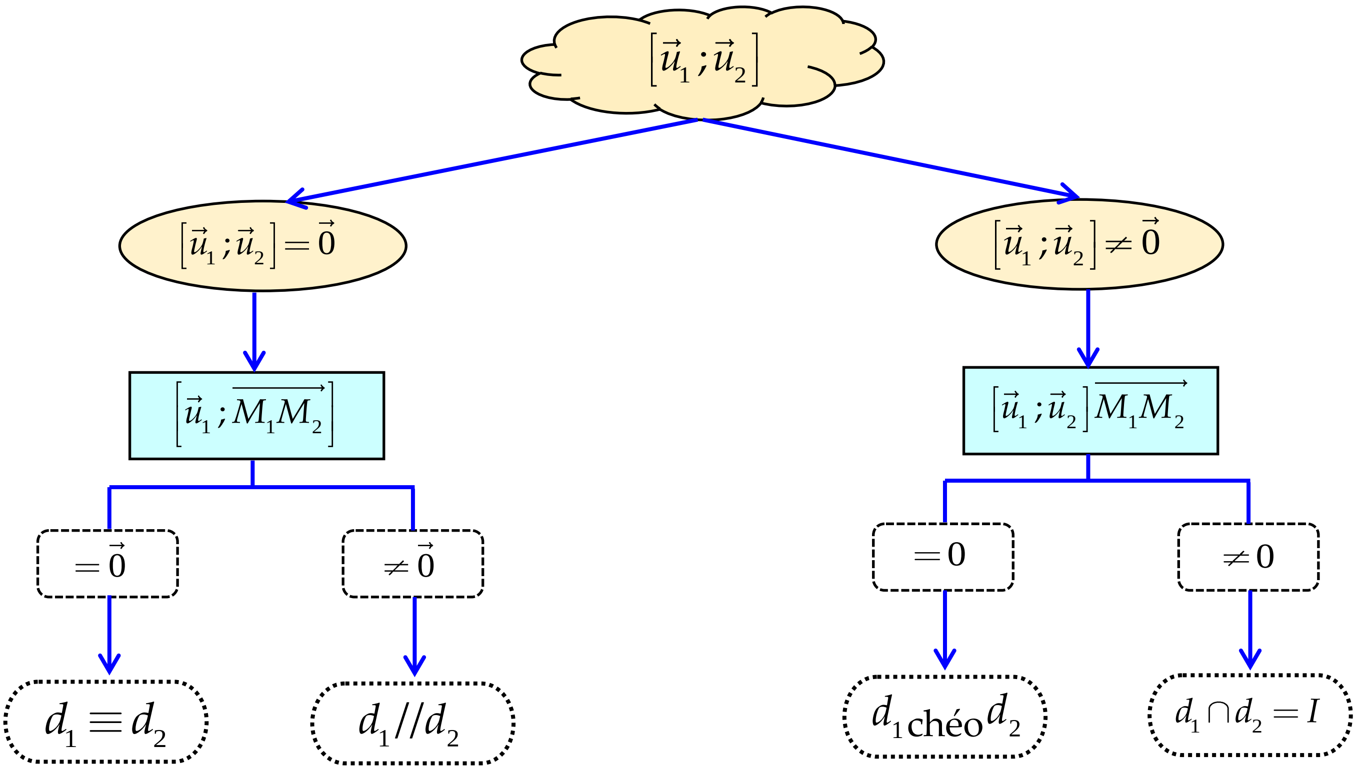
Ta có các vị trí tương đối sau:

| | | |
|---|---|---|
| | ***Mặt phẳng*** $(P)$ | |
| ***Mặt phẳng*** $(Q)$ | Xét tỉ lệ 2 vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng | |
| | $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$ | Mặt $(P)$ ***cắt*** mặt $(Q)$ |
| | $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$ | Mặt $(P)$ ***song song*** mặt $(Q)$ |
| | $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$ | Mặt $(P)$ ***trùng*** mặt $(Q)$ |
| | $A.A'+B.B'+C.C'=0$ | Mặt $(P)$ ***vuông góc*** mặt $(Q)$ |
| ***Đường thẳng*** | Tham số hóa $H\in d\Rightarrow H(?)$ và thay vào mặt phẳng $(P)$<br>Được phương trình: $A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0\Leftrightarrow f(t)=0$. | |
| | $f(t)=0$ vô nghiệm | Đường thẳng ***song song*** mặt $(P)$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $f(t)=0$ có 1 nghiệm | Đường thẳng ***cắt*** mặt $(P)$ |
| | $f(t)=0$ vô số nghiệm | Đường thẳng ***nằm trong*** mặt $(P)$ |
| | Xét tích vô hướng vécto chỉ phương của $d$ và vecto pháp tuyến của $(P)$ | |
| | $A.a+B.b+C.c=0$ và $M(X_0;Y_0;Z_0)\notin(P)$ | Đường thẳng ***song song*** mặt $(P)$ |
| | $A.a+B.b+C.c\neq 0$ | Đường thẳng ***cắt*** mặt $(P)$ |
| | $A.a+B.b+C.c=0$ và $M(X_0;Y_0;Z_0)\in(P)$ | Đường thẳng ***nằm trong*** mặt $(P)$ |

## 4. Đường thẳng và đường thẳng

Xét hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt có VTCP $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ và các điểm $M_1;M_2$ nằm trên $d_1;d_2$.




Hoặc ta có thể xét như sau:

| | ***Đường thẳng*** $d_2$ | |
|---|---|---|
| ***Đường thẳng*** $d_1$ | Xét $\vec{u}_1=k\vec{u}_2\ (k\neq 0)$ | |
| | $\vec{u}_1=k\vec{u}_2$ và $M_1\in d_2$ | $d_1$ ***trùng*** $d_2$ |
| | $\vec{u}_1=k\vec{u}_2$ và $M_1\notin d_2$ | $d_1$ ***song song*** $d_2$ |
| | Và xét hệ tương giao $(I):\begin{cases}x_0+a_1t=x'_0+a'_1t'\\y_0+a_2t=y'_0+a'_2t'\\z_0+a_3t=z'_0+a'_3t'\end{cases}$ | |
| | $\vec{u}_1\neq k\vec{u}_2$ và $(I)$ có nghiệm duy nhất | $d_1$ ***cắt*** $d_2$ |
| | $\vec{u}_1\neq k\vec{u}_2$ và $(I)$ vô nghiệm | $d_1$ ***chéo*** $d_2$ |

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

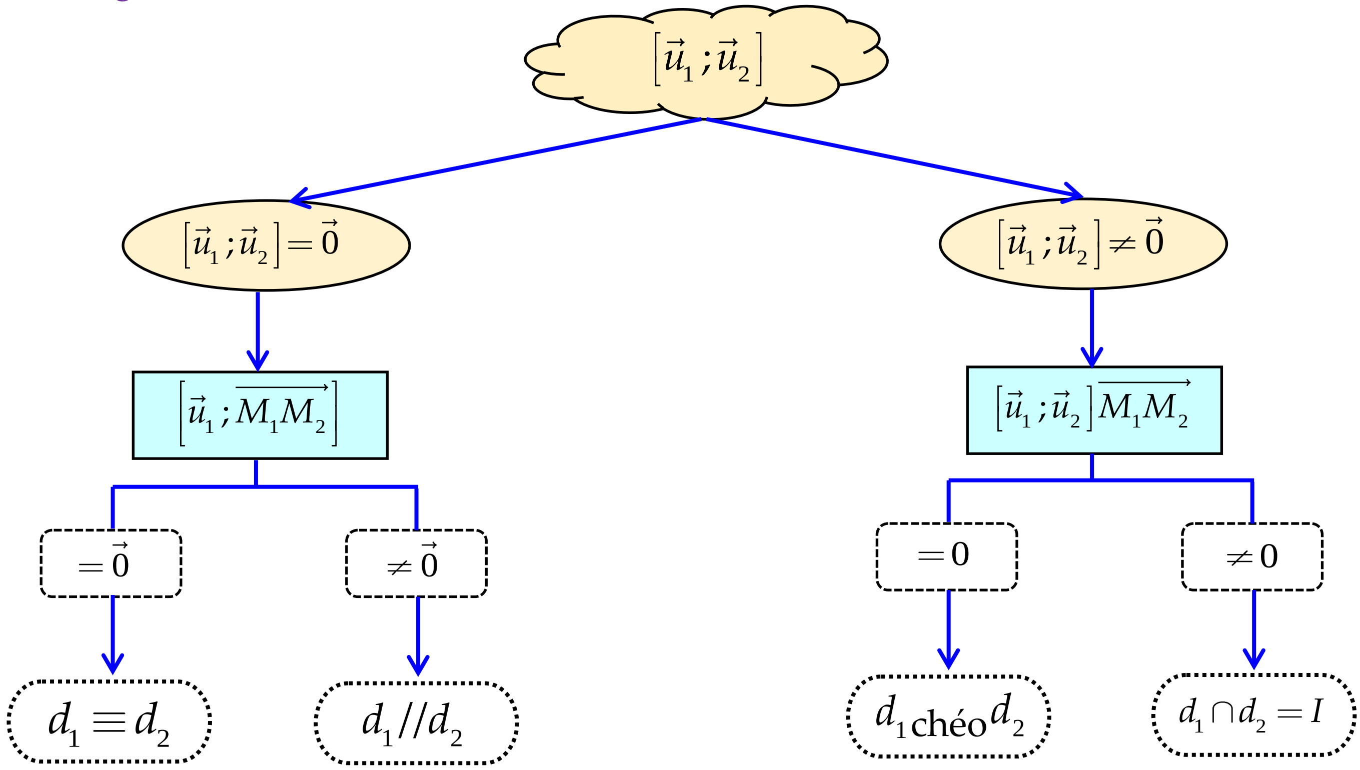
### *Dạng 5.1.* Vị trí tương đối với mặt cầu

| | *Mặt cầu* | |
|---|---|---|
| *Mặt phẳng* | Tính $d\left(I;(P)\right)$ và so sánh với bán kính $R$ | |
| | $d\left(I;(P)\right)>R$ | Mặt phẳng ***không cắt*** mặt cầu |
| | $d\left(I;(P)\right)=R$ | Mặt phẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu tại $M$ |
| | $d\left(I;(P)\right)<R$ | Mặt phẳng ***cắt*** mặt cầu |
| *Đường thẳng* | Tính $d\left(I;(d)\right)$ và so sánh với bán kính $R$ | |
| | $d(I;d)>R$ | Đường thẳng ***không cắt*** mặt cầu |
| | $d(I;d)=R$ | Đường thẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu |
| | $d(I;d)<R$ | Đường thẳng ***cắt*** mặt cầu |
| *Điểm* | Tính $IM$ và so sánh với bán kính $R$ | |
| | $IM>R$ | Điểm $M$ ***nằm ngoài*** mặt cầu |
| | $IM=R$ | Điểm $M$ ***nằm trên*** mặt cầu |
| | $IM<R$ | Điểm $M$ ***nằm trong*** mặt cầu |

### *Dạng 5.2.* Vị trí tương đối với mặt phẳng

| | *Mặt phẳng* $(P)$ | |
|---|---|---|
| *Mặt phẳng* $(Q)$ | Xét tỉ lệ 2 vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng | |
| | $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$ | Mặt $(P)$ ***cắt*** mặt $(Q)$ |
| | $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$ | Mặt $(P)$ ***song song*** mặt $(Q)$ |
| | $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$ | Mặt $(P)$ ***trùng*** mặt $(Q)$ |
| | $A.A'+B.B'+C.C'=0$ | Mặt $(P)$ ***vuông góc*** mặt $(Q)$ |
| *Đường thẳng* | Tham số hóa $H\in d\Rightarrow H(?)$ và thay vào mặt phẳng $(P)$<br>Được phương trình: $A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0\Leftrightarrow f(t)=0$. | |
| | $f(t)=0$ vô nghiệm | Đường thẳng ***song song*** mặt $(P)$ |
| | $f(t)=0$ có 1 nghiệm | Đường thẳng ***cắt*** mặt $(P)$ |
| | $f(t)=0$ vô số nghiệm | Đường thẳng ***nằm trong*** mặt $(P)$ |
| | Xét tích vô hướng vécto chỉ phương của $d$ và vecto pháp tuyến của $(P)$ | |
| | $A.a+B.b+C.c=0$ và $M(X_0;Y_0;Z_0)\notin(P)$ | Đường thẳng ***song song*** mặt $(P)$ |
| | $A.a+B.b+C.c\neq0$ | Đường thẳng ***cắt*** mặt $(P)$ |
| | $A.a+B.b+C.c=0$ và $M(X_0;Y_0;Z_0)\in(P)$ | Đường thẳng ***nằm trong*** mặt $(P)$ |
| *Điểm* | Thay tọa độ $M(x_0;y_0;z_0)$ vào $(P): Ax+By+Cz+D=0$ | |
| | $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ | Điểm $M$ ***nằm trong*** mặt phẳng |
| | $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$ | Điểm $M$ ***nằm ngoài*** mặt phẳng |

## *Dạng 5.3.* Vị trí tương đối với đường thẳng




Hoặc ta có thể xét như sau:

| | *Đường thẳng* $d_2$ | |
|---|---|---|
| *Đường thẳng* $d_1$ | Xét $\vec{u}_1=k\vec{u}_2$ $(k\neq 0)$ | |
| | $\vec{u}_1=k\vec{u}_2$ và $M_1\in d_2$ | $d_1$ ***trùng*** $d_2$ |
| | $\vec{u}_1=k\vec{u}_2$ và $M_1\notin d_2$ | $d_1$ ***song song*** $d_2$ |
| | Và xét hệ tương giao $(I):\begin{cases}x_0+a_1t=x'_0+a'_1t'\\y_0+a_2t=y'_0+a'_2t'\\z_0+a_3t=z'_0+a'_3t'\end{cases}$ | |
| | $\vec{u}_1\neq k\vec{u}_2$ và $(I)$ có nghiệm duy nhất | $d_1$ ***cắt*** $d_2$ |
| | $\vec{u}_1\neq k\vec{u}_2$ và $(I)$ vô nghiệm | $d_1$ ***chéo*** $d_2$ |

## *Dạng 5.4.* Góc

(1) Hai đường thẳng $d_1;d_2$: .................................... $\left|\cos(d_1;d_2)\right|=\dfrac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}$.

(2) Hai mặt phẳng $(\alpha_1);(\alpha_2)$: ................................ $\left|\cos((\alpha_1);(\alpha_2))\right|=\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$.

(3) Đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$: ................ $\left|\sin(d;(\alpha))\right|=\dfrac{|\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{u}_d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}|.|\vec{u}_d|}$.

***Chú ý:*** $0^0\leq((\alpha),(\beta))\leq 90^0$

## *Dạng 5.5.* Khoảng cách

(1) Hai điểm $A;B$: ............................................................. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

**(2)** Điểm $M_0$ và $\Delta$ : ............................................... $d\left(M_0;\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{MM_0}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

$$\xrightarrow[M_0\in\Delta']{\Delta'//\Delta} d\left(\Delta';\Delta\right)=d\left(M_0;\Delta\right)$$

**(3)** Hai đường $\Delta_1;\Delta_2$ $\left(M\in\Delta_1;N\in\Delta_2\right)$: ............. $d\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u}_1;\vec{u}_2\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1;\vec{u}_2\right]\right|}$.

$$\xrightarrow[\text{cheo nhau}]{AB\&CD} d\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right]\right|}$$

**(4)** Điểm $M_0$ và mặt $(\alpha): ax+by+cz+d=0$: ....... $d\left(M_0;(\alpha)\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|}$.

$$\xrightarrow[\begin{cases}\Delta//(\alpha)\\ M_0\in\Delta\end{cases}]{\begin{cases}(\beta)//(\alpha)\\ M_0\in(\beta)\end{cases}} d\left(M_0;(\alpha)\right)=d\left((\beta);(\alpha)\right)=\left(\Delta;(\alpha)\right)$$

----------*Hết*----------