HỘI THI OLYMPIC MÙA XUÂN LẦN I – NĂM 2026

Môn: TOÁN

Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi: 31/01/2026

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 ***(1,5 điểm).***

a) Rút gọn biểu thức $A=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$ với điều kiện $x\ge 0,\ x\ne 4,\ x\ne 9$.

b) Cho các số thực $a,\ b,\ c$ đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2026$.

Tính giá trị của biểu thức $B=abc$.

Câu 2 ***(1,5 điểm).*** Trong hệ trục Oxy, đường thẳng $(d): y=-x+6$ cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B. Gọi S là tập hợp các điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên nằm trên các cạnh của tam giác OAB hoặc nằm trong tam giác OAB. Chọn ngẫu nhiên một điểm từ tập S.

a) Tính số phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất để chọn được điểm M từ tập S sao cho diện tích tam giác OAM không vượt quá $\dfrac{1}{2}$ diện tích tam giác OAB.

Câu 3 ***(2,0 điểm).***

a) Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

b) Quãng đường từ A đến B dài 315 km. Cùng một thời điểm, một xe máy khởi hành từ A đến B và một xe ô tô khởi hành từ B về A. Sau khi gặp nhau, xe máy đi thêm 4 giờ thì đến B, còn ô tô đi thêm 2 giờ 15 phút thì đến A. Biết vận tốc của mỗi xe là không đổi trong suốt hành trình. Tính vận tốc của xe máy và của ô tô.

Câu 4 ***(1,5 điểm).***

a) Biết phương trình $2025x^2-9x-2026=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $P=9x_1+2025x_2^2+2026$.

b) Tìm số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau dạng $\overline{XUAN}$ biết rằng $\overline{XUAN}=\dfrac{\overline{NAUX}}{4}$.

Câu 5 ***(3,5 điểm).*** Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M sao cho $OM=3R$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với $(O;R)$ (A, B là các tiếp điểm). Từ A dựng đường thẳng song song song với MB cắt (O) tại điểm thứ hai là C. Đường thẳng AC cắt OM tại N. Gọi H là giao điểm của AB và OM.

a) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình thoi.

b) Đường thẳng MC cắt (O) tại điểm thứ hai là D. Kẻ CE vuông góc BD tại E. Tính $\tan\widehat{DCE}$.

c) Kẻ đường kính AK của (O), đường thẳng MK cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Đường thẳng OQ vuông góc với đoạn KP tại Q. Gọi I là giao điểm của OP và AQ, J là giao điểm của KI và AP. Chứng minh $MJ\perp AQ$.

-------Hết-------

Họ và tên học sinh:…………………………………………; Số báo danh:………….

HỘI THI OLYMPIC MÙA XUÂN LẦN I – NĂM 2026

Môn: TOÁN

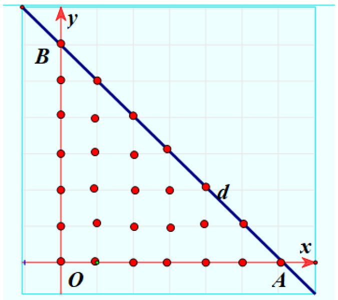
Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi: 31/01/2026

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

Câu	***Nội dung***	***Điểm***
Câu 1 (1,5 điểm)	a) Rút gọn biểu thức $A=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$ với điều kiện $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$. *(Dựa theo đề xuất của trường THCS Kim Đồng)*	***1,0***
	$A=\left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right]$	*0,25*
	$A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right]$	*0,25*
	$A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$	*0,25*
	$A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$	*0,25*
	b) Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2026$. Tính giá trị của biểu thức $B=abc$.	***0,5***
	Ta có $a^2(b+c)=b^2(c+a)$ $a^2b+a^2c-b^2c-ab^2=0$ $ab(a-b)+c(a-b)(a+b)=0$ $(a-b)(ab+bc+ca)=0$	*0,25*
	Mà $a-b\ne 0$, suy ra: $ab+bc+ca=0$ $bc=-a(b+c)$ Do đó $abc=-a^2(b+c)=-2026$ (vì $a^2(b+c)=2026$ nên $a\ne 0$) Vậy $B=abc=-2026$.	*0,25*

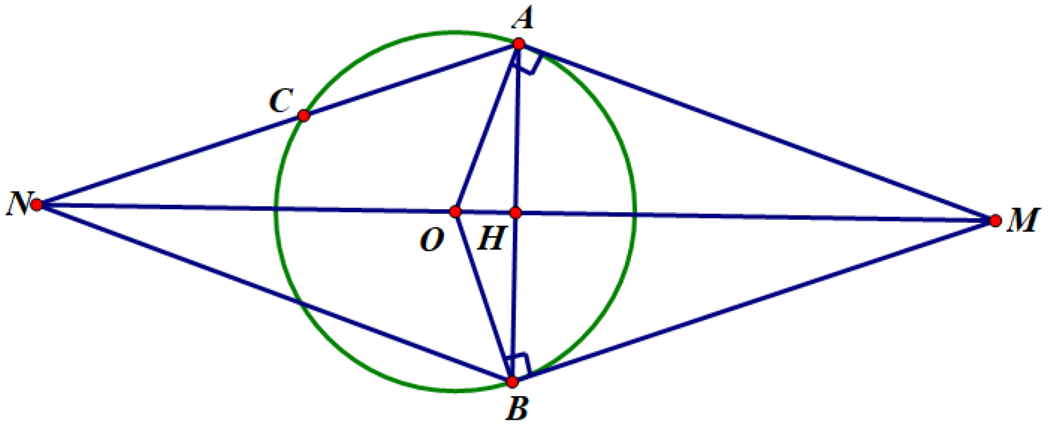
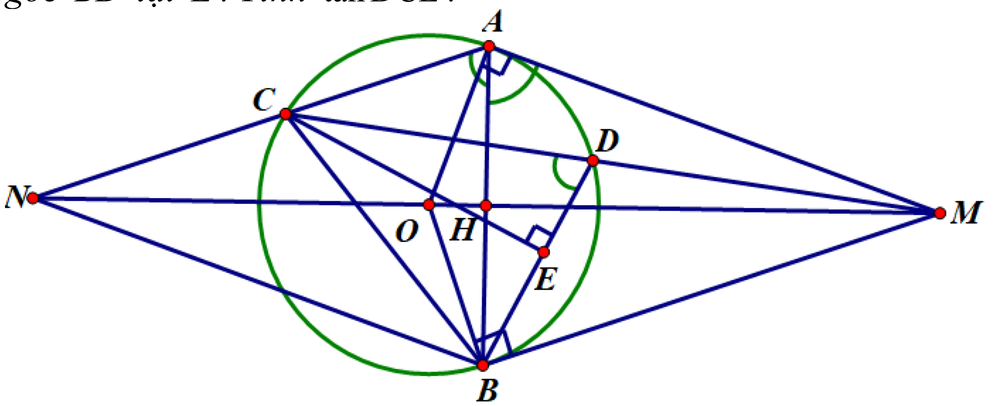
Câu	Nội dung	Điểm
Câu 2 **(1,5 điểm)**	*Trong hệ trục Oxy, đường thẳng $(d): y = -x + 6$ cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B. Gọi S là tập hợp các điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên nằm trên các cạnh của tam giác OAB hoặc nằm trong tam giác OAB. Chọn ngẫu nhiên một điểm từ tập S.* *a/ Tính số phần tử của không gian mẫu.* *b/ Tính xác suất để chọn được điểm M từ tập S sao cho diện tích tam giác OAM không vượt quá $\frac{1}{2}$ diện tích tam giác OAB.* *(Dựa theo đề xuất của trường THCS Nguyễn Trãi)*	
	a/ Tính số phần tử của không gian mẫu.  	**0,75**
	+ Các điểm nằm trên các cạnh của tam giác OAB là $(0;0),(0;1),(0;2),(0;3);(0;4);(0;5),(0;6);(5;1),(4;2),(3;3),(2;4),(1;5),(0;6)$: có 18 điểm .	*0,25*
	+ Các điểm nằm trong tam giác OAB là $(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;1),(2;2),(2;3),(3;1),(3;2),(4;1)$: có 10 điểm	*0,25*
	+ Do đó $n(\Omega) = 8 + 10 = 28$.	*0,25*
	b/ Tính xác suất để chọn được điểm M từ tập S sao cho diện tích tam giác OAM không vượt quá $\frac{1}{2}$ diện tích tam giác OAB.	**0,75**
	+Ta có $S_{OAM} \le S_{OAB}$, suy ra $\frac{1}{2}.OA.d(M;Ox) \le \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.OA.OB$ Do đó $\lvert y_M \rvert \le \frac{1}{2}OB = 3$.	*0,25*
	+ Như vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn $\begin{cases} 0 < y_M \le 3 \\ 0 \le x_M \le 6 \\ x_M + y_M \le 6 \\ x_M, y_M \in \mathbb{Z} \end{cases}$ + Có tất cả $6 + 5 + 4 = 15$ điểm M thỏa yêu cầu, suy ra $n(X) = 15$.	*0,25*
	+ Vậy XS cần tính $P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{15}{28}$.	*0,25*

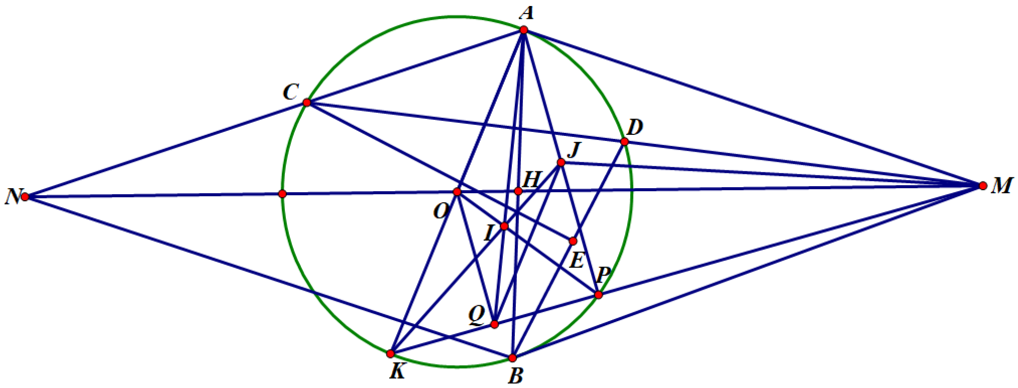
Câu	*Nội dung*	*Điểm*
Câu 3 *(2,0 điểm)*	*a) Giải phương trình* $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.	***1,0***
	Điều kiện $\frac{-1}{3}\le x\le 6$. PT được viết lại $$\frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$ *Lưu ý: HS có thể chưa đặt điều kiện*	*0,25*
	$$(x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0$$ $x-5=0$ (1) hoặc $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1=0$ (2)	*0,25*
	Giải (1) : ta được $x=5$, thỏa điều kiện *Nếu chưa đặt điều kiện thì phải thử lại từ pt ban đầu*	*0,25*
	Giải (2): với Điều kiện $\frac{-1}{3}\le x\le 6$ thì $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0$ suy ra (2) vô nghiệm. Vậy PT có nghiệm $x=5$.	*0,25*
	b) Quãng đường từ A đến B dài 315 km. Cùng một thời điểm, một xe máy khởi hành từ A đến B và một xe ô tô khởi hành từ B về A. Sau khi gặp nhau, xe máy đi thêm 4 giờ thì đến B, còn ô tô đi thêm 2 giờ 15 phút thì đến A. Biết vận tốc của mỗi xe là không đổi trong suốt hành trình. Tính vận tốc của xe máy và của ô tô. *(Dựa theo đề xuất của trường THCS Chu Văn An)*	***1,0***
	Gọi vận tốc xe máy là x (km/h) (điều kiện $x>0$). Gọi vận tốc ô tô là y (km/h) (điều kiện $y>0$). Thời gian xe máy dự định đi từ A đến B là $\frac{315}{x}$ giờ. Thời gian ô tô dự định đi từ B đến A là $\frac{315}{y}$ giờ. Thời gian đi trên đoạn đường AB của xe máy đi nhiều hơn so với ô tô là $$\frac{315}{x}-\frac{315}{y}=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}\text{ (giờ)}$$	*0,25*
	Quãng đường xe máy đi được kể từ khi gặp ô tô cho đến khi đến B là $4x$ (km). Quãng đường ô tô đi được kể từ khi gặp xe máy cho đến khi đến A là $\frac{9}{4}y$ (km). Do đó quãng đường AB là $4x+\frac{9}{4}y=315$ (km)	*0,25*

	Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{315}{x}-\dfrac{315}{y}=\dfrac{7}{4}(1) \\ 4x+\dfrac{9}{4}y=315(2) \end{cases}$. Từ phương trình (2) suy ra $x=\dfrac{1260-9y}{16}$, thế vào phương trình (1) ta có: $63y^2+22\ 680y-1\ 587\ 600=0$ $y^2+360y-25\ 200=0$	*0,25*
	Giải phương trình trên được $y=-420$ (loại) hoặc $y=60$ (nhận). Với $y=60$ suy ra $x=45$. Vậy vận tốc xe máy là 45 km/h, vận tốc ô tô là 60 km/h.	*0,25*

Câu	*Nội dung*	*Điểm*
Câu 4 (1,5 điểm)	a) Biết phương trình $2025x^2-9x-2026=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $P=9x_1+2025x_2^2+2026$.	***0,5***
	Theo Viet, ta có $x_1+x_2=\dfrac{9}{2025}$ và $x_1.x_2=-\dfrac{2026}{2025}$. Vì x_2 là nghiệmcủa phương trình nên $2025x_2^2-9x_2-2026=0$, suy ra $2025x_2^2=9x_2+2026$.	*0,25*
	Khi đó $P=9x_1+2025x_2^2+2026=9(x_1+x_2)+2.2026$ $=9.\dfrac{9}{2025}+2.2026=\dfrac{8\ 205\ 381}{2025}$	*0,25*
	b) Tìm số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau dạng $\overline{XUAN}$ biết rằng $\overline{XUAN}=\dfrac{\overline{NAUX}}{4}$.	***1,0***
	Từ đề ta có $4.\overline{XUAN}=\overline{NAUX}$, ta nhận thấy tích $4.\overline{XUAN}$ có 4 chữ số nên $0<X\le 2$. Vế trái chẵn nên vế phải cũng chẵn, từ đó có $X=2$.	*0,25*
	Mặt khác $4.X\le N$ hoặc $N\ge 8$, do $4.N$ tận cùng bằng 2 nên $N=8$.	*0,25*
	Bây giờ ta viết lại $4.\overline{2UA8}=\overline{8AU2}\Leftrightarrow 4(2000+100U+10A+8)=8000+100A+10U+2$ $2A-13U-1=0\Leftrightarrow 2A=13U+1$ suy ra U lẻ	*0,25*
	Mà $2A\le 18$ nên $U=1$, khi đó $A=7$ Vậy $\overline{XUAN}=2178$ thử lại đúng	*0,25*

Câu	*Nội dung*	*Điểm*
Câu 5 (3,5 điểm)	*Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M sao cho $OM=3R$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA,MB với $(O;R)$ (A,B là các tiếp điểm). Từ A dựng đường thẳng song song song với MB cắt (O) tại điểm thứ hai là C. Đường thẳng AC cắt OM tại N. Gọi H là giao điểm của AB và OM.*	

	a) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình thoi.	***1,0***
		*0,25*
	Chứng minh OM là trung trực của đoạn AB, suy ra $\widehat{MAH} = \widehat{MBH}$	*0,25*
	Vì $AN // BM$ nên $\widehat{MBH} = \widehat{NAH}$ (so le trong) Do đó $\widehat{MAH} = \widehat{NAH}$, tam giác suy ra AMN cân tại A.	*0,25*
	Từ đó suy ra $MB = MA = AN = NB$. Do đó $AMBN$ là hình thoi	*0,25*
	b) Đường thẳng MC cắt (O) tại điểm thứ hai là D. Kẻ CE vuông góc BD tại E. Tính $\tan\widehat{DCE}$. 	***1,25***
	Ta có $\widehat{CAB} = \widehat{NAH} = \widehat{MAH}$ (tam giác AMN cân tại A) Mà $\widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \widehat{CDE}$ (cùng chắn cung BC) nên $\widehat{CDE} = \widehat{MAH}$	*0,25*
	Hai tam giác CED và MAH có $\widehat{CDE} = \widehat{MAH}$ và $\widehat{CED} = \widehat{MHA} = 90^\circ$ nên $\Delta CED \sim \Delta MHA$. Suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{HMA}$.	*0,25*
	Tam giác OAM vuông tại A có AH là đường cao. Suy ra $AM = \sqrt{MO^2 - OA^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = 2\sqrt{2}R$, $AH = \dfrac{OA.AM}{OM} = \dfrac{R.2\sqrt{2}R}{3R} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$. $HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{8R^2 - \dfrac{8R^2}{9}} = \dfrac{8R}{3}$.	*0,5*
	Do đó $\tan\widehat{DCE} = \tan\widehat{HMA} = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}R}{3}}{\frac{8R}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.	*0,25*

	c) Kẻ đường kính AK của (O), đường thẳng MK cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Đường thẳng OQ vuông góc với đoạn KP tại Q. Gọi I là giao điểm của OP và AQ, J là giao điểm của KI và AP. Chứng minh $MJ \perp AQ$. 	***1,25***
	Ta có $OQ \perp KP$ nên Q là trung điểm KP. Suy ra I là trọng tâm của tam giác AKP.	*0,25*
	Do đó J là trung điểm của AP. Suy ra QJ là đường trung bình của tam giác AKP, do đó $QJ // AK$.	*0,25*
	Lại có $AM \perp AK$ nên suy ra $QJ \perp AM$ (1).	*0,25*
	Vì AK là đường kính của (O) nên $\widehat{APK} = 90^\circ$, suy ra $AP \perp QM$ (2).	*0,25*
	Từ (1) và (2) suy ra J là trực tâm của tam giác AQM. Do đó $MJ \perp AQ$ (đpcm).	*0,25*

-------Hết-------

Lưu ý: *Nếu học sinh giải bằng cách khác, giám khảo căn cứ vào thang điểm của bảng hướng dẫn chấm để chấm.*