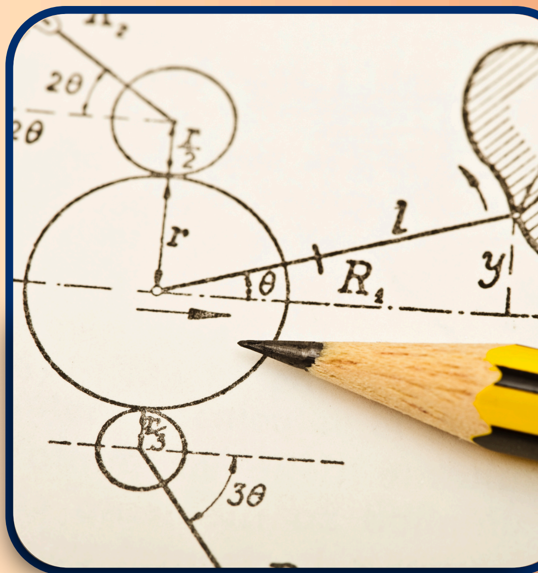
WORD & BIÊN SOẠN

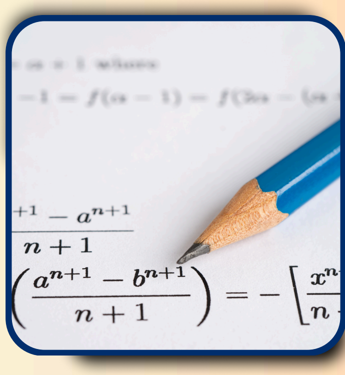
NHÓM CHUYÊN ĐỀ TOÁN THPT

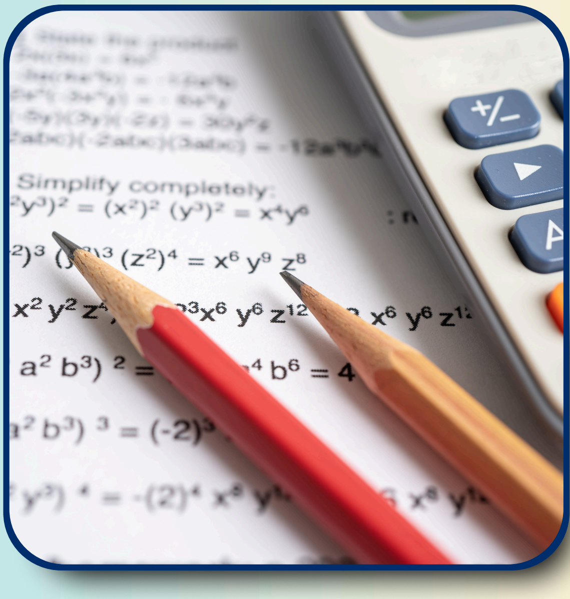
CHỦ ĐỀ ÔN TẬP TỐT NGHIỆP

Thpt Quốc Gia

2024 - 2025







NHÓM CHUYÊN ĐỀ TOÁN THPT

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1:

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phần Lý thuyết trọng tâm

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản

a) Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Với $|m| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $|m| \le 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin x = m$.

Khi đó, ta có: $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý

- Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\sin x = m$:

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^\circ$ như sau:

$$\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Phương trình $\cos x = m$ (2)

- Với $|m| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm.
- Với $|m| \le 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0;\pi]$ sao cho $\cos x = m$.

Khi đó, ta có: $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý

- Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\cos x = m$:

- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos a^\circ$ như sau:

$$\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Phương trình $\tan x = m$

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan x = m$. Khi đó, ta có:

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan a^\circ$ như sau:

$$\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

d) Phương trình $\cot x = m$

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ sao cho $\cot x = m$. Khi đó, ta có:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot a^\circ$ như sau:

$$\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

2. Phương trình lượng giác đưa về dạng cơ bản

- $\sin f\left(x\right) = \sin g\left(x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = g\left(x\right) + k2\pi \\ f\left(x\right) = \pi - g\left(x\right) + k2\pi \end{array}\right. \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$
- $\cos f\left(x\right) = \cos g\left(x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = g\left(x\right) + k2\pi \\ f\left(x\right) = -g\left(x\right) + k2\pi \end{array}\right. \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$
- Với phương trình có dạng:

$\sin^2 u\left(x\right) = \sin^2 v\left(x\right)$, $\cos^2 u\left(x\right) = \cos^2 v\left(x\right)$, $\sin^2 u\left(x\right) = \cos^2 v\left(x\right)$, Ta có thể dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình dạng $\cos f\left(x\right) = \cos g\left(x\right)$.

Với một số phương trình lượng giác, ta có thể dùng các công thức lượng giác và các biến đổi để đưa về phương trình dạng tích $A\left(x\right).B\left(x\right) = 0$.

II. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương trình mũ

Với $a > 0,\ a \ne 1$ thì:

- $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f\left(x\right) = \log_a b$ với $b > 0$;
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f\left(x\right) = g\left(x\right)$.

2. Phương trình lôgarit

Với $a > 0,\ a \ne 1$ thì:

- $\log_a f\left(x\right) = b \Leftrightarrow f\left(x\right) = a^b$.
- $\log_a f\left(x\right) = \log_a g\left(x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) = g\left(x\right) \\ f\left(x\right) > 0 \ \vee g\left(x\right) > 0 \end{cases}$.

3. Bất phương trình mũ

Với $a > 0,\ a \ne 1$ thì:

a) Xét bất phương trình: $a^{f(x)} > b$.

- Nếu $b \le 0$, tập nghiệm của bất phương trình là tập xác định của $f\left(x\right)$;
- Nếu $b > 0,\ a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f\left(x\right) > \log_a b$;
- Nếu $b > 0,\ 0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $f\left(x\right) < \log_a b$.

b) Xét bất phương trình: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

- Nếu $a>1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)>g(x)$;
- Nếu $0<a<1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)<g(x)$.

Các bất phương trình mũ khác cùng loại được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

Với $a>0,\ a\neq 1$ thì:

a) Xét bất phương trình: $\log_a f(x)>b$.

- Nếu $a>1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)>a^b$;
- Nếu $0<a<1$ thì bất phương trình đưa về: $0<f(x)<a^b$.

b) Xét bất phương trình: $\log_a f(x)>\log_a g(x)$.

- Nếu $a>1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)>g(x)>0$;
- Nếu $0<a<1$ thì bất phương trình đưa về: $0<f(x)<g(x)$.

Các bất phương trình lôgarit khác cùng loại được giải tương tự.

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ là:

A. $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ và $x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

B. $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$ và $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

C. $x=k2\pi$ và $x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

D. $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ và $x=\frac{5\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Minh Nguyễn

Chọn A

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pi+2k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Ví dụ 2. Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2x}=81$ là:

A. 4. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Minh Nguyễn

Chọn D

$3^{x^2-2x}=81\Leftrightarrow 3^{x^2-2x}=3^4\Leftrightarrow x^2-2x-4=0$.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu vì $ac<0$. Khi đó tổng hai nghiệm là $-\frac{b}{a}=2$.

Ví dụ 3. Nghiệm của phương trình $\log_{16}(x+5)=\frac{1}{2}$ là:

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 27.

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Minh Nguyễn

Chọn B

$\log_{16}(x+5)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+5=16^{\frac{1}{2}}=4\Leftrightarrow x=-1$.

Ví dụ 4. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x-4)=\log_2(x^2-5x+4)$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Minh Nguyễn

Chọn C

$\log_2(x-4)=\log_2(x^2-5x+4)\Leftrightarrow\begin{cases}x-4>0\\x^2-5x+4=x-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\x=2;x=4\end{cases}$ (vô nghiệm)

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Ví dụ 5. Cho phương trình $\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Hạ bậc hai vế, ta được phương trình: $\frac{1+\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\cos(2x+\pi)}{2}$. .

b) Ta có: $\cos(2x+\pi)=-\cos 2x$.

c) Phương trình đã cho đưa về dạng: $\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$. .

d) Nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Minh Nguyễn

a) Hạ bậc hai vế, ta được phương trình: $\frac{1+\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\cos(2x+\pi)}{2}$. .

Hạ bậc hai vế của phương trình $\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ta được

$\frac{1-\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1+\cos(2x+\pi)}{2}\Leftrightarrow\frac{1+\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\cos(2x+\pi)}{2}$

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $\cos(2x+\pi)=-\cos 2x$.

$\cos(2x+\pi)=-\cos 2x$. (đúng)

Chọn ĐÚNG.

c) Phương trình đã cho đưa về dạng: $\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$. .

Phương trình đã cho tương đương với $\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(2x+\pi)=\cos 2x$

Chọn ĐÚNG.

d) Nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$

Nghiệm của phương trình đã cho là

$$\left[\begin{array}{l}4x+\frac{\pi}{2}=2x+k2\pi\\ 4x+\frac{\pi}{2}=-2x+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Chọn SAI.

Ví dụ 6. **[MĐ2]** Cho bất phương trình $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x}>\left(3+2\sqrt{2}\right)^{5-2x}$.

a) Ta có: $3+2\sqrt{2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-1}$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình: $x^2-4x>2x-5$.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 5.

d) Tổng nghiệm nguyên của bất phương trình là 9.

Lời giải

a) Ta có: $3+2\sqrt{2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-1}$.

Ta có: $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=3^2-\left(2\sqrt{2}\right)=1\Rightarrow 3+2\sqrt{2}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-1}$.

Chọn ĐÚNG.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình: $x^2-4x>2x-5$.

Ta có: $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x}>\left(3+2\sqrt{2}\right)^{5-2x}\Leftrightarrow\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x}>\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-5+2x}\Leftrightarrow x^2-4x<2x-5$

(Vì $0<3-2\sqrt{2}<1$).

Chọn SAI.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 5.

Ta có: $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x}>\left(3+2\sqrt{2}\right)^{5-2x}\Leftrightarrow\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x}>\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-5+2x}\Leftrightarrow x^2-4x<2x-5$

$\Leftrightarrow x^2-6x+5<0\Leftrightarrow 1<x<5$.

Suy ra nghiệm nguyên của bất phương trình là: $2;3;4$

Chọn SAI.

d) Tổng nghiệm nguyên của bất phương trình là 9.

Tổng nghiệm nguyên của bất phương trình là: $2+3+4=9$.

Chọn ĐÚNG.

Ví dụ 7. **[MĐ2]** Cho bất phương trình Cho bất phương trình: $\log_{\sqrt{2}-1}\left(2x^2-2\right)\geq\log_{\sqrt{2}-1}(5x+5)$.

a) Ta có: $0<\sqrt{2}-1<1$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}2x^2-2\leq 5x+5\\ 5x+5>0\end{cases}$.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

d) Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là 0.

Lời giải

GVSB: Lê Ngọc; GVPB: Minh Nguyễn

a) Ta có: $0<\sqrt{2}-1<1$.

$\sqrt{2}-1\approx 0,42\Rightarrow 0<\sqrt{2}-1<1$.

Chọn ĐÚNG.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}2x^2-2\le 5x+5\\5x+5>0\end{cases}$.

$\log_{\sqrt{2}-1}\left(2x^2-2\right)\ge\log_{\sqrt{2}-1}\left(5x+5\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2\le 5x+5\\2x^2-2>0\end{cases}$ (Vì $0<\sqrt{2}-1<1$)

Chọn SAI.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

Ta có:

$$\log_{\sqrt{2}-1}\left(2x^2-2\right)\ge\log_{\sqrt{2}-1}\left(5x+5\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2\le 5x+5\\2x^2-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-5x-7\le 0\\\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-5x-7\le 0\\\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le\dfrac{7}{2}\\\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow 1<x\le\dfrac{7}{2}$$

Vậy nghiệm nguyên của bất phương trình là $2;3$.

Chọn ĐÚNG.

d) Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là 0.

Ta có: nghiệm nguyên của bất phương trình là $2;3$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là 2.

Chọn SAI.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 8. **[MĐ2]** Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h\left(\text{m}\right)$ theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức:

$h=16+7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$ với $0\le t\le 24$. Tính thời điểm mà mực nước tại cảng là cao nhất.

Lời giải

GVSB: Lê Ngọc; GVPB: Minh Nguyễn

Trả lời: 6

Ta có: $h=16+7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$

Vì $-1\le\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\le 1\Rightarrow -7\le 7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\le 7\Rightarrow 9\le 16+7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\le 23\Rightarrow 9\le h\le 23$

Nên $\max h=23\Leftrightarrow\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{12}t=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=6+24k$.

Vì $0\le t\le 24$ nên thời điểm mà mực nước tại cảng là cao nhất là 6 (giờ).

Ví dụ 9. **[MĐ2]** Công thức Định luật làm mát của Newton được cho như sau: $kt = \ln\dfrac{T-S}{T_0-S}$ trong đó t là số giờ trôi qua, T_0 là nhiệt độ lúc đầu, T là nhiệt độ sau t giờ, S là nhiệt độ môi trường (T_0, T, S theo cùng một đơn vị đo), k là hằng số. Một cốc trà có nhiệt độ 96^0C, sau 2 phút nhiệt độ giảm còn 90^0C. Biết nhiệt độ phòng là 24^0C. Tính nhiệt độ của cốc trà sau 10 phút (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

GVSB: Lê Ngọc; GVPB: Minh Nguyễn

Trả lời: 70,6

Gọi T_1 là nhiệt độ sau t_1 giờ

Gọi T_2 là nhiệt độ sau t_2 giờ

Ta có: $T_0 = 96^0\text{C},\ T_1 = 90^0\text{C},\ S = 24^0\text{C},\ t_1 = 2(\text{p}) = \dfrac{1}{30}(\text{h})$

Khi đó: $k.\dfrac{1}{30} = \ln\dfrac{90-24}{96-24} \Rightarrow k.\dfrac{1}{30} = \ln\dfrac{11}{12} \Rightarrow k = 30\ln\dfrac{11}{12}$

Nhiệt độ của cốc trà sau 10 phút ($t_2 = 10(\text{p}) = \dfrac{1}{6}(\text{h})$) là:

$\left(30\ln\dfrac{11}{12}\right).\dfrac{1}{6} = \ln\dfrac{T_2-24}{96-24} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{11}{12}\right)^5 = \ln\dfrac{T_2-24}{96-24} \Rightarrow \left(\dfrac{11}{12}\right)^5 = \dfrac{T_2-24}{96-24}$

$\Rightarrow 11^5.(96-24) = 12^5(T_2-24) \Rightarrow T_2 - 24 \approx 46,6 \Rightarrow T_2 \approx 70,6$

Phần Tự Luyện

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Các nghiệm của phương trình $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}-x\right) = 0$ là

A. $x = -\dfrac{\pi}{5} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

B. $x = \dfrac{2\pi}{5} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x = -\dfrac{\pi}{5} + k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

D. $x = \dfrac{\pi}{5} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn D

Ta có: $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}-x\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{5} - x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{5} - k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 2. Các nghiệm của phương trình $2\sin 3x + \sqrt{2} = 0$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = \dfrac{3\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

B. $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

D. $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = \dfrac{3\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn B

Ta có: $2\sin 3x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \sin 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 3x=\sin -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow = \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{5\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 3. Các nghiệm của phương trình $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ là

A. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=k2\pi$ và $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ và $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn A

Ta có: $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 4. Các nghiệm của phương trình $\sin^2 2x=1$ là

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=k\frac{\pi}{2}$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn A

Ta có: $\sin^2 2x=1 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 5. Các nghiệm của phương trình $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ là

A. $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn C

Ta có: $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 6. Các nghiệm của phương trình $\cot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ là

A. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{6}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn B

Ta có: $\cot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Hay $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 7. Các nghiệm của phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$ là

A. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **B.** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **D.** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn D

Ta có: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Cách khác:

Do $\cos x=0$ không thoả mãn phương trình nên ta có:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Câu 8. Các góc lượng giác x sao cho $\cos\left(x-15^{\circ}\right)=-\frac{1}{2}$ là

A. $x=165^{\circ}+k360^{\circ}$ và $x=-135^{\circ}+k360^{\circ}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=165^{\circ}+k180^{\circ}$ và $x=-135^{\circ}+k180^{\circ}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=135^{\circ}+k360^{\circ}$ và $x=-105^{\circ}+k360^{\circ}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $x=135^{\circ}+k180^{\circ}$ và $x=-105^{\circ}+k180^{\circ}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn C

Ta có: $\cos\left(x-15^{\circ}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-15^{\circ}=120^{\circ}+k360^{\circ}\\x-15^{\circ}=-120^{\circ}+k360^{\circ}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=135^{\circ}+k360^{\circ}\\x=-105^{\circ}+k360^{\circ}\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Câu 9. Các góc lượng giác x sao cho $\tan\left(2x+27^{\circ}\right)=\tan35^{\circ}$ là

A. $x=4^{\circ}+k180^{\circ}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **B.** $x=-4^{\circ}+k180^{\circ}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=-4^\circ+k90^\circ\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **D.** $x=4^\circ+k90^\circ\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Phúc Hoàng; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn D

Ta có: $\tan\left(2x+27^\circ\right)=\tan 35^\circ \Leftrightarrow 2x+27^\circ=35^\circ+k180^\circ \Leftrightarrow x=4^\circ+k90^\circ\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 10. Các góc lượng giác x sao cho $\sin 2x=\sin\left(36^\circ-x\right)$ là

A. $x=12^\circ+k120^\circ$ và $x=144^\circ+k360^\circ\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=12^\circ+k120^\circ$ và $x=48^\circ+k120^\circ\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=12^\circ+k360^\circ$ và $x=144^\circ+k120^\circ\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $x=36^\circ+k360^\circ$ và $x=144^\circ+k360^\circ\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn A

$$\sin 2x=\sin\left(36^\circ-x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=36^\circ-x+k360^\circ\\2x=180^\circ-\left(36^\circ-x\right)+k360^\circ\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=12^\circ+k120^\circ\\x=144^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Câu 11. Số nghiệm của phương trình $\cos x=1$ trên khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{9\pi}{2}\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn D

$\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vì $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{9\pi}{2}\right)$ nên $-\dfrac{3\pi}{4}<k2\pi<\dfrac{9\pi}{2}\Leftrightarrow-\dfrac{3}{8}<k<\dfrac{9}{4}$.

Do $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\left\{0;1;2\right\}$.

Vậy phương trình $\cos x=1$ có 3 nghiệm trên khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{9\pi}{2}\right)$.

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ trên khoảng $\left(-\dfrac{5\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right)$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn B

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\approx 35,26^\circ+k.360^\circ\\x\approx 144,74^\circ+l.360^\circ\end{array}\right.\ \left(k;l\in\mathbb{Z}\right).$$

Vì $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right)$ nên $\left[\begin{array}{l}-\dfrac{5\pi}{2}\le\dfrac{35,26}{180}.\pi+k.2\pi\le\dfrac{5\pi}{2}\\-\dfrac{5\pi}{2}\le\dfrac{144,74}{180}.\pi+l.2\pi\le\dfrac{5\pi}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1,3\le k\le 1,2\\-1,7\le l\le 0,8\end{array}\right.$.

Do $k;l\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{-1;0;1\}$; $l\in\{-1;0\}$.

Vậy phương trình $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$.

Câu 13. Các nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sin^2 x=0$ là

A. $x=\frac{\pi}{4}+k.\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **B.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **D.** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn A

$\cos^2 x-\sin^2 x=0\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 6x$ là

A. $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ và $x=\pi+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ và $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $x=k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ và $x=\pi+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ và $x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{4}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn D

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 6x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{2}=6x+k2\pi\\2x-\frac{\pi}{2}=-6x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right..$$

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=-\sqrt{2}$. **C.** $x=\sqrt{2}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn A

$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\Leftrightarrow x=-2$.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $2^{x^2-x}=4$ là

A. $x=-1$ *và* $x=2$. **B.** $x=0$ *và* $x=1$. **C.** $x=1$ *và* $x=-2$. **D.** $x=0$ *và* $x=2$.

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn A

$$2^{x^2-x}=4\Leftrightarrow 2^{x^2-x}=2^2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right..$$

Câu 17. Tổng các nghiệm của phương trình $5^{x^2-3x}=10$ là

A. -3. **B.** $\log_5 10$. **C.** 3. **D.** $-\log_5 10$.

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn C

$5^{x^2-3x}=10\Leftrightarrow x^2-3x=\log_5 10\Leftrightarrow x^2-3x-\log_5 10=0$.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu và $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3$.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x}=5^{x+3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $x=5$. **C.** $x=-5$. **D.** $x=3$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB:Bùi Thanh Sơn

Chọn D

$\left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x}=5^{x+3}\Leftrightarrow 5^{-2(3-2x)}=5^{x+3}\Leftrightarrow 4x-6=x+3\Leftrightarrow x=3$.

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\log_{27}\left(x^2-1\right)=\frac{1}{3}$ là

A. $x=\pm 2$. **B.** $x=\pm\sqrt{10}$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\sqrt{10}$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn A

$\log_{27}\left(x^2-1\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x^2-1=3\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Câu 20. Tích các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-2x\right)=3$ là

A. 8. **B.** 6. **C.** -8. **D.** -6.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn C

$$\log_2\left(x^2-2x\right)=3\Leftrightarrow x^2-2x=8\Leftrightarrow x^2-2x-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=4\end{array}\right..$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là -8.

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $\log_7\left(x^2-2x\right)=\log_7\left(3x-6\right)$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn D

$\log_7\left(x^2-2x\right)=\log_7\left(3x-6\right)\Leftrightarrow\begin{cases}3x-6>0\\x^2-2x=3x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x^2-5x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$

Câu 22. Nghiệm của bất phương trình $(0,5)^x>3$ là

A. $x>\log_{0,5}3$. **B.** $x<\log_{0,5}3$. **C.** $x<\log_3 0,5$. **D.** $x>\log_3 0,5$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn B

$(0,5)^x>3\Leftrightarrow x<\log_{0,5}3$.

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $(0,2)^{x^2}>1$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn A

$(0,2)^{x^2}>1\Leftrightarrow(0,2)^{x^2}>(0,2)^0\Leftrightarrow x^2<0\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x-1}<\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-5}$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;-4)$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn A

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x-1}<\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-5}\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2x+1}<\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-5}\Leftrightarrow-2x+1<x-5\Leftrightarrow x>2$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6)<-2$ là

A. $(3;5)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn D

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-6)<-2\Leftrightarrow 2x-6>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\Leftrightarrow 2x-6>4\Leftrightarrow x>5$.

Câu 26. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_5(2x-3)<\log_{25}x^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Bùi Thanh Sơn

Chọn A

ĐKXĐ: $x>\frac{3}{2}$.

$\log_5(2x-3) < \log_{25}x^2 \Leftrightarrow \log_5(2x-3) < \log_5 x$.

Với $x > \frac{3}{2}$ bpt $2x-3 < x \Leftrightarrow x < 3$.

Kết hợp với ĐKXĐ suy ra $\frac{3}{2} < x < 3$.

Nghiệm nguyên của bất phương trình là $x = 2$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 27. **[MĐ2]** Cho phương trình $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

a) Hạ bậc hai vế, ta được phương trình $\frac{1+\cos(\pi-2x)}{2} = \frac{1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$.

b) Ta có $\cos(\pi-2x) = \cos 2x$.

c) Phương trình đã cho đưa về dạng $\cos 2x = \cos 6x$.

d) Nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

GVSB: Dương Thị Thanh Tâm; GVPB: Hien Nguyen

a) Ta có $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1+\cos(\pi-2x)}{2} = \frac{1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $\cos(\pi-2x) = -\cos 2x$.

Chọn SAI.

c) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1+\cos(\pi-2x)}{2} = \frac{1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(\pi-2x) = -\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos 2x = -\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn SAI.

d) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1+\cos(\pi-2x)}{2} = \frac{1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(\pi-2x) = -\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos 2x = -\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2}+6x+k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2}-6x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4x = \frac{\pi}{2}+k2\pi \\ 8x = -\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn SAI.

Câu 28. **[MĐ2]** Cho phương trình $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ với $x \in [0;\pi]$.

a) Ta có $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

b) Phương trình $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ và } x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \, (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải

GVSB: Dương Thị Thanh Tâm; GVPB: Hien Nguyen

a) Ta có $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - 2x = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} - 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + x + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ -3x = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ -3x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right..$$

Chọn SAI.

c) Ta có $x \in [0;\pi] \Leftrightarrow 0 \le x \le \pi$

TH1: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{\pi}{4} + k2\pi \le \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le k2\pi \le \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \le k \le \frac{3}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$.

Từ đó ta có $x = \frac{\pi}{4}$.

TH2: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \le -\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \le \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} \le \frac{k2\pi}{3} \le \pi + \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le k \le \frac{13}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1$. Từ đó ta có $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12}$.

Chọn ĐÚNG.

d) Tổng các nghiệm là $\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 29. **[MĐ2]** Cho phương trình $\sin 4x + \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$.

a) Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, vế trái của phương trình đưa về dạng: $\sin 3x \cos x$.

b) Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, vế phải của phương trình đưa về dạng: $\cos 3x \cos x$.

c) Nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của phương trình $\cos x=0$ và phương trình $\sin 3x=\cos 3x$.

d) Nghiệm của phương trình đã cho là $x=k2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

GVSB: Dương Thị Thanh Tâm; GVPB: Hien Nguyen

a) Ta có $\sin 4x+\sin 2x=\cos 4x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{4x+2x}{2}\cos\dfrac{4x-2x}{2}=2\cos\dfrac{4x+2x}{2}\cos\dfrac{4x-2x}{2}\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos x=2\cos 3x\cos x$

Chọn ĐÚNG.

b) Chọn ĐÚNG.

c) Ta có $\sin 4x+\sin 2x=\cos 4x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{4x+2x}{2}\cos\dfrac{4x-2x}{2}=2\cos\dfrac{4x+2x}{2}\cos\dfrac{4x-2x}{2}\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos x=2\cos 3x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin 3x-\cos 3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 3x-\cos 3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 3x=\cos 3x\end{array}\right.$.

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có $\sin 4x+\sin 2x=\cos 4x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{4x+2x}{2}\cos\dfrac{4x-2x}{2}=2\cos\dfrac{4x+2x}{2}\cos\dfrac{4x-2x}{2}\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos x=2\cos 3x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin 3x-\cos 3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 3x-\cos 3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 3x=\cos 3x\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \tan 3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ 3x=k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$.

Chọn SAI.

Câu 30. **[MĐ3]** Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao $h\left(m\right)$ của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức $h=14+8\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$ với $0\le t\le 24$.

a) Lúc 6 giờ sáng thì chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.

c) Mực nước tại bến cảng cao $18m$ vào lúc 2 giờ và 10 giờ.

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn $18m$. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 10 giờ sáng hôm trước đến 2 giờ sáng hôm sau.

Lời giải

GVSB: Dương Thị Thanh Tâm; GVPB: Hien Nguyen

Ta có $h=14+8\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$.

Có $0\le t\le 24\Leftrightarrow 0\le\dfrac{\pi}{12}t\le 24.\dfrac{\pi}{12}\Leftrightarrow 0\le\dfrac{\pi}{12}t\le 2\pi\Leftrightarrow -1\le\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\le 1$.

$\Leftrightarrow -8 \le 8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \le 8 \Leftrightarrow 14-8 \le 14+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \le 14+8 \Leftrightarrow 6 \le 14+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \le 22$.

Vậy $6 \le h \le 22$.

a) Lúc 6 giờ sáng thì chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

Mực nước cao nhất là $22m$ khi $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)=1$, mà $0 \le \frac{\pi}{12}t \le 2\pi$, nên ta có $\frac{\pi}{12}t=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=6$

Chọn ĐÚNG.

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.

Mực nước thấp nhất là $6m$ khi $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-1$, mà $0 \le \frac{\pi}{12}t \le 2\pi$, nên ta có $\frac{\pi}{12}t=\frac{3\pi}{2}$ $\Leftrightarrow t=12$.

Chọn ĐÚNG.

c) Mực nước tại bến cảng cao $18m$ vào lúc 2 giờ và 10 giờ.

Khi $h=18m \Leftrightarrow 14+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)=18 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)=\frac{1}{2}$, $0 \le \frac{\pi}{12}t \le 2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{12}t=\frac{\pi}{6}\\ \frac{\pi}{12}t=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=10\end{array}\right.$

Chọn ĐÚNG.

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn $18m$. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 10 giờ sáng hôm trước đến 2 giờ sáng hôm sau.

Ta có tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn $18m$ nên ta có $14+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \ge 18$.

Theo kết quả phần c thì thời gian từ 2 giờ sáng đến 10h sáng.

Chọn SAI.

Câu 31. [MĐ2] Cho bất phương trình $4^{x^2+5} \ge \left(\frac{1}{8}\right)^{x-x^2}$.

a) Ta có: $4=2^2;\frac{1}{8}=2^{-3}$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $2\left(x^2+5\right) \ge -3\left(x-x^2\right)$.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 6.

d) Tích nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là -4.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Hien Nguyen

a) Ta có: $4=2^2;\frac{1}{8}=2^{-3}$.

Chọn ĐÚNG.

b) $4^{x^2+5} \ge \left(\frac{1}{8}\right)^{x-x^2} \Leftrightarrow 2^{2\left(x^2+5\right)} \ge 2^{-3\left(x-x^2\right)} \Leftrightarrow 2\left(x^2+5\right) \ge -3\left(x-x^2\right)$.

Chọn ĐÚNG.

c) $4^{x^2+5}\ge\left(\frac{1}{8}\right)^{x-x^2}\Leftrightarrow 2^{2\left(x^2+5\right)}\ge 2^{-3\left(x-x^2\right)}\Leftrightarrow 2\left(x^2+5\right)\ge -3\left(x-x^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2-3x-10\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 5, x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$.

Vậy bất phương trình có 8 nghiệm nguyên.

Chọn SAI.

d) Ta có nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình là 5, nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là -2. Vậy tích nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là -10.

Chọn SAI.

Câu 32. **[MĐ2]** Cho bất phương trình $\log_{\frac{1}{3\sqrt{2}}}\left(-x^2+7x+18\right)\ge -2$.

a) Ta có: $0<\frac{1}{3\sqrt{2}}<1$.

b) Nghiệm của bất phương trình đã cho là nghiệm của bất phương trình

$-x^2+7x+18\le\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{-2}$.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

d) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 14.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Hien Nguyen

a) Ta có: $0<\frac{1}{3\sqrt{2}}<1$ là khẳng định đúng.

Chọn ĐÚNG.

b) $\log_{\frac{1}{3\sqrt{2}}}\left(-x^2+7x+18\right)\ge -2\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+7x+18>0\\ -x^2+7x+18\le\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{-2}\end{cases}\Leftrightarrow 0<-x^2+7x+18\le\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{-2}$.

Chọn SAI.

c) $\begin{cases}-x^2+7x+18>0\\ -x^2+7x+18\le\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<9\\ -x^2+7x\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<9\\ \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x\le 0\\ 7\le x<9\end{array}\right., x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1;0;7;8\}$.

Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Chọn SAI.

d) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là $-1+0+7+8=14$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 33. **[MĐ3]** Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L=10\log\frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị: W/m²) là cường độ của âm (*Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e Cengage*). Một người đứng giữa hai loa A và B. Khi loa A bật thì người đó nghe được âm có mức cường độ là 80 dB. Khi loa B bật thì nghe được âm có mức cường độ 90 dB. Nếu bật cả hai loa thì cường độ âm tác động vào tai người bằng tổng cường độ âm của hai loa đó.

a) Cường độ âm của loa A là $10^{80}.10^{12}\left(\text{W/m}^2\right)$.

b) Cường độ âm của loa B là $10^{90}.10^{-12}\left(\text{W/m}^2\right)$.

c) Cường độ âm tác động vào tai người khi bật cả hai loa là $10^{170}.10^{-12}\left(\text{W/m}^2\right)$.

d) Nếu bật cả hai loa thì người đó nghe được âm có mức cường độ là $90,4\text{dB}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Hien Nguyen

a) Khi loa A bật thì người đó nghe được âm có mức cường độ là 80 dB

$\Rightarrow 80 = 10\log\dfrac{I}{10^{-12}} \Leftrightarrow 8 = \log I - \log 10^{-12} \Leftrightarrow \log I = -4 \Leftrightarrow I = 10^{-4}\left(\text{W/m}^2\right)$.

Chọn SAI.

b) Khi loa B bật thì nghe được âm có mức cường độ 90 dB

$\Rightarrow 90 = 10\log\dfrac{I}{10^{-12}} \Leftrightarrow 9 = \log I - \log 10^{-12} \Leftrightarrow \log I = -3 \Leftrightarrow I = 10^{-3}\left(\text{W/m}^2\right)$.

Chọn SAI.

c) Nếu bật cả hai loa thì cường độ âm tác động vào tai người bằng tổng cường độ âm của hai loa đó. Suy ra cường độ âm tác động vào tai người khi bật cả hai loa là $10^{-4} + 10^{-3} = 11.10^{-4}\left(\text{W/m}^2\right)$.

Chọn SAI.

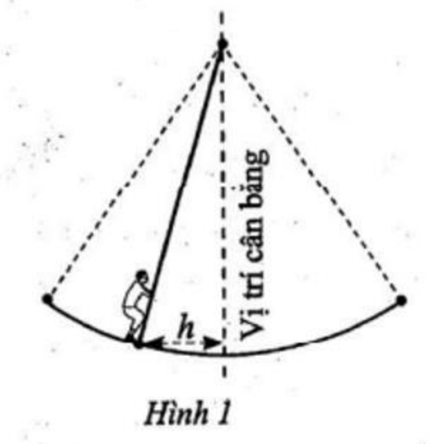
d) Nếu bật cả hai loa thì người đó nghe được âm có mức cường độ là

$L = 10\log\dfrac{11.10^{-4}}{10^{-12}} = 10.\log\left(11.10^8\right) = 10\left(8 + \log 11\right) \approx 90,4\text{dB}$.

Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 34. **[MĐ3]** Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (*Hình 1*). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h\left(\text{m}\right)$ từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian $t\left(\text{s}\right)$ (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = \left|d\right|$ với $d = 3\cos\left[\dfrac{\pi}{3}\left(2t - 1\right)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (*Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e Cengage*). Tìm thời điểm đầu tiên mà khoảng cách h là lớn nhất. (Viết kết quả dưới dạng số thập phân).



Hình 1

Lời giải

GVSB: Dương Quá; GVPB: Hien Nguyen

Trả lời: 0,5.

$h=|d|=\left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|=3\left|\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|\le 3$ (vì $\left|\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|\le 1,\forall t$).

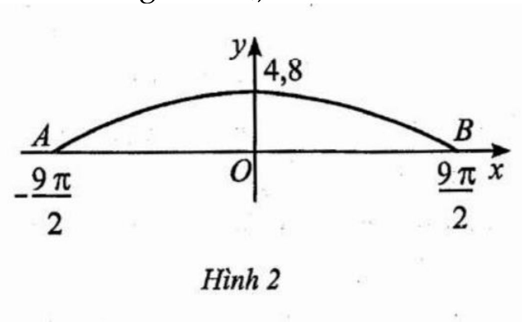
Vậy $\max h=3$, thời điểm đầu tiên mà khoảng cách h là lớn nhất tức là tìm t dương nhỏ nhất thoả mãn $h=3$.

Suy ra $\left|\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|=1\Leftrightarrow \cos^2\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right)}{2}=1\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right)=1\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}(2t-1)=k2\pi\Leftrightarrow t=\frac{3k+1}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Mà $t>0\Rightarrow \frac{3k+1}{2}>0\Rightarrow k>-\frac{1}{3},k\in\mathbb{Z}$, k nhỏ nhất $\Rightarrow k=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}=0,5(\text{s})$.

Câu 35. **[MĐ2]** Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y=4,8\cos\frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở *Hình 2*. Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6\text{m}$ so với mực nước sông. Hỏi chiều rộng của khối hàng hóa đó lớn nhất là bao nhiêu mét để sà lan có thể đi qua được gầm cầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



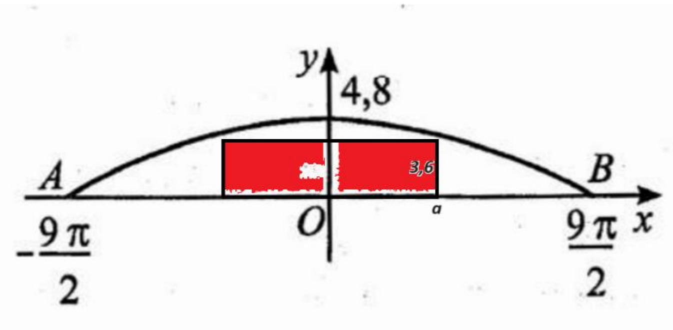
Hình 2

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thị Kim Cúc; GVPB: Hien Nguyen

Trả lời: 13

Gọi chiều rộng của khối hàng hóa là $2a$, giả sử sà lan chạy ở chính giữa gầm cầu, ta có hình vẽ sau minh họa cho khối hàng hóa đó khi đi qua gầm cầu:



Hình 2

Gọi h tung độ của điểm thuộc đồ thị hàm số $y=4,8\cos\frac{x}{9}$ có hoành độ $x=a$, ta có $h=4,8.\cos\frac{a}{9}$. Theo giả thiết khối hàng hóa đi qua được gầm cầu nên $h>3,6$ hay $3,6<4,8.\cos\frac{a}{9}\quad(*)$

Xét phương trình $3,6=4,8.\cos\frac{a}{9}\Leftrightarrow\cos\frac{a}{9}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a=9.\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\approx 6,50460823$

$\Rightarrow 2a=13,00921646$.

Vậy độ rộng lớn nhất của khối hàng hóa đó là 13 mét thì sà lan có thể đi qua được gầm cầu.

Câu 36. **[MĐ2]** Trong một thí nghiệm, một quả cầu được gắn vào một đầu dây đàn hồi, đầu kia của sợi dây được gắn cố định vào một thanh treo nằm ngang. Sau khi quả cầu được kéo xuống và thả ra, nó bắt đầu di chuyển lên xuống. Khi đó , chiều cao h (cm) của quả cầu so với mặt đất theo thời gian t (s) được cho bởi công thức $h=100-30\cos 20t$. Tính thời điểm đầu tiên mà quả cầu đạt chiều cao cao nhất kể từ khi quả cầu được thả ra (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thị Kim Cúc; GVPB: Hien Nguyen

Trả lời: 0,16

Ta có $-1\le\cos 20t\le 1,\forall t\ \Rightarrow -30\le 30\cos 20t\le 30\Rightarrow -30\le -30\cos 20t\le 30$

$\Rightarrow 70\le 100-30\cos 20t\le 130$. Quả cầu đạt chiều cao cao nhất bằng 130 khi $\cos 20t=-1$

$\Leftrightarrow 20t=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10},k\in\mathbb{Z}$.

Thời điểm đầu tiên quả cầu đạt chiều cao cao nhất chính là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\cos 20t=-1$. Nghiệm $t=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10},k\in\mathbb{Z}$ dương nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{20}$ khi $k=0$. Vậy thời điểm đầu tiên mà quả cầu đạt chiều cao cao nhất kể từ khi quả cầu được thả ra là $t=\frac{\pi}{20}\approx 0,16\ (\text{s})$.

Câu 37. **[MĐ2]** Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của một chiếc ô tô giảm đi 6% so với năm trước đó. Giả sử một chiếc ô tô lúc mới mua là 800 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị còn lại của chiếc ô tô đó nhỏ hơn 600 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thị Kim Cúc; GVPB: Hien Nguyen

Trả lời: 5

Giá trị ban đầu của chiếc ô tô là $T = 800$ (triệu đồng).

Sau 1 năm sử dụng giá trị còn lại của chiếc ô tô là $T_1 = T - T.0,06 = T(1-0,06)$ (triệu đồng).

Sau 2 năm sử dụng giá trị còn lại của chiếc ô tô là $T_2 = T_1 - T_1.0,06 = T_1(1-0,06)$

$\Leftrightarrow T_2 = T.(1-0,06)^2$ (triệu đồng).

Sau 3 năm sử dụng giá trị còn lại của chiếc ô tô là $T_{23} = T_2 - T_2.0,06 = T_2(1-0,06)$

$\Leftrightarrow T_2 = T.(1-0,06)^3$ (triệu đồng).

...

Sau n năm sử dụng giá trị còn lại của chiếc ô tô là $T_n = T.(1-0,06)^n$ (triệu đồng).

Theo bài toán ta có $T_n = T.(1-0,06)^n < 600 \Leftrightarrow 800.(1-0,06)^n < 600$

$\Leftrightarrow (1-0,06)^n < \frac{3}{4} \Leftrightarrow n > \log_{0,94}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 4,6494$.

Vậy sau ít nhất 5 năm sử dụng thì giá trị còn lại của chiếc ô tô đó nhỏ hơn 600 triệu đồng.

Câu 38. **[MĐ3]** Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của ${}^{14}_{6}C$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử ${}^{14}_{6}C$ giảm đi một nửa. Một cây còn sống có lượng ${}^{14}_{6}C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ${}^{14}_{6}C$ trong cây phân rã theo chu kỳ bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ đó và đo được tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_{6}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là 75%. Hỏi mẫu gỗ cổ đó đã chết cách đây bao nhiêu năm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thị Kim Cúc; GVPB: Hien Nguyen

Trả lời: 2738

Chu kì bán rã của ${}^{14}_{6}C$ là 5730 năm.

Cứ sau 5730 năm thì số nguyên tử ${}^{14}_{6}C$ giảm đi một nửa hay sau 5730 năm, khối lượng của ${}^{14}_{6}C$ giảm đi một nửa.

Suy ra khối lượng của ${}^{14}_{6}C$ còn lại sau t năm là: $m(t) = m_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$.

Theo đề tỉ lệ phần trăm ${}^{14}_{6}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là:

$$\frac{m(t)}{m_0}.100\% = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.100\% = 75\% \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{t}{5730} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4} \Rightarrow t \approx 2738 \text{ năm.}$$

Câu 39. **[MĐ2]** Cô Liên gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6% / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Liên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì số tiền cô Liên có được cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thị Kim Cúc; GVPB: Hien Nguyen

Trả lời: 7

Số tiền ban đầu của cô Liên là T (triệu đồng).

Sau 1 năm cô Liên có số tiền cả gốc lẫn lãi là $T_1 = T + T.0,06 = T(1+0,06)$ (triệu đồng).

Sau 2 năm cô Liên có số tiền cả gốc lẫn lãi là $T_2 = T_1 + T_1.0,06 = T_1(1+0,06)$

$\Leftrightarrow T_2 = T(1+0,06)^2$ (triệu đồng).

Sau 3 năm cô Liên có số tiền cả gốc lẫn lãi là $T_3 = T_2 + T_2.0,06 = T_2(1+0,06)$

$\Leftrightarrow T_3 = T(1+0,06)^3$ (triệu đồng).

…

Sau n năm cô Liên có số tiền cả gốc lẫn lãi là $T_n = T(1+0,06)^n$ (triệu đồng).

Theo bài toán ta có $T_n = T.(1+0,06)^n > 150 \Leftrightarrow 100.(1+0,06)^n > 150$

$\Leftrightarrow (1+0,06)^n > \frac{3}{2} \Leftrightarrow n > \log_{1,06}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 6,9585$.

Vậy sau ít nhất 7 năm thì số tiền cô Liên có được cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng.

--Hết--

CHỦ ĐỀ 2:

CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

Phần Lý thuyết trọng tâm

I. CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) là *cấp số cộng* nếu $u_n = u_{n-1} + d$ với $n \geq 2$, d là số không đổi.

Số d gọi là *công sai* của cấp số cộng, $d = u_n - u_{n-1}$ với $n \geq 2$.

Nếu $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d, ta có:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2.$$

3. Tổng n số hạng đầu

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, ta có:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_2)n}{2} \text{ hoặc } S_n = \frac{\left[2u_1 + (n-1)d\right]n}{2}.$$

II. CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) là *cấp số nhân* nếu $u_n = u_{n-1}.q$ với $n \geq 2$, q là số không đổi.

Số q gọi là *công bội* của cấp số nhân. Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $q = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ với $n \geq 2$.

Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q, ta có:

$$u_n = u_1.q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

3. Tổng n số hạng đầu

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q\,(q \neq 1)$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, ta có:

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Ví dụ 1. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấo số cộng?

A. $u_n = 5^n$. **B.** $u_n = 2 - 5n$. **C.** $u_n = 5^n - 2$. **D.** $u_n = 5 + n^2$.

Lời giải

GVSB: Lê Trần Bảo An; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn B

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 2 - 5n$.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[2 - 5(n+1)\right] - (2 - 5n) = 2 - 5n - 5 - 2 + 5n = -5$ không đổi

Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -5$, số hạng đầu $u_1 = 2 - 5.1 = -3$.

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5+u_7=19$. Giá trị của u_2+u_{10} là

A. 38. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 19.

Lời giải

GVSB: Lê Trần Bảo An; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn D

Ta có: $u_5+u_7=19 \Leftrightarrow (u_1+4d)+(u_1+6d)=19 \Leftrightarrow 2u_1+10d=19$.

Do đó, $u_2+u_{10}=(u_1+d)+(u_1+9d)=2u_1+10d=19$.

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q>1$ với $u_2=-3$ và $u_1+u_2+u_3=-13$. Số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó là

A. $u_1=1, q=3$. **B.** $u_1=-1, q=-3$. **C.** $u_1=-1, q=3$. **D.** $u_1=1, q=-3$.

Lời giải

GVSB: Lê Trần Bảo An; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn C

Ta có: $u_1+u_2+u_3=-13 \Leftrightarrow \dfrac{u_2}{q}+u_2+u_2q=-13 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{q}-3-3q=-13 \Leftrightarrow 3+3q+3q^2=13q$

$\Leftrightarrow 3q^2-10q+3=0 \Leftrightarrow q=3$ (vì $q>1$).

Vậy $q=3$ và $u_1=\dfrac{u_2}{q}=-1$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức $S_n=2n^2-4n$.

a) Số hạng đầu $u_1=-2$, số hạng thứ hai $u_2=2$.

b) Với $n\geq 2$ thì $S_n-S_{n-1}=4n-6$.

c) Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai là -6.

d) Tổng $u_2+u_4+u_6+...+u_{100}$ là 5000.

Lời giải

GVSB: Alexis Nguyen; GVPB: Bùi Kim Thoa

a) Ta có: $S_1=2.1^2-4.1=-2 \Rightarrow u_1=-2$;

$S_2=2.2^2-4.2=0 \Rightarrow u_1+u_2=0 \Rightarrow u_2=2$.

Chọn ĐÚNG.

b) $S_n-S_{n-1}=2n^2-4n-\left[2(n-1)^2-4(n-1)\right]$

$=2n^2-4n-\left[2(n^2-2n+1)-4(n-1)\right]$

$=2n^2-4n-(2n^2-4n+2-4n+4)$

$=2n^2-4n-2n^2+4n-2+4n-4$

$=4n-6$ Với $\forall n\geq 2$.

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có $u_n=S_n-S_{n-1}=4n-6$;

$u_{n+1}=S_{n+1}-S_n=4(n+1)-6=4n-2$.

Suy ra $u_{n+1}-u_n=4n-2-(4n-6)=4$ không đổi.

Do đó dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d=4$.

Chọn SAI.

d) Ta có (u_n) là cấp số cộng có $u_1=-2, d=4$.

$S=u_2+u_4+u_6+...+u_{100}$

$=u_1+d+u_1+3d+u_1+5d+...+u_1+99d$

$=50u_1+d(1+3+5+...+99)$

$=50u_1+\dfrac{(1+99).50}{2}d$

$=50.(-2)+2500.4=9900$.

Chọn SAI.

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_1=8,\ u_{n+1}=4u_n-9$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=u_n-3$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

a) $v_1=5$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q=-3$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n=5(-3)^{n-1}$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n=3+5.(-3)^{n-1}$.

Lời giải

GVSB: Alexis Nguyen; GVPB: Bùi Kim Thoa

a) Ta có $v_1=u_1-3=8-3=5$.

Chọn ĐÚNG.

b. Ta có $v_n=u_n-3\Rightarrow u_n=v_n+3$, thay vào $u_{n+1}=4u_n-9$, ta được

$v_{n+1}+3=4(v_n+3)-9\Leftrightarrow v_{n+1}+3=4v_n+12-9\Leftrightarrow v_{n+1}=4v_n$.

Do đó (v_n) là cấp số nhân với công bội $q=4$.

Chọn SAI.

c. Do (v_n) là cấp số nhân có $v_1=5, q=4$ nên số hạng tổng quát $v_n=u_1.q^{n-1}=5.4^{n-1}$.

Chọn SAI.

d. Ta có: $u_n=v_n+3=5.4^{n-1}+3$.

Chọn SAI.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 6. Khi kí kết hợp đồng với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Tìm n (với $n\in\mathbb{N}^*$) để từ năm thứ n trở đi thì tổng số tiền lương nhận được trong n năm đi làm ở phương án thứ hai sẽ nhiều hơn ở phương án thứ nhất?

Lời giải

GVSB: Alexis Nguyen; GVPB: Bùi Kim Thoa

Trả lời: 4

+) *Phương án 1:* Gọi u_n là tiền lương của người lao động trong năm thứ n.

Dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 120$ và $d = 18$.

Tổng lương sau n năm là:

$$S_n = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} = \frac{n\left[2.120 + (n-1)18\right]}{2} = \frac{n(18n + 222)}{2} = 9n^2 + 111n.$$

+) *Phương án 2:* Gọi v_n là tiền lương của người lao động trong quý thứ n.

Dãy số (v_n) là cấp số cộng có $v_1 = 24$ và $d = 1,8$.

Tổng số lương sau n năm, tức là sau $4n$ quý, là:

$$S_{4n} = \frac{4n\left[2v_1 + (4n-1)d\right]}{2} = \frac{4n\left[2.24 + (4n-1).1,8\right]}{2} = \frac{4n(7,2n + 46,2)}{2} = 14,4n^2 + 92,4n.$$

+) Để tổng số tiền lương nhận được trong n năm đi làm ở phương án thứ hai sẽ nhiều hơn ở phương án thứ nhất thì:

$$14,4n^2 + 92,4n > 9n^2 + 111n \Leftrightarrow 5,4n^2 - 18,6n > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n > \frac{31}{9} \approx 3,4 \\ n < 0 \end{array}\right..$$

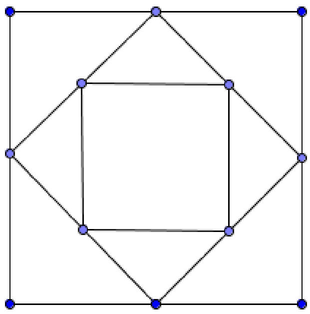
Vậy kể từ năm thứ 4 trở đi, tổng số tiền ở phương án thứ hai tsẽ nhiều hơn ở phương án thứ nhất.

Ví dụ 7. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 1. Gọi C_2 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_1; C_3 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_2; … cứ tiếp tục quả trình như trên, ta được dãy các hình vuông $C_1;C_2;C_3;...;C_n;...$ Diện tích của hình vuông C_{2025} có dạng $\frac{1}{2^a}$. Tìm a.

Lời giải

GVSB: Alexis Nguyen; GVPB: Bùi Kim Thoa

Trả lời: 2024



Hình vuông C_1 có diện tích $S_1 = 1$.

Hình vuông C_2 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_1, do đó hình vuông C_2 có diện tích $S_2 = \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}$.

Tương tự, hình vuông C_3 có diện tích $S_3 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2^2}$.

Do đó, gọi S_n là diện tích của hình vuông C_n thì dãy (S_n) là cấp số nhân có $S_1 = 1, q = \frac{1}{2}$

.

Suy ra $S_{2025}=S_1.q^{2024}=\dfrac{1}{2^{2024}}$

Vậy $a=2024$.

Phần Tự luyện

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** là cấp số cộng?

A. $2;0;-2;-4;-5$. **B.** $\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{3}{2};-\frac{5}{2};-\frac{7}{2}$.

C. $\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}$. **D.** $-7;-4;-1;\ 2;5$.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn A

xét dãy số $2;0;-2;-4;-5$ có $-4-(-2)=-2$ và $-5-(-4)=-1$ nên dãy số trên **không** là cấp số cộng.

Câu 2. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=3.2^n$. **B.** $u_n=3-2n$. **C.** $u_n=2^n+3$. **D.** $u_n=2+n^3$.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn B

Xét dãy (u_n) với $u_n=3-2n$.

$\Rightarrow u_{n+1}=3-2(n+1)=1-2n$.

Ta có: $u_{n+1}-u_n=(1-2n)-(3-2n)=-2$ không đổi nên dãy (u_n) là cấp số cộng.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3=-2;\ u_7=18$. Số hạng u_{11} bằng

A. 38. **B.** 20. **C.** 43. **D.** 33.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}u_3=-2\\u_7=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+2d=-2\\u_1+6d=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-12\\d=5\end{cases}$.

Do đó, $u_{11}=-12+10.5=38$.

Câu 4. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_4+u_{16}=48$. Số hạng u_{10} bằng

A. 438. **B.** 24. **C.** 96. **D.** 72.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn B

Ta có: $u_4+u_{16}=48\Leftrightarrow u_1+3d+u_1+15d=2(u_1+9d)=2u_{10}=48\Leftrightarrow u_{10}=24$.

Câu 5. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_9=5u_2$ và $u_{13}=2u_6+5$. Số hạng đầu u_1 và công sai d cuả cấp số cộng đó là:

A. $u_1=-3,d=4$. **B.** $u_1=3,d=4$. **C.** $u_1=4,d=3$. **D.** $u_1=-4,d=3$.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$.

Câu 6. Một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$, công sai $d = -1$. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng -425. Giá trị của n bằng

A. 30. **B.** 60. **C.** 45. **D.** 15.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn A

Ta có: $S_n = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} \Leftrightarrow \dfrac{n\left[2.\frac{1}{3} - (n-1)\right]}{2} = -425$

$\Leftrightarrow \frac{5}{3}n - n^2 = -850 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 30(N) \\ n = -\frac{85}{3}(L) \end{array}\right.$. Vậy $n = 30$.

Câu 7. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_2 + u_9 = 15$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng

A. 150. **B.** 75. **C.** 120. **D.** 90.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn B

Ta có: $u_2 + u_9 = 15 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 8d = 15 \Leftrightarrow 2u_1 + 9d = 15$.

Do đó, $S_{10} = \dfrac{10\left[2u_1 + (10-1)d\right]}{2} = \dfrac{10.15}{2} = 75$.

Câu 8. Cho (u_n) là cấp số cộng. Gọi S là tổng n số hạng đầu của cấp số đó. Biết $S_{10} = 365$, $S_{15} = 435$. Công thức của số hạng tổng quát (u_n) là:

A. $u_n = 50 - 3n$. **B.** $u_n = 53 + 3n$. **C.** $u_n = 50 + 3n$. **D.** $u_n = 53 - 3n$.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Bùi Kim Thoa

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} S_{10} = \dfrac{10\left[2u_1 + (10-1)d\right]}{2} \\ S_{15} = \dfrac{15\left[2u_1 + (15-1)d\right]}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10u_1 + 45d = 365 \\ 15u_1 + 105d = 435 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 50 \\ d = -3 \end{cases}$.

Do đó, $u_n = u_1 + (n-1)d = 50 - 3(n-1) = 53 - 3n$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=\frac{3}{4}$ và công bội $q=\frac{1}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=\frac{3}{2}$ và công bội $q=\frac{1}{2}$.

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Kieu Hung

Chọn C

Ta có $u_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow u_{n+1}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}=\frac{1}{2}$ hay $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}=\frac{3}{4}$ và công bội $q=\frac{1}{2}$.

Câu 10. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n=\frac{1}{5^n}-1$. **B.** $u_n=\frac{1}{5}n-1$. **C.** $u_n=\frac{1}{5^{n-1}}$. **D.** $u_n=\frac{1}{5n-1}$.

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Kieu Hung

Chọn C

Xét dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\frac{1}{5^{n-1}}$.

Khi đó $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^{n-1}}}=\frac{1}{5}$ hay hay $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n$, với $n\in\mathbb{N}^*$. Nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-1$, công bội $q=-\frac{1}{10}$. Số $-\frac{1}{10^{2024}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

A. Số hạng thứ 2024. **B.** Số hạng thứ 2025.
C. Số hạng thứ 2023. **D.** Số hạng thứ 2026.

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Kieu Hung

Chọn B

Gọi $-\frac{1}{10^{2024}}$ là số hạng thứ k, với $k\in\mathbb{N}^*$ của cấp số nhân đã cho.

Khi đó $u_k=-\frac{1}{10^{2024}} \Leftrightarrow u_1\cdot q^{k-1}=-\frac{1}{10^{2024}} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{10}\right)^{k-1}=\left(-\frac{1}{10}\right)^{2024} \Leftrightarrow k-1=2024$

$\Leftrightarrow k=2025$.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=\frac{1}{3}$; $u_4=-9$. Công bội q của cấp số nhân là?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Kieu Hung

Chọn C

Ta có $u_4=-9\Leftrightarrow u_1\cdot q^3=-9\Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot q^3=-9\Leftrightarrow q^3=-27\Leftrightarrow q=\sqrt[3]{-27}=-3$.

Câu 13. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_1=2$ và $u_n=\frac{1}{2}u_{n-1}$, với $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$. Số hạng tổng quát của dãy số là

A. $u_n=\frac{1}{2^{n-2}}$. **B.** $u_n=\frac{1}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n=\frac{1}{2^n}$. **D.** $u_n=\frac{1}{2^{n+1}}$.

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Kieu Hung

Chọn A

Cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_1=2$ và $u_n=\frac{1}{2}u_{n-1}$, với $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ nên công bội $q=\frac{1}{2}$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân $\left(u_n\right)$ là $u_n=u_1q^{n-1}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Câu 14. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_2.u_5=-243$. Tích $u_3.u_4$ bằng

A. -81. **B.** -243. **C.** 81. **D.** 243.

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Kieu Hung

Chọn B

Ta có $u_2.u_5=-243\Leftrightarrow u_1q\cdot u_1q^4=-243\Leftrightarrow u_1^2q^5=-243$.

Khi đó $u_3.u_4=u_1q^2\cdot u_1q^3=u_1^2q^5=-243$.

Câu 15. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_1=-3$, công bội $q=-2$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó là

A. 1023. **B.** -1025. **C.** 1025. **D.** -1023.

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Kieu Hung

Chọn A

Tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_1=-3$, công bội $q=-2$ là

$$S_{10}=u_1\frac{1-q^{10}}{1-q}=-3\frac{1-\left(-2\right)^{10}}{1-\left(-2\right)}=1023.$$

Câu 16. Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng số đo của góc lớn nhất và góc nhỏ nhất bằng

A. 243°. **B.** 252°. **C.** 102°. **D.** 168°.

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Kieu Hung

Chọn B

Gọi u_1,u_2,u_3,u_4 lần lượt là số đo 4 góc của tứ giác và theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, (điều kiện $0^{\circ}<u_1,u_2,u_3,u_4<360^{\circ}$)

Theo đề $u_4=27u_1\Leftrightarrow u_1q^3=27u_1\Leftrightarrow q^3=27\Leftrightarrow q=3$.

Mà $u_1+u_2+u_3+u_4=360^o \Leftrightarrow u_1\dfrac{1-q^4}{1-q}=360^o \Leftrightarrow u_1\dfrac{1-3^4}{1-3}=360^o \Leftrightarrow u_1=9^o \Rightarrow u_4=u_1q^3=243^o$

Vậy $u_1+u_4=252^o$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 17. **[MĐ2]** Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức $S_n=n^2-\dfrac{3}{2}n$.

a) Ta có $S_1=-\dfrac{1}{2};S_2=1$.

b) Số hạng thứ hai của dãy số là $u_2=1$.

c) Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=-\dfrac{5}{2}+2n$.

d) Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai là 2.

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Kieu Hung

a) Ta có $S_n=n^2-\dfrac{3}{2}n$

Vậy $n=1\Rightarrow S_1=-\dfrac{1}{2}$ và $n=2\Rightarrow S_2=1$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $S_1=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow u_1=-\dfrac{1}{2}$.

Ta có $S_2=1\Rightarrow u_1+u_2=1$, mà $u_1=-\dfrac{1}{2}$ vậy $u_2=1-u_1=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$.

Chọn SAI.

c) Ta có $S_n=n^2-\dfrac{3}{2}n\Rightarrow S_{n-1}=(n-1)^2-\dfrac{3}{2}(n-1)=n^2-\dfrac{7}{2}n+\dfrac{5}{2}$.

Mà $S_n=u_1+u_2+...+u_{n-1}+u_n$ và $S_{n-1}=u_1+u_2+...+u_{n-1}$.

Vậy $S_n-S_{n-1}=u_n\Rightarrow u_n=n^2-\dfrac{3}{2}n-\left(n^2-\dfrac{7}{2}n+\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}+2n$.

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có $u_n=-\dfrac{5}{2}+2n\Rightarrow u_{n+1}=-\dfrac{5}{2}+2(n+1)=-\dfrac{1}{2}+2n$.

Xét $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{1}{2}+2n-\left(-\dfrac{5}{2}+2n\right)=2$.

Vậy dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai là 2.

Chọn ĐÚNG.

Câu 18. **[MĐ2]** Cho dãy số (u_n) biết $u_1=1,u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1-2u_n}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

a) $v_1=3$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số cộng có công sai $d=4$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n=7-4n$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = \frac{2}{7-4n}$.

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Kieu Hung

a) Ta có $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n} \Rightarrow v_1 = \frac{u_1 + 2}{u_1} = \frac{1+2}{1} = 3$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{1-2u_n} + 2}{\frac{u_n}{1-2u_n}} = \frac{2-3u_n}{u_n}$

Ta có $v_{n+1} - v_n = \frac{2-3u_n}{u_n} - \frac{u_n + 2}{u_n} = \frac{-4u_n}{u_n} = -4$.

Dãy số (v_n) là một cấp số cộng có công sai $d = -4$.

Chọn SAI.

c) Ta có $v_1 = 3$ và $d = -4$, vậy $v_n = v_1 + (n-1).d = 3 + (n-1).(-4) = 3 - 4n + 4 = 7 - 4n$.

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{2}{v_n - 1} = \frac{2}{7-4n-1} = \frac{2}{6-4n}$.

Chọn SAI.

Câu 19. **[MĐ2]** Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức: $S_n = \frac{1-3^n}{2.3^{n-2}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Số hạng thứ nhất của dãy số là $u_1 = -3$.

b) Số hạng thứ hai của dãy số là $u_2 = -4$.

c) Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.

d) Dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội là $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Kieu Hung

a) Ta có $S_n = \frac{1-3^n}{2.3^{n-2}} \Rightarrow S_1 = u_1 = -3$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $S_n = \frac{1-3^n}{2.3^{n-2}} \Rightarrow S_2 = u_1 + u_2 = -4$.

Vậy $u_2 = -4 - u_1 = -1$.

Chọn SAI.

c) Ta có $S_n = \frac{1-3^n}{2.3^{n-2}} \Rightarrow S_{n-1} = \frac{1-3^{n-1}}{2.3^{n-1-2}} = \frac{1-3^{n-1}}{2.3^{n-3}}$.

Mà $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n$ và $S_{n-1} = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$.

Vậy $S_n - S_{n-1} = u_n \Rightarrow u_n = \dfrac{1-3^n}{2.3^{n-2}} - \dfrac{1-3^{n-1}}{2.3^{n-3}} = \dfrac{1-3^n}{\frac{2}{9}.3^n} - \dfrac{1-\frac{1}{3}.3^n}{\frac{2}{27}.3^n} = \dfrac{-9}{3^n} = -\dfrac{1}{\frac{1}{9}.3^n} = -\dfrac{1}{3^{n-2}}$.

Chọn SAI.

c) Ta có $u_n = -\dfrac{1}{3^{n-2}} \Rightarrow u_{n+1} = -\dfrac{1}{3^{n-1}}$.

Vậy $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-\dfrac{1}{3^{n-1}}}{-\dfrac{1}{3^{n-2}}} = \dfrac{3^{n-2}}{3^{n-1}} = \dfrac{\frac{1}{9}.3^n}{\frac{1}{3}.3^n} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội là $\dfrac{1}{3}$.

Chọn SAI.

Câu 20. **[MĐ2]** Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = -17$, $u_{n+1} = 5u_n - 12$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n = \dfrac{3-u_n}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $v_1 = 10$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội bằng $\dfrac{1}{5}$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n = \dfrac{2}{5^n}$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = 3 - 4.5^n$.

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Kieu Hung

a) Ta có $v_n = \dfrac{3-u_n}{2} \Rightarrow v_1 = \dfrac{3-u_1}{2} = 10$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $v_n = \dfrac{3-u_n}{2} \Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{3-u_{n+1}}{2} = \dfrac{3-(5u_n - 12)}{2} = \dfrac{15-5u_n}{2}$.

Xét $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{15-5u_n}{2} : \dfrac{3-u_n}{2} = \dfrac{15-5u_n}{3-u_n} = 5$.

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội bằng 5.

Chọn SAI.

c) Ta có dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội bằng 5 và $v_1 = 10$.

Vậy $v_n = v_1.q^{n-1} = 10.5^{n-1} = 2.5^n$.

Chọn SAI.

d) Ta có $v_n = \dfrac{3-u_n}{2} \Rightarrow u_n = 3 - 2v_n = 3 - 2.2.5^n = 3 - 4.5^n$.

Vậy công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = 3 - 4.5^n$.

Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 21. **[MĐ2]** Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 30 ghế, hàng thứ hai có 31 ghế, hàng thứ ba có 32 ghế, ... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng ngay trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 63 200 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: nghìn đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải

GVSB: Th Tiến_PK-KQ; GVPB: Kieu Hung

Trả lời: 80

Số ghế của hàng ghế cuối cùng là: $30+20-1=49$ (ghế).

Tổng số vé đã bán ra là: $S=30+31+32+...+49=\dfrac{30+49}{2}.20=790$ (vé).

Vậy giá tiền của mỗi vé là: $\dfrac{63200}{790}=80$ (nghìn đồng).

Câu 22. **[MĐ3]** Cho tập hợp A gồm 99 số tự nhiên liên tiếp khác nhau $A=\{1;2;3;...;99\}$. Tìm số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp A để ba số đó lập thành cấp số cộng.

Lời giải

GVSB: Th Tiến_PK-KQ; GVPB: Kieu Hung

Trả lời: 0,01234

Tập hợp A có 45 số lẻ và 44 số chẵn.
Số cách lấy 3 phần tử từ tập A là: C_{99}^3.
Giả sử $a,\ b,\ c$ là ba số theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Ta có: $2a=b+c$.
Do $2a$ là số chẵn, nên b và c cùng chẵn hoặc cùng lẻ, vậy có C_{44}^2 cách chọn cặp số chẵn và C_{45}^2 cách chọn cặp số lẻ. Suy ra tổng số cách chọn cặp $b,\ c$ là: $C_{44}^2+C_{45}^2$.
Với mỗi cách chọn cặp $b,\ c$ thì có duy nhất một cách chọn a sao cho $2a=b+c$.
Vậy xác suất cần tìm là: $p=\dfrac{C_{44}^2+C_{45}^2}{C_{99}^3}=\dfrac{176}{14259}\approx 0,01234$.

Câu 23. **[MĐ2]** Anh Minh kí hợp đồng lao động có thời hạn ở một công ty với phương án trả lương như sau: Quý thứ nhất, tiền lương là 27 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 2,1 triệu. Tổng số tiền lương anh nhận được trong các năm đã đi làm là 684 triệu đồng. Hỏi anh Minh đã làm ở công ty đó bao nhiêu năm?

Lời giải

GVSB: Th Tiến_PK-KQ; GVPB: Kieu Hung

Trả lời: 4

Giả sử anh Minh làm việc ở công ty đó n quý.
Quý thứ nhất, anh nhận được tổng số tiền là: 27 triệu đồng.
Quý thứ hai, anh nhận được tổng số tiền là: 29,1 triệu đồng.
Quý thứ n, anh nhận được tổng số tiền là: $27+2,1(n-1)$ triệu đồng.

Vậy tổng số tiền anh Minh đã nhận được sau khi làm việc n quý là:

$$S=n.\frac{27+27+2,1(n-1)}{2}=684\Rightarrow n=16.$$

Vậy anh Minh đã làm ở công ty đó trong 4 năm.

Câu 24. **[MĐ2]** Một quả bóng được thả thẳng đứng từ độ cao 10m rơi xuống đất và nảy lên. Giả sử sau mỗi một lần rơi xuống, nó nảy lên được một độ cao bằng 75% độ cao vừa rơi xuống. Tính tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thanh Tâm; GVPB: Nguyễn Hương Giang

$75\% = \frac{3}{4}$.

Các quãng đường khi bóng rơi xuống chạm đất tạo thành cấp số nhân có $u_1 = 10$ và $q = \frac{3}{4}$.

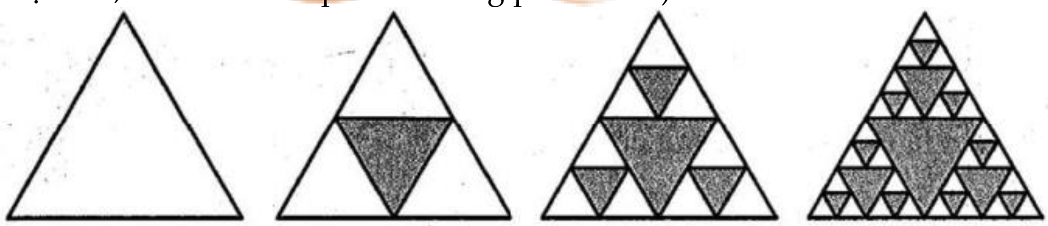
Tổng quãng đường bóng đi xuống sau lần chạm đất thứ 10 là:

$$S_n = \frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \Leftrightarrow S_{10} = \frac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q} = \frac{10.\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right]}{1-\frac{3}{4}} \approx 37,7\ m$$

Tổng quãng đường (bao gồm cả lên và xuống) của quả bóng sau lần chạm đất thứ 10 là:

$$S = 2S_{10} - 10 = 2.37,7 - 10 \approx 65,5\ m.$$

Câu 24. **[MĐ3]** Một tam giác đều có cạnh bằng 4cm. Chia tam giác đều đó thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm. Với mỗi tam giác nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm (hình vẽ). Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại. Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình tô thứ 5 (đơn vị: cm^2, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

GVSB: Nguyễn Thanh Tâm; GVPB: Nguyễn Hương Giang

Diện tích của tam giác ban đầu là : $S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ cm^2$.

Lần phân chia thứ nhất, 1 tam giác thành 4 tam giác con, ta có diện tích phần được tô màu là : $S_1 = \frac{1}{4}.4\sqrt{3}$.

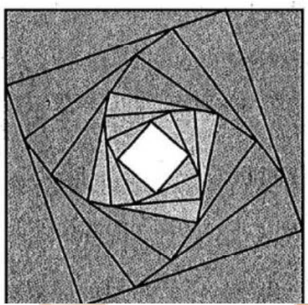
Lần phân chia thứ hai, 3 hình tam giác, mỗi tam giác lại thành 4 tam giác con, ta có diện tích phần tô màu của mỗi ta giác con là: $S_2 = \frac{1}{4}S_1 = \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.4\sqrt{3} = \frac{1}{4^2}.4\sqrt{3}$, 3 tam giác con có tổng diện tích là $3S_2$.

Cứ tiếp tục như vậy, mỗi lần phân chia ta lại được 4 tam giác con và tô màu 1 tam giác chính giữa. Do đó, quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì trừ lần đầu tiên, 4 lần sau, mỗi lần chia diện tích ô vuông xanh tạo thành lập thành một cấp số nhân có $u_1 = 3.\frac{1}{4^2}.4\sqrt{3}$ và công bội $q = 3.\frac{1}{4}$

Vậy tổng diện tích các ô được tô màu sau 5 lần phân chia là :

$$S = \frac{1}{4}.4\sqrt{3} + \frac{3.\frac{1}{4^2}.4\sqrt{3}.\left[1-\left(3.\frac{1}{4}\right)^5\right]}{1-3.\frac{1}{4}} \approx 5,7\ cm^2.$$

Câu 26. **[MĐ3]** Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng $4cm$. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông C_1 thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2. Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ như hình vẽ. Tính diện tích của hình vuông thứ 6 (đơn vị: cm^2, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

GVSB: Nguyễn Thanh Tâm; GVPB: Nguyễn Hương Giang

Đặt $a = 4cm$.

Độ dài cạnh hình vuông C_2 là: $a_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}.a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}.a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$.

Diện tích hình vuông C_2 là: $S_2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}a\right)^2 = \frac{10}{16}a^2 = \frac{5}{8}a^2$.

Độ dài cạnh hình vuông C_3 là: $a_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{10}}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{10}}{4}a\right)^2} = \frac{5}{8}a$.

Diện tích hình vuông C_3 là: $S_3 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 a^2$.

Tương tự, ta có diện tích hình vuông C_n là: $S_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} a^2$.

Vậy diện tích hình vuông C_3 là: $S_6 = \left(\frac{5}{8}\right)^5 a^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^5 .4^2 \approx 1,53\ cm^2$.

------------------------------------Hết------------------------------------

CHỦ ĐỀ 3:

ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Phần Lý thuyết trọng tâm

1. ĐẠO HÀM

a) Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng và điểm x_0 thuộc khoảng đó $(a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

b) Ý nghĩa của đạo hàm

Đạo hàm xuất hiện trong nhiều khái niệm Vật lý. Chẳng han : Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s(t)$, với $s=s(t)$ là hàm số có đạo hàm . Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là: $v(t_0)=s'(t_0)$.

c) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0\left(x_0;f(x_0)\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M\left(x_0;f(x_0)\right)$ là:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

d) Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u=g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y=f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y=f\left(g(x)\right)$ có đạo hàm là $y'_x=y'_u.u'_x$.

e) Đạo hàm của một số hàm số

Đạo hàm của hàm số cơ bản thường gặp	**Đạo hàm của hàm số hợp(ở đây $u=u(x)$)**
$\left(x^n\right)'=n.x^{n-1}$	$\left(u^n\right)'\ n.\ u^{n-1}.u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\sin x\right)'=\cos x$	$\left(\sin u\right)'=u'.\cos u$
$\left(\cos x\right)'=-\sin x$	$\left(\cos u\right)'=-u'.\sin u$
$\left(\tan x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tan u\right)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\left(\cot x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot u\right)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(e^x\right)'=e^x$	$\left(e^u\right)'=u'.e^u$

$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$	$\left(a^u\right)' = u'.a^u.\ln a$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

g) Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương.

Giả sử $f = f(x)$ và $g = g(x)$là các các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

Ta có: $(f+g)' = f' + g'$, $(f-g)' = f' - g'$,

$(f.g)' = f'g + f.g'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}\left(g = g(x) \neq 0\right)$.

Hệ quả: Cho hàm số $f = f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

. Nếu c là hằng số thì $(c.f)' = c.f'$.

. $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{f'}{f^2}\left(f = f(x) \neq 0\right)$.

2. Tính đơn điệu của hàm số

a) Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn, hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x) \geq 0$ hoặc $f'(x) \leq 0$ với mọi x thuộc khoảng K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K, thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên (hoặc nghịch biến) trên K .

b) Các bước để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x)$

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i = 1, 2,...n)$, mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Chú ý: Ta cũng có thể nhận biết tính đơn điệu của hàm số bằng cách nhìn vào hình dáng của đồ thị đi lên (hàm số đồng biến) hoặc đi xuống (hàm số nghịch biến).

3. Điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số

a. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in K, x_1 \in K$.

- x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b)$ và $x \neq x_0$.

Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá tri cực đại của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CD}.

- x_1 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c;d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c;d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c;d)$ và $x \neq x_1$.

Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT}.

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị).

Chú ý: Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ thì điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

b. Dấu hiệu nhận biết cực trị của hàm số bằng đạo hàm

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

c. Các bước để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i=1,2,\ldots,n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

4. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D, kí hiệu $M=\max_D f(x)$, nếu $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.
- Số m được gọi là giá tri nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D, kí hiệu $m=\min_D f(x)$, nếu $f(x)\ge m$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_1\in D$ sao cho $f(x_1)=m$.

b. Cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1,x_2,\ldots,x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n),f(a)$ và $f(b)$.

Bước 3. So sánh các giá trị tìm được ở Bước 2.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

5. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

a. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

b. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$.

c. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$.

6. Sơ đồ khảo sát hàm số

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm: Tính đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có)
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (trong các trường hợp đơn giản),…
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

GVSB: Thành Tâm Nguyễn; GVPB: Nguyễn Hương Giang

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

GVSB: Trần Đại Nghĩa; GVPB: Vũ Viên

Chọn B

Ta có: $f'(1) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Rightarrow 2 = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Ví dụ 2. Đạo hàm của hàm số $y = \cos 2x$ là:

A. $\sin 2x$. **B.** $-\sin 2x$. **C.** $-2\sin 2x$. **D.** $2\cos 2x$.

Lời giải

GVSB: Trần Đại Nghĩa; GVPB: Vũ Viên

Chọn C

Ta có: $y' = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)<0,\forall x\in(1;2)$ và $f'(x)>0,\forall x\in(2;3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên cả hai khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên cả hai khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

GVSB: Trần Đại Nghĩa; GVPB: Vũ Viên

Chọn D

Do $f'(x)<0,\forall x\in(1;2)$ và $f'(x)>0,\forall x\in(2;3)$ nên Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Ví dụ 4. **[MĐ1]** Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2x+1$ và $g'(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

a) $\left[f(x)+g(x)\right]'=3x+1$.

b) $\left[f(x)-g(x)\right]'=x+1$.

c) $\left[5f(x)\right]'=2x+6$.

d) $\left[-7g(x)\right]'=-7+x$.

Lời giải

GVSB: Trần Đại Nghĩa; GVPB: Vũ Viên

a) Ta có: $\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x)=2x+1+x=3x+1$

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $\left[f(x)-g(x)\right]'=f'(x)-g'(x)=2x+1-x=x+1$

Chọn ĐÚNG.

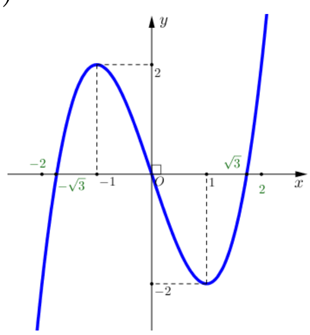
c) Ta có: $\left[5f(x)\right]'=5.f'(x)=5.(2x+1)=10x+5$.

Chọn SAI.

d) Ta có: $\left[-7g(x)\right]'=-7.g'(x)=-7x$.

Chọn SAI.

Ví dụ 5. **[MĐ1]** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$



a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) $f'(x)=3x^2+3$

c) $f'(x)<0$ khi $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, $f'(x)>0$ khi $x\in(-1;1)$.

d) Hàm số có đồ thị như hình vẽ.

Lời giải

GVSB: Triều Lêminh; GVPB: Vũ Viên

Ta có: $y=f(x)=x^3-3x$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Chọn ĐÚNG.

b) $f'(x)=3x^2-3$

Chọn SAI.

c) Ta có $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$.

Suy ra $f'(x)>0$ khi $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

và $f'(x)<0 \Leftrightarrow 3x^2-3<0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

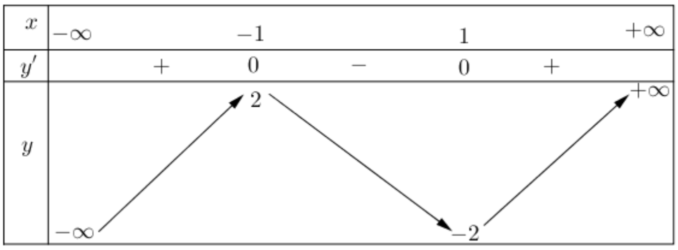
Suy ra $f'(x)<0$ khi $x\in(-1;1)$.

Chọn SAI.

d)

$f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Xét phương trình $y=f(x)=x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị cắt trụ hoành tại 3 điểm có hoành độ là $x=0, x=\pm\sqrt{3}$

Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 6. **[MĐ1]** Biết rằng $(\sin x+\cos x)'=a\sin x+b\cos x$ với a,b là các hằng số thực. Giá trị của $a-2b$ là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Triều Lêminh; GVPB: Vũ Viên

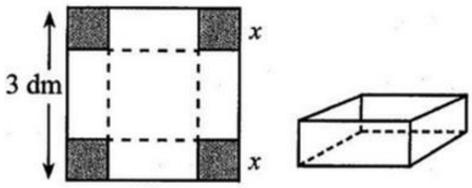
Trả lời: 3

Ta có: $(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$

$\Rightarrow a=1, b=-1$

$\Rightarrow a-2b=1-2(-1)=3$.

Ví dụ 7. **[MĐ3]** Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh $3dm$. Bác Tùng cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài cạnh bằng $x(dm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo $x(dm)$. Giá trị lớn nhất của V là bao nhiêu decimet khối?



Lời giải

GVSB: Triều Lêminh; GVPB: Vũ Viên

Trả lời: 2

Điều kiện: $0<x<\frac{3}{2}$

Độ dài cạnh đáy của cái hộp là $3-2x$.

Chiều cao của cái hộp là x

Thế tích của cái hộp là: $V=(3-2x)^2x=(9-12x+4x^2)x=4x^3-12x^2+9x$

$\Rightarrow V'=12x^2-24x+9$; $V'=0\Leftrightarrow 12x^2-24x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
V'			$+$	0	$-$	0	$+$	
V	$-\infty$		$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra giá trị lớn nhất của V là 2 decimet khối

Phần Tự luyện

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y=\cot 3x$ là

A. $-\frac{1}{\sin^2 3x}$. **B.** $\frac{3}{\sin^2 3x}$. **C.** $-\frac{3}{\sin^2 3x}$. **D.** $\frac{1}{\sin^2 3x}$.

Lời giải

GVSB: Minh Trang; GVPB: Vũ Viên

Chọn C

Ta có $(\cot u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}\Rightarrow(\cot 3x)'=-\frac{3}{\sin^2 3x}$.

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y=5^x$ là

A. $5^x.\log 5$. **B.** $5^x.\ln 5$. **C.** 5^{x-1}. **D.** $x.5^{x-1}$.

Lời giải

GVSB: Minh Trang; GVPB: Vũ Viên

Chọn B

Ta có $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a \Rightarrow \left(5^x\right)' = 5^x.\ln 5$.

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y = \log_5 x$ là

A. $\dfrac{1}{x\log 5}$. **B.** $5^x.\ln 5$. **C.** $\dfrac{1}{x}$. **D.** $\dfrac{1}{x\ln 5}$.

Lời giải

GVSB: Minh Trang; GVPB: Vũ Viên

Chọn D

Ta có: $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a} \Rightarrow \left(\log_5 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 5}$.

Câu 4. Cho các hằng số a,b,c,d khác 0. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là

A. $y' = \dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{ad+bc}{\left(cx+d\right)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{ac-bd}{\left(cx+d\right)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{ac+bd}{\left(cx+d\right)^2}$.

Lời giải

GVSB: Minh Trang; GVPB: Vũ Viên

Chọn A

Ta có: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{u^2}$.

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(ax+b\right)'\left(cx+d\right)-\left(cx+d\right)'\left(ax+b\right)}{\left(cx+d\right)^2} = \frac{a\left(cx+d\right)-c\left(ax+b\right)}{\left(cx+d\right)^2} = \frac{acx+ad-acx-bc}{\left(cx+d\right)^2} = \frac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$$

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2-2x-3}$ là

A. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x-3}}$. **B.** $y' = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2-2x-3}}$.

C. $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

Lời giải

GVSB: Minh Trang; GVPB: Vũ Viên

Chọn C

Ta có: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow y' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ là

A. $\left(-\infty;-2\right)\cap\left(-2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

C. $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;+\infty\right)$.

Lời giải

GVSB: Minh Trang; GVPB: Vũ Viên

Chọn A

Điều kiện xác định: $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}$ hay $D = \left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;+\infty\right)$.

Câu 7. Cho các hằng số a,b,c,d khác 0 thỏa mãn $ad-bc\neq 0$. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là

A. $x=\dfrac{d}{c},y=\dfrac{a}{c}$.

B. $x=\dfrac{-d}{c},y=\dfrac{a}{c}$.

C. $x=\dfrac{-d}{c},y=\dfrac{b}{d}$.

D. $x=\dfrac{-b}{a},y=\dfrac{b}{d}$.

Lời giải

GVSB: Minh Trang; GVPB: Vũ Viên

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(a+\dfrac{b}{x}\right)}{x\left(c+\dfrac{d}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{c+\dfrac{d}{x}\left(c+\dfrac{d}{x}\right)}=\dfrac{a}{c}\Rightarrow y=\dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\pm\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\pm\infty\Rightarrow x=-\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 8: Cho các hằng số $a,\ b,\ c,\ d,\ m$ khác 0 thoả mãn $ad-bc\neq 0$. Đồ thị của hàm số $y=ax+b+\dfrac{m}{cx+d}$ có đường tiệm cận xiên là:

A. $y=cx+d$.

B. $y=a+bx$.

C. $y=c+dx$.

D. $y=ax+b$.

Lời giải

GVSB: Minh Anh; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

Chọn D

TXĐ: $D=\left(-\infty;\dfrac{-d}{c}\right)\cup\left(\dfrac{-d}{c};+\infty\right)$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(ax+b)\right]=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(ax+b)\right]=0$

Vậy $y=a+bx$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x)>0,\forall x\in(0;1)$; $f'(x)<0,\forall x\in(1;2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Lời giải

GVSB: Minh Anh; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

Chọn C

Ta có $f'(x)>0,\forall x\in(0;1)$; $f'(x)<0,\forall x\in(1;2)$ nên $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x)=x^2-5x-6, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(-6;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(6;+\infty)$.

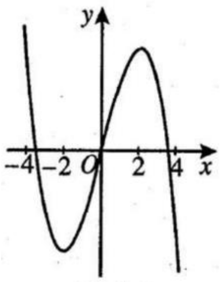
Lời giải

GVSB: Minh Anh; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

Chọn A

Hàm số $f(x)$ nghịch biến thì $f'(x)\le 0 \Leftrightarrow x^2-5x-6\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 6$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như Hình 3. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Hình 3

A. $(-4;2)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;4)$.

Lời giải

GVSB: Minh Anh; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

Chọn C

Dựa vào đồ thị $y=f(x)$ ta có hàm số đồng biến trên $(-2;0)$

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;2)$.

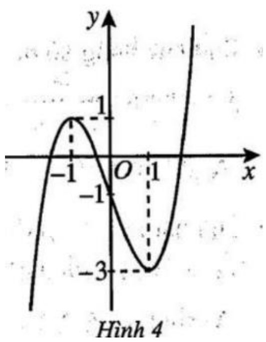
Lời giải

GVSB: Minh Anh; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên $y=f(x)$ ta có hàm số nghịch biến trên $(0;2)$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như Hình 4. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Hình 4

A. $x_{CT}=-1, x_{CD}=1$. **B.** $x_{CT}=-3, x_{CD}=1$. **C.** $x_{CT}=1, x_{CD}=-3$. **D.** $x_{CT}=1, x_{CD}=-1$.

Lời giải

GVSB: Minh Anh; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

Chọn D

Dựa vào đồ thị $y=f(x)$ hàm số có $x_{CT}=1, x_{CD}=-1$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)<f(0), \forall x\in(-1;1)\setminus\{0\}$ và $f(x)>f(2), \forall x\in(1;3)\setminus\{2\}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $x_{CT}=0, x_{CD}=2$. **B.** $x_{CT}=2, x_{CD}=0$. **C.** $x_{CT}=-1, x_{CD}=3$. **D.** $x_{CT}=3, x_{CD}=-1$.

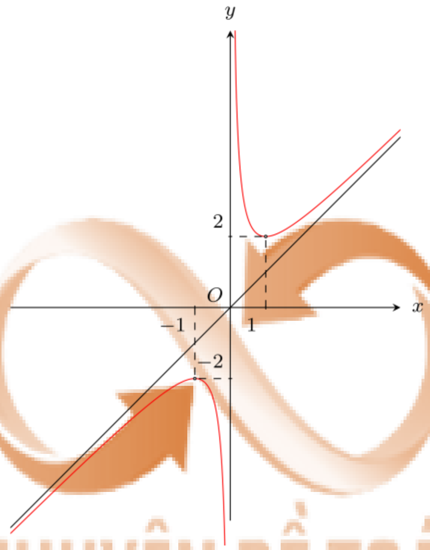
Lời giải

GVSB: Minh Anh; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} f(x)<f(0), \forall x\in(-1;1)\setminus\{0\} \\ f(x)>f(2), \forall x\in(1;3)\setminus\{2\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{CD}=0 \\ x_{CT}=2 \end{cases}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $y_{CT}=1; y_{CĐ}=2$. **B.** $y_{CT}=2; y_{CĐ}=-1$. **C.** $y_{CT}=-2; y_{CĐ}=2$. **D.** $y_{CT}=2; y_{CĐ}=-2$.

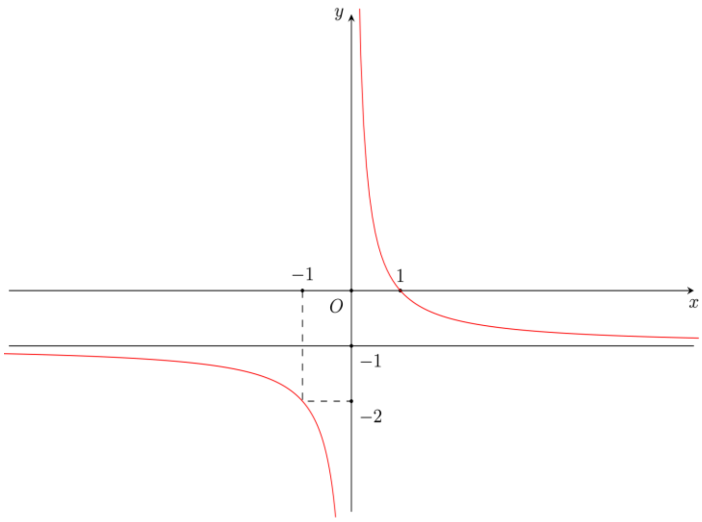
Lời giải

GVSB: Thanh Huyen Phan; GVPB:

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có $y_{CT}=2; y_{CĐ}=-2$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$, đường tiệm cận ngang $y=0$.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$, đường tiệm cận ngang $y=-1$.

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=0$, đường tiệm cận ngang $y=0$.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=0$, đường tiệm cận ngang $y=-1$.

Lời giải

GVSB: Thanh Huyen Phan; GVPB:

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=0$, đường tiệm cận ngang $y=-1$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

Đường tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x=1; y=1$. **B.** $x=1; y=2$. **C.** $x=2; y=1$. **D.** $x=2; y=2$.

Lời giải

GVSB: Thanh Huyen Phan; GVPB:

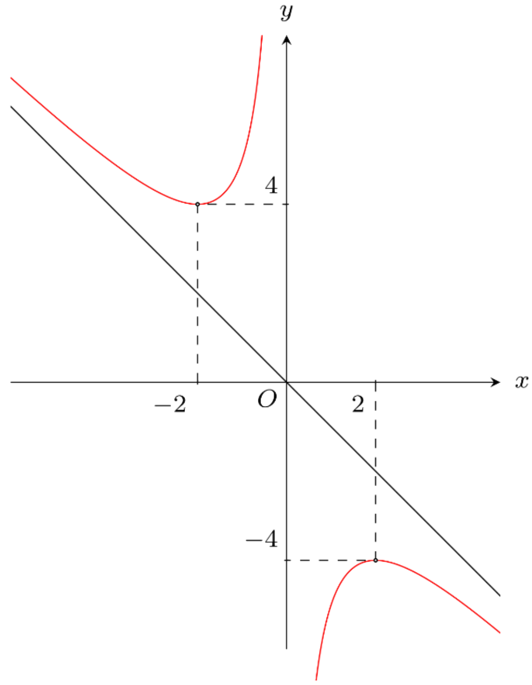
Chọn C

Dựa vào BBT của hàm số ta có

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$. Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=2$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=1$

Câu 18. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x}$ $(ac\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng

A. Đường thẳng $y = x$.

B. Đường thẳng $y = -x$.

C. Đường thẳng $x = 0$.

D. Đường thẳng $y = 2x$.

Lời giải

GVSB: Thanh Huyen Phan; GVPB:

Chọn B

$y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x}$ $(ac \neq 0)$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$y' = \dfrac{ax^2 - c}{x^2}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $x_{CT} = -2; y_{CT} = 4$; $x_{CĐ} = 2; y_{CĐ} = -4$

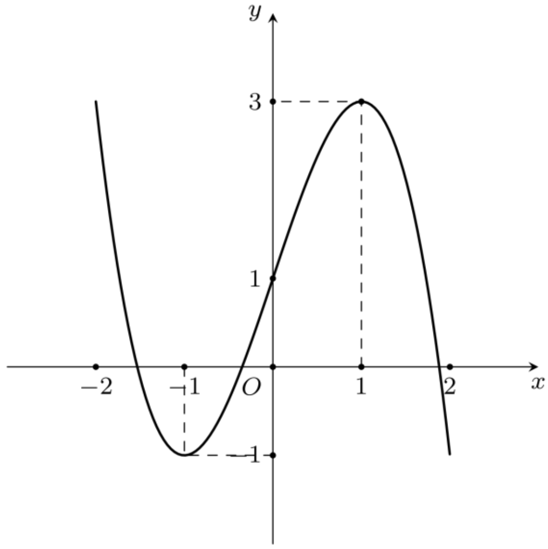
Khi đó, ta có $y' = 0$ có hai nghiệm $x = \pm 2$ và $y(2) = -4; y(-2) = 4$

Suy ra $\begin{cases} c = 4a \\ -2a + b + \dfrac{c}{-2} = 4 \\ 2a + b + \dfrac{c}{2} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$

Vậy $y = \dfrac{-x^2 - 4}{x} = -x - \dfrac{4}{x}$

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{4}{x} \right) = 0$ nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = -x$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $m=-2; M=2$. **B.** $m=1; M=3$. **C.** $m=3; M=1$ **D.** $m=-1; M=3$.

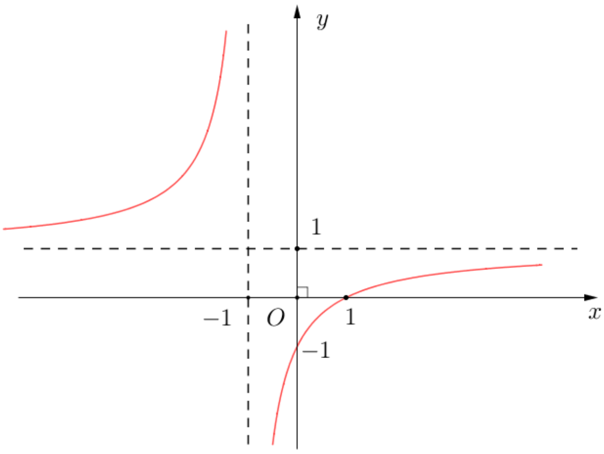
Lời giải

GVSB: Thanh Huyen Phan; GVPB:

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có $m=-1; M=3$

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đường thẳng nào sau đây là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho?

A. $y=x$. **B.** $y=-x$. **C.** $y=0$. **D.** $x=0$.

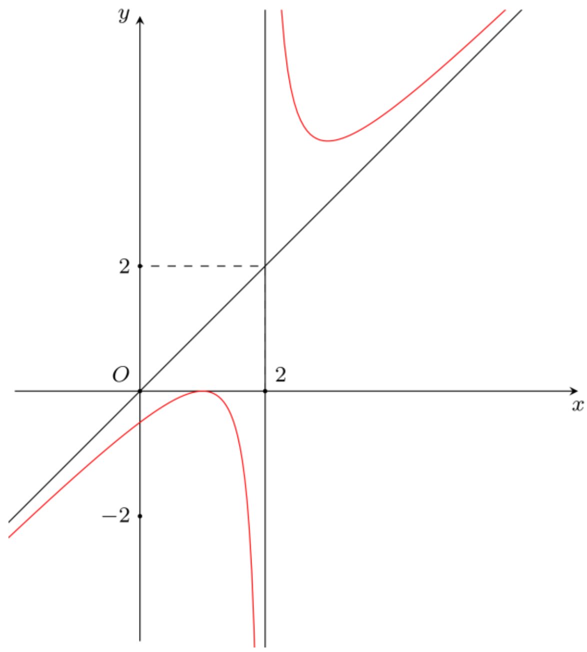
Lời giải

GVSB: Thanh Huyen Phan; GVPB:

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số thấy đường thẳng $y=-x$ là một phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận nên đường thẳng $y=-x$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là

A. $(2;2)$. **B.** $(-2;-2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;-2)$.

Lời giải

GVSB: Thanh Huyen Phan; GVPB:

Chọn A

Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $(2;2)$. Vậy tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(2;2)$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 22. **[MĐ2]** Cho hàm số $f(x)=x-\sin 2x$.

a) $f'(x)=1+2\cos 2x$

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}$

c) Trên đoạn $[0;\pi]$ phương trình $f'(x)=0$ có đúng một nghiệm $\frac{5\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB:…

a) Ta có $f(x)=x-\sin 2x \Rightarrow f'(x)=1-2\cos 2x$

Chọn SAI.

b) Ta có $f(x)=x-\sin 2x \Rightarrow f'(x)=1-2\cos 2x$.

Vậy $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$

Chọn SAI.

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $k = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} \in [0;\pi] \\ x = -\dfrac{\pi}{6} \notin [0;\pi] \end{array}\right.$

Với $k = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{7\pi}{6} \notin [0;\pi] \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5\pi}{6} \in [0;\pi] \end{array}\right.$

Vậy trên đoạn $[0;\pi]$ phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm là $\dfrac{\pi}{6}$ và $\dfrac{5\pi}{6}$.

Chọn SAI.

d) Trên đoạn $[0;\pi]$, ta có

$f(0) = 0, f(\pi) = \pi, f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;\pi]$ là $\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn ĐÚNG.

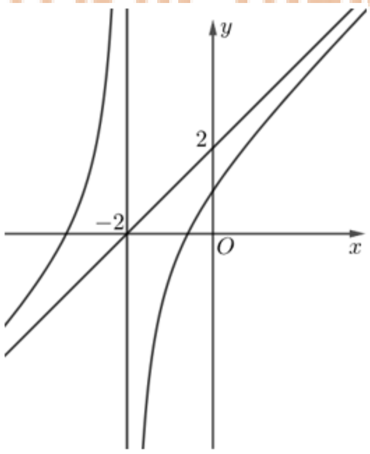
Câu 23. **[MĐ2]** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$.

a) $f(x) = x + 2 - \dfrac{2}{x + 2}, \forall x \in (-\infty;-2) \cup (-2;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường $x = 2$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường $y = x + 2$

d) Hàm số đã cho có đồ thị như Hình 11.



Hình 11

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

a) Ta có $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x + 2} = \dfrac{x^2 + 4x + 4 - 2}{x + 2} = \dfrac{(x+2)^2 - 2}{x + 2} = x + 2 - \dfrac{2}{x + 2}$

Hàm số xác định trên $(-\infty;-2) \cup (-2;+\infty)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}$, xác định trên $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;+\infty\right)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường $x=-2$.

Chọn SAI.

c) Ta có $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=x+2-\dfrac{2}{x+2}$.

Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\dfrac{2}{x+2}-\left(x+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x+2}\right)=0$

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+2-\dfrac{2}{x+2}-\left(x+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2}{x+2}\right)=0$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường $y=x+2$.

Chọn ĐÚNG.

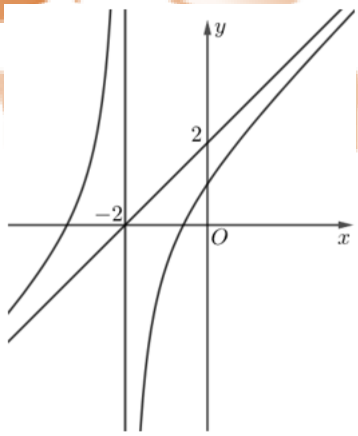
d) Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=x+2-\dfrac{2}{x+2}$ xác định trên $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;+\infty\right)$.

Ta có đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường $x=-2$ và có tiệm cận xiên là đường $y=x+2$.

Mặt khác $f\left(x\right)=x+2-\dfrac{2}{x+2}\Rightarrow f'\left(x\right)=1+\dfrac{2}{\left(x+2\right)^2}>0,\forall x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;+\infty\right)$.

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Ta có đồ thị hàm số của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=x+2-\dfrac{2}{x+2}$ như hình dưới đây.



Hình 11

Chọn ĐÚNG.

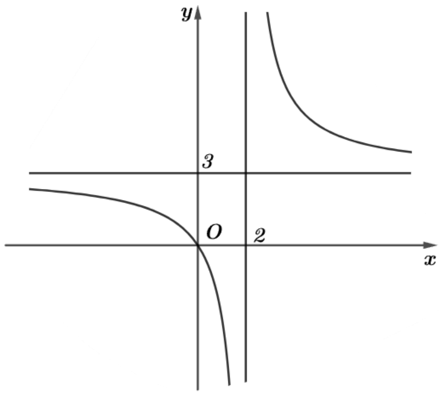
Câu 24. **[MĐ2]** Cho hàm số $y=\dfrac{3x+a}{x+b}$ có đồ thị như *Hình 12*.

a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$.

b) $b=2$.

c) Đồ thị hàm số không đi qua gốc tọa độ.

d) $a=0$.



Hình 12

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $y=\dfrac{3x+a}{x+b}$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-b\}$.

Khi đó, đồ thị có tiệm cận đứng là đường $x=-b$. Vậy $-b=2\Rightarrow b=-2$.

Chọn SAI.

c) Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

Chọn SAI.

d) Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, khi đó $0=\dfrac{3.0+a}{0+b}\Rightarrow a=0$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 25. **[MĐ1]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	142	$\searrow$	8	$\nearrow$	38	$\searrow$	14

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(8;14)$.

b) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 38.

d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(8;38)$.

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

a) Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Vậy hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $(8;14)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 tại điểm $x=-1$.

Chọn ĐÚNG.

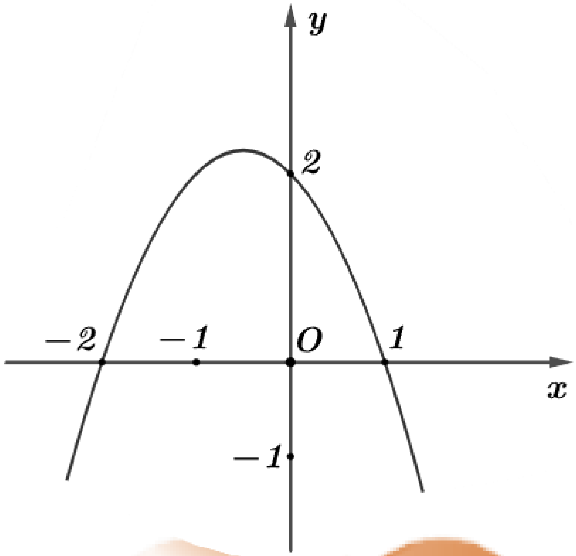
c) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số không có giá trị lớn nhất.

Chọn SAI.

d) Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

Chọn SAI.

Câu 26. **[MĐ1]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a,b,c,d là các số thực và $a\neq 0$) có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như *Hình 13*.



Hình 13

a) Điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $x_{CT}=-2$.

b) Điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $x_{CĐ}=1$.

c) Hàm số đồng biến trên $\left(0;1\right)$.

d) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(2025;2026\right)$.

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Đỗ Tấn Bảo

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty$

a) Điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $x_{CT}=-2$.

Chọn ĐÚNG.

b) Điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $x_{CĐ}=1$.

Chọn ĐÚNG.

c) Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đồng biến trên $\left(-2;1\right)$ nên hàm số cũng đồng biến trên $\left(0;1\right)$,

Chọn ĐÚNG.

d) Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số cũng nghịch biến trên $(2025;2026)$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 27. **[MĐ2]** Trong 9 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-t^3+9t^2+21t+1$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) $s'(t)=-3t^2+18t+21$.

b) $s''(t)=-6t+18$.

c) Phương trình $s'(t)=0$ có đúng một nghiệm dương là $t=7$.

d) Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vật dừng lại là $36\,\text{m/s}^2$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thanh Tiếu; GVPB: Lê Hoàng Khâm

a) Ta có: $s(t)=-t^3+9t^2+21t+1 \Rightarrow s'(t)=-3t^2+18t+21$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $s(t)=-t^3+9t^2+21t+1 \Rightarrow s'(t)=-3t^2+18t+21 \ \Rightarrow s''(t)=-6t+18$

Chọn ĐÚNG.

c) $s'(t)=-3t^2+18t+21 \ \Rightarrow s'(t)=0 \Leftrightarrow -3t^2+18t+21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=7 \end{array}\right.$.

Phương trình $s'(t)=0$ có đúng một nghiệm dương là $t=7$.

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có: $s(t)=-t^3+9t^2+21t+1 \Rightarrow v(t)=s'(t)=-3t^2+18t+21 \Rightarrow a(t)=s''(t)=-6t+18$.

Chất điểm dừng lại tức là $v(t)=0 \Leftrightarrow -3t^2+18t+21=0 \Rightarrow t=7$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vật dừng lại là $a(7)=-6.7+18=-24\left(\text{m/s}^2\right)$.

Chọn SAI.

Câu 28. **[MĐ3]** Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)\%$.

a) Hàm số $f(x)=\dfrac{100(x+200)}{x+30}$.

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng $(0;+\infty)$.

c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.

d) Giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến dương vô cực bằng 100.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thanh Tiếu; GVPB: Lê Hoàng Khâm

a) Số gam muối tinh khiết trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% là: 30 gam.

Nồng độ dung dịch muối sau khi thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết là:

$\dfrac{x+30}{x+200}.100\%$.

Vậy hàm số $f(x)=\dfrac{100(x+30)}{x+200}(\%)$.

Chọn SAI.

b) Ta có: $f(x)=\dfrac{100(x+30)}{x+200} \Rightarrow f'(x)=100.\dfrac{1.200-1.30}{(x+200)^2}=\dfrac{17000}{(x+200)^2}$.

Suy ra đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn SAI.

c) Vì $f'(x)=\dfrac{17000}{(x+200)^2}>0,\forall x>0$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100(x+30)}{x+200}=100$ suy ra nồng độ phần trăm không vượt quá 100%.

Chọn ĐÚNG.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100(x+30)}{x+200}=100$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 29. **[MĐ3]** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s=f(t)=0,5\cos(2\pi t)$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là $-\pi\sin(2\pi t)\,\text{m/s}$.

b) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là $-2\cos(2\pi t)\,\text{m/s}^2$.

c) Vận tốc lớn nhất của chất điểm bằng $\pi\,\text{m/s}$.

d) Gia tốc lớn nhất của chất điểm bằng $2\pi^2\,\text{m/s}^2$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thanh Tiếu; GVPB: Lê Hoàng Khâm

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là $v=s'=f'(t)=-\pi\sin(2\pi t)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là $a=s''=f''(t)=-2\pi^2\cos(2\pi t)$.

Chọn SAI.

c) Ta có vận tốc $v=-\pi\sin(2\pi t)$.

Với mọi $t>0$ ta có: $-1\le\sin(2\pi t)\le1\Leftrightarrow\pi\ge-\pi\sin(2\pi t)\ge-\pi$.

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm bằng $\pi\,\text{m/s}$.

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có gia tốc $a=-2\pi^2\cos(2\pi t)$.

Với mọi $t>0$ ta có: $-1\le\cos(2\pi t)\le1\Leftrightarrow 2\pi^2\ge-2\pi^2\cos(2\pi t)\ge-2\pi^2$.

Vậy gia tốc lớn nhất của chất điểm bằng $2\pi^2\,\text{m/s}^2$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 30. **[MĐ2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)\le f(x)\le f(-1),\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(1)$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(-1)$.

c) Điểm cực tiểu của hàm số là $x_{CT}=-1$.

d) Điểm cực đại của hàm số là $x_{CD}=1$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thanh Tiếu; GVPB: Lê Hoàng Khâm

a) Ta có: $f(1)\le f(x)\le f(-1),\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow\begin{cases}f(1)\le f(x),\forall x\in\mathbb{R}\\ \exists x=1\in D:y=f(1)\end{cases}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(1)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $f(1)\le f(x)\le f(-1),\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow\begin{cases}f(x)\le f(-1),\forall x\in\mathbb{R}\\ \exists x=-1\in D:y=f(-1)\end{cases}$.

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(-1)$.

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có: $f(1)\le f(x)\le f(-1),\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow\exists k>0:f(1)\le f(x),\forall x\in(1-k;1+k)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x_{CT}=1$.

Chọn SAI.

d) Ta có: $f(1)\le f(x)\le f(-1),\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow\exists k>0:f(x)\le f(-1),\forall x\in(-1-k;-1+k)$.

Vậy điểm cực đại của hàm số là $x_{CD}=-1$.

Chọn SAI.

Câu 31. **[MĐ3]** Một công ty sản xuất một số sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x)=1000-25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra.

a) Hàm doanh thu của công ty là $f(x)=x.p(x)$.

b) Hàm số $f(x)=-25x^2+1000x$ có đạo hàm $f'(x)=-50x+1000$.

c) Nếu $f(x)=x.p(x)$ là hàm doanh thu thì phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm là $x=2$.

d) Hàm doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng 10000.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thanh Tiếu; GVPB: Lê Hoàng Khâm

a) Hàm doanh thu của công ty là $f(x)=x.p(x)=x(1000-25x)=-25x^2+1000x$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $f(x)=-25x^2+1000x$ $\Rightarrow f'(x)=-50x+1000$.

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có: $f(x)=-25x^2+1000x$ $\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow-50x+1000=0\Leftrightarrow x=20$.

Chọn SAI.

d) Ta có: $f(x)=-25x^2+1000x$ $\Rightarrow f'(x)=-50x+1000$.

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow-50x+1000=0\Leftrightarrow x=20$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		20		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1000	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng 10000.

Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 32. Giả sử hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ đạt cực đại tại $x=a$ và đạt cực tiểu tại $x=b$. Giá trị của biểu thức $A=2a+b$ là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Cao Minh Nhân; GVPB: Lê Hoàng Khâm

Trả lời: 5.

Ta có: $f'(x)=3x^2-12x+9$.

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra, hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=1$ và cực tiểu tại $x=3$.

Khi đó: $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow A=2\cdot 1+3=5$.

Câu 33. Cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{3x+5}{-x+7}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $B=-4a-b$ là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Cao Minh Nhân; GVPB: Lê Hoàng Khâm

Trả lời: -25.

Tâm đối xứng I của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{3x+5}{-x+7}$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-3$ và tiệm cận đứng $x=7$.

Suy ra $I(7;-3) \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow B=-4\cdot 7-(-3)=-25$.

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $f(x)=5x-1+\dfrac{8}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $C=a+3b$ là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Cao Minh Nhân; GVPB: Lê Hoàng Khâm

Trả lời: 13.

Tiệm cận đứng: $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(5x-1)\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{8}{x-1}\right)=0$. Suy ra tiệm cận xiên là $y=5x-1$.

Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng I là giao điểm của 2 đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên nên $I(1;4)$.

Suy ra: $a=1, b=4$. Vậy $C=1+3\cdot 4=13$.

Câu 35. Cho $a\neq 0$, $b^2-3ac>0$. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

GVSB: Cao Minh Nhân; GVPB: Lê Hoàng Khâm

Trả lời: 2.

Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Ta có: $\Delta_{y'}=(2b)^2-4\cdot 3a\cdot c=4\left(b^2-3ac\right)$.

Đề bài cho: $\begin{cases} a\neq 0 \\ b^2-3ac>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta_{y'}>0\end{cases} \Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1<x_2)$.

Mặt khác, hàm số bậc 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thì hàm số luôn có 2 cực trị.

Câu 36. Cho các hằng số a,b,c,d khác 0 thỏa mãn $ad-bc\neq 0$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Cao Minh Nhân; GVPB: Lê Hoàng Khâm

Trả lời: 2.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$.

Vậy tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ là 2.

Câu 37. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người) (Nguồn: *Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020*). Xem đồ thị hàm số $y=f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y=a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Cao Minh Nhân; GVPB: Lê Hoàng Khâm

Trả lời: 26.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{26t+10}{t=5}=26$.

Suy ra đồ thị hàm số $f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y=26$.

Vậy giá trị $a=26$.

Câu 38. Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-t^3+18t^2+t+3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu mét trên giây trong 18 giây đầu tiên đó?

Lời giải

GVSB: Cao Minh Nhân; GVPB: Lê Hoàng Khâm

Trả lời: 109.

Vận tốc tức thời là $v(t)=s'(t)=-3t^2+36t+1,\ \forall t\in(0;18)$.

Ta có: $v'(t)=-6t+36$.

Cho $v'(t)=0\Leftrightarrow -6t+36=0\Leftrightarrow t=6\in(0;18)$.

Bảng biến thiên:

t	0		6		18
v′(t)		+	0	−	
v(t)	1	↗	109	↘	−323

Vậy $\underset{[0;18]}{Max}\, v=109\, m/s$.

CHỦ ĐỀ 4:

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Phần Lý thuyết trọng tâm

I. NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa

Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$ với C là một hằng số. Vì vậy,
$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$
- Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K. Ta có:
$$\int F'(x)dx=F(x)+C.$$

2. Tính chất

Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K.

- $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0;
- $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$;
- $\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$.

3. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Với $\alpha\neq-1$, ta có: $\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$;
- $\int \sin xdx=-\cos x+C$;
- $\int \cos xdx=\sin x+C$;
- $\int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$;
- $\int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$
- $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$
- Với $a>0$, $a\neq1$, ta có: $\int a^xdx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

II. TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

2. Tính chất

Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Ta có:

- $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx$ (k là hằng số);
- $\int\limits_a^b\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx$;

- $\int\limits_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx=\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^b g(x)dx$;
- Giả sử m,n,c là ba số thực tùy ý thuộc đoạn $[a;b]$, ta có:

$$\int\limits_m^n f(x)dx=\int\limits_m^c f(x)dx+\int\limits_c^n f(x)dx.$$

3. Tích phân một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Với $\alpha\neq -1$, ta có: $\int\limits_a^b x^\alpha dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$;
- Với hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, ta có:

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_a^b=\ln|b|-\ln|a|;$$

- $\int\limits_a^b \sin xdx=-\cos x\Big|_a^b=\cos a-\cos b$;
- $\int\limits_a^b \cos xdx=\sin x\Big|_a^b=\sin b-\sin a$;
- Với hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ liên tục trên $[a;b]$, ta có:

$$\int\limits_a^b \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x\Big|_a^b=\cot a-\cot b;$$

- Với hàm số $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ liên tục trên $[a;b]$, ta có:

$$\int\limits_a^b \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x\Big|_a^b=\tan b-\tan a;$$

- Với $a>0$, $a\neq 1$, ta có: $\int\limits_\alpha^\beta a^x dx=\left.\frac{a^x}{\ln a}\right|_\alpha^\beta=\frac{a^\beta-a^\alpha}{\ln a}$.

4. Ứng dụng

- Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ là:

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$$

- Cho các hàm số $y=f(x),y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|dx$.
- Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại x $(a\le x\le b)$ cắt vật thể đó theo hình phẳng có

diện tích là $S(x)$. Giả sử hàm số $S(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó, thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính theo công thức

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

- Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$.

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Ví dụ 1. Hàm số $F(x)=2x^3-2x+1$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x)=6x^2-2$. **B.** $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+x$.

C. $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+x+C$. **D.** $f(x)=6x^2-2+C$.

Lời giải

GVSB: Dinh Thi Hoa; GVPB: Giang Trần

Chọn A

Ta có: $f(x)=F'(x)=\left(2x^3-2x+1\right)'=6x^2-2$.

Ví dụ 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0, x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là:

A. $S=\int_0^\pi \cos x\,dx$. **B.** $S=\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$.

C. $S=\int_0^\pi |\cos x|\,dx$. **D.** $S=\pi\int_0^\pi |\cos x|\,dx$.

Lời giải

GVSB: Dinh Thi Hoa; GVPB: Giang Trần

Chọn C

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=a, x=b$ và các đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ là $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$. Khi đó:

$S=\int_0^\pi|\cos x|\,dx$.

Ví dụ 3. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ quay quanh Ox. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $V=\pi\int_0^2 e^{2x}\,dx$. **B.** $V=\int_0^2 e^x\,dx$. **C.** $V=\pi\int_0^2 e^x\,dx$. **D.** $V=\int_0^2 e^{2x}\,dx$.

Lời giải

GVSB: Dinh Thi Hoa; GVPB: Giang Trần

Chọn A

Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ quay quanh Ox sẽ tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng $V=\pi\int\limits_0^2 e^{2x}\,dx$.

Ví dụ 4. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1-2\sin 2t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t=0$ (giây) đến thời điểm $t=\dfrac{3\pi}{4}$ (giây) được tính theo công thức:

A. $s(t)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\sin 2t)\,\mathrm{d}t$.

B. $s(t)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\sin 2t)^2\,\mathrm{d}t$.

C. $s(t)=\left|\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\sin 2t)\,\mathrm{d}t\right|$.

D. $s(t)=v\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)-v(0)$.

Lời giải

GVSB: Dinh Thi Hoa; GVPB: Giang Trần

Chọn A

Gọi $s(t)$ là quãng đường mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t=0$ (giây) đến $t=\dfrac{3\pi}{4}$ (giây). Mà $s'(t)=v(t)$ nên $s(t)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\sin 2t)\,\mathrm{d}t$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Ví dụ 5. Giả sử $s(t)$ là phương trình quãng đường chuyển động của một vật theo thời gian t (giây) và $v(t)$ là phương trình vận tốc của chuyển động đó theo thời gian t (giây).

a) $\int s(t)\,dt=v(t)+C$.

b) $\int v(t)\,\mathrm{d}t=s(t)+C$.

c) $\int s'(t)\,\mathrm{d}t=v(t)+C$.

d) $\int s'(t)\,\mathrm{d}t=s(t)+C$.

Lời giải

GVSB: Dinh Thi Hoa; GVPB: Giang Trần

Vì $s(t)$ là phương trình quãng đường chuyển động của một vật theo thời gian t (giây) và $v(t)$ là phương trình vận tốc của chuyển động đó theo thời gian t (giây) nên $s'(t)=v(t)$ nên

a) $\int v(t)\,\mathrm{d}t=s(t)+C$.

Chọn SAI.

b) $\int v(t)\,\mathrm{d}t=s(t)+C$.

Chọn ĐÚNG.

c) $\int s'(t)\,\mathrm{d}t=s(t)+C$.

Chọn SAI.

d) $\int s'(t)\,\mathrm{d}t=s(t)+C$.

Chọn ĐÚNG.

Ví dụ 6. Cho hàm số $F(x)=x^3-2x+1, x\in\mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

a) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(-1)=3$ thì $G(x)=F(x)-1, x\in\mathbb{R}$.

b) Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1)=-3$ thì $H(x)=F(x)-3, x\in\mathbb{R}$.

c) Nếu hàm số $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0)=0$ thì $K(x)=F(x)+1, x\in\mathbb{R}$.

d) Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(2)=4$ thì $M(x)=F(x)-1, x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

GVSB: Hà Minh Yên; GVPB: Giang Trần

$F(x)=x^3-2x+1, x\in\mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

a) Vì $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên

$G(x)=F\left(x\right)+C=x^3-2x+1+C.$

Mặt khác vì $G(-1)=3$ nên $\left(-1\right)^3-2\left(-1\right)+1+C=3\Leftrightarrow C=1.$

Do đó $G(x)=F\left(x\right)+1.$

Chọn SAI.

b) Vì $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên

$H(x)=F\left(x\right)+C=x^3-2x+1+C.$

Mặt khác vì $H(1)=-3$ nên $1^3-2.1+1+C=-3\Leftrightarrow C=-3$.

Do đó $H(x)=F\left(x\right)-3.$

Chọn ĐÚNG.

c) Vì $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên

$K(x)=F\left(x\right)+C=x^3-2x+1+C.$

Mặt khác vì $K(0)=0$ nên $0^3-2.0+1+C=0\Leftrightarrow C=-1$.

Do đó $K(x)=F\left(x\right)-1.$

Chọn SAI.

d) Vì $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên

$M(x)=F\left(x\right)+C=x^3-2x+1+C.$

Mặt khác vì $M(2)=4$ nên $2^3-2.2+1+C=3\Leftrightarrow C=-2$.

Do đó $M(x)=F\left(x\right)-2.$

Chọn SAI.

Ví dụ 7. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=2\cos t\left(\mathrm{m/s^2}\right)$.

a) Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Khi đó, vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=2\sin t(\mathrm{m/s})$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{2}$ là $1\mathrm{m/s}$.

c) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=0(\mathrm{s})$ đến thời điểm $t=\pi(\mathrm{s})$ là $4\mathrm{m}$.

d) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=\frac{\pi}{2}$ (s) đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}$ (s) là 2m.

Lời giải

GVSB: Hà Minh Yên; GVPB: Giang Trần

Vì vật chuyển động với gia tốc $a(t)=2\cos t\left(\text{m}/\text{s}^2\right)$ nên vận có vận tốc là

$v(t)=\int a(t)\text{d}t=\int 2\cos t\text{d}t=2\sin t+C$.

a) Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0.

Do đó $v(0)=0$ hay $2\sin 0+C=0\Leftrightarrow C=0$.

Khi đó, vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=2\sin t(\text{m}/\text{s})$.

Chọn ĐÚNG.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{2}$ là $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2(\text{m}/\text{s})$.

Chọn SAI.

c) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=0(\text{s})$ đến thời điểm $t=\pi(\text{s})$ là

$S=\int\limits_0^{\pi} v(t)\text{d}t=\int\limits_0^{\pi} 2\sin t\text{d}t=-2\cos t\Big|_0^{\pi}=-2\cos\pi+2\cos 0=4\ (\text{m})$.

Chọn ĐÚNG.

d) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=\frac{\pi}{2}$ (s) đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}$ (s) là

$S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} v(t)\text{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sin t\text{d}t=-2\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=-2\cos\frac{3\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\ (\text{m})$.

Chọn SAI.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 8. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2-4x+1$ và $F(2)=2$. Tính $F(3)$.

Lời giải

GVSB: Hà Minh Yên; GVPB: Giang Trần

Trả lời: 12

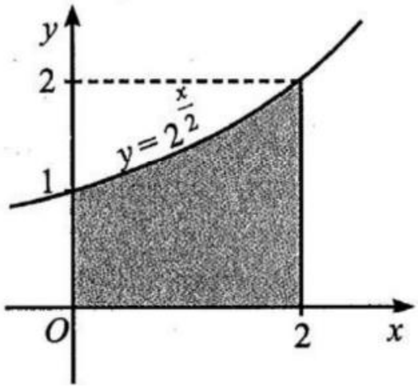
$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2-4x+1$.

$F(x)=\int\left(3x^2-4x+1\right)\text{d}x=x^3-2x^2+x+C$.

$F(2)=2\Leftrightarrow 2^3-2.2^2+2+C=2\Leftrightarrow C=0$. Do đó $F(x)=x^3-2x^2+x$.

Vậy $F(3)=3^3-2.3^2+3=12$.

Ví dụ 9. Cho đồ thị hàm số $y=2^{\frac{x}{2}}$ và hình phẳng được tô màu như Hình 1 . Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào? Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

GVSB: Hà Minh Yên; GVPB: Giang Trần

Trả lời: 2,89

Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường $y=2^{\frac{x}{2}}; y=0; x=0; x=2$.

Diện tích hình phẳng đó là $S=\int_0^2 2^{\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{\ln\sqrt{2}}.2^{\frac{x}{2}}\Big|_0^2=\frac{1}{\ln\sqrt{2}}(2-1)=\frac{1}{\ln\sqrt{2}}\approx 2,89$.

Ví dụ 10. Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t)=5\cos t\left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc $2,5\mathrm{m/s}$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong $\pi(\mathrm{s})$ đầu tiên.

Lời giải

GVSB: Hà Minh Yên; GVPB: Giang Trần

Trả lời: 0

Vì vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t)=5\cos t\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ nên vận tốc của vật là $v(t)=\int a(t)dt=\int 5\cos t dt=5\sin t+C\left(\mathrm{m/s}\right)$.

Vì lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc $2,5\mathrm{m/s}$ nên $v(0)=2,5$ hay $5\sin 0+C=2,5\Leftrightarrow C=2,5$.

Do đó $v(t)=5\sin t+2,5$.

Với $0\le t\le\pi$ thì $2,5\le 5\sin t+2,5\le 7,5$. Vận tốc đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t=\frac{\pi}{2}$.

Gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong $\pi(\mathrm{s})$ đầu tiên là $a\left(\frac{\pi}{2}\right)=5\cos\frac{\pi}{2}=0\left(\mathrm{m/s^2}\right)$.

Phần Tự luyện

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. **B.** $\int F(x)\mathrm{d}x=F'(x)+C$.

C. $\int F(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. **D.** $\int F'(x)\mathrm{d}x=F'(x)+C$.

Lời giải

GVSB: Thế Nguyễn; GVPB: Giang Trần

Chọn A

Theo định nghĩa nguyên hàm, $\left(F(x)+C\right)'=F'(x)$ nên chọn A.

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^{-3x}\mathrm{d}x = e^{-3x} + C.$ **B.** $\int e^{-3x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$

C. $\int e^{-3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{-3x} + C.$ **D.** $\int e^{-3x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x}.$

Lời giải

GVSB: Thế Nguyễn; GVPB: Giang Trần

Chọn B

Theo định nghĩa nguyên hàm, $\left(-\frac{1}{3}e^{-3x} + C\right)' = e^{-3x}$ nên chọn B.

Đáp án D cũng thỏa mãn định nghĩa nguyên hàm, nhưng không phải phải là họ các nguyên hàm của hàm số e^{-3x}.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi D quay quanh trục hoành là

A. $V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x.$ **B.** $V = 2\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x.$

C. $V = \pi^2\int_a^b \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x.$ **D.** $V = \pi^2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

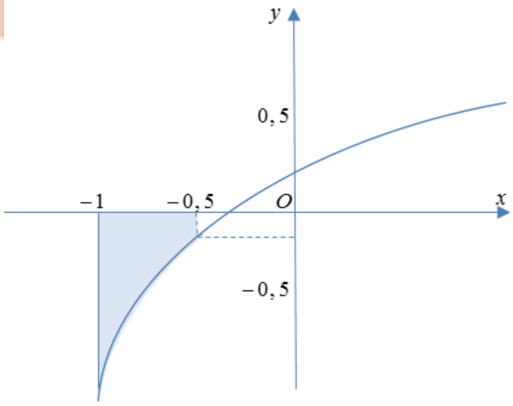
Lời giải

GVSB: Thế Nguyễn; GVPB: Giang Trần

Chọn A

Câu hỏi lý thuyết.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như *Hình* 2. Gọi S là phần diện tích hình phẳng được tô màu. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Hình 2

A. $S = \int_{-1}^{-0,5} f(x)\mathrm{d}x.$ **B.** $S = -\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x.$ **C.** $S = -\left|\int_{-1}^{-0,5} f(x)\mathrm{d}x\right|.$ **D.** $S = -\int_{-1}^{-0,5} f(x)\mathrm{d}x.$

Lời giải

GVSB: Thế Nguyễn; GVPB: Giang Trần

Chọn D

Theo ý nghĩa hình học của tích phân, diện tích của hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$, ta có

$$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{-0,5}|f(x)|\mathrm{d}x$$

Mà trên đoạn $[-1;-0,5]$ hàm số $y=f(x)<0$ nên $|f(x)|=-f(x)$

Do đó $S=-\int_{-1}^{-0,5} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 5. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=4$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox là

A. $V=\pi\int_1^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_1^4 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_1^4 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\int_1^4 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

Lời giải

GVSB: Thế Nguyễn; GVPB: Giang Trần

Chọn C

Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay, ta có $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_1^4 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

Câu 6. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\pi$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng D quay quanh trục Ox là

A. $V=\pi\int_0^\pi |\sin x|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left|\int_0^\pi (-\sin x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $V=\pi^2\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

GVSB: Thế Nguyễn; GVPB: Giang Trần

Chọn B

Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay, ta có $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Câu 7. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox là

A. $V=\pi\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

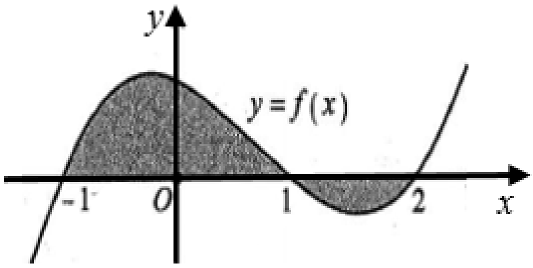
GVSB: Thế Nguyễn; GVPB: Giang Trần

Chọn D

Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay, ta có

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Câu 8. Gọi S là diện tích hình phẳng được tô đậm trong *Hình* 3. Công thức tính S là



Hình 3

A. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x.$

B. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x.$

C. $S=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x.$

D. $S=-\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x.$

Lời giải

GVSB: Thế Nguyễn; GVPB: Giang Trần

Chọn B

Theo công thức tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$, ta có

$$S=\int\limits_{a}^{b}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$$

Dựa vào đồ thị, ta thấy

+ $f(x)\geq 0\ \forall x\in\left[-1;1\right]$ nên $\int\limits_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

+ $f(x)\leq 0\ \forall x\in\left[1;2\right]$ nên $\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Do đó $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Câu 9. $\int(2x)^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\dfrac{(2x)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+C$.

B. $\dfrac{2^{\sqrt{2}}x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+C$.

C. $\dfrac{(2x)^{\sqrt{2}}}{\ln(2x)}+C$.

D. $(2x)^{\sqrt{2}}+C$.

Lời giải

GVSB: Lê Đức Nhân; GVPB: Thanh Hoa

Chọn B

Ta có: $(2x)^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}.x^{\sqrt{2}}$ nên $\int(2x)^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x=2^{\sqrt{2}}\int x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2^{\sqrt{2}}x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+C$.

Câu 10. $\int\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$ bằng:

A. $x-\cos x+C$.

B. $\left(-\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2+C$

C. $\dfrac{1}{3}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^3+C$.

D. $x+\cos x+C$.

Lời giải

GVSB: Lê Đức Nhân; GVPB: Thanh Hoa

Chọn A

Ta có: $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{x}{2}+2.\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1+\sin x$

nên $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int(1+\sin x)\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=x-\cos x+C$.

Câu 11. $\int\left(e^x+e^{-2x}\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $e^x-2e^{-2x}+C$. **B.** $e^x+e^{-2x}+C$. **C.** $e^x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$. **D.** $\frac{e^{x+1}}{x+1}+\frac{e^{-2x+1}}{-2x+1}+C$.

Lời giải

GVSB: Lê Đức Nhân; GVPB: Thanh Hoa

Chọn C

Ta có: $\int\left(e^x+e^{-2x}\right)\mathrm{d}x=\int e^x\mathrm{d}x+\int e^{-2x}\mathrm{d}x=e^x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$.

Câu 12. $\int\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$ bằng:

A. $x+\sin x+C$. **B.** $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^3+C$. **C.** $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+C$. **D.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$.

Lời giải

GVSB: Lê Đức Nhân; GVPB: Thanh Hoa

Chọn D

Ta có: $\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos x)$

nên $\int\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$

Câu 13. $\int\left(5^{2x}-6e^{\frac{-x}{2}}\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $e^x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$. **B.** $\frac{25^x}{2\ln 5}+12e^{\frac{-x}{2}}+C$. **C.** $e^x-2e^{-2x}+C$. **D.** $\frac{e^{x+1}}{x+1}+\frac{e^{-2x+1}}{-2x+1}+C$.

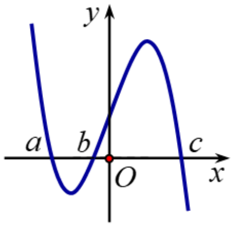
Lời giải

GVSB: Lê Đức Nhân; GVPB: Thanh Hoa

Chọn B

Ta có: $\int\left(5^{2x}-6e^{\frac{-x}{2}}\right)\mathrm{d}x=\int 5^{2x}\mathrm{d}x-6\int e^{\frac{-x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{5^{2x}}{2\ln 5}-6.(-2)e^{\frac{-x}{2}}+C=\frac{25^x}{2\ln 5}+12e^{\frac{-x}{2}}+C$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $f(c)>f(a)>f(b)$. **B.** $f(c)>f(b)>f(a)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)$. **D.** $f(b)>f(c)>f(a)$.

Lời giải

GVSB: Lê Đức Nhân; GVPB: Thanh Hoa

Chọn A

Quan sát đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy:

Do $f'(x)<0,\ \forall x\in(a;b)$ nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Suy ra $f(a)>f(b)$.

Do $f'(x)>0,\ \forall x\in(b;c)$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(b;c)$. Suy ra $f(c)>f(b)$.

Gọi $S_1:\begin{cases} y=f'(x) \\ y=0 \\ x=a;x=b \end{cases}$ và $S_2:\begin{cases} y=f'(x) \\ y=0 \\ x=b;x=c \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị ta có: $S_1<S_2 \Leftrightarrow -\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x<\int_b^c f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -[f(b)-f(a)]<f(c)-f(b) \Leftrightarrow f(a)-f(b)<f(c)-f(b)$

$\Rightarrow f(a)<f(c)$.

Do $\begin{cases} f(a)>f(b) \\ f(c)>f(b) \\ f(a)<f(c) \end{cases}$ nên $f(c)>f(a)>f(b)$.

Câu 15. Vi khuẩn E. coli sống chủ yếu ở đường ruột và có số lượng lớn nhất trong hệ vi sinh vật của cơ thể. Một quần thể vi khuẩn E. coli được quan sát trong điều kiện thích hợp, có tốc độ sinh trưởng được cho bởi hàm số $f(t)=480.2^t\ln 2$. Trong đó t tính bằng giờ $(t>0)$, $f(t)$ tính bằng cá thể/giờ (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage*). Biết tại thời điểm bắt đầu quan sát, số lượng cá thể được ước tính một cách chính xác khoảng 480 cá thể. Hàm số biểu thị số lượng cá thể theo tời gian t là:

A. $F(t)=480.2^t+\ln 2$. **B.** $F(t)=480.2^t$.

C. $F(t)=480\cdot\dfrac{2^t}{\ln 2}$. **D.** $F(t)=480\cdot\dfrac{2^t}{\ln 2}+C$.

Lời giải

GVSB: Lê Đức Nhân; GVPB: Thanh Hoa

Chọn B

Hàm số biểu thị số lượng cá thể theo tời gian t là:

$F(t)=\int f(t)\mathrm{d}t=\int(480.2^t\ln 2)\mathrm{d}t=480\ln 2\int 2^t\mathrm{d}t=480.2^t+C$.

Tại thời điểm bắt đầu quan sát, số lượng cá thể được ước tính một cách chính xác khoảng 480 cá thể suy ra $480+C=480\Rightarrow C=0$.

Vậy hàm số biểu thị số lượng cá thể theo tời gian t là: $F(t)=480.2^t$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 16. **[MĐ2]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

a) $\int f(x)dx=f'(x)+C$.

b) $\int f'(x)dx=f(x)+C$.

c) $\int f'(x)dx=f(x)$.

d) $\int f''(x)dx=f'(x)+C$.

Lời giải

GVSB: Trịnh Duy Thế; GVPB: Thanh Hoa

a) Ta có $(f'(x)+C)'=f''(x)\neq f(x)\Rightarrow\int f(x)dx\neq f(x)+C$

Chọn SAI.

b) Vì $(f(x)+C)'=f'(x)\Rightarrow\int f'(x)dx=f(x)+C$.

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có $\int f'(x)dx=f(x)+C$.

Chọn SAI.

d) $(f'(x)+C)=f''(x)\Rightarrow\int f''(x)dx=f'(x)+C$.

Chọn Đúng.

Câu 17. **[MĐ2]** Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây),

a) $\int a(t)dt=v(t)+C$.

b) $\int v(t)dt=a(t)+C$.

c) $\int v'(t)dt=a(t)+C$.

d) $\int v'(t)dt=v(t)+C$.

Lời giải

GVSB: Trịnh Duy Thế; GVPB: Thanh Hoa

a) Ta có $(v(t)+C)'=v'(t)=a(t)\Rightarrow\int a(t)dt=v(t)+C$

Chọn ĐÚNG.

b) Vì $(a(t)+C)'=a'(t)\neq v(t)\Rightarrow\int v(t)dt\neq a(t)+C$.

Chọn SAI.

c) Ta có $\int v'(t)dt=v(t)+C\neq a(t)+C$.

Chọn SAI.

d) $(v(t)+C)'=v'(t)\Rightarrow\int v'(t)dt=v(t)+C$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 18. **[MĐ2]** Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây). Xét chuyển động trong khoảng thời gian c (giây) đến b (giây).

a) $\int\limits_c^b a(t)dt = v(b) - v(c)$.

b) $\int\limits_c^b v(t)dt = a(b) - a(c)$.

c) $\int\limits_c^b v'(t)dt = v(c) - v(b)$.

d) $\int\limits_c^b v'(t)dt = v(b) - v(c)$.

Lời giải

GVSB: Trịnh Duy Thế; GVPB: Thanh Hoa

a) Ta có $v'(t) = a(t) \Rightarrow \int\limits_c^b a(t)dt = v(t)\Big|_c^b = v(b) - v(c)$

Chọn ĐÚNG.

b) Vì $\int\limits_c^b v'(t)dt = v(b) - v(c) \Rightarrow \int\limits_c^b v(t)dt = a(b) - a(c)$ sai

Chọn SAI.

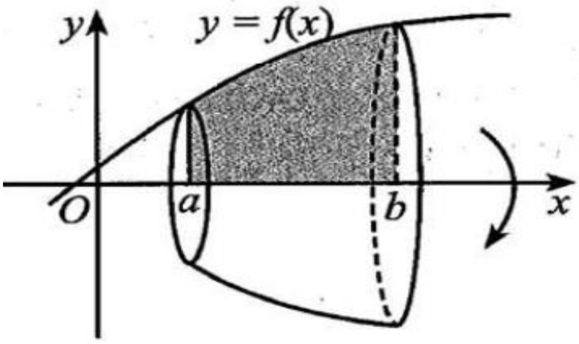
c) Ta có $\int\limits_c^b v'(t)dt = \int\limits_c^b a(t)dt = v(b) - v(c) \neq v(c) - v(b)$.

Chọn SAI.

d) Ta có $\int\limits_c^b v'(t)dt = \int\limits_c^b a(t)dt = v(b) - v(c)$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 19. **[MĐ2]** Cho vật thể tròn xoay như hình vẽ



a) Vật thể tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox.

b) Vật thể tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox.

c) Thể tích vật thể được tính theo công thức $V = \pi\int\limits_a^b f(x)dx$.

d) Thể tích vật thể được tính theo công thức $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$ ..

Lời giải

GVSB: Trịnh Duy Thế; GVPB: Thanh Hoa

a) Vật thể tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a,x=b$ quay quanh trục Ox.

Chọn SAI.

b) Vật thể tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ quay quanh trục Ox ..

Chọn ĐÚNG.

c) Thể tích vật thể được tính theo công thức $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$.

Chọn SAI.

d) Thể tích vật thể được tính theo công thức $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 20. **[MĐ3]** Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t)=4t^3-72t^2+288t$ trong đó t tính bằng giờ ($0\le t\le 13$), $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ (nguồn: Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage). Sau $2h$ đã có 500 người có mặt.

a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t)=t^4-24t^3+144t^2$

b) Sau $5h$ lượng khách tham quan là 1325 người.

c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1296 người.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t=6$ ..

Lời giải

GVSB: Trịnh Duy Thế; GVPB: Thanh Hoa

a) Ta có

$Q'(t)=4t^3-72t^2+288t\Rightarrow\int Q'(t)dt=\int\left(4t^3-72t^2+288t\right)dt\Rightarrow Q(t)=t^4-24t^3+144t^2+C$

Sau $2h$ đã có 500 người có mặt nên

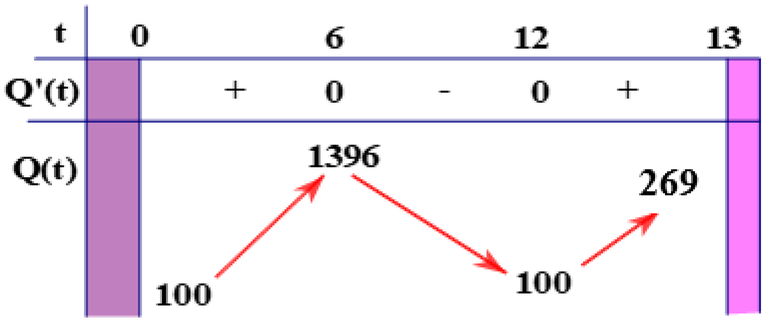
$500=2^4-24.2^3+144.2^2+C\Leftrightarrow C=100\Rightarrow Q(t)=t^4-24t^3+144t^2+100$

Chọn SAI.

b) Sau $5h$ lượng khách tham quan là $Q(5)=5^4-24.5^3+144.5^2+100=1325$

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có $Q'(t)=4t^3-72t^2+288t\Rightarrow Q'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=12\\t=6\end{array}\right.$



Từ bảng biến thiên suy ra lượng khách tham quan lớn nhất là 1396.

Chọn SAI.

d) Từ bảng biến thiên ta có lượng khách tham quan lớn nhất đạt được tại thời điểm $t=6$.

Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 21. $\int\limits_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

GVSB: Bao An; GVPB: Thanh Hoa

Trả lời: 0,1

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int\limits_0^1 \frac{3^x}{4^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{4}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left.\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln\frac{3}{4}}\right|_0^1 = -\frac{1}{36(\ln 3 - \ln 4)} \approx 0,09655720824$

Câu 22. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2-2)(2x+1)$ và $F(-1)=\frac{1}{6}$. Tính $F\left(-\frac{1}{2}\right)$ (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

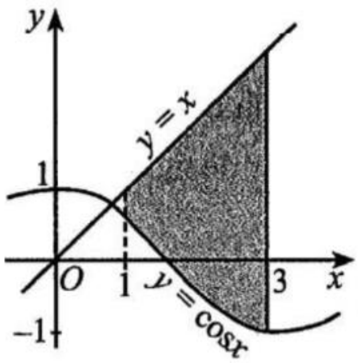
GVSB: Bao An; GVPB: Thanh Hoa

Trả lời: 0,49

Ta có $F\left(-\frac{1}{2}\right)-F(-1)=\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} (x^2-2)(2x+1)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x^3+x^2-4x-2)\mathrm{d}x$

$= \left.\left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-2x^2-2x\right)\right|_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{31}{96} \Rightarrow F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{96}+\frac{1}{6} = \frac{47}{96} \approx 0,489583333$.

Câu 23. Cho đồ thị hàm số $y=\cos x$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 6*. Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 6

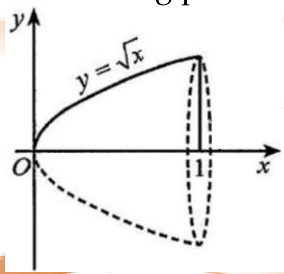
Lời giải

GVSB: Bao An; GVPB: Thanh Hoa

Trả lời: 4,7

$$S=\int_1^3\left|x-\cos x\right|\mathrm{d}x=\int_1^3\left(x-\cos x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\sin x\right)\right|_1^3=4-\sin 3+\sin 1\approx 4,700350977.$$

Câu 24. Tính thể tích của khối tròn xoay được cho trong *Hình 7*. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành bởi hình phẳng cho ở *Hình 7* khi quay quanh trục Ox (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 7

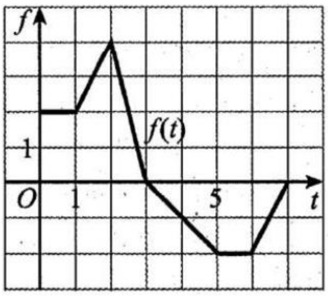
Lời giải

GVSB: Bao An; GVPB: Thanh Hoa

Trả lời: 1.6

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x\mathrm{d}x=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}\approx 1,570796327.$$

Câu 25. Cho $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, $(0\le x\le 7)$ trong đó $f(t)$ là hàm số có đồ thị như *hình vẽ*. Tính $g(3)$



Lời giải

Trả lời: 0

GVSB: Lục Bảo; GVPB:Thu Lê

Ta xác định hàm số $f(t)$ dựa vào hình vẽ.

Với $0 \le t \le 1 \Rightarrow f(t) = 2$ | Với $1 \le t \le 2 \Rightarrow f(t) = 2t$

Với $2 \le t \le 3 \Rightarrow f(t) = -4t + 12$ | Với $3 \le t \le 5 \Rightarrow f(t) = -t + 3$

Với $5 \le t \le 6 \Rightarrow f(t) = -2$ | Với $6 \le t \le 7 \Rightarrow f(t) = 2t - 14$

Vậy ta thu được hàm số $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t \le 1 \\ 2t & 1 \le t \le 2 \\ -4t + 12 & 2 \le t \le 3 \\ -t + 3 & 3 \le t \le 5 \\ -2 & 5 \le t \le 6 \\ 2t - 14 & 6 \le t \le 7 \end{cases}$.

Ta có: $g'(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)' = x' f'(x) = f'(x)$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) \Rightarrow g(x) = f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le 1 \\ 2x & 1 \le x \le 2 \\ -4x + 12 & 2 \le x \le 3 \\ -x + 3 & 3 \le x \le 5 \\ -2 & 5 \le x \le 6 \\ 2x - 14 & 6 \le x \le 7 \end{cases}$

Suy ra $g(3) = 0$.

Câu 26. Một vật được ném lên độ cao $300\,m$ với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9,8t + 29,43$ (m/s) *(Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e. Cengage)*. Gọi $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm $t(s)$. Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó thì vật đó chạm đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)

Lời giải

Trả lời: 7

GVSB: Lục Bảo; GVPB: Thu Lê

Ta có: $h(t) = \int v(t) dt = -4,9t^2 + 29,43t + C$

Từ lúc bắt đầu ném lên độ cao $300m$ ta có $h(0) = 300 \Leftrightarrow C = 300$

$h(t) = -4,9t^2 + 29,43t + 300$

Thời điểm ném lên độ cao $300m$ $\Leftrightarrow h(t)$ đạt cực đại

$\Leftrightarrow h'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 29,43 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2943}{980}(s) \approx 3(m)$.

Thời điểm vật chạm đất $\Leftrightarrow h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 29,43t + 300 = 0 \Leftrightarrow t \approx 11(m)$

Khoảng thời gian từ khi bắt đầu ném thì vật đó chạm đất là $11 - 3 = 7(s)$

Vậy sau thời gian 7 giây thì khi vật bắt đầu ném thì vật đó chạm đất.

Câu 27. Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) $(x \ge 0)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó

$T'(x)$ tính bằng triệu đồng *(Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e. Cengage)*. Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là $12\,000$ triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu cao nhất ?

Lời giải

Trả lời: 15

GVSB: Lục Bảo; GVPB: Thu Lê

Ta có $T(x)$ là doanh thu của trung tâm thương mại (đơn vị: triệu đồng).

Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là $12\,000$ triệu đồng $\Rightarrow T(10) = 12\,000$.

$\Rightarrow T(x) = \int T'(x)dx = \int(-20x + 300)dx = -10x^2 + 300x + C$.

Với $T(10) = 12\,000 \Leftrightarrow -10.10^2 + 300.10 + C = 12\,000 \Leftrightarrow C = 10000$

$\Rightarrow T(x) = -10x^2 + 300x + 10000$

Để người đó đạt doanh thu cao nhất $\Leftrightarrow T(x)$ đạt giá trị lớn nhất $(x \geq 0)$

$\Leftrightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow -20x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = 15$ (triệu đồng).

Để người đó đạt mức doanh thu cao nhất thì phải tăng giá cho thuê mỗi gian hàng lên 15 triệu đồng.

---*Hết*---

CHỦ ĐỀ 5:

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Phần Lý thuyết trọng tâm

I. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

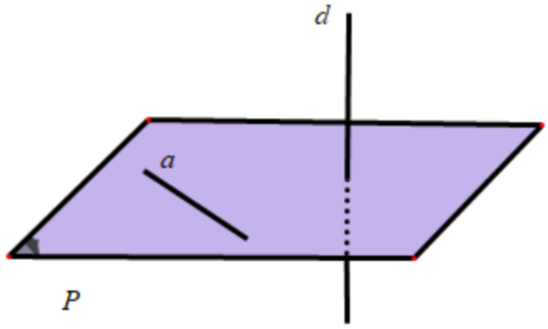
1. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$, kí hiệu $a \perp b$.

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a) Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P) (*Hình 1*), kí hiệu $d \perp (P)$ hoặc $(P) \perp (d)$



Hình 1

b) Dấu hiệu nhận biết

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

c) Tính chất

+ Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

+ Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

+ Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

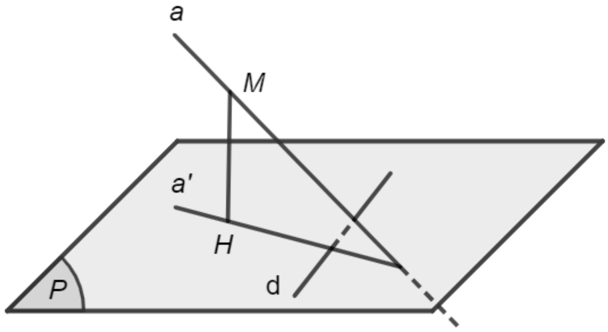
+ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

+ Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

+ Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

d) Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó, d vuông góc với a khi và chỉ khi d vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) (*Hình 2*).



Hình 2

3. Hai mặt phẳng vuông góc

a) Định nghĩa

Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng $(P),(Q)$ gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $(P)\perp(Q)$.

b) Dấu hiệu nhận biết

Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

c) Tính chất

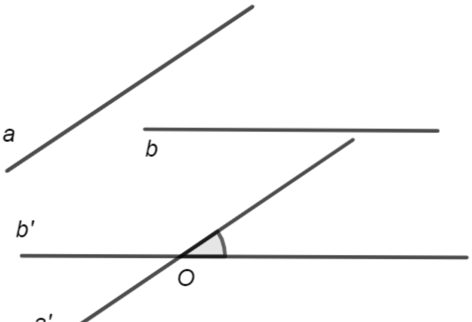
+ Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

+ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

II. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b (*Hình 3*), kí hiệu (a,b) hoặc (a,b)



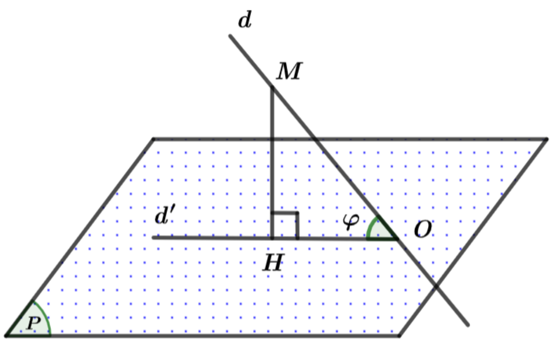
Hình 3

Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian có số đo từ $0°$ đến $90°$.

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có định nghĩa sau:

- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và (P) bằng $90°$.
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu d' của đường thẳng d trên (P) (Hình 4), kí hiệu $(d,(P))$.

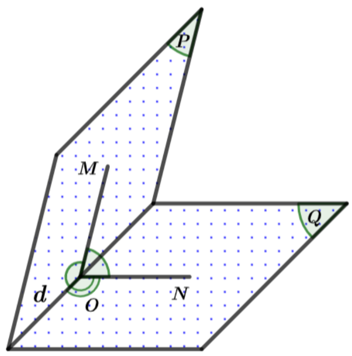


Hình 4

Nhận xét: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ $0°$ đến $90°$.

3. Góc nhị diện

- Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ; kí hiệu $[P,d,Q]$ hoặc $[M,d,N]$, trong đó (P), (Q) là hai nửa mặt phẳng có chung bờ là đường thẳng d và M, N là các điểm lần lượt thuộc hai nửa mặt phẳng (P), (Q) (Hình 5). Đường thẳng d gọi là cạnh của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng (P), (Q) gọi là một mặt của góc nhị diện.



Hình 5

- Cho góc nhị diện. Một góc của đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho.
- Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện đó.
- Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng $90°$ thì góc nhị diện đó gọi là góc nhị diện vuông.

Nhận xét: Góc nhị diện có số đo từ $0°$ đến $180°$.

III. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu vuông góc H của M trên Δ, kí hiệu $d(M,\Delta)$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu vuông góc H của M trên (P), kí hiệu $d(M,(P))$.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ' là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu $d(\Delta,\Delta')$.

4. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P). Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P), kí hiệu $d(\Delta,(P))$.

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu $d((P),(Q))$.

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

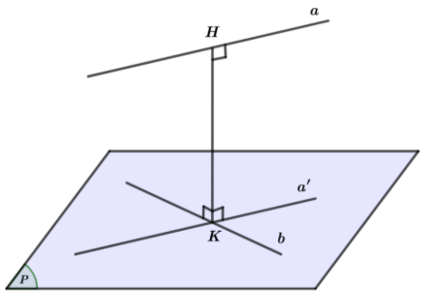
Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau.

- Có và chỉ có một đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a, b gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

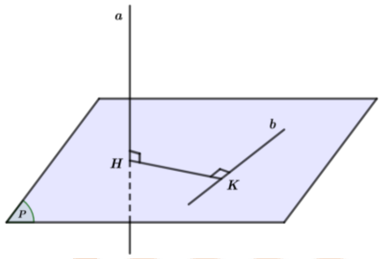
- Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng c với hai đường thẳng a, b gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a,b)$.

Nhận xét

- Gọi (P) là mặt phẳng chứa b a và song song với a, hình chiếu của a trên (P) là a', giao điểm của a' và b là K, hình chiếu của K trên a là H (Hình 6). Khi đó HK là đoạn vuông góc chung của a và b. Ngoài ra, $d(a,b) = HK = d(a,(P))$.



- Trong trường hợp đặc biệt $a \perp b$, ta có thể xác định như sau: Gọi (P) là mặt phẳng chứa b và vuông góc với a, giao điểm của a và (P) là H, hình chiếu của H trên b là K (Hình 7). Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung của a và b.



IV. THỂ TÍCH CỦA MỘT KHỐI ĐA DIỆN

- Công thức tính thể tích của khối lăng trụ: $V = Sh$.

Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối lăng trụ.

- Công thức tính thể tích của khối chóp: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối chóp.

- Công thức tính thể tích khối chóp cụt đều: $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$.
- Trong đó V, h, S_1, S_2 lần lượt là thể tích, chiều cao, diện tích hai đáy của khối chóp cụt đều.

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu đường thẳng vừa vuông góc vừa cắt cả hai đường thẳng a và b?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

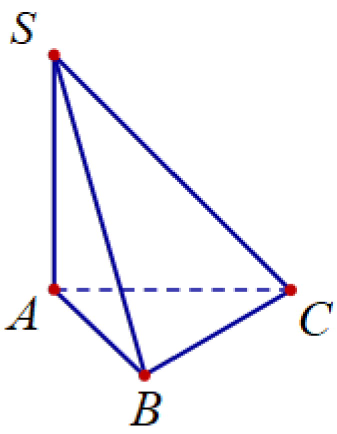
Lời giải

GVSB: Phạm Văn Nghiếp; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn B

Có và chỉ có một đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a,b.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SB \perp BC$ (tham khảo hình vẽ).



Trong tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$, có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

GVSB: Phạm Văn Nghiếp; GVPB: Phạm Thanh Liêm

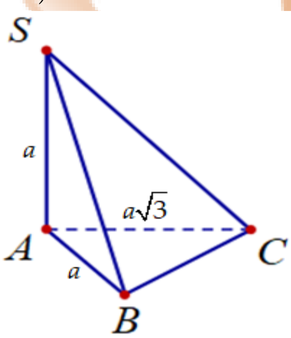
Chọn D

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB, SA \perp AC, SA \perp BC$. Mà $BC \perp SB$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp BA$.

Vậy bốn tam giác SAB, SAC, SBC, ABC đều là tam giác vuông.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.



a) $BC \perp (SAB)$.

b) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng CSA .

c) $\tan CSB = 1$.

d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $60°$.

Lời giải

GVSB: Phạm Văn Nghiếp; GVPB:

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. Mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Từ ý **a)** suy ra $BC \perp SB$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng CSB.

Chọn SAI.

c) Tam giác ABC vuông tại B có $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=a\sqrt{2}$, tam giác SAB vuông tại A có $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SBC vuông tại B có $\tan CSB=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=1$ nên $CSB=45^\circ$.

Chọn ĐÚNG.

d) Từ ý **c)** suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 45°.

Chọn SAI.

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $AA'=2a$.

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ bằng $2a$.

b) Khoảng cách giữa đường thẳng $B'C'$ và mặt phẳng (ABC) bằng a.

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $a\sqrt{3}$.

Lời giải

GVSB: Cao Hữu Trường; GVPB: Phạm Thanh Liêm

a) Ta có $(ABC)//(A'B'C')$, $AA'\perp(ABC)$, $AA'\perp(A'B'C')$.

Suy ra $d((ABC),(A'B'C'))=d(A,(A'B'C'))=AA'=2a$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $B'C'//(ABC)$ và $BB'\perp(ABC)$.

Suy ra $d(B'C',(ABC))=d(B',(ABC))=BB'=2a$.

Chọn SAI.

c) Lấy M là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $BC\perp AM$.

Mà $(ABC)\perp(BCC'B')$ nên $AM\perp(BCC'B')$.

Do đó $d(A,(BCC'B'))=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn SAI.

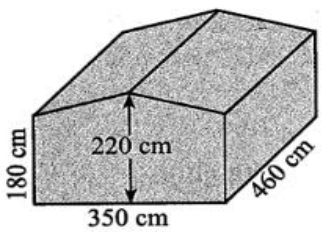
d) Ta có $AM\perp AA'$ và $AM\perp BC$ nên AM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.

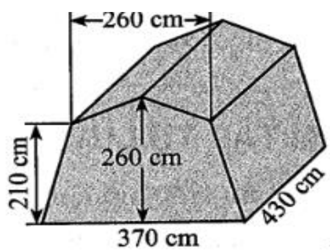
Do đó $d(AA',BC)=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn SAI.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 5. Để chuẩn bị cho hoạt động cắm trại, bạn An tìm hiểu các mẫu lều cắm trại có kích thước như hình vẽ.





Bạn An muốn biết thể tích chênh lệc của hai lều nên thực hiện tính $V_1 - V_2$, trong đó V_1, V_2 lần lượt là thể tích của mẫu lều cắm trại ở hình vẽ. Giá trị của $V_1 - V_2$ bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

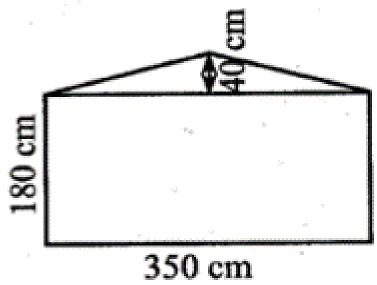
Lời giải

GVSB: Cao Hữu Trường; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Trả lời: $961\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

Cả hai lều đều có dạng khối lăng trụ đứng ngũ giác.

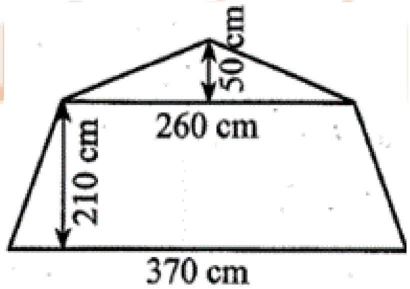
Xét khối lăng trụ ở Hình 11a. Chia mặt đáy thành hai phần bao gồm: Hình chữ nhật có chiều rộng $180\ cm$, chiều dài $350\ cm$; tam giác cân có cạnh đáy dài $350\ cm$, chiều cao $40\ cm$ như hình 12.



Diện tích đáy của lăng trụ đó là $S_1 = 180.350 + \frac{1}{2}.40.350 = 70000\ \left(cm^2\right)$.

Do đó, thể tích của khối lăng trụ ngũ giác đó là $V_1 = S_1.h_1 = 70000.460 = 32200000\ \left(cm^3\right)$.

Xét khối lăng trụ ở hình 11b. Chia mặt đáy thàn hai phần bao gồm: hình thang cân có đáy lớn dài $370\ cm$, dáy nhỏ dài $260\ cm$, chiều cao $210\ cm$; tam giác cân có cạnh đáy dài $260\ cm$, chiều cao $50\ cm$ như hình 13.



Diện tích dáy của lăng trụ đó là $S_2 = \frac{1}{2}(370+260).210 + \frac{1}{2}.260.50 = 72650\ \left(cm^2\right)$.

Do đó, thể tích của khối lăng trụ ngũ giác đó là

$V_2 = S_2.h_2 = 72650.430 = 31239500\ \left(cm^3\right)$

Vậy $V_1 - V_2 = 960500\ \left(cm^3\right) \approx 961\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

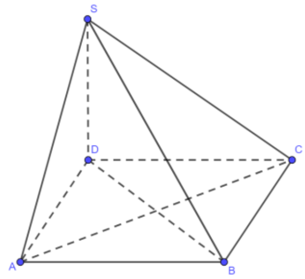
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SD \perp (ABCD)$. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. (SAB). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SBD).

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn D



Ta có: $SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp AC$.

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SD \\ BD; SD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

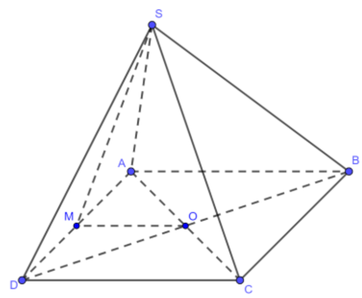
Câu 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của AD. Góc nào sau đây là góc phẳng nhị diện $[B, AD, S]$?

A. SAB. **B.** SDB. **C.** SMO. **D.** SMB.

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn C



Ta có: O là trung điểm của BD; M là trung điểm của AD $\Rightarrow OM // AB \Rightarrow OM \perp AD$.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều ΔSAD cân tại S $\Rightarrow SM \perp AD$.

$\Rightarrow SMO$ là góc phẳng nhị diện $[B, AD, S]$.

Câu 3. Cho đường thẳng a và hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau. Phát biểu nào sau đây đúng về đường thẳng a?

A. Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) thì vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

B. Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) thì vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q).

C. Đường thẳng a vuôn góc với mặt phẳng (Q) thì a nằm trong mặt phẳng (P).

D. Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) thì a vuông góc với mặt phẳng (Q).

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn D

Theo tính chất hai mặt phẳng vuông góc, đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) thì a vuông góc với mặt phẳng (Q).

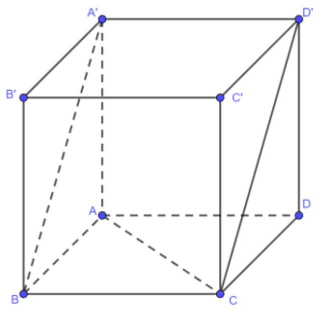
Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn C



Ta có: $A'B \,//\, D'C$ nên $(AC, A'B) = (AC, D'C) = ACD' = 60°$.

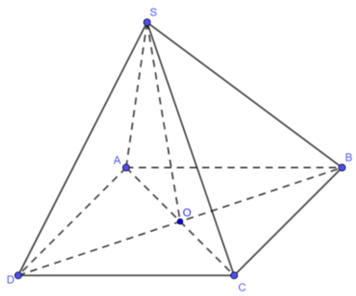
Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn B



Ta có: $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều

nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD)) = (SA, OA) = SAO$.

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SA = a$.

Trong tam giác vuông SOA ta có: $\cos SAO = \frac{AO}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SAO = 45°$.

$\Rightarrow d(S,(ABCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

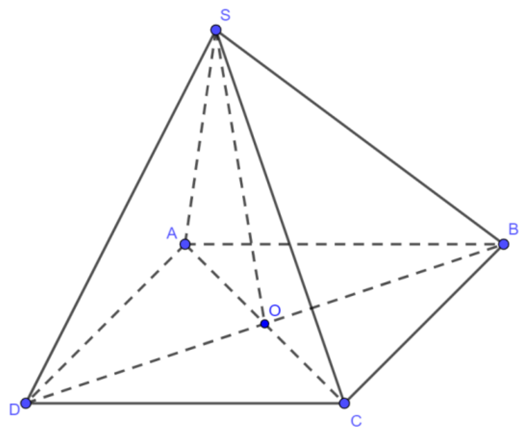
Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy bằng:

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn B



Ta có: $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S,(ABCD)) = SO$.

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SA = a$.

Trong tam giác vuông SOA ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow d(S,(ABCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

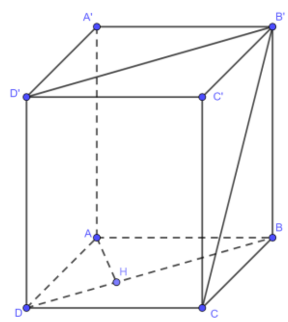
Câu 7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a, A'B' = 2a, A'D' = a$. Khoảng cách từ đường thẳng AA' đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng:

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn A



Ta có: $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BDD'B') \Rightarrow d(AA',(BDD'B')) = d(A,(BDD'B'))$.

Kẻ $AH \perp BD$.

$BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AH$.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BDD'B') \Rightarrow d(A,(BDD'B')) = AH$.

Tam giác BAD vuông tại A có AH là đường cao nên:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{5}{4a^2}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{2a\sqrt{5}}{5}\ \Rightarrow d\left(AA',\left(BDD'B'\right)\right)=\frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 8. Cho khối chóp có diện tích đáy là $3a^2$ và chiều cao là a. Thể tích khối chóp đó bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $9a^3$.

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn B

Thể tích khối chóp đó là: $V=\frac{1}{3}.3a^2.a=a^3$.

Câu 9. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy là $3a^2$ và chiều cao là a. Thể tích khối chóp đó bằng:

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $9a^3$.

Lời giải

GVSB: Tran Thanh Huyen; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn A

Thể tích khối lăng trụ đó là: $V=3a^2.a=3a^3$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của AB.

a) $SH\perp(ABCD)$.

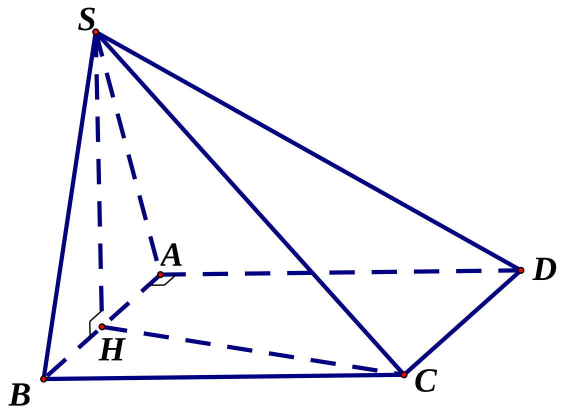
b) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng SCA.

c) $CH=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị $\cos\alpha$ bằng $\frac{3}{4}$.

Lời giải

GVSB: Lương Hồng Nguyên; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai



a) $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $(SAB)\perp(ABCD)$ và $(SAB)\cap(ABCD)=AB$

Mà $SH\perp AB$ (do SAB là tam giác đều)

Suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng SCA.

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng SCA.

Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là HC

Nên $(SC,(ABCD))=(SC,HC)$

Mà tam giác SHC vuông tại H nên $(SC,(ABCD))=(SC,HC)=SCH$.

Chọn SAI.

c) $CH=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác HBC vuông tại B và $BH=\dfrac{a}{2},BC=a$

Áp dụng pytago vào tam giác HBC, ta được:

$$CH=\sqrt{HB^2+BC^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn ĐÚNG.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị $\cos\alpha$ bằng $\dfrac{3}{4}$.

Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị $\cos\alpha$ bằng $\dfrac{3}{4}$.

Theo câu **b)** ta có $(SC,(ABCD))=SCH$

Xét tam giác HBC vuông tại B, $CH=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Và $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (do SAB là tam giác đều cạnh bằng a)

Ta có $SC^2=SH^2+HC^2=2a^2\Rightarrow SC=a\sqrt{2}$

Mặt khác: $\cos SCH=\dfrac{CH}{SC}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}:a\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

Chọn SAI.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, AC=a, SA=\dfrac{a}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của S lên cạnh CD.

a) $AH\perp CD$.

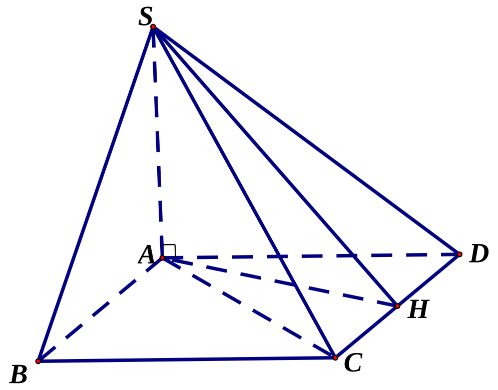
b) $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Góc SDC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S,CD,A]$.

d) Số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$ bằng $30°$.

Lời giải

GVSB: Lương Hồng Nguyên; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai



a) $AH \perp CD$.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

Mặt khác $SH \perp CD$ (do H là hình chiếu của S lên cạnh CD)

Nên $CD \perp (SAH)$

Suy ra $CD \perp AH$.

Chọn ĐÚNG.

b) $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác ADC có $AD = DC = AC = a$ nên ADC là tam giác đều, cạnh bằng a.

Theo câu **a)** $AH \perp CD$ suy ra H là trung điểm CD và $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn ĐÚNG.

c) Góc SDC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S,CD,A]$.

Ta có $(SCD) \cap (ACD) = CD$

Mặt khác: $\begin{cases} AH \perp CD \\ SH \perp CD \end{cases}$

Suy ra góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S,CD,A]$ là góc SHA.

Chọn SAI.

d) Số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$ bằng $30°$.

Theo câu **c)** góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S,CD,A]$ là góc SHA

Xét tam giác SHA vuông tại A, $SA = \dfrac{a}{2}$ và $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác $\tan SHA = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Suy ra $SHA = 30°$

Vậy số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$ bằng $30°$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Góc giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ bằng $45°$.

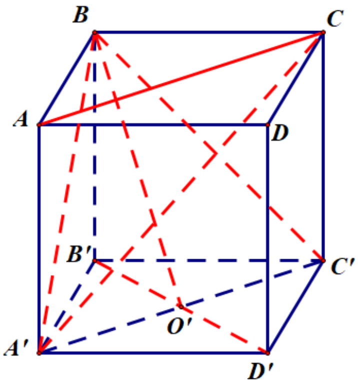
b) Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $A'B'C'D'$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng $\sqrt{2}$.

c) Gọi β là số đo của góc nhị diện $\left[B, A'C', B'\right]$. Giá trị $\tan\beta$ bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Số đo của góc nhị diện $\left[B', A'C, D'\right]$ bằng $120°$.

Lời giải

GVSB: Lương Hồng Nguyên; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai



a) Góc giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ bằng $45°$.

Ta có $A'C'//AC$ nên $\left(AB, A'C'\right) = \left(AB, AC\right) = 45°$.

Chọn ĐÚNG.

b) Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $A'B'C'D'$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng $\sqrt{2}$.

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

Ta có hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng $A'B'C'D'$ là $A'C'$ nên:

$\alpha = \left(A'C, A'C'\right) = CA'C'$

Xét tam giác $A'CC'$ vuông tại C', ta được: $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{A'C'} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn SAI.

c) Gọi β là số đo của góc nhị diện $\left[B, A'C', B'\right]$. Giá trị $\tan\beta$ bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Gọi $O' = A'C' \cap B'D'$

Mà $\left(BA'C'\right) \cap \left(B'A'C'\right) = A'C'$

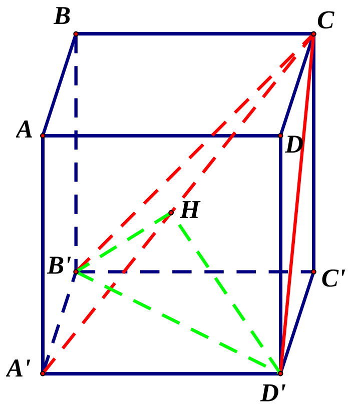
Và $\begin{cases} B'O' \perp A'C' \\ BO' \perp A'C' \end{cases}$ nên $\beta = BO'B'$

Xét tam giác $BB'O'$ vuông tại B' và $BB' = a$, $B'O' = \dfrac{1}{2}B'D' = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $\tan\beta = \tan BO'B' = \dfrac{BB'}{B'O'} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

Chọn SAI.

d) Số đo của góc nhị diện $\left[B', A'C, D'\right]$ bằng $120°$.



Kẻ $B'H \perp A'C$

Mà $B'D' \perp (A'C'CA)$ suy ra $B'D' \perp A'C$

Suy ra $A'C \perp (B'HD')$ suy ra $D'H \perp A'C$

Mà $(B'A'C) \cap (D'A'C) = A'C$

Nên góc phẳng của góc nhị diện $[B', A'C, D']$ là góc $B'HD'$

Mặt khác $\Delta B'A'C = \Delta D'A'C$ suy ra $B'H = D'H = \dfrac{A'D'.D'C}{A'C} = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Và $B'D' = a\sqrt{2}$

Áp dụng định lý côsin vào tam giác $B'HD'$ ta được:

$$\cos B'HD' = \frac{B'H^2 + D'H^2 - B'D'^2}{2.B'H.D'H} = \frac{\frac{6a^2}{9} + \frac{6a^2}{9} - 2a^2}{2.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $B'HD' = 120°$

Vậy góc nhị diện $[B', A'C, D']$ bằng $120°$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 13. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $(A'ABB') \perp (ABC), AA' = 2a, A'AB = 60°$. Gọi H là hình chiếu của A' trên AB.

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (ABC).

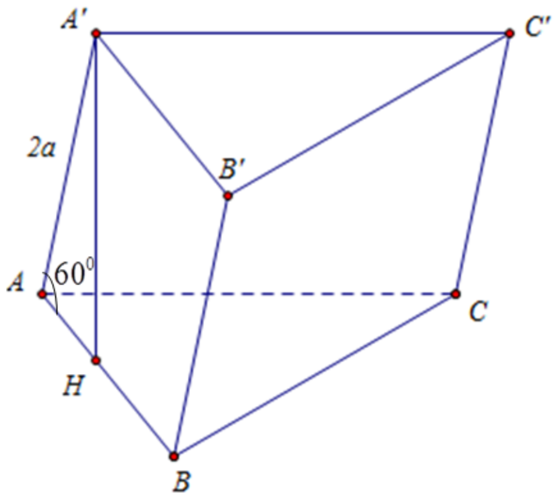
b) $A'H$ không phải là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB.

c) $A'H = a\sqrt{3}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB bằng a.

Lời giải

GVSB: Nguyên Lại Thị Quỳnh; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai



a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (ABC).

Ta có: $A'C' \subset (A'B'C'), AB \subset (ABC)$.

Mà: $(A'B'C') // (ABC)$ nên $d(A'C', AB) = d((A'B'C'),(ABC))$.

Chọn ĐÚNG.

b) $A'H$ không phải là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB.

Theo giả thiết ta có $A'H \perp AB$.

Mà: $\begin{cases}(A'ABB') \perp (ABC) \\ (A'ABB') \cap (ABC) = AB \\ A'H \subset (A'ABB')\end{cases}$.

Suy ra $A'H \perp (ABC)$.

Mà: $(A'B'C') // (ABC)$ nên $A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow A'H \perp A'C'$.

Do đó $A'H$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB.

Chọn SAI.

c) $A'H = a\sqrt{3}$.

Xét trong tam giác vuông $A'AH$ có: $A'H = AA'.\sin A'AH = 2a.\sin 60° = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Chọn ĐÚNG.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB bằng a.

Theo câu b) ta có $A'H$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB nên $d(A'C', AB) = A'H = a\sqrt{3}$.

Chọn SAI.

Bài 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng a.

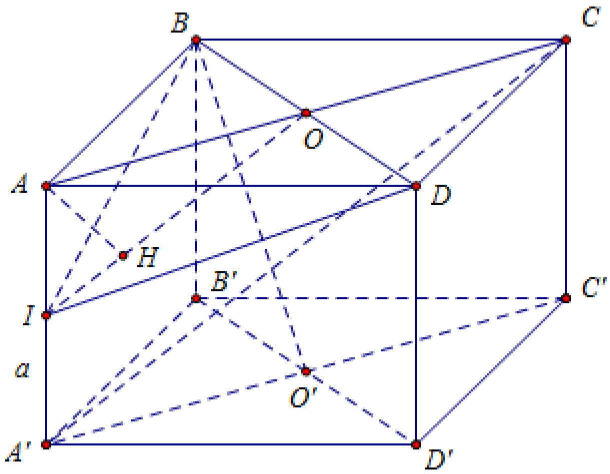
b) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

c) Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng $A'C'$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C$ bằng $\frac{a}{2}$.

Lời giải

GVSB: Nguyên Lại Thị Quỳnh; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai



a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng a.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp DD' \end{cases}$.

Suy ra AD là đoạn vuông góc chung của AB và DD'.

Do đó: $d\left(AB, DD'\right) = AD = a$.

Chọn ĐÚNG.

b) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD, O' = A'C' \cap B'D'$, ta có:

$\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BO \perp \left(ACC'A'\right) \Rightarrow d\left(B, \left(ACC'A'\right)\right) = BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn ĐÚNG.

c) Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng $A'C'$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $A'B = BC' = A'C' = a\sqrt{2}$ nên tam giác $BA'C'$ là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$.

Suy ra $BO' \perp A'C' \Rightarrow d\left(B, A'C'\right) = BO' = \left(a\sqrt{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chọn SAI.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C$ bằng $\frac{a}{2}$.

Gọi I là trung điểm cạnh AA', ta có: OI là đường trung bình của tam giác $AA'C$ nên $OI \,//\, A'C$.

Mà $\begin{cases} OI \subset \left(IBD\right) \\ A'C \not\subset \left(IBD\right) \end{cases} \Rightarrow A'C \,//\, \left(IBD\right)$.

Khi đó: $d\left(BD, A'C\right) = d\left(A'C, \left(IBD\right)\right) = d\left(A', \left(IBD\right)\right) = d\left(A, \left(IBD\right)\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên OI, ta có :

$\begin{cases} AH \perp OI \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (IBD) \Rightarrow d(A,(IBD)) = AH$.

Xét trong tam giác vuông AIO có : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Chọn SAI.

Câu 15. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $3a, \widehat{ABC} = 60°, AA' = 2a$. Đỉnh A' cách đều ba đỉnh A, B, C. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) $A'G$ là đường cao của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

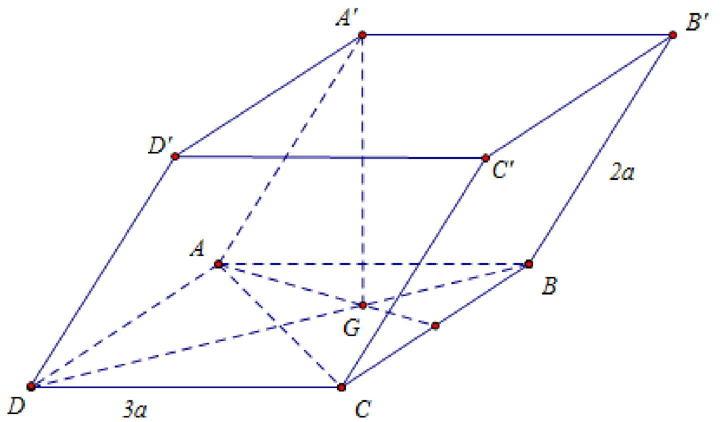
b) Độ dài đường cao của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a\sqrt{3}$.

c) Diện tích hình thoi $ABCD$ bằng $\frac{9a^2\sqrt{3}}{2}$.

d) Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

GVSB: Nguyên Lại Thị Quỳnh; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai



a) $A'G$ là đường cao của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Từ giả thiết ta suy ra tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng $3a$.

Khi đó G là trọng tâm tam giác ABC nên $GA = GB = GC$.

Mà $A'A = A'B = A'C$ nên ta suy ra $A'G$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đó $A'G \perp (ABC)$ hay $A'G$ là đường cao của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Chọn ĐÚNG.

b) Độ dài đường cao của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a\sqrt{3}$.

Xét trong tam giác vuông $A'AG$, có: $AG = \frac{2}{3}.3a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$;

$A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

Chọn SAI.

c) Diện tích hình thoi $ABCD$ bằng $\frac{9a^2\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC bằng: $S_{ABC} = (3a)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra diện tích hình thoi $ABCD$ bằng: $S_{ABCD}=2.S_{ABC}=2.\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2}$.

Chọn ĐÚNG.

d) Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng: $V_{lang\ tru}=S_{ABCD}.A'G=\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2}.a=\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn ĐÚNG.

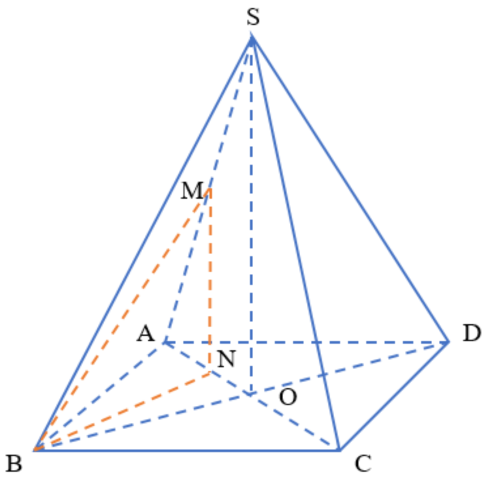
Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 16. **[MĐ3]** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SA. Góc giữa đường thẳng BM với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

GVSB: Ngoc Unicom; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

Trả lời: 60



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Hạ $MN // SO$. Vì $SO\perp(ABCD)$ nên $MN\perp(ABCD)$.

Khi đó $\left[BM;(ABCD)\right]=(BM;BN)=MBN$.

Ta có $AC=BD=a\sqrt{2}\Rightarrow AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O có $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\left(2a\sqrt{2}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Do $MN // SO$ và M là trung điểm của SA nên MN là đường trung bình của ΔSAO.

Suy ra $MN=\dfrac{1}{2}SO=\dfrac{a\sqrt{30}}{4}$.

Trong tam giác SAB có BM là trung tuyến nên

$$BM^2=\frac{BS^2+BA^2}{2}-\frac{SA^2}{4}=\frac{\left(2a\sqrt{2}\right)^2+a^2}{2}-\frac{\left(2a\sqrt{2}\right)^2}{4}=\frac{5a^2}{2}\Rightarrow BM=\frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Xét tam giác vuông BMN có $\sin MBN = \dfrac{MN}{BM} = \dfrac{\frac{a\sqrt{30}}{4}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MBN = 60^\circ$.

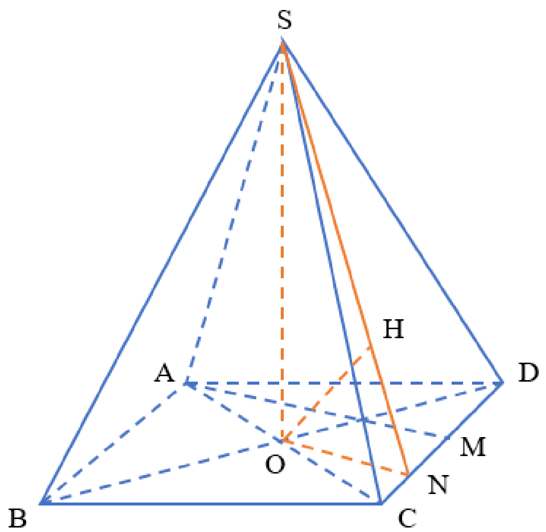
Vậy $\left[BM;(ABCD)\right] = 60^\circ$.

Câu 17. **[MĐ4]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $ABC = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết rằng $SO \perp (ABCD)$, $SO = \dfrac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{ma}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, $m > 0$, $n > 0$. Giá trị $m + n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Ngoc Unicom; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

Trả lời: 11



Xét tam giác ABC có $BA = BC$ và $ABC = 60^\circ$ nên ΔABC là tam giác đều.
Suy ra ΔACD cũng là tam giác đều.

Gọi M là trung điểm CD, suy ra $AM \perp CD$ và $AM = CD.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hạ $ON \perp CD$ với $N \in CD$.
Vì O là trung điểm AC và $ON // AM$ nên ON là đường trung bình trong ΔACM.

Do đó $ON = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Hạ $OH \perp SN$, ta có $(SON) \perp CD \Rightarrow OH \perp CD$.

Khi đó $OH \perp (SCD)$ hay $d(O;(SCD)) = OH$.

Xét tam giác SON vuông tại O có $OH = \dfrac{SO.ON}{SN} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2}} = \dfrac{3a}{8}$.

Suy ra $d\left(O;\left(SCD\right)\right)=OH=\dfrac{3a}{8}\Rightarrow\begin{cases}m=3\\n=8\end{cases}$.

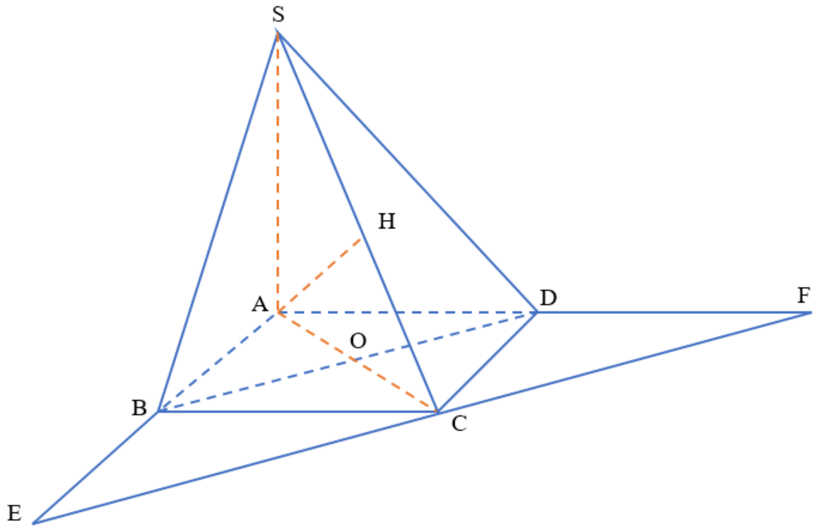
Vậy $m+n=11$.

Câu 18. **[MĐ4]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp\left(ABCD\right)$, số đo của góc nhị diện $\left[S,BC,A\right]$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\dfrac{a\sqrt{30}}{n}$. Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Ngoc Unicom; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

Trả lời: 10



Theo bài ra $\begin{cases}SA\perp BC\\AB\perp BC\end{cases}\Leftrightarrow\left(SAB\right)\perp BC\Rightarrow SB\perp BC$.

Suy ra $\left[S,BC,A\right]=\left(SB,BA\right)=SBA=60°$.

Khi đó $SA=AB.\tan SBA=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

Từ C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB, AD lần lượt tại E,F.

Suy ra $AC\perp EF$ (do $AC\perp BD$).

Ta có $d\left(BD,SC\right)=d\left(BD,\left(SEF\right)\right)=d\left(O,\left(SEF\right)\right)=\dfrac{OC}{AC}.d\left(A,\left(SEF\right)\right)=\dfrac{1}{2}.d\left(A,\left(SEF\right)\right)$.

Hạ $AH\perp SC$ với $H\in SC$.

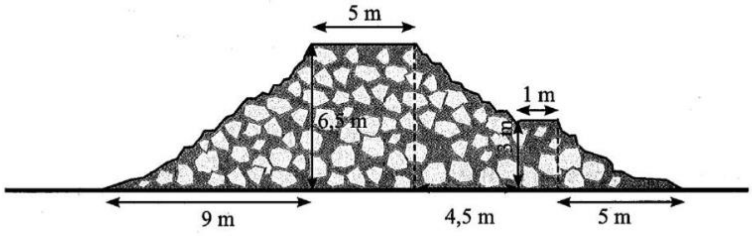
Vì $\begin{cases}SA\perp EF\\AC\perp EF\end{cases}\Leftrightarrow\left(SAC\right)\perp EF\Rightarrow AH\perp EF$ nên $AH\perp\left(SEF\right)$. Suy ra $d\left(A,\left(SEF\right)\right)=AH$.

Xét tam giác vuông SAC vuông tại A có $AH=\dfrac{SA.AC}{SC}=\dfrac{a\sqrt{3}.a\sqrt{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Do đó $d_{\left(BD,SC\right)}=\dfrac{1}{2}.AH=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vậy $n=10$.

Câu 19. **[MĐ3]** Người ta cần xây dựng công trình đê để ngăn nước lũ của sông. Mặt cắt của đê được thiết kế với số đo như trong *Hình* 14. Tổng thể tích vật liệu cần dùng để xây dựng đoạn đê đó bằng bao nhiêu mét khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng đoạn đê thẳng và dài 100 m.

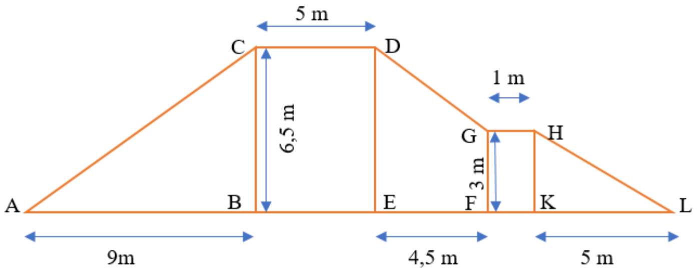


Hình 14

Lời giải

GVSB: Ngoc Unicom; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

Trả lời: 9363



Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}.9.6,5=29,25\ m^2$.

Diện tích hình chữ nhật $BCDE$ là $S_{BCDE}=5.6,5=32,5\ m^2$.

Diện tích hình thang vuông $DEFG$ là $S_{DEFG}=\frac{(3+6,5).4,5}{2}=21,375\ m^2$.

Diện tích hình chữ nhật $FGHK$ là $S_{FGHK}=3.1=3\ m^2$.

Diện tích tam giác HKL là $S_{HKL}=\frac{1}{2}.3.5=7,5\ m^2$.

Diện tích mặt cắt của đê là $S=29,25+32,5+21,375+3+7,5=93,625\ m^2$.
Tổng thể tích vật liệu cần dùng để xây dựng đoạn đê đó là

$$V=S.h=93,625.100=9362,5\approx 9363\ m^3.$$

Vậy tổng thể tích vật liệu cần dùng là $9363\ m^3$.

--*Hết*--

CHỦ ĐỀ 6:

VECTƠ VÀ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Phần Lý thuyết trọng tâm

I. VECTƠ

1. Vectơ và các phép toán vectơ

a) Các khái niệm

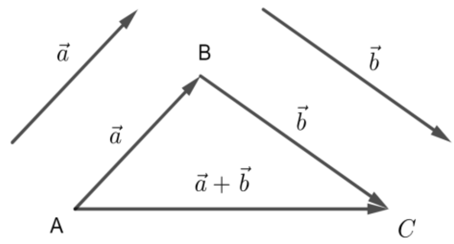
- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
- Giá của vectơ là đường thẳng đi qua hai đầu mút của vectơ. Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa hai đầu mút của vectơ; hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau; hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài; vectơ – không (kí hiệu $\vec{0}$) là vectơ có điểm đầu, điểm cuối trùng nhau; hai vectơ đối nhau nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

b) Các phép toán vectơ trong không gian

- Tổng và hiệu của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$

- Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$. (Hình 1).



Hình 1

- Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vec tơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Chú ý

- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ *(Quy tắc hình bình hành).*

- Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ *(Quy tắc hình hộp).*

- Với ba điểm O,A,B trong không gian, ta có: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ *(Quy tắc hiệu).*

- Tích của vectơ với một số

Cho số thực $k\neq 0$ và vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k<0$.

- Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Chú ý

- Ta có $k\vec{a}=\vec{0}$ khi và chỉ khi $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Với hai vectơ bất kì $\vec{a},\vec{b}$ và hai số thực h,k, ta có:

$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b};\ k\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=k\vec{a}-k\vec{b};\ \left(h+k\right)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a};\ h\left(k\vec{a}\right)=\left(kh\right)\vec{a};$

$1\vec{a}=\vec{a};\left(-1\right)\vec{a}=-\vec{a}$

- Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực $k\neq 0$ sao cho $\vec{a}=k\vec{b}.$

- Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}.$

- Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

- Điều kiện cần và đủ để ba điểm A,B,C thẳng hàng là có số thực $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}.$

- Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right),$ ở đó $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

Chú ý: Với các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bất kì và số thực k tùy ý, ta có:

$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a};$

$\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c};$

$\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right);$

$\vec{a}^2\geq 0,$ trong đó $\vec{a}^2=\vec{a}.\vec{a}.$ Ngoài ra, $\vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}.$

II. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Xét không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$.

1. Tọa độ của vectơ

- $\overrightarrow{OM}=\left(a;b;c\right)\Leftrightarrow M\left(a;b;c\right).$
- Tọa độ của một vectơ $\vec{u}$ là tọa độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}.$
- Nếu $\vec{u}=\left(a;b;c\right)$ thì $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}.$ Ngược lại, nếu $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ thì $\vec{u}=\left(a;b;c\right)$.
- Với $\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ và $\vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$, ta có: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2\end{cases}.$
- Cho hai điểm $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$. Khi đó, ta có:

$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right).$

2. Biểu thức tọa độ các phép toán véc tơ

* Cho hai véc tơ $\vec{u}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ và $\vec{v}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$. Khi đó:

$\vec{u}+\vec{v}=\left(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2\right)$

$\vec{u}-\vec{v}=\left(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2\right)$

$m\vec{u}=\left(mx_1;my_1;mz_1\right),\ m\in\mathbb{R}.$

$\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)=\left(y_1z_2-y_2z_1;z_1x_2-z_2x_1;x_1y_2-x_2y_1\right).$$

Chú ý

- Hai véc tơ $\vec{u}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ và $\vec{v}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$, $\left(\vec{v}\neq\vec{0}\right)$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực m sao cho $\begin{cases} x_1=mx_2 \\ y_1=my_2 \\ z_1=mz_2 \end{cases}$.

- Nếu $\vec{a}=\left(x;y;z\right)$ thì $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- Nếu $A\left(x_1;y_1;z_1\right)$ và $B\left(x_2;y_2;z_2\right)$ thì

$\left|AB\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$

- Với hai véc tơ $\vec{u}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ và $\vec{v}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$ khác véc tơ $\vec{0}$ ta có:

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}.\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}.$$

* Cho hai điểm $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$. Nếu $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2};z_M=\frac{z_A+z_B}{2}$

* Cho tam giác ABC có $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$, $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$, $C\left(x_C;y_C;z_C\right)$ Nếu $G\left(x_G;y_G;z_G\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

3. Phương trình mặt phẳng

a) Véc tơ pháp tuyến và cặp véc tơ chỉ phương của mặt phẳng

- Nếu $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$ thì $\vec{n}$ được gọi là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$.
- Hai véc tơ không cùng phương có giá song song hoặc thuộc mặt phẳng $\left(P\right)$ được gọi là cặp véc tơ chỉ phương của mặt phẳng $\left(P\right)$.

Chú ý: Nếu hai véc tơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$, $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$ là cặp véc tơ chỉ phương của mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ thì $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

b) Phương trình mặt phẳng

Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua điểm $I\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và nhận $\vec{n}=\left(a;b;c\right)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là: $ax+by+cz+d=0$ với $d=-ax_0-by_0-cz_0$

Mặt phẳng đi qua ba điểm $A\left(a;0;0\right)$, $B\left(0;b;0\right)$, $C\left(0;0;c\right)$ với $abc\neq0$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

c) Điều kiện song song và vuông góc của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $\left(P_1\right)$, $\left(P_2\right)$ lần lượt có phương trình tổng quát là:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$; $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Gọi $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$ lần lượt là hai véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1), (P_2).

$(P_1)//(P_2) \Leftrightarrow$ tồn tại số thực $k\neq 0$ sao cho $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\overrightarrow{n_2}\\ D_1\neq kD_2\end{cases}$

$(P_1)\perp(P_2)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

d) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$, $(A^2+B^2+C^2>0)$ được tính theo công thức $d(M,(P))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

4. Phương trình đường thẳng

a) Véc tơ chỉ phương của đường thẳng

Nếu véc tơ $\vec{u}$ khác véc tơ $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ được gọi là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

b) Phương trình đường thẳng

* Hệ phương trình $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+bt\end{cases}$, trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0, t là tham số, được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$.

* Đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ (với $abc\neq 0$) thì có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

c) Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

* $\Delta_1//\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0}\\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0}\end{cases}$.

* Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}\\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0\end{cases}$.

* Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$.

5. Phương trình mặt cầu

* Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

* Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ xác định một mặt cầu khi và chỉ khi

$a^2+b^2+c^2-d>0$. Ngoài ra, nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì phương trình đó xác định một mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

6. Góc

a) Côsin của góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(a_1;b_1;c_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó, ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

Nhận xét: $\Delta_1\perp\Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

b) Sin của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a_1;b_1;c_1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó, ta có:

$$\sin(\Delta,(P))=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

c) Côsin của góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1),(P_2))=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

GVSB: Nguyễn Thị Thu Hưng; GVPB: Đỗ Hải Thu

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Ví dụ 1. Cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ và $(\vec{u},\vec{v})=60°$. Khi đó, $\vec{u}.\vec{v}$ bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 12.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Anh Tuấn; GVPB: Vân Vũ

Chọn A

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})=2.3.\cos 60°=3$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$ có bán kính bằng:

A. 81. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

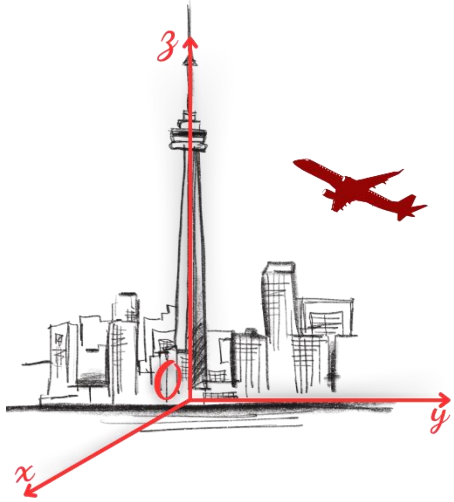
GVSB: Nguyễn Anh Tuấn; GVPB:Vân Vũ

Chọn C

Bán kính mặt cầu (S) bằng $R=\sqrt{9}=3$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Ví dụ 3. Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng ra đa có phạm vi theo dõi $500\,\text{km}$ được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vi trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (***hình vẽ***) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét).



Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất $10\,\text{km}$, cách $300\,\text{km}$ về phía đông và $200\,\text{km}$ về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.

a) Ra đa ở vị trí có toạ độ $(0;0;0)$.

b) Vị trí A có toạ độ $(300;200;10)$.

c) Khoảng cách từ máy bay đến ra đa là khoảng $360,69\,\text{km}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d) Ra đa của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Anh Tuấn; GVPB:Vân Vũ

Theo giả thiết, ra đa ở vị trí có tọa độ $(0;0;0,08)$; điểm $A(-300;-200;10)$.

Vậy khoảng cách từ máy bay đến ra đa là:

$\sqrt{(-300-0)^2+(-200-0)^2+(10-0,08)^2} \approx 360,69\,\text{km}$.

Vì $360,69<500$ nên ra đa của trung tâm kiểm soát không lưu có phát hiện được máy bay tại vị trí A.

a) Chọn SAI.

b) Chọn SAI

c) Chọn ĐÚNG.

d) Chọn SAI.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là $3\,\text{km}$.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+7)^2=9$.

b) Điểm $A(2;2;7)$ nằm ngoài mặt cầu (S).

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Lời giải

GVSB: Khanh Tam; GVPB: Vân Vũ

a) Mặt cầu (S) tâm $I(1;3;7)$, bán kính $R=3 \to (S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9$.

Chọn SAI.

b) Ta có $IA=\sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2+(7-7)^2}=\sqrt{2}<R$. Vậy điểm $A(2;2;7)$ nằm trong mặt cầu (S).

Chọn SAI.

c) Từ đó kết luận người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Chọn ĐÚNG.

d) Giả sử $B(5;6;7) \Rightarrow IB=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2+(7-7)^2}=5>R$. Từ đó kết luận người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(5;6;7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;3), B(-1;-1;2)$ và $C(-3;-2;2)$. Tính $\cos ABC$.

Lời giải

GVSB: Khanh Tam; GVPB: Vân Vũ

Trả lời: -0,8.

Ta có: $\overrightarrow{BA}=(2;0;1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ và $\overrightarrow{BC}=(-2;-1;0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

Tính $\cos ABC=\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{2.(-2)+0.(-1)+1.0}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=-\dfrac{4}{5}$.

Phần Tự luyện

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác ABC. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
C. $\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}$.
D. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

Lời giải

GVSB: Thuỷ Trần; GVPB: Vân Vũ

Chọn B

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$ nên đáp án A, D đúng.

Theo quy tắc trừ hai véc tơ ta có $\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}$ nên đáp án C đúng.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$. Tọa độ của điểm M là

A. $(-4;3;2)$. **B.** $(2;3;-4)$. **C.** $(3;-4;2)$. **D.** $(-2;-3;4)$.

Lời giải

GVSB: Thuỷ Trần; GVPB: Vân Vũ

Chọn B

$\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{j}-c.\vec{k}$ thì tọa độ của điểm M là $(a;b;c)$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;2;-1)$, $\vec{v}=(5;-4;2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}-\vec{v}$ là

A. $(-2;6;-3)$. **B.** $(2;-6;3)$. **C.** $(-2;-2;-3)$. **D.** $(2;2;1)$.

Lời giải

GVSB: Thuỷ Trần; GVPB: Vân Vũ

Chọn A

$\vec{u}-\vec{v}=(3-5;2-(-4);-1-2)=(-2;6;-3)$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;-2;3)$. Tọa độ của vectơ $-3\vec{u}$ là

A. $(3;-6;9)$. **B.** $(-3;-6;-9)$. **C.** $(3;6;9)$. **D.** $(-3;6;-9)$.

Lời giải

GVSB: Thuỷ Trần; GVPB: Vân Vũ

Chọn D

$\vec{u}=(1;-2;3)$

$\Rightarrow -3\vec{u}=(-3.1;-3.(-2);-3.3)=(-3;6;-9)$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(2;-3;4)$, $N(1;2;3)$ và $P(3;-2;2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có tọa độ là

A. $(2;-1;3)$. **B.** $(6;-3;9)$. **C.** $(-2;1;-3)$. **D.** $(-6;3;-9)$.

Lời giải

GVSB: Thuỷ Trần; GVPB: Vân Vũ

Chọn A

Gọi $G(x;y;z)$ là trọng tâm của tam giác MNP.Khi đó tọa độ điểm G được xác định bởi

$$\begin{cases} x=\dfrac{2+1+3}{3}=2 \\ y=\dfrac{-3+2+(-2)}{3}=-1 \\ z=\dfrac{4+3+2}{3}=3 \end{cases}$$

Vậy $G(2;-1;3)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}=(2;3;-3)$ và $\vec{v}=(-3;-2;4)$ bằng

A. $\sqrt{22}.\sqrt{29}$. **B.** $-\sqrt{22}.\sqrt{29}$. **C.** 24. **D.** -24.

Lời giải

GVSB: Thuỷ Trần; GVPB: Vân Vũ

Chọn D

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}=(2;3;-3)$ và $\vec{v}=(-3;-2;4)$ là

$\vec{u}.\vec{u}=2(-3)+3.(-2)+(-3).4=-24$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai điểm $I(3;5;-7)$ và $K(-5;5;-1)$ bằng

A. 100. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 17.

Lời giải

GVSB: Thuỷ Trần; GVPB: Vân Vũ

Chọn C

Khoảng cách giữa hai điểm $I(3;5;-7)$ và $K(-5;5;-1)$ bằng

$$IJ=\sqrt{(x_J-x_I)^2+(y_J-y_I)^2+(z_J-z_I)^2}$$
$$=\sqrt{(-5-3)^2+(5-5)^2+(-1+7)^2}$$
$$=10.$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;1;-2)$, $\vec{v}=(-2;1;5)$. Tọa độ của vectơ $[\vec{u};\vec{v}]$ là

A. $(5;7;-11)$. **B.** $(-7;11;-5)$. **C.** $(7;-11;5)$. **D.** $(-5;-7;11)$.

Lời giải

GVSB: Thuỷ Trần; GVPB: Vân Vũ

Chọn C

Cho hai vectơ $\vec{u}=(3;1;-2)$, $\vec{v}=(-2;1;5)$.

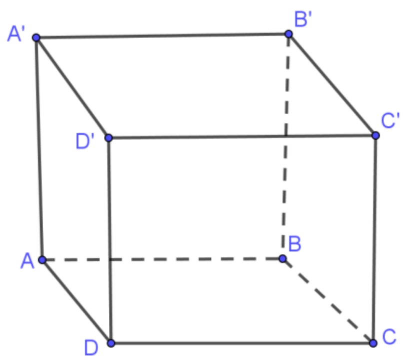
Tọa độ của vectơ $[\vec{u};\vec{v}]$ được xác định bởi $[\vec{u};\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}1&-2\\1&5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&3\\5&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&1\\-2&1\end{vmatrix}\right)=(7;-11;5)$

Câu 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Cặp vectơ nào sau đây là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(ABB'A')$?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD'}$. **C.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$.

Lời giải

GVSB: Chungthanh Vu; GVPB: Hoàng Nhàn



Cặp véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trên $(ABB'A')$ nên là cặp véc tơ chỉ phương của $(ABB'A')$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x+3y-4z+5=0$?

A. $\vec{n}_1=(3;4;5)$. **B.** $\vec{n}_2=(1;3;-4)$. **C.** $\vec{n}_3=(1;3;4)$. **D.** $\vec{n}_4=(3;-4;5)$.

Lời giải

GVSB: Chungthanh Vu; GVPB: Hoàng Nhàn

Mặt phẳng $(P): x+3y-4z+5=0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(1;3;-4)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $K(1;1;1)$ nhận $\vec{u}=(1;0;1)$, $\vec{v}=(1;1;0)$ là cặp vectơ chỉ phương có phương trình tổng quát là:

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $x-y+z-1=0$. **C.** $x+y-z-1=0$. **D.** $-x+y+z-1=0$.

Lời giải

GVSB: Chungthanh Vu; GVPB: Hoàng Nhàn

Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng cần lập là $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-1;1;1)$, hơn nữa do mặt phẳng đi qua điểm $K(1;1;1)$ nên phương trình mặt phẳng là:

$-(x-1)+y-1+z-1=0 \Leftrightarrow -x+y+z-1=0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng cắt ba trục toạ độ tại ba điểm $D(3;0;0)$, $E(0;-2;0)$, $G(0;0;-7)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{7}+1=0$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1$. **C.** $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{7}=1$. **D.** $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1$.

Lời giải

GVSB: Chungthanh Vu; GVPB: Hoàng Nhàn

Phương trình chính tắc của mặt phẳng là $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{7}=1$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $I(15;-16;17)$ và nhận $\vec{u}=(-7;8;-9)$ là vectơ chỉ phương có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=15-7t\\y=-16+8t\\z=17-9t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=15-7t\\y=-16+8t\\z=17-9t^2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=15-7t^2\\y=-16+8t\\z=17-9t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-7+15t\\y=8-16t\\z=-9+17t\end{cases}$.

Lời giải

GVSB: Chungthanh Vu; GVPB: Hoàng Nhàn

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $I(15;-16;17)$ và nhận $\vec{u}=(-7;8;-9)$ làm véc tơ chỉ phương là $\begin{cases}x=15-7t\\y=-16+8t\\z=17-9t\end{cases}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta: \frac{x-5}{8}=\frac{y-9}{6}=\frac{z-12}{3}$?

A. $\vec{u}_1=(8;6;3)$. **B.** $\vec{u}_2=(8;6;-3)$. **C.** $\vec{u}_3=(-8;6;-3)$. **D.** $\vec{u}_4=(5;9;12)$.

Lời giải

GVSB: Chungthanh Vu; GVPB: Hoàng Nhàn

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_1}(8;6;3)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-6;-9;15)$ và đường kính bằng 10 có phương trình là

A. $(x+6)^2+(y+9)^2+(z-15)^2=100$. **B.** $(x+6)^2+(y+9)^2+(z-15)^2=25$.

C. $(x-6)^2+(y-9)^2+(z+15)^2=100$. **D.** $(x-6)^2+(y-9)^2+(z+15)^2=25$.

Lời giải

GVSB: Chungthanh Vu; GVPB: Hoàng Nhàn

Bán kính của mặt cầu là $R=5$, vậy phương trình mặt cầu tâm $I(-6;-9;15)$ bán kính $R=5$ là $(x+6)^2+(y+9)^2+(z-15)^2=25$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào trong các điểm sau đây thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=50$?

A. $M(3;4;6)$. **B.** $N(4;4;5)$. **C.** $P(3;4;-5)$. **D.** $Q(-3;3;-5)$.

Lời giải

GVSB: Chungthanh Vu; GVPB: Hoàng Nhàn

Thay lần lượt tọa độ của các điểm M,N,P,Q vào phương trình mặt cầu, ta thấy tọa độ điểm $P(3;4;-5)$ thỏa mãn, vậy điểm P thuộc mặt cầu (S).

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 17. **[MĐ2]** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

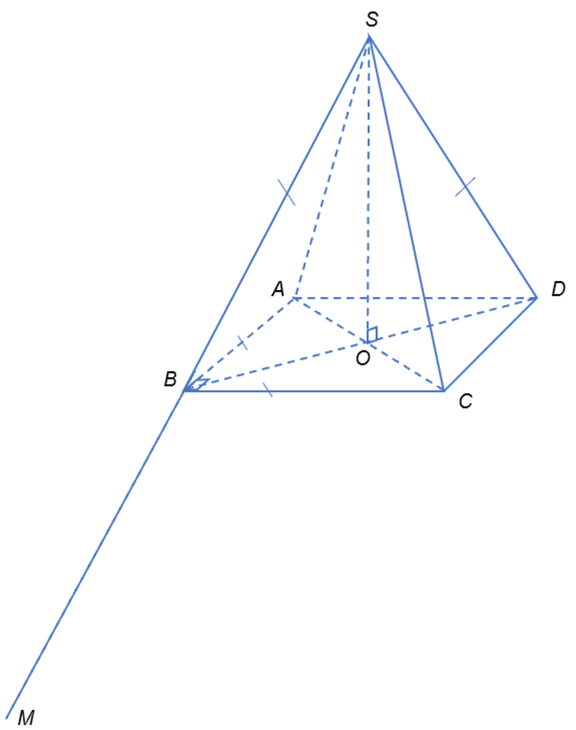
b) Tam giác SBD vuông cân tại S.

c) $\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BD}\right)=45^\circ$.

d) $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{BD}=-a^2$.

Lời giải

GVSB: Đặng Nguyễn Xuân Hương; GVPB: Hoàng Nhàn



a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.
Chọn ĐÚNG.
b) Tam giác SBD vuông cân tại S.
Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $BD = a\sqrt{2}$.
Tam giác SBD có $SB = SD = a$ nên $\triangle SBD$ là tam giác cân.
Ta có $SB^2 + SD^2 = BD^2 = 2a^2$ nên $\triangle SBD$ là tam giác đều.
Vậy tam giác SBD vuông cân tại S.
Chọn ĐÚNG.
c) Tam giác SBD vuông cân tại S nên $SBD = 45^o$. Gọi M là điểm đối xứng của S qua B.
$\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BD}\right) = MBD = 180° - 45° = 135°$.
Chọn SAI.
d) $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{BD} = SB.BD.\cos\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}\right) = a.a\sqrt{2}.\cos 135° = -a^2$.
Chọn ĐÚNG.

Câu 18. **[MĐ2]** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.
a) $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-1)$.
b) $\overrightarrow{AC} = (-2;-1;1)$.
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Lời giải

GVSB: Đặng Nguyễn Xuân Hương; GVPB: Hoàng Nhàn

a) $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-1)$.
Chọn ĐÚNG.

b) $\overrightarrow{AC} = (2;1;-1)$.
Chọn SAI.
c) $3\overrightarrow{AC} = (6;3;-3) \neq \overrightarrow{AB}$.
Chọn SAI.
d) Xét các tỉ số $\dfrac{-3}{2} \neq \dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-1}{-1}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
Chọn ĐÚNG.

Câu 19. **[MĐ2]** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;-1;-2)$, $B(3;1;2)$, $C(1;-1;1)$, $D(x_D;y_D;z_D)$.
a) $\overrightarrow{AB} = (1;2;4)$.
b) $\overrightarrow{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$.
c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
d) Tọa độ điểm D là $(0;3;3)$.

Lời giải

GVSB: Đặng Nguyễn Xuân Hương; GVPB: Hoàng Nhàn

a) $\overrightarrow{AB}=(1;2;4)$.

Chọn ĐÚNG.

b) $\overrightarrow{DC}=(1-x_D;-1-y_D;1-z_D)$.

Chọn ĐÚNG.

c) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

Chọn ĐÚNG.

d) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x_D=1\\-1-y_D=2\\1-z_D=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=0\\y_D=-3\\z_D=-3\end{cases}$.

Vậy tọa độ điểm D là $(0;-3;-3)$.

Chọn SAI.

Câu 20. **[MĐ2]** Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;2)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AA'.

a) Tọa độ điểm M là $(1;0;0)$.

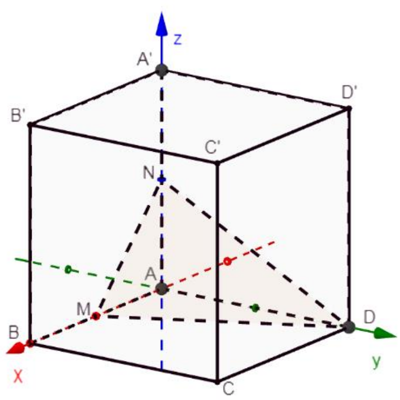
b) Tọa độ điểm N là $(0;1;0)$.

c) Phương trình mặt phẳng (DMN) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

d) Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (DMN) bằng $\frac{8}{3}$.

Lời giải

GVSB: Đặng Nguyễn Xuân Hương; GVPB: Hoàng Nhàn



a) Tọa độ điểm M là $(1;0;0)$.

Chọn ĐÚNG.

b) Tọa độ điểm N là $(0;0;1)$.

Chọn SAI.

c) Mặt phẳng (DMN) qua 3 điểm D,M,N nên có phương trình $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có $C'(2;2;2)$ và $(DMN):\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ hay $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}-1=0$.

$$d(C',(DMN))=\frac{\left|\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{1}-1\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{8}{3}.$$

Chọn ĐÚNG.

Câu 21. **[MĐ2]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):y=0,(Q):\sqrt{3}x-y-2024=0$.

Xét các vectơ $\vec{n}_1=(0;1;0),\vec{n}_2=(\sqrt{3};-1;0)$.

a) $\vec{n}_1$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

b) $\vec{n}_2$ không là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

c)) $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=-1$.

d) Góc giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng $30°$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Thanh; GVPB: Hoàng Nhàn

a) $(P):y=0\Leftrightarrow(P):0.x+y+0.z=0\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=(0;1;0)\equiv\overrightarrow{n_1}$.

Chọn ĐÚNG.

b) $(Q):\sqrt{3}x-y-2024=0\Leftrightarrow(Q):\sqrt{3}x-y+0.z-2024=0\Rightarrow\overrightarrow{n_{(Q)}}=(\sqrt{3};-1;0)\equiv\overrightarrow{n_2}$.

Chọn SAI.

c) $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0.\sqrt{3}+1.(-1)+0.0=-1$.

Chọn ĐÚNG.

d) Gọi α là góc giữa $(P),(Q)$, ta có

$$\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|-1|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}.\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\alpha=60°$.

Chọn SAI.

Câu 22. **[MĐ2]** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2024}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+1=0$. Xét các vectơ $\vec{u}=(2;1;-2),\vec{n}=(2;2;-1)$.

a) $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

b) $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

c)) cosin của góc giữa Δ và (P) là $\frac{8}{9}$.

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng $63°$ (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Thanh; GVPB: Hoàng Nhàn

a) $\Delta: \frac{x-2024}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2025}{-2} \Rightarrow \Delta$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-2)\equiv\vec{u}$.

Chọn ĐÚNG.

b) $(P): 2x+2y-z+1=0 \Rightarrow (P)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;2;-1)\equiv\vec{n}$.

Chọn ĐÚNG.

c) Gọi α là góc giữa Δ và (P) nên

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|2.2+1.2+(-2).(-1)\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{17}}{9}.$$

Chọn SAI.

d) Gọi α là góc giữa Δ và (P) nên $\cos\alpha=\frac{\sqrt{17}}{9}\Rightarrow\alpha\approx63°$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 23. **[MĐ2]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}, \Delta_2: \frac{x+4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1}$. Xét các vectơ $\vec{u}_1=(1;-1;2)$ và $\vec{u}_2=(2;1;-1)$.

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0;3;-3)$ và có $\vec{u}_1=(1;-1;2)$ là một vectơ chỉ phương.

b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4;-2;4)$ và có $\vec{u}_2=(2;1;-1)$ là một vectơ chỉ phương.

c)) $\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=(1;-5;-3)$.

d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Thanh; GVPB: Hoàng Nhàn

a) $\Delta_1: \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;-1;2)$ và qua điểm $M_1(0;3;-3)$.

Chọn ĐÚNG.

b) $\Delta_2: \frac{x+4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(2;1;-1)$ và qua điểm $M_2(-4;-2;4)$.

Chọn ĐÚNG.

c) $\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-1;5;3)$.

Chọn SAI.

d) $\overrightarrow{M_1M_2}=(-4;-5;7)$ và $\overrightarrow{M_1M_2}.\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=(-4).(-1)+(-5).5+7.3=0$ nên hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không chéo nhau

Chọn SAI.

Câu 24. **[MĐ2]** Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(17;20;45)$. Biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là $4\,\text{km}$.

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là: $(x-17)^2+(y-20)^2+(z-45)^2=4000^2$.

b) Nếu người đi biển ở vị trí $M(18;21;50)$ thì không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hái đăng.

c)) Nếu người đi biển ở vị trí $N(4019;21;44)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển ở vị trí có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 8 km.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Thanh; GVPB: Hoàng Nhàn

a) $4\,km=4000\,m$.

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-17)^2+(y-20)^2+(z-45)^2=4000^2$.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $MI=\sqrt{(18-17)^2+(21-20)^2+(50-45)^2}=3\sqrt{3}<4000$ nên người này đứng trong vùng phủ sáng của ngọn hải đăng.

Chọn SAI.

c) Ta có: $NI=\sqrt{(4019-17)^2+(21-20)^2+(44-44)^2}\simeq 4002>4000$ nên người này đứng ngoài vùng phủ sáng của ngọn hải đăng.

Chọn SAI.

d)) Nếu hai người đi biển ở vị trí có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì hai người đứng trong vùng phủ sóng nên khoảng cách của 2 người này phải không quá 8 km

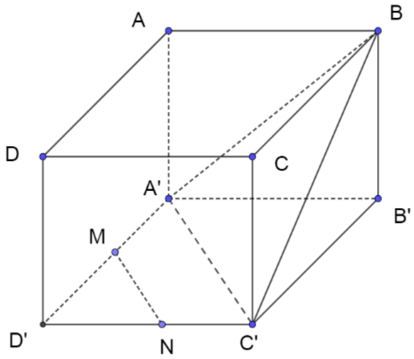
Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vecto $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

GVSB: Vũ Đăng ; GVPB: Tuyet Trinh



Gọi hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Xét tam giác $A'C'D'$ có MN là đường trung bình có: $\begin{cases} MN = \frac{1}{2}A'C' \\ MN // A'C' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

Ta có: $\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B}\right) = \dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'B}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{A'B}\right|} = \dfrac{\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B}}{\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'C'}\right|\left|\overrightarrow{A'B}\right|}$ (1)

Mà $\Delta A'BC'$ là tam giác đều nên $BA'C' = 60^\circ$; $A'B = A'C' = C'B = a\sqrt{2}$ nên ta có:

$\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{2}A'C'.A'B.\cos\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B}\right) = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$

Thay vào (1) ta được

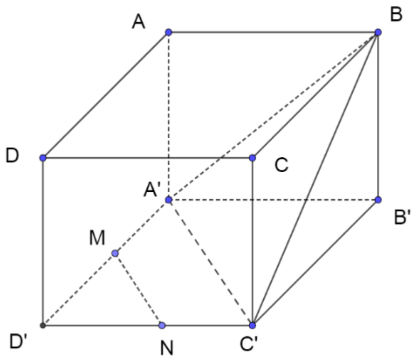
$$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B}}{\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'C'}\right|\left|\overrightarrow{A'B}\right|} = \dfrac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B}\right) = 60^\circ$$

Vậy $\varphi = 60^\circ$

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{C'B} = na^2$ (n là số thập phân) . Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Vũ Đăng ; GVPB: Tuyet Trinh



Xét tam giác $A'C'D'$ có MN là đường trung bình có: $\begin{cases} MN = \frac{1}{2}A'C' \\ MN // A'C' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

Vì $\Delta A'BC'$ là tam giác đều nên:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{C'B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{C'B}=\frac{1}{2}A'C'.C'B.\cos\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{C'B}\right)=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$$

Mà $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{C'B}=na^2$

$\Rightarrow n=-0,5$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;5), B(1;1;3), C(4;-2;3)$. Số đo của góc ABC bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

GVSB: Vũ Đăng ; GVPB: Tuyet Trinh

Ta có:

$\overrightarrow{BA}=(0;2;2)\Rightarrow AB=\sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

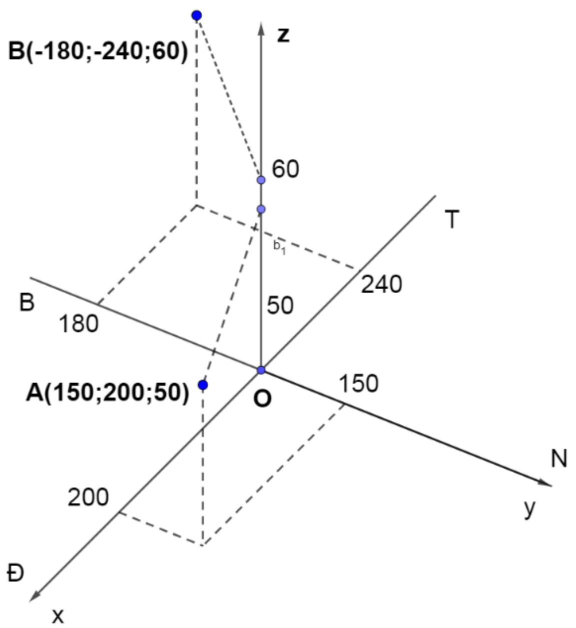
$\overrightarrow{BC}=(3;-3;0)\Rightarrow AC=\sqrt{3^2+(-3)^2+0^2}=3\sqrt{2}$

$$\cos ABC=\cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{0.3-2.3+0.2}{2\sqrt{2}.3\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow ABC=120^\circ$$

Câu 28. Trong Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180m về phía bắc và 240m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60m. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Vũ Đăng ; GVPB: Tuyet Trinh



Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có:

Flycam I có toạ độ là $A(150;200;50)$; Flycam II có toạ độ là $B(-180;-240;60)$

Khoảng cách giữa hai flycam chính là độ dài của đoạn thẳng AB

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(-330;-440;10\right)$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(-330\right)^2+\left(-440\right)^2+10^2}\approx 550,09\left(m\right)$

Vậy khoảng cách giữa hai flycam là $550\left(m\right)$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):3x+y+4z-2024=0$ và $(Q):x+3y-4z-2025=0$. Góc giữa hai mặt phẳng $(P);(Q)$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Huyền Nguyễn; GVPB: Tuyet Trinh

Ta có: $(P):3x+y+4z-2024=0\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;4)$ là một vecto pháp tuyến của (P)

$(Q):x+3y-4z-2025=0\Rightarrow\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;3;-4)$ là một vecto pháp tuyến của (Q).

$\cos\left((P),(Q)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right)\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}}{|\overrightarrow{n_{(P)}}|.|\overrightarrow{n_{(Q)}}|}\right|=\left|\dfrac{3.1+1.3-4.4}{\sqrt{26}.\sqrt{26}}\right|=\dfrac{5}{13}\Rightarrow\left((P),(Q)\right)\approx 67^\circ$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+24}{3}=\dfrac{y-25}{4}=\dfrac{z}{-5}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-26}{5}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Huyền Nguyễn; GVPB: Tuyet Trinh

Ta có: $\Delta_1:\dfrac{x+24}{3}=\dfrac{y-25}{4}=\dfrac{z}{-5}\Rightarrow\overrightarrow{u_1}=(3;4;-5)$ là một vecto chỉ phương của Δ_1

$\Delta_2:\dfrac{x-26}{5}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}\Rightarrow\overrightarrow{u_2}=(5;3;4)$ là một vecto chỉ phương của Δ_1

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|}\right|=\left|\dfrac{3.5+4.3-5.4}{\sqrt{50}.\sqrt{50}}\right|=\dfrac{7}{50}\Rightarrow\left(\Delta_1,\Delta_2\right)\approx 82^\circ$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P):12y+5z+1=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Huyền Nguyễn; GVPB: Tuyet Trinh

Ta có: $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-2}\Rightarrow\vec{u}=(1;2;-2)$ là một vecto chỉ phương của Δ

$(P):12y+5z+1=0\Rightarrow\vec{n}=(0;12;5)$ là một vecto pháp tuyến của (P)

$\sin(\Delta,(P))=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\left|\dfrac{\vec{u}.\vec{n}}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{1.0+2.10+(-2).5}{13.3}\right|=\dfrac{10}{39}\Rightarrow\left(\Delta,(P)\right)\approx 15^\circ$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(5;3;6),B(1;1;4),C(2;1;2)$ và $D(0;0;4)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(BCD\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Huyền Nguyễn; GVPB: Tuyet Trinh

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(1;0;-2);\overrightarrow{BD}=(-1;-1;0)\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(-2;2;-1)$

Mặt phẳng (BCD) đi qua điểm D và có VTPT $\vec{n}=(-2;2;-1)$, do đó phương trình có dạng:

$$-2x+2y-z+4=0$$

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) là: $d(A,(BCD))=\frac{|-2.5+2.3-6+4|}{3}=2$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng 2.

Câu 33. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mết) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy), người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A,B,C ở mái nhà bên phải lần lượt có tọa độ $(2;0;4),(4;0;3)$ và $(4;9;3)$. Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Lê Đình Đức; GVPB: Tuyet Trinh

Nền nhà đại diện cho mặt phẳng (Oxy) và mái nhà bên phải đại diện cho mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow$ Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng góc tạo bởi hai mặt phẳng (Oxy) và (ABC) bằng $((Oxy),(ABC))=\alpha$.

Mặt phẳng $(Oxy): z=0$.

Mặt phẳng $(ABC):\begin{cases}\overrightarrow{n_{ABC}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left[(2;0;-1),(2;9;-1)\right]=(9;0;18)\\ A(2;0;4)\end{cases}$

$\to(ABC):1(x-2)+2(z-4)=0\Leftrightarrow x+2z-10=0$

Ta có: $\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_{Oxy}}.\overrightarrow{n_{ABC}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{Oxy}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{ABC}}\right|}=\frac{|18|}{1.\sqrt{81+18^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\to\alpha\approx27^\circ$.

Câu 34. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomet) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(3;-2;3)$ sẽ hạ cánh tới vị trí $B(8;8;0)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Lê Đình Đức; GVPB: Tuyet Trinh

Đường bay của máy bay là đường thẳng AB. Mặt phẳng (Oxy) là sân bay.

$\Rightarrow$ Góc giữa đường bay và sân bay bằng góc giữa AB và (Oxy) bằng α

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{u_{AB}}=\overrightarrow{AB}=(5;10;-3)\\ \overrightarrow{n_{Oxy}}=(0;0;1)\end{cases}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_{AB}}.\overrightarrow{n_{Oxy}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{AB}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{Oxy}}\right|}=\frac{3}{\sqrt{134}}\Rightarrow\alpha\approx15^\circ$.

Câu 35. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo Kilomet) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5;0;5)$ đến vị trí $B(10;10;3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a;b;0)$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?

Lời giải

GVSB: Lê Đình Đức; GVPB: Tuyet Trinh

Đường bay của máy bay là AB, sân bay là mặt phẳng (Oxy).

Điểm hạ cánh lần đầu là $M \Rightarrow AB \cap (Oxy) = \{M\}$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (5;10;-2) \\ A(5;0;5) \end{cases} \Rightarrow AB: \begin{cases} x = 5+5t \\ y = 10t \\ z = 5-2t \end{cases}$.

Mà $(Oxy): z = 0$

Thay $z = 5-2t$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được: $5-2t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{2}$

Thay $t = \dfrac{5}{2}$ vào phương trình đường thẳng $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{35}{2};\dfrac{50}{2};0\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{35}{2} \\ b = \dfrac{50}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b = 42,5$.

-- Hết --

CHỦ ĐỀ 7:

MỘT SỐ YẾU TỐ VỀ THỐNG KÊ

Phần Lý thuyết trọng tâm

I. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Số trung bình cộng (số trung bình)

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở bảng 1

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1;a_2)$	x_1	n_1
$[a_2;a_3)$	x_2	n_2
....	...	....
$[a_m;a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n=n_1+n_2+...+n_m$

Bảng 1

+)Trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i là giá trị đại diện của nhóm đó.

+)Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính theo công thức:

$$\overline{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_mx_m}{n}.$$

Ý nghĩa: Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm có thể làm đại diện cho vị trí trung tâm của mẫu số liệu đó khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng

2. Trung vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở bảng 2

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[a_1;a_2)$	n_1	$cf_1=n_1$
$[a_2;a_3)$	n_2	$cf_1=n_1+n_2$
....	....	.....
$[a_m;a_{m+1})$	n_m	$cf_m=n_1+n_2+...n_m$
	n	

Bảng 2

Giả sử nhóm k là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức $cf_{k-1}<\frac{n}{2}$ nhưng $cf_k\geq\frac{n}{2}$. Ta gọi r,d,n_k lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm k; cf_{k-1} là tần số tích lũy của nhóm $k-1$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là M_e, được tính theo công thức sau:

$$M_e=r+\left(\frac{\frac{n}{2}-cf_{k-1}}{n_k}\right).d.$$

Quy ước: $cf_0=0$.

Ý nghĩa: Trung vị của mẫu số liệu có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu đó.

3. Tứ phân vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở bảng 2.

+)Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s, h, n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm p; cf_{p-1} là tần số tích lũy của nhóm $p-1$.

+)Tứ phân vị thứ nhất Q_1 được tính theo công thức sau:

$$Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \right).h$$

+)Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị M_e.

+)Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q; cf_{q-1} là tần số tích lũy của nhóm $q-1$.

+)Tứ phân vị thứ nhất Q_3 được tính theo công thức sau:

$$Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q} \right).l$$

Ý nghĩa: Tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 của mẫu số liệu chia mẫu số liệu đó thành bốn phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

4. Mốt

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở bảng 2.

Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm $i; n_{i-1}; n_{i+1}$ lần lượt là tần số của nhóm $i-1$, nhóm $i+1$. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_0, được tính theo công thức sau:

$$M_0 = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}} \right).g.$$

Quy ước: $n_0 = 0; n_{m+1} = 0$.

Ý nghĩa: Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm có thể dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu đó.

GVSB: Catus Smile; GVPB: Kiều Thúy

II. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Khoảng biến thiên

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 3, trong đó n_1 và n_m là các số nguyên dương.

Gọi a_1, a_{m+1} lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm m.

Hiệu $R = a_{m+1} - a_1$ được gọi là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
$[a_1 ; a_2)$ $[a_2 ; a_3)$ … $[a_m ; a_{m+1})$	n_1 n_2 … n_m
	n

Bảng 3

Ý nghĩa

• Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

• Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dưng hai giá trị a_1 và a_{m+1} của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

2. Khoảng tứ phân vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 2.

Gọi Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tú phân vị của mẫu số liệu đó.

Ý nghĩa: Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu và nó không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thuờng đó.

3. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 1.

• Gọi $\overline{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó.

Số $s^2 = \dfrac{n_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + n_m\left(x_m - \overline{x}\right)^2}{n}$ được gọi là phương sai của mẫu số liệu đó.

• Căn bậc hai (số học) của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s, nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa

• Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó:

• Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

• Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

GVSB: Nguyễn Đức Thanh; GVPB: Kiều Thúy

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Ví dụ 1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu quần mới. Người phỏng vấn yêu cầu cho điểm mẫu quần đó theo thang điểm là 100 . Kết quả được trình bày theo mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 4. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
$[50;60)$	3	3
$[60;70)$	5	8
$[70;80)$	25	33
$[80;90)$	4	37
$[90;100)$	3	40
	$n=40$	

A. 75. **B.** 70,8. **C.** 78,8. **D.** 74,8.

Lời giải

GVSB: Sương Pham; GVPB: Kiều Thúy

Chọn D

Số phần tử của mẫu là $n=40$.

Ta có: $\frac{n}{2}=20$ mà $8<20<33$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 20.

Xét nhóm 3 có $r=70, d=10, n_3=25$ và nhóm 2 có $cf_2=8$.

Trung vị của mẫu số liệu đó là: $M_e=70+\left(\frac{20-8}{25}\right).10=74,8$

Ví dụ 2. Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 4. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

A. 9,08. **B.** 82,4375. **C.** 74,75. **D.** 50.

Lời giải

GVSB: Sương Pham; GVPB: Kiều Thúy

Chọn B

Số trung bình cộng cua mẫu số liệu đó là:

$$\bar{x}=\frac{3.55+5.65+25.75+4.85+3.95}{40}=74,75$$

Phương sai của mẫu số liệu đó là:

$$s^2=\frac{1}{40}\left[3.(55-74,75)^2+5.(65-74,75)^2+25.(75-74,75)^2+4.(85-74,75)^2+3.(95-74,75)^2\right]=82,4375$$

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Ví dụ 3. Bảng 5 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng mà 60 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày.)

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
$[40;50)$	5	5
$[50;60)$	8	13
$[60;70)$	25	38
$[70;80)$	20	58
$[80;90)$	2	60
	$n=60$	

Bảng 5

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là 65 (nghìn đồng).
b) Trung vị của mẫu số liệu trên là 66,8 (nghìn đồng).
c) Tứ phân vị nhất Q_1 của mẫu số liệu trên là 60,8 (nghìn đồng).
d) Mốt của mẫu số liệu trên là 65 (nghìn đồng).

Lời giải

GVSB: Sương Pham; GVPB: Kiều Thúy

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

$$\bar{x} = \frac{5.45+8.55+25.65+20.75+2.85}{60} = 66 \text{ (nghìn đồng)}$$

Chọn SAI.

b) Số phần tử của mẫu là $n=60$.

Ta có: $\frac{n}{2}=30$ mà $13<30<38$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 30. Xét nhóm 3 có $r=60;\ d=10; n_3=25$ và nhóm 2 có $cf_2=13$.

Trung vị của mẫu số liệu đó là: $M_e = 60+\left(\frac{30-13}{25}\right).10 = 66,8$ (nghìn đồng)

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có: $\frac{n}{4}=15$ mà $13<15<38$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 15. Xét nhóm 3 có $r=60;\ d=10; n_3=25$ và nhóm 2 có $cf_2=13$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu đó là:

$$Q_1 = 60+\left(\frac{15-13}{25}\right).10 = 60,8 \text{ (nghìn đồng).}$$

Chọn ĐÚNG.

d) Ta thấy nhóm 3 là nhóm có tần số lớn nhất với $u=60; g=10; n_3=25$.

Nhóm 2 có tần số $n_2=8$, nhóm 4 có tần số $n_4=20$.

Mốt của mẫu số liệu đó là: $M_0 = 60+\left(\frac{25-8}{2.25-8-20}\right).10 \approx 68$ (nghìn đồng)

Chọn SAI.

Ví dụ 4. Kết quả kiểm tra môn Tiếng Anh (cùng đề) của học sinh hai lớp 12A và 12B được cho lần lượt bởi mẫu số liệu giép nhóm ở *Bảng 6, Bảng 7.*

Nhóm	Tần số
$[0;2)$	3
$[2;4)$	5
$[4;6)$	5
$[6;8)$	25
$[8;10)$	2
	$n=40$

Bảng 6

Nhóm	Tần số
$[0;2)$	1
$[2;4)$	4
$[4;6)$	15
$[6;8)$	16
$[8;10)$	4
	$n=40$

Bảng 7

a. Số trung bình cộng của hai mẫu số liệu trên bằng nhau.

b. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 12A nhỏ hơn 2.

c. Phương sai của mẫu số liệu lớp 12B lớn hơn 3.

d. Điểm thi của học sinh lớp 12B đồng đều hơn lớp 12A

Lời giải

GVSB: Hà Thị Thanh Huyền; GVPB: Giang Trần

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[0;2)$	1	3
$[2;4)$	3	5
$[4;6)$	5	5
$[6;8)$	7	25
$[8;10)$	9	2
		$n=40$

Bảng 6

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[0;2)$	1	1
$[2;4)$	3	4
$[4;6)$	5	15
$[6;8)$	7	16
$[8;10)$	9	4
		$n=40$

Bảng 7

a. Điểm trung bình cộng của mẫu số liệu lớp 12A là:

$$\overline{x_A}=\frac{3.1+5.3+5.5+25.7+2.9}{40}=5,9.$$

Điểm trung bình cộng của mẫu số liệu lớp 12B là:

$$\overline{x_A}=\frac{1.1+4.3+15.5+16.7+4.9}{40}=5,9.$$

Suy ra trung bình cộng của hai mẫu số liệu bằng nhau.

Chọn ĐÚNG.

b. Phương sai của mẫu số liệu lớp 12A là

$${s_A}^2=\frac{3.(1-5,9)^2+5.(3-5,9)^2+5.(5-5,9)^2+25.(7-5,9)^2+2.(9-5,9)^2}{40}=4,19$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 12A là: $\sqrt{4,19}$ và $\sqrt{4,19}>2$.

Chọn SAI.

c. Phương sai của mẫu số liệu lớp 12B là

$${s_B}^2=\frac{1.(1-5,9)^2+4.(3-5,9)^2+15.(5-5,9)^2+16.(7-5,9)^2+4.(9-5,9)^2}{40}=3,19>3.$$

Chọn ĐÚNG.

d. Vì ${s_A}^2>{s_B}^2$ nên điểm thi của học sinh lớp 12B đồng đều hơn 12A.

Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 5. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h)

49	42	51	55	45	60	53	55	44	65
52	62	41	44	57	56	68	48	46	53
63	49	54	61	59	57	47	50	60	62
48	52	58	47	60	55	45	47	48	61

Sau khi ghép nhóm mẫu số liệu trên thành sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

$$[40;45),[45;50),[50;55),[55;60),[60;65),[65;70)$$

Thì trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm nhận được bằng $\frac{a}{b}(\text{km/h})$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Hà Thị Thanh Huyền; GVPB: Giang Trần

Trả lời: 375

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[40;45)$	4	4
$[45;50)$	11	15
$[50;55)$	7	22
$[55;60)$	8	30
$[60;65)$	8	38
$[65;70)$	2	2
	$n=40$	

Bảng 8

Số phần tử của mẫu là $n=40$. Ta có $\frac{n}{2}=\frac{40}{2}=20$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có được tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20. Xét nhóm 3 có $r=50;d=5;n_3=7$ và nhóm 2 có $cf_2=15$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $M_e=50+\left(\frac{20-15}{7}\right).5=\frac{375}{7}(\text{km/h})$.

Vậy $a=375$.

Ví dụ 6. Bảng 9 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng trong nằm 2021 tại Hà Nội (đơn vị: độ C) *(Nguồn: Niên giám Thống kê 2021, NXB Thống kê, 2022)*. Phương sai của mẫu số liệu đó bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Nhóm	Tần số
$[16,8;19,8)$	2
$[19,8;22,8)$	3
$[22,8;25,8)$	2
$[25,8;28,8)$	1
$[28,8;31,8)$	4
	$n=12$

Bảng 9

Lời giải

GVSB: Hà Thị Thanh Huyền; GVPB: Giang Trần

Trả lời: 20,8

Số trung bình cộng của mẫu số liệu đó là:

$$\bar{x}=\frac{2.18,3+3.21,3+2.24,3+1.27,3+4.30,3}{12}=24,8\left({}^{\circ}C\right)$$

Phương sai của mẫu số liệu đó là:

$$s^2=\frac{1}{12}\left[2.(18,3-24,8)^2+3.(21,3-24,8)^2+2.(24,3-24,8)^2+1.(27,3-24,8)^2+4.(30,3-24,8)^2\right]$$

$\approx 20,8$

Phần Tự luyện

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Bảng 10 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về doanh thu (tỉ USD) của 20 hãng xe ô tô có doanh thu cao nhất thế giới năm 2023.

Nhóm	Tần số
$[50;100)$	10
$[100;150)$	3
$[150;200)$	4
$[200;250)$	1
$[250;300)$	1
$[300;350)$	1
	$n=20$

(Nguồn: Business Research Insights, wiki)

Tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu đó bằng:

A. 300. **B.** 100. **C.** 275. **D.** 175.

Lời giải

GVSB: Phước Thịnh ; GVPB: Giang Trần

Ta có

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[50;100)$	10	10
$[100;150)$	3	13
$[150;200)$	4	17
$[200;250)$	1	18
$[250;300)$	1	19
$[300;350)$	1	20
	$n=20$	

Ta có $\frac{3n}{4}=15$

Khi đó theo công thức ta có

$Q_3=150+\frac{(15-13)}{4}\cdot(200-150)=175$

Câu 2. Bảng 11 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chi tiêu bình quân (đơn vị: USD) của một lượt khách quốc tế đến Việt Nam phân theo 27 quốc tịch năm 2019.

Nhóm	Tần số
$[0;500)$	1
$[500;1000)$	9
$[1000;1500)$	14
$[1500;2000)$	2
$[2000;2500)$	1
	$n=27$

(Nguồn: https://www.gso.gov..vn)

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(200;300)$. **B.** $(300;400)$. **C.** $(400;500)$. **D.** $(500;600)$.

Lời giải

GVSB: Phước Thịnh ; GVPB: Giang Trần

Ta có

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[0;500)$	250	1
$[500;1000)$	750	9
$[1000;1500)$	1250	14
$[1500;2000)$	1750	2
$[2000;2500)$	2250	1
		$n=27$

Ta có:

$$s^2=\frac{1\cdot\left(250-\frac{30250}{27}\right)+9\cdot\left(750-\frac{30250}{27}\right)+14\cdot\left(1250-\frac{30250}{27}\right)+2\cdot\left(1750-\frac{30250}{27}\right)+1\cdot\left(2250-\frac{30250}{27}\right)}{27}$$

$=159122,085$

Khi đó độ lệch chuẩn: $s=\sqrt{s^2}\approx 398,9$

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 3. Bảng 12 cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê tỉ lệ che phủ rừng (đơn vị: %) của 60 tỉnh, thành phố ở Việt Nam (không bao gồm Hưng Yên, Vĩnh Long, Cần Thơ) tính đến ngày $31/12/2020$.

Nhóm	Tần số
$[0;10)$	17
$[10;20)$	6
$[20;30)$	3
$[30;40)$	4
$[40;50)$	9
$[50;60)$	15
$[60;70)$	5
$[70;80)$	1
	$n=60$

(Nguồn: https://bandolamnghiep.com)

a) Tỉ lệ che phủ rừng trung bình trên một tỉnh, thành phố được thống kê ở trên là lớn hơn 33%.

b) Trung vị của mẫu số liệu trên là 40%.

c) Có 20 tỉnh, thành phố có tỉ lệ che phủ rừng nhỏ hơn 10%.

d) Mốt của mẫu số liệu trên là 5%.

Lời giải

GVSB: Phước Thịnh ; GVPB: Giang Trần

a)Ta có

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[0;10)$	5	17
$[10;20)$	15	6
$[20;30)$	25	3
$[30;40)$	35	4
$[40;50)$	45	9
$[50;60)$	55	15
$[60;70)$	65	5
$[70;80)$	75	1
		$n=60$

$$\overline{x}=\frac{5\cdot 17+15\cdot 6+25\cdot 3+35\cdot 4+45\cdot 9+55\cdot 15+65\cdot 5+75\cdot 1}{60}=\frac{94}{3}\approx 31,3$$

Chọn SAI.

b)

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[0;10)$	17	17
$[10;20)$	6	23
$[20;30)$	3	26
$[30;40)$	4	30
$[40;50)$	9	39
$[50;60)$	15	54
$[60;70)$	5	59
$[70;80)$	1	60
	$n=60$	

Ta có $\frac{n}{2}=30$, nhóm chứa trung vị là $[30;40)$

$$M_e=30+\frac{30-26}{30}\cdot(30-20)=\frac{94}{3}\approx 31,3.$$

c) **Sai**

Do tần số nhóm $[0;10)$ là 17.

Chọn SAI.

d) Nhóm có tần số lớn nhất là $[0;10)$

$M_o = 0 + \frac{17-0}{2\cdot 17 - 0 - 6}\cdot 10 \approx 6.1$

Chọn ĐÚNG.

Câu 4. Bạn An và bạn Bình làm thí nghiệm trồng cây. Mỗi bạn trồng 40 cây cần tây trong cốc, phần gốc của các cây khi bắt đầu trồng đều dài 4 cm. *Bảng 13* và *bảng 14* lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao của các cây (đơn vị: centimét) mà bạn An và bạn Bình trồng sau 5 tuần.

Nhóm	Tần số
$[20;25)$	2
$[25;30)$	16
$[30;35)$	20
$[35;40)$	2
	$n = 40$

Bảng 13

Nhóm	Tần số
$[20;25)$	5
$[25;30)$	9
$[30;35)$	25
$[35;40)$	1
	$n = 40$

Bảng 14

a) Chiều cao trung bình của mỗi cây do hai bạn An và Bình trồng không bằng nhau.

b) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu trên là 20

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở ***Bảng 13*** là 5,5

d) Chiều cao của các cây mà bạn Bình trồng đồng đều hơn các cây mà bạn An trồng.

Lời giải

GVSB: Vũ Đặng; GVPB: Giang Trần

a) Chiều cao trung bình của mỗi cây do bạn An trồng là:

$$\overline{x_A} = \frac{22,5.2 + 27,5.16 + 32,5.20 + 37,5.2}{40} = 30,25$$

Chiều cao trung bình của mỗi cây do bạn Bình trồng là:

$$\overline{x_B} = \frac{22,5.5 + 27,5.9 + 32,5.25 + 37,5.1}{40} = 30,25$$

Chiều cao trung bình của mỗi cây do hai bạn An và Bình trồng không bằng nhau.

Chọn SAI.

b) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu là $R = 40 - 20 = 20$.

Chọn ĐÚNG.

c) Cỡ mẫu là: $n = 40$

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_{10}+x_{11}}{2}$. Do x_{10}, x_{11} đều thuộc nhóm $[25;30)$ nên nhóm này chứa Q_1.

Do đó, $p = 2; a_2 = 25; m_2 = 16; m_1 = 2, a_3 - a_2 = 5$ và ta có: $Q_1 = 25 + \frac{\frac{40}{4} - 2}{16}\cdot 5 = 27,5$

Với tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\frac{x_{30}+x_{31}}{2}$. Do x_{30}, x_{31} đều thuộc nhóm $[30;35)$ nên nhóm này chứa Q_3.

Do đó, $p=3; a_4=30; m_3=20; m_1+m_2=2+16=18; a_4-a_3=5$ và ta có

$$Q_3=30+\frac{4.\frac{40}{4}-18}{20}\cdot 5=35,5$$

Suy ra: $\Delta_Q=Q_3-Q_1=35,5-27,5=8$

Vậy Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở **Bảng 13** là 5,5 **.**

Chọn SAI.

d) Chiều cao trung bình của mỗi cây do bạn An trồng là:

$$\overline{x_A}=\frac{22,5.2+27,5.16+32,5.20+37,5.2}{40}=30,25$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu của bạn An là:

$$s_A{}^2=\frac{2.(30,25-22,5)^2+16.(30,25-22,5)^2+20.(30,25-32.5)^2+2.(30,25-37,5)^2}{40}=32,19$$

Chiều cao trung bình của mỗi cây do bạn Bình trồng là:

$$\overline{x_B}=\frac{22,5.5+27,5.9+32,5.25+37,5.1}{40}=30,25$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu của bạn Bình là:

$$s_A{}^2=\frac{5.(30,25-22,5)^2+9.(30,25-22,5)^2+25.(30,25-32.5)^2+1.(30,25-37,5)^2}{40}=25,5$$

Vì $s_A{}^2>s_B{}^2$ nên chiều cao cây bạn An trồng đồng đều hơn chiều cao cây bạn Bình trồng

Chiều cao của các cây mà bạn Bình trồng đồng đều hơn các cây mà bạn An trồng.

Chọn SAI.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 5. *Bảng 15* cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê chiều dài đường bờ biển (đơn vị: kilômét) của 28 tỉnh, thành phố có giáp biển ở Việt Nam.

Nhóm	Tần số
$[0;100)$	13
$[100;200)$	11
$[200;300)$	3
$[300;400)$	1
	$n=28$

Bảng 15

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Trung vị của mẫu số liệu đó bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Vũ Đăng; GVPB: Giang Trần

Trả lời: 109

Cỡ mẫu là $n=13+11+3+1=28$.

Khi đó, trung vị là $\frac{x_{14}+x_{15}}{2}$. Do 2 giá trị x_{14}, x_{15} thuộc nhóm $[100;200)$ nên nhóm này chứa trung vị. Do đó, $p=2; a_2=100; m_2=11; m_1=13; a_3-a_2=100$ và ta có

$$M_e=100+\frac{\frac{28}{2}-13}{11}\cdot 100\approx 109,09$$

Vậy trung vị của mẫu số liệu trên bằng $M_e=109$.

Câu 6. *Bảng 16* cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 40 núi cao nhất Đông Nam Á

Nhóm	Tần số
$[0;100)$	13
$[100;200)$	11
$[200;300)$	3
$[300;400)$	1
	$n=28$

Bảng 16

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

GVSB: Vũ Đăng; GVPB: Giang Trần

Trả lời: 79,5

Chiều cao trung bình mẫu số liệu trên là:

$$\overline{x}=\frac{50.13+150.11+250.3+350.1}{28}\approx 121,43$$

Phương sai của mẫu số liệu trên là:

$$s^2=\frac{13.(50-121,43)^2+11.(150-121,43)^2+3.(250-121,43)^2+1.(350-121,43)^2}{28}\approx 6326,53$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là: $s=\sqrt{s^2}=79,5$

---------------------------------------*Hết*---------------------------------------

CHỦ ĐỀ 8:

XÁC SUẤT

Phần Lý thuyết trọng tâm

1. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

a) Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n$ cách hoàn thành.

Quy tắc cộng có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $\left(k\in\mathbb{N},k>2\right)$.

b) Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m.n$ cách hoàn thành.

Quy tắc nhân có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi k hành động liên tiếp $\left(k\in\mathbb{N},k>2\right)$.

c) Hoán vị

Cho tập hợp A gồm n phần tử $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một *hoán vị của n phần tử* đó. Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có: $P_n=n(n-1).\dots.2.1=n!$.

d) Chỉnh hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1\le k\le n$. Mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một *chỉnh hợp chập k của n phần tử* đã cho. Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử. Ta có: $A_n^k=n(n-1)...(n-k+1)$

e) Tổ hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1\le k\le n$. Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử* đó. Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $1\le k\le n$. Ta có $C_n^k=\dfrac{A_n^k}{k!}$.

Quy ước: $0!=1;C_n^0=1$. Với những quy ước đó, ta có: $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(0\le k\le n\right)$.

2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

a) Một số khái niệm

● *Không gian mẫu* Ω là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.

● *Biến cố ngẫu nhiên* (gọi tắt là *biến cố*) là một tập con của không gian mẫu. Tập rỗng $\varnothing$ là biến cố không thể, Ω là biến cố chắc chắn, $\overline{A}=\Omega\setminus A$ là biến cố đối của biến cố A.

● Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng của từng kết quả là giống nhau. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố A, ta định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

Xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A)$, bằng tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A, Ω. Như vậy: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

b) Tính chất của xác suất

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Khi đó, ta có các tính chất sau:

• $P(\varnothing) = 0; P(\Omega) = 1$;

• $0 \le P(A) \le 1$ với mỗi biến cố A.

• $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ với mỗi biến cố A.

c) Biến cố hợp, biến cố giao. Hai biến cố xung khắc, hai biến cố độc lập

Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến phép thử T và các kết quả của T là đồng khả năng. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu.

• Đặt $C = A \cup B$. Khi đó C là một biến cố và được gọi là *biến cố hợp* của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cup B$.

• Đặt $D = A \cap B$. Khi đó D là một biến cố và được gọi là *biến cố giao* của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cap B$ hay AB.

• Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B gọi là *hai biến cố xung khắc*.

• Hai biến cố A và B đươc gọi là *độc lập* nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

• Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

3. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B, kí hiệu là $P(A \mid B)$.

Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra:

Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B)$.

Chú ý

• Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì $P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A) = P(B).P(A \mid B)$.

Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất.

• Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có: $P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$.

• Cho hai biến cố A, B với $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A) = P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$ và $P(B) = P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$.

4. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN. CÔNG THỨC BAYES

a) Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})$.

b) Công thức Bayes

Cho hai biến cố A,B với $P(A)>0,P(B)>0$, ta có: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$.

Nhận xét: Với $P(A)>0,0<P(B)<1$ thì công thức Bayes có dạng:

$$P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})}$$

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Ví dụ 1. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 20 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Số cách chọn một ban cán sự lớp 4 người, trong đó có ít nhất một học sinh nữ là:

A. C_{40}^4. **B.** $C_{20}^2+C_{20}^2$. **C.** $C_{20}^3+C_{20}^1$. **D.** $C_{40}^4-C_{20}^4$.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đinh; GVPB: Thanh Hoa

Chọn D

+) Số cách chọn một ban cán sự lớp 4 người là: C_{40}^4.

+) Số cách chọn một ban cán sự lớp 4 người không có học sinh nữ nào là: C_{20}^4.

+) Số cách chọn một ban cán sự lớp 4 người, trong đó có ít nhất một học sinh nữ là: $C_{40}^4-C_{20}^4$.

Ví dụ 2. Cho tập hợp $S=\{1;2;3;4;5;6\}$. Số các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập hợp S và chia hết cho 3 có thể lập được là:

A. 48. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 24.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đinh; GVPB: Thanh Hoa

Chọn A

+) Các nhóm gồm 3 chữ số nhau thuộc tập hợp S và có tổng chia hết cho 3 gồm: $\{1;2;3\};\{1;2;6\};\{1;3;5\};\{1;5;6\};\{2;3;4\};\{2;4;6\};\{3;4;5\};\{4;5;6\}$.

+) Mỗi một nhóm có thể lập được số các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau là: $P_3=3!=6$.

+) Vậy số các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập hợp S và chia hết cho 3 có thể lập được là: $6.8=48$.

Ví dụ 3. Một hộp đựng 12 viên bi có kích thước và khối lượng giống nhau, trong đó có 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp đó. Xác suất để trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng là:

A. $\dfrac{149}{198}$. **B.** $\dfrac{49}{198}$. **C.** $\dfrac{151}{198}$. **D.** $\dfrac{147}{198}$.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đinh; GVPB: Thanh Hoa

Chọn A

+) Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{12}^5=792$.

+) Gọi A là biến cố: "Trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng".

+) Suy ra có các trường hợp sau:
Trường hợp 1: có 2 viên bi màu vàng và 3 viên bi màu xanh:
Nên có: $C_5^2.C_7^3=350$ cách chọn.
Trường hợp 2: có 3 viên bi màu vàng và 2 viên bi màu xanh:
Nên có: $C_5^3.C_7^2=210$ cách chọn.
Trường hợp 3: có 4 viên bi màu vàng và 1 viên bi màu xanh:
Nên có: $C_5^4.C_7^1=35$ cách chọn.
Trường hợp 4: có 5 viên bi màu vàng:
Nên có: $C_5^5=1$ cách chọn.
Suy ra $n(A)=350+210+35+1=596$.
+) Vậy xác suất để trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng là:
$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{596}{792}=\dfrac{149}{198}$.

Ví dụ 4. Một nhóm học sinh gồm 5 bạn nam và 5 bạn nữ được xếp theo một hàng dọc. Xác suất để 5 bạn nữ đứng cạnh nhau là:

A. $\dfrac{1}{50}$. **B.** $\dfrac{1}{42}$. **C.** $\dfrac{1}{252}$. **D.** $\dfrac{1}{35}$.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đinh; GVPB: Thanh Hoa

Chọn B

+) Một nhóm học sinh gồm 5 bạn nam và 5 bạn nữ, được xếp theo một hàng dọc. Mỗi cách xếp như vậy là một hoán vị của 10 phần tử. Suy ra $n(\Omega)=P_{10}=10!=3628800$.
+) Xét biến cố A "5 bạn nữ đứng cạnh nhau".
Vì 5 bạn nữ đứng cạnh nhau nên ta coi là 1 phần tử cộng với 5 bạn nam là có 6 phần tử.
Số cách xếp 6 phần tử này là: $P_6=6!=720$.
Trong mỗi cách xếp đó thì số cách xếp 5 học sinh nữ là: $P_5=5!=120$.
Suy ra $n(A)=720.120=86400$.
Vậy xác suất để 5 bạn nữ đứng cạnh nhau là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{86400}{3628800}=\dfrac{1}{42}$.

Ví dụ 5. Một mảnh đất chia thành 2 khu vườn: Khu A có 300 cây ăn quả, khu B có 400 cây ăn quả. Trong đó, số cây cam ở khu A và khu B lần lượt là 200 cây và 250 cây. Chọn ngẫu nhiên 1 cây trong mảnh đất. Xác suất cây được chọn là cây cam, biết rằng cây đó ở khu B, là:

A. $\dfrac{5}{14}$. **B.** $\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Thanh Hoa

Chọn C

Gọi biến cố A:"cây được chọn là cây ăn quả ở khu A";
Biến cố B: "cây được chọn là cây ăn quả ở khu B";
Biến cố C:"cây được chọn là cây cam trong khu vườn".
Biến cố BC:"cây được chọn là cây cam ở khu B"

Biến cố $C|B$:"cây được chọn là cây cam, biết cây đó ở khu B"

Theo bài ra ta có, $P(B)=\dfrac{400}{300+400}=\dfrac{4}{7}$; $P(BC)=\dfrac{250}{700}=\dfrac{5}{14}$;

Theo công thức Bayes: $P(C|B)=\dfrac{P(CB)}{P(B)}=\dfrac{\frac{5}{14}}{\frac{4}{7}}=\dfrac{5}{8}$.

Ví dụ 6. Một thư viện có hai phòng riêng biệt, phòng A và phòng B. Xác suất chọn 1 quyển sách về chủ đề Khoa học tự nhiên thuộc phòng A và thuộc phòng B lần lượt là 0,25 và 0,5. Chọn ngẫu nhiên 1 quyển sách của thư viện. Giả sử quyển sách được chọn về chủ đề Khoa học tự nhiên, xác suất để quyển sách đó ở phòng A là:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Thanh Hoa

Chọn B

Xác suất quyển sách được chọn ở phòng A là $P(A)=0,5$. Theo công thức Bayes, xác suất để quyển sách được chọn về chủ đề khoa học tự nhiên, biết quyển đó ở phòng A:

$P=\dfrac{0,25}{0,5}=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 7. Cho hai biến cố A, B với $P(B)=0,6; P(A|B)=0,7; P(A|\overline{B})=0,4$. Khi đó, $P(A)$ bằng

A. $0,7$. **B.** $0,4$. **C.** $0,58$. **D.** $0,52$.

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Thanh Hoa

Chọn C

Vì $P(B)=0,6 \Rightarrow P(\overline{B})=0,4$

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(B).P(A|B)=0,6.0,7=0,42$

Tương tự, $P(A\overline{B})=P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,4.0,4=0,16$.

Ta có $A=AB\cup A\overline{B}$ và $AB\cap A\overline{B}=\varnothing$ nên $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=0,42+0,16=0,58$.

Ví dụ 8. Cho hai biến cố A, B thỏa mãn $P(A)=0,4; P(B)=0,3; P(A|B)=0,25$. Khi đó, $P(B|A)$ bằng:

A. $0,1875$. **B.** $0,48$. **C.** $0,333$. **D.** $0,95$.

Lời giải

GVSB: Hà Hoàng; GVPB: Thanh Hoa

Chọn A

Theo công thức Bayes ta có:

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(B).P(A|B)=0,3.0,25=0,075$;

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0,075}{0,4}=0,1875$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Ví dụ 9. **[MĐ2]** Bạn An có 2 cuốn sách môn Toán, 3 cuốn sách môn Vật lí, 3 cuốn sách môn Hoá học, các cuốn sách đôi một khác nhau. Giá sách của bạn An chỉ có 1 hàng gồm 3 ngăn liền nhau. Bạn An xếp các cuốn sách trên vào giá sách sao cho mỗi ngăn chỉ có một môn.

a) Số cách xếp 2 cuốn sách môn Toán trong một ngăn là $2!$.

b) Số cách xếp 3 cuốn sách môn Vật lí trong một ngăn là 3.

c) Số cách xếp 3 cuốn sách môn Hoá học trong một ngăn là $3!$.

d) Số cách xếp các cuốn sách sao cho mỗi ngăn chỉ có một môn là 432.

Lời giải

GVSB: Lê Ngọc; GVPB: Thanh Hoa

a) Số cách xếp 2 cuốn sách môn Toán trong một ngăn là $2!$.

Số cách xếp 2 cuốn sách môn Toán trong một ngăn là một hoán vị của 2 phần tử, vậy có $2!$ cách.

Chọn ĐÚNG.

b) Số cách xếp 3 cuốn sách môn Vật lí trong một ngăn là 3.

Số cách xếp 3 cuốn sách môn Vật lí trong một ngăn là một hoán vị của 3 phần tử, vậy có $3!=6$ cách.

Chọn SAI.

c) Số cách xếp 3 cuốn sách môn Hoá học trong một ngăn là $3!$.

Số cách xếp 3 cuốn sách môn Hóa học trong một ngăn là một hoán vị của 3 phần tử, vậy có $3!$ cách.

Chọn ĐÚNG.

d) Số cách xếp các cuốn sách sao cho mỗi ngăn chỉ có một môn là 432.

Số cách xếp 2 cuốn sách môn Toán trong một ngăn là một hoán vị của 2 phần tử, vậy có $2!$ cách.

Số cách xếp 3 cuốn sách môn Vật lí trong một ngăn là một hoán vị của 3 phần tử, vậy có $3!$ cách.

Số cách xếp 3 cuốn sách môn Hóa học trong một ngăn là một hoán vị của 3 phần tử, vậy có $3!$ cách.

Vì có 3 ngăn và hoán vị 3 môn cho nhau nên số cách xếp các cuốn sách sao cho mỗi ngăn chỉ có một môn là: $(2!.3!.3!).3!=432$ cách.

Chọn ĐÚNG.

Ví dụ 10. **[MĐ2]** Một hộp chứa 18 quả cầu có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có 4 quả cầu màu xanh được đánh số từ 1 đến 4, có 6 quả cầu màu đỏ được đánh số từ 1 đến 6, có 8 quả cầu màu vàng được đánh số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp.

a) Có 20 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu đỏ.

b) Có 24 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu vàng.

c) Có 42 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu đỏ và 1 quả cầu màu vàng.

d) Xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số là $\frac{86}{153}$.

Lời giải

GVSB: Lê Ngọc; GVPB: Thanh Hoa

a) Có 20 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu đỏ.

Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu đỏ có $4.5=20$ cách.

Chọn ĐÚNG.

b) Có 24 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu vàng.

Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu vàng có $4.7=28$ cách.

Chọn SAI.

c) Có 42 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu đỏ và 1 quả cầu màu vàng.

Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu đỏ và 1 quả cầu màu vàng có $6.7=42$ cách.

Chọn ĐÚNG.

d) Xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số là $\frac{86}{13}$.

Không gian mẫu có số phần tử là: $C_{18}^{2}=153$.

Xét biến cố A: "Lấy được 2 quả cầu vừa khác màu vừa khác số".

Trường hợp 1: Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu đỏ có $4.5=20$ cách.

Trường hợp 2: Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu vàng có $4.7=28$ cách.

Trường hợp 3: Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu đỏ và 1 quả cầu màu vàng có $6.7=42$ cách.

Suy ra số cách lấy 2 quả cầu vừa khác màu vừa khác số là: $20+28+42=90$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A)=\frac{90}{153}=\frac{10}{17}$.

Chọn SAI.

Ví dụ 11. **[MĐ2]** Để nghiên cứu sự phát triển của một loại cây, người ta trồng hạt giống của loại cây đó trên hai lô đất thí nghiệm M,N khác nhau. Xác suất phát triển bình thường của cây đó trên các lô đất M và N lần lượt là $0,56$ và $0,62$. Lặp lại thí nghiệm trên với đầy đủ các điều kiện tương đồng. Xét các biến cố:

A: "Cây phát triển bình thường trên lô đất M";

B: "Cây phát triển bình thường trên lô đất N".

a) Các cặp biến cố $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$ là độc lập.

b) Hai biến cố $C=\overline{A}\cap B$ và $D=A\cap\overline{B}$ không là hai biến cố xung khắc.

c) $P\left(\overline{A}\right)=0,56; P\left(\overline{B}\right)=0,62$.

d) Xác suất để cây chỉ phát triển bình thường trên một lô đất là $0,4856$.

Lời giải

GVSB: Lê Ngọc; GVPB: Thanh Hoa

a) Các cặp biến cố $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$ là độc lập.

A: "Cây phát triển bình thường trên lô đất M"
$\overline{A}$: "Cây không phát triển bình thường trên lô đất M"
B: "Cây phát triển bình thường trên lô đất N"
$\overline{B}$: "Cây không phát triển bình thường trên lô đất N".
Các cặp biến cố $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$ là độc lập vì hai lô đất khác nhau.
Chọn ĐÚNG.
b) Hai biến cố $C=\overline{A}\cap B$ và $D=A\cap\overline{B}$ không là hai biến cố xung khắc.
$C=\overline{A}\cap B$ là biến cố: "Cây phát triển bình thường trên lô đất M và không phát triển bình thường trên lô đất N".
$D=A\cap\overline{B}$ là biến cố: "Cây không phát triển bình thường trên lô đất M và phát triển bình thường trên lô đất N".
Suy ra hai biến cố $C=\overline{A}\cap B$ và $D=A\cap\overline{B}$ là hai biến cố xung khắc.
Chọn SAI.
c) $P\left(\overline{A}\right)=0,56; P\left(\overline{B}\right)=0,62$.
Ta có: $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=1-0,56=0,44; P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)=1-0,62=0,38$.
Chọn SAI.
d) Xác suất để cây chỉ phát triển bình thường trên một lô đất là $0,4856$.
Trường hợp 1: Cây phát triển bình thường trên lô đất M và không phát triển bình thường trên lô đất N.
$C=\overline{A}\cap B$
Trường hợp 2: Cây không phát triển bình thường trên lô đất M và phát triển bình thường trên lô đất N.
$D=A\cap\overline{B}$
Xác suất để cây chỉ phát triển bình thường trên một lô đất là:
$P\left(C\cup D\right)=P\left(C\right)+P\left(D\right)=P\left(\overline{A}\right).P\left(B\right)+P\left(A\right).P\left(\overline{B}\right)=0,44.0,62+0,56.0,38=0,4856$
Chọn ĐÚNG.

Ví dụ 12.[MĐxx] Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh, 16 học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 12 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Toán. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố sau:
A: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh";
B: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Toán".
a) $P\left(A\right)=0,4$.
b) $P\left(B\right)=0,625$.
c) $P\left(A|\,B\right)=0,75$.
d) $P\left(B|\,A\right)=0,48$.

Lời giải

GVSB:Nguyễn Hoàng Phúc ; GVPB: Thu Lê

a) Ta có: $P\left(A\right)=\dfrac{25}{40}=0,625$
Chọn SAI.

b) Ta có: $P(B)=\frac{16}{40}=0,4$

Chọn SAI.

c) Ta có: $P(AB)=\frac{12}{40}=0,3 \Rightarrow P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0,3}{0,4}=0,75$

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có: $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0,3}{0,625}=0,48$

Chọn ĐÚNG.

Ví dụ 13. Trong một hộp có 18 quả bóng bàn loại I và 2 quả bóng bàn loại II, các quả bóng bàn có hình dạng và kích thước như nhau. Một học sinh lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng bàn (lấy không hoàn lại) trong hộp.

a) Xác suất để lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II là $\frac{9}{10}$.

b) Xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng bàn loại II, biết lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II, là $\frac{1}{19}$.

c) Xác suất để cả hai lần đều lấy được quả bóng bàn loại II là $\frac{9}{190}$.

d) Xác suất để ít nhất 1 lần lấy được quả bóng bàn loại I là $\frac{189}{190}$.

Lời giải

GVSB:Nguyễn Hoàng Phúc ; GVPB: Thu Lê

Gọi A là biến cố: "Lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại I"

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố: "Lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II"

Gọi B là biến cố: "Lần thứ hai lấy được quả bóng bàn loại I"

$\Rightarrow \overline{B}$ là biến cố: "Lần thứ hai lấy được quả bóng bàn loại II"

Suy ra $P(A)=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}, P(\overline{A})=\frac{1}{10}$

Và $P(B\mid A)=\frac{17}{19}, P(\overline{B}\mid A)=\frac{2}{19}, P(B\mid \overline{A})=\frac{18}{19}, P(\overline{B}\mid \overline{A})=\frac{1}{19}$

a) Ta có: $P(\overline{A})=\frac{1}{10}$

Chọn SAI.

b) Ta có: $P(\overline{B}\mid \overline{A})=\frac{1}{19}$

Chọn ĐÚNG

c) Ta có: $P(\overline{AB})=P(\overline{B}\mid \overline{A}).P(\overline{A})=\frac{1}{19}.\frac{1}{10}=\frac{1}{190}$

Chọn SAI.

d) Gọi C là biến cố: "ít nhất 1 lần lấy được quả bóng bàn loại I"

$\Rightarrow \overline{C}$ là biến cố: "Cả 2 lần không lấy được bóng loại II"

$\Rightarrow P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{AB})=1-\frac{1}{190}=\frac{189}{190}$

Chọn ĐÚNG.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó có 4 chữ số 3, 3 chữ số 2, 2 chữ số 1?

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Thu Lê

Đặt $X=\{1;2;3\}$;

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ các chữ số được chọn từ X.

Chọn 4 trong 9 vị trí để viết các số 3: C_9^4 cách.

Chọn 3 trong 5 vị trí để đặt số 2: C_5^3 cách.

Chọn 2 trong 2 vị trí còn lại để đặt chữ số 1: 1 cách.

$\Rightarrow C_9^4.C_5^3.1=1260$ số.

Ví dụ 15. Một cuộc thi khoa học có 36 bộ câu hỏi, trong đó có 20 bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên và 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Bạn An lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Bình lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi. Xác suất bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Thu Lê

Ta có: Bạn An lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Bình lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi : $n(\Omega)=36.35=1260$ cách.

Biến cố A: Bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội .

Khi đó An lấy 1 bộ câu hỏi về tự nhiên, Bình lấy 1 bộ câu hỏi về xã hội hoặc An lấy 1 bộ câu hỏi về xã hội , Bình lấy 1 bộ câu hỏi về xã hội.

$n(A)=20.16+16.15=560$.

$P(A)=\frac{560}{1260}=\frac{4}{9}\Rightarrow a+b=13$.

Ví dụ 16. Một đợt kiểm tra sức khoẻ, có một loại bệnh X mà tỉ lệ người mắc bệnh là $0,2\%$ và một loại xét nghiệm Y mà ai mắc bệnh X khi xét nghiệm Y cũng có phản ứng dương tính. Tuy nhiên, có 6% những người không bị bệnh X lại có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Chọn ngẫu nhiên 1 người trong đợt kiểm tra sức khoẻ đó. Giả sử người đó có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Xác suất người đó bị mắc bệnh X là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

GVSB: Trần Vân; GVPB: Thu Lê

TH1: Xác xuất người đó mắc bệnh X và dương tính với xét nghiệm Y: $\frac{0,2}{100}.\frac{100}{100}=0,002$;

TH2: Xác suất người đó không mắc bệnh X và dương tính với xét nghiệm Y:

$\frac{6}{100}.0,002=\frac{3}{25000}$;

Suy ra xác suất kiểm tra dương tính với xét nghiệm Y: $0,002+\frac{3}{25000}=\frac{53}{25000}$.

Vậy xác xuất người đó mắc bệnh X là

$\dfrac{0,002}{\dfrac{53}{25000}} = \dfrac{50}{53}$.

Phần Ví dụ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Khi tìm hiểu về việc học tiếng Anh của một trường phổ thông, người ta thấy rằng có 70% học sinh tự học tiếng Anh bằng hình thức trực tuyến. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Khi đó, xác suất chọn được học sinh giỏi tiếng Anh, biết học sinh đó tự học bằng hình thức trực tuyến, là $0,8$; xác suất chọn được học sinh giỏi tiếng Anh, biết học sinh đó không tự học bằng hình thức trực tuyến, là $0,3$. Xác suất chọn được học sinh giỏi tiếng Anh là :

A. $0,24$. **B.** $0,56$. **C.** $0,7$. **D.** $0,65$.

Lời giải

GVSB: Dương Thị Thanh Tâm; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn D

Gọi các biến cố

A: Học sinh trực tuyến: HSTT

B: HS giỏi TA trực tuyến: GTT

C: HS không trực tuyến: HSKT

D: HS giỏi TA không trực tuyến: GKT

Xác suất chọn đc HSTT là $P(A) = 70\% = 0,7$

Xác xuất chọn đc GTT là $P(B|A) = 0,8$

A xảy ra thì B mới xảy ra nên $P(AB) = P(A).P(B|A) = 0,7.0,3$

Tương tự $P(CD) = P(C).P(D|C) = 0,3.0,3$

Vậy xác suất chọn đc HSG TA là $P(AB) + P(CD) = 0,7.0,3 + 0,3.0,3 = 0,65$

Câu 2. Một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài, trong đó có 4 quân Át, bạn Hoa rút ngẫu nhiên một quân bài (không hoàn lại), sau đó bạn Dung rút ngẫu nhiên một quân bài. Xác suất bạn Dung rút được quân Át là :

A. $0,5$. **B.** $0,56$. **C.** $0,7$. **D.** $0,65$.

Lời giải

GVSB: Dương Thị Thanh Tâm; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn C

Không gian mẫu $n(\Omega) = 52$.

Biến cố A: " Bạn Dung rút được quân Át".

Biến cố B: " Bạn Hoa rút được quân Át".

TH1. Bạn Hoa rút được 1 quân là Át thì số cách chọn là $n(B) = C_4^1 = 4$

Khi đó bạn Dung có số cách chọn quân Át là $C_3^1 = 3$.

Xác suất để bạn Dung rút được quân Át là

$P(AB) = P(B).P(A|B) = \dfrac{4}{52}.\dfrac{3}{51}$

TH2. Bạn Hoa rút được 1 quân không phải là Át thì số cách chọn là $n(\overline{B}) = 48$

Khi đó bạn Dung có số cách chọn quân Át là $C_4^1 = 4$.

Xác suất để bạn Dung rút được quân Át là

$$P\left(A\overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right) = \frac{48}{52}.\frac{4}{51}$$

Vậy xác suất cần tìm là $P\left(AB\right) + P\left(A\overline{B}\right) = \frac{4}{52}.\frac{3}{51} + \frac{48}{52}.\frac{4}{51} = \frac{204}{2652} \cong 0,077$.

Câu 3. Khi điều tra về hoạt động sử dụng máy tính và tình trạng cận thị của trẻ em ở một tỉnh thì được kết quả:

Có 10% trẻ em thường xuyên sử dụng máy tính;

Có 10% trẻ em bị cận thị.

Trong những trẻ em thường xuyên sử dụng máy tính có 54% trẻ em bị cận thị.

Chọn ngẫu nhiên một trẻ em. Xác suất trẻ em được chọn thường xuyên sử dụng máy tính, biết trẻ em đó bị cận thị, là

A. $0,54$. **B.** $0,14$. **C.** $0,18$. **D.** $0,0162$.

Lời giải

GVSB: Dương Thị Thanh Tâm; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn A

Gọi các biến cố

A: "Trẻ em thường xuyên sử dụng máy tính"

B: "Trẻ em bị cận thị"

$P\left(A\right) = 10\% = 0,1$; $P\left(B\right) = 10\% = 0,1$

$P\left(B|A\right) = 0,54$.

Xác suất trẻ em được chọn thường xuyên sử dụng máy tính và bị cận thị là:

$$P\left(A|B\right) = \frac{P\left(B|A\right).P\left(B\right)}{p\left(A\right)} = \frac{0,54.0,1}{0,1} = 0,54.$$

Câu 4. Một động cơ điện có hai van bảo hiểm cùng hoạt động. Xác suất hoạt động tốt của van I là $0,9$, của van II là $0,72$. Xác suất hoạt động tốt của van I, biết van II hoạt động tốt, là $0,96$. Giả sử van I hoạt động tốt, xác suất hoạt động tốt của van II là

A. $0,675$. **B.** $0,768$. **C.** $0,66$. **D.** $0,78$.

Lời giải

GVSB: Dương Thị Thanh Tâm; GVPB: Phạm Thanh Liêm

Chọn B

Gọi các biến cố

A: "Van I hoạt động tốt"

B: "Van II hoạt động tốt"

$P\left(A\right) = 0,9$; $P\left(B\right) = 0,72$

$P\left(A|B\right) = 0,96$.

Xác suất hoạt động tốt của van II khi van I hoạt động tốt là:

$$P\left(B|A\right) = \frac{P\left(A|B\right).P\left(A\right)}{p\left(B\right)} = \frac{0,96.0,72}{0,9} = 0,768.$$

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 5. **[MĐ2]** Cho tập hợp A gồm 20 số nguyên dương không vượt quá 20.

a) Số cách chọn 4 số nguyên dương từ tập hợp A là A_{20}^4.
b) Tích của 4 số nguyên dương là số lẻ khi và chỉ khi cả 4 số là số lẻ.
c) Tập hợp A có 10 số lẻ.
d) Số cách chọn ra 4 số từ tập hợp A sao cho tích của 4 số đó là số chẵn là $A_{20}^4 - A_{10}^4$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Phạm Thanh Liêm

a) Số cách chọn 4 số nguyên dương từ tập hợp A là C_{20}^4.

Chọn SAI.

b) Tích của 4 số nguyên dương là số lẻ khi và chỉ khi cả 4 số là số lẻ.

Chọn ĐÚNG.

c) Tập hợp A gồm 20 số nguyên dương không vượt quá 20
$\Rightarrow A = \{1;2;3;...;18;19;20\} \Rightarrow$ Tập A gồm 10 số lẻ là: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19.

Chọn ĐÚNG.

d) Để chọn ra 4 số từ tập hợp A sao cho tích của 4 số đó là số chẵn thì trong 4 số được chọn cần có ít nhất một số chẵn.
Số cách chọn 4 số bất kì từ tập A là C_{20}^4.
Số cách chọn 4 số từ tập A mà cả 4 số đều là số lẻ là C_{10}^4.
Suy ra số cách chọn 4 số từ tập A mà trong 4 số được chọn có ít nhất một số chẵn là $C_{20}^4 - C_{10}^4$.
Vậy số cách chọn ra 4 số từ tập hợp A sao cho tích của 4 số đó là số chẵn là $C_{20}^4 - C_{10}^4$.

Chọn SAI.

Câu 6. **[MĐ2]** Cho tập hợp A gồm tất cả các chữ số.
a) Tập hợp A có 10 phần tử là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
b) Số các tập con gồm 6 phần tử của A là A_{10}^6.
c) Với mỗi tập con gồm 6 phần tử của A thì có đúng một cách sắp xếp các phần tử theo thứ tự giảm dần.
d) Có A_{10}^6 số gồm 6 chữ số có dạng $\overline{abcdeg}$ thoả mãn $a > b > c > d > e > g$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Phạm Thanh Liêm

a) Tập hợp A gồm tất cả các chữ số $\Rightarrow A = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Chọn ĐÚNG.

b) Số các tập con gồm 6 phần tử của A là C_{10}^6.

Chọn SAI.

c) Với mỗi tập con gồm 6 phần tử của A thì có đúng một cách sắp xếp các phần tử theo thứ tự giảm dần.

Chọn ĐÚNG.

d) Số cách chọn 6 chữ số từ tập A là C_{10}^6.
Số cách sắp xếp 6 chữ số vừa chọn theo thứ tự giảm dần là 1.
Áp dụng quy tắc nhân ta có số số tự nhiên gồm 6 chữ số có dạng $\overline{abcdeg}$ thoả mãn $a > b > c > d > e > g$ là $C_{10}^6.1 = C_{10}^6$.

Chọn SAI.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 7. Lớp $12A$ có 40 học sinh trong đó có 30 học sinh giỏi môn Toán, có 35 học sinh giỏi môn Tiếng Anh, 25 học sinh giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố:

A: "Học sinh được chọn học giỏi môn Toán"

B: "Học sinh được chọn học giỏi môn Tiếng Anh"

a. $P(A) = 0,75$.

b. $P(B) = 0,875$.

c. $P(A \cap B) = 0,625$.

d. $P(A \cup B) = 1$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thị Kim Cúc; GVPB: Phạm Thanh Liêm

a) Số học sinh giỏi môn Toán là 35 nên $n\left(A\right) = C_{30}^{1} = 30$; Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = C_{40}^{1} = 40$.

Suy ra $P\left(A\right) = \dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{30}{40} = 0,75$.

Chọn ĐÚNG.

b) Số học sinh giỏi môn Tiếng Anh là 35 nên $n\left(B\right) = C_{35}^{1} = 35$; Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = C_{40}^{1} = 40$. Suy ra $P\left(B\right) = \dfrac{n\left(B\right)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{35}{40} = 0,875$.

Chọn ĐÚNG.

c) Số học sinh học giỏi cả hai môn là 25 nên $n\left(A \cap B\right) = 25$. Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = C_{40}^{1} = 40$. Suy ra $P\left(A \cap B\right) = \dfrac{n\left(A \cap B\right)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{25}{40} = 0,625$.

Chọn ĐÚNG.

d) Số học sinh học giỏi môn Toán nhưng không học giỏi môn Tiếng Anh là $30 - 25 = 5$. Số học sinh học giỏi môn Tiếng Anh nhưng không học giỏi môn Toán là $35 - 25 = 10$. Suy ra số học sinh không học giỏi cả môn Tiếng Anh và môn Toán là $40 - 5 - 10 - 25 = 0$. Vậy $n\left(A \cup B\right) = 40 \Rightarrow P\left(A \cup B\right) = 1$

Chọn ĐÚNG.

Câu 8. Hai xạ thủ An và Bình cùng bắn vào một mục tiêu ở hai thời điểm khác nhau với xác xuất bắn trúng mục tiêu lần lượt là $0,6$ và $0,7$. Xét các biến cố:

A: "Xạ thủ An bắn trúng mục tiêu"

B: "Xạ thủ Bình bắn trúng mục tiêu"

a. $P(\overline{A}) = 0,6$ và $P\left(\overline{B}\right) = 0,7$.

b. Hai biến cố $\overline{A}$, $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập.

c. Xác suất cả hai xạ thủ đều không bắn trúng mục tiêu là $0,42$.

d. Xác suất cả hai xạ thủ đều bán trúng mục tiêu là $0,58$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thị Kim Cúc; GVPB: Phạm Thanh Liêm

a) $P(A)=0,6 \Rightarrow P(\overline{A})=0,4$; $P(B)=0,7 \Rightarrow P(\overline{B})=0,3$

Chọn SAI.

b) Xác suất của $\overline{A}$ không phụ thuộc xác suất của $\overline{B}$ nên hai biến cố $\overline{A}$, $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập.

Chọn ĐÚNG.

c) Biến cố cả hai xạ thủ đều không bắn trúng mục tiêu là $\overline{A} \cap \overline{B}$, do hai biến cố $\overline{A}$, $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập nên $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = 0,4.0,3 = 0,12$.

Chọn SAI.

d) Biến cố cả hai xạ thủ đều bắn trúng mục tiêu là $A \cap B$, do hai biến cố A, B là hai biến cố độc lập nên $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0,6.0,7 = 0,42$.

Chọn SAI.

Câu 9. Một lớp học có 17 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Cô giáo gọi ngẫu nhiên lần lượt 2 học sinh (có thứ tự) lên trả lời câu hỏi. Xét các biến cố:

A: " Lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nam"

B: " Lần thứ hai cô giáo gọi 1 học sinh nữ"

a) $P(B|A)=0,575$

b) $P(B|\overline{A})=0,6$

c) $P(\overline{B}|A)=0,425$

d) $P(\overline{B}|\overline{A})=0,4$

Lời giải

GVSB: Lê Trần Bảo An; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

a) $P(B|A)=0,575$

Nếu A xảy ra tức là lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nam, khi đó lớp học còn 40 bạn gồm 16 học sinh nam và 24 học sinh nữ.

Do đó $P(B|A)=\dfrac{24}{40}=0,6$.

Chọn SAI.

b) $P(B|\overline{A})=0,6$

Nếu $\overline{A}$ xảy ra tức là lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nữ, khi đó lớp học còn 40 bạn gồm 17 học sinh nam và 23 học sinh nữ.

Do đó $P(B|\overline{A})=\dfrac{23}{40}=0,575$.

Chọn SAI.

c) $P(\overline{B}|A)=0,425$

Ta có $\overline{B}$ " Lần thứ hai cô giáo gọi 1 học sinh nam"

Nếu A xảy ra tức là lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nam, khi đó lớp học còn 40 bạn gồm 16 học sinh nam và 24 học sinh nữ.

Do đó $P(\overline{B}|A)=\dfrac{16}{40}=0,4$.

Chọn SAI.

d) $P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=0,4$

Ta có $\overline{B}$ " Lần thứ hai cô giáo gọi 1 học sinh nam"

Nếu $\overline{A}$ xảy ra tức là lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nữ, khi đó lớp học còn 40 bạn gồm 17 học sinh nam và 23 học sinh nữ.

Do đó $P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=\dfrac{17}{40}=0,425$.

Chọn SAI.

Câu 16. Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất 1 lần. Xét các biến cố:

A: " Mặt xuất hiện của con xúc sắc ghi số 5"

B: " Mặt xuất hiện của con xúc sắc ghi số lẻ"

a) $P(A)=\dfrac{5}{6}$

b) $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

c) $P(B\mid A)=1$

d) $P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

GVSB: Lê Trần Bảo An; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất 1 lần, $n(\Omega)=6$

A: " Mặt xuất hiện của con xúc xắc ghi số 5", $A=\{5\}$

$P(A)=\dfrac{1}{6}$

B: " Mặt xuất hiện của con xúc xắc ghi số lẻ", $B=\{1,3,5\}$

$P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

a) $P(A)=\dfrac{5}{6}$

Chọn SAI.

b) $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

$A\cap B$: " Mặt xuất hiện của con xúc xắc ghi số 5"

$P(A\cap B)=P(A)=\dfrac{1}{6}$

Chọn ĐÚNG.

c) $P(B\mid A)=1$

$$P(B\mid A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1.$$

Chọn ĐÚNG.

d) $P\left(A\mid B\right)=\dfrac{1}{2}$

$$P\left(A\mid B\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

Chọn SAI.

Câu 17. Trong một hộp có 10 quả bóng màu xanh và 12 quả bóng màu đỏ, các quả bóng có khối lượng và kích thước như nhau. Bạn Tuấn lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng, mỗi lần lấy 1 quả và không hoàn lại. Xét các biến cố:

A: "Lần thứ nhất lấy được quả bóng màu xanh";

B: "Lần thứ hai lấy được quả bóng màu xanh".

a) $P\left(A\right)=\dfrac{5}{11}$.

b) $P\left(B\mid A\right)=\dfrac{10}{21}$.

c) $P\left(B\mid \overline{A}\right)=\dfrac{3}{7}$.

a) $P\left(B\right)=\dfrac{5}{11}$.

Lời giải

GVSB: Alexis Nguyen; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

Tập các kết quả có thể xảy ra là không gian mẫu Ω

$\Rightarrow n\left(\Omega\right)=C_{22}^{1}.C_{21}^{1}$

a) $P\left(A\right)=\dfrac{5}{11}$.

Tập các kết quả về màu của hai quả bóng thuận lợi cho biến cố A là:

A = { xanh đỏ, xanh xanh}

$\Rightarrow n\left(A\right)=C_{10}^{1}.C_{21}^{1}$

$$\Rightarrow P\left(A\right)=\frac{C_{10}^{1}.C_{21}^{1}}{C_{22}^{1}.C_{21}^{1}}=\frac{5}{11}$$

Chọn ĐÚNG.

b) $P\left(B\mid A\right)=\dfrac{10}{21}$.

Ta có biến cố: $B\cap A$:"Cả hai lần lấy bóng đều là màu xanh"

$\Rightarrow n\left(B\cap A\right)=C_{10}^{1}.C_{9}^{1}$

$$\Rightarrow P\left(B\cap A\right)=\frac{C_{10}^{1}.C_{9}^{1}}{C_{22}^{1}.C_{21}^{1}}=\frac{15}{77}$$

Ta có: $P\left(B\mid A\right)=\dfrac{P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{\frac{15}{77}}{\frac{5}{11}}=\dfrac{3}{7}$

Chọn SAI.

c) $P\left(B|\overline{A}\right)=\frac{3}{7}$.

Ta có biến cố: $B\cap\overline{A}$:"Lần 1 lấy được bóng màu đỏ, lần 2 lấy được bóng màu xanh"

$\Rightarrow n\left(B\cap\overline{A}\right)=C_{12}^{1}.C_{10}^{1}$

$\Rightarrow P\left(B\cap\overline{A}\right)=\frac{C_{12}^{1}.C_{10}^{1}}{C_{22}^{1}.C_{21}^{1}}=\frac{20}{77}$

Ta có $\overline{A}$ là biến cố "lần 1 không lấy được bóng đỏ" tức là biến cố đối của biến cố A.

$\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=1-\frac{5}{11}=\frac{6}{11}$

Ta có: $P\left(B|\overline{A}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{\frac{20}{77}}{\frac{6}{11}}=\frac{10}{21}$.

Chọn SAI.

d) $P\left(B\right)=\frac{5}{11}$.

Tập các kết quả về màu của hai quả bóng thuận lợi cho biến cố B là:

B = { đỏ xanh, xanh xanh}

$\Rightarrow n\left(B\right)=C_{10}^{1}.C_{12}^{1}+C_{10}^{1}.C_{9}^{1}$

$\Rightarrow P\left(B\right)=\frac{C_{10}^{1}.C_{12}^{1}+C_{10}^{1}.C_{9}^{1}}{C_{22}^{1}.C_{21}^{1}}=\frac{5}{11}$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 18. Một cửa hàng có hai loại bóng đèn Led, trong đó có 65% bóng đèn Led là màu trắng và 35% bóng đèn Led là màu xanh, các bóng đèn có kích thước như nhau. Các bóng đèn Led màu trắng có tỉ lệ hỏng là 2% và các bóng đèn Led màu xanh có tỉ lệ hỏng là 3%. Một khách hàng chọn mua ngẫu nhiên 1 bóng đèn Led từ cửa hàng.

Xét các biến cố:

A: "Khách hàng chọn được bóng đèn Led màu trắng";

B: "Khách hàng chọn được bóng đèn Led không hỏng".

a) $P\left(\overline{A}\right)=0,65$.

b) $P\left(B|A\right)=0,02$.

c) $P\left(B|\overline{A}\right)=0,3$.

d) $P\left(B\right)=0,9765$.

Lời giải

GVSB: Alexis Nguyen; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

a) $P\left(\overline{A}\right)=0,65$.

A: "Khách hàng chọn được bóng đèn Led màu trắng"

$\overline{A}$: "Khách hàng chọn được bóng đèn Led màu xanh"

$\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=0,35$.

Chọn SAI.

b) $P\left(B|A\right)=0,02$.

Ta có $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{\left(1-0,02\right).0,65}{0,65}=0,98$.

Chọn SAI.

c) $P\left(B|\overline{A}\right)=0,3$.

Ta có $P\left(B|\overline{A}\right)=\dfrac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\dfrac{\left(1-0,03\right).0,35}{0,35}=0,97$.

Chọn SAI.

d) $P\left(B\right)=0,9765$.

B: "Khách hàng chọn được bóng đèn Led không hỏng"
TH1: Bóng Led trắng không hỏng: $0,65\times0,98=0,637$
TH2: Bóng Led xanh không hỏng: $0,35\times0,97=0,3395$
Xác suất để khách hàng chọn được bóng đèn Led không hỏng là:
$P\left(B\right)=0,637+0,3375=0,9765$

Chọn ĐÚNG.

Câu 19. Một kho hàng có 85% sản phẩm loại I và 15% sản phẩm loại II, trong đó có 1% sản phẩm loại I bị hỏng, 4% sản phẩm loại II bị hỏng. Các sản phẩm có kích thước và hình dạng như nhau. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Xét các biến cố:
A: "Khách hàng chọn được sản phẩm loại I";
B: "Khách hàng chọn được sản phẩm không bị hỏng".

a) $P\left(A\right)=0,85$.

b) $P\left(B|A\right)=0,99$.

c) $P\left(B\right)=0,9855$.

d) $P\left(A|B\right)=0,95$

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

Xét các biến cố:
A: "Khách hàng chọn được sản phẩm loại I".

a) $P\left(A\right)=0,85$.

Theo đề ta có 85% sản phẩm loại I nên $P\left(A\right)=0,85$.

Chọn ĐÚNG.

b) $P\left(B|A\right)=0,99$.

Ta có $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(BA\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{0,85.0,99}{0,85}=0,99$

Chọn ĐÚNG.

c) $P\left(B\right)=0,9855$.

B: "Khách hàng chọn được sản phẩm không bị hỏng".
$P\left(B\right)=0,85.0,99+0,15.0,96=0,9855$.

Chọn ĐÚNG.

d) $P(A|B)=0,95$

Ta có $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0,85.0,99}{0,9855}\approx 0,854$

Chọn SAI.

Câu 20. Một xưởng máy sử dụng một loại linh kiện được sản xuất từ hai cơ sở I và II. Số linh kiện do cơ sở I sản xuất chiếm 61%, số linh kiện do cơ sở II sản xuất chiếm 39%. Tỉ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của cơ sở I, cơ sở II lần lượt là 93%, 82%. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 linh kiện ở xưởng máy. Xét các biến cố:

A_1 : "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở I sản xuất";

A_2 : "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở II sản xuất";

B : "Linh kiện được kiểm tra đạt tiêu chuẩn".

a) $P(A_1)=0,39$.

b) $P(B|A_2)=0,82$.

c) $P(B)=0,8871$.

d) $P(A_1|B)=0,55$.

Lời giải

GVSB: Trương Thị Thùy Linh; GVPB: Nắng Ấm Ban Mai

Xét các biến cố:

A_1 : "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở I sản xuất";

A_2 : "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở II sản xuất";

B : "Linh kiện được kiểm tra đạt tiêu chuẩn".

a) $P(A_1)=0,39$.

Theo đề ta có số linh kiện do cơ sở I sản xuất chiếm 61%, số linh kiện do cơ sở II sản xuất chiếm 39% nên $P(A_1)=0,61$; $P(A_2)=0,39$.

Chọn SAI.

b) $P(B|A_2)=0,82$.

Ta có $\mathrm{P}(B|A_2)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap A_2)}{\mathrm{P}(A_2)}=0,82$.

Chọn ĐÚNG.

c) $P(B)=0,8871$

B : "Linh kiện được kiểm tra đạt tiêu chuẩn".

$P(B)=0,61.0,93+0,39.0,82=0,8871$.

Chọn ĐÚNG.

d) $\mathrm{P}(A_1|B)=0,55$.

Ta có $\mathrm{P}(A_1|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A_1B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0,61\cdot 0,93}{0,8871}\approx 0,64$

Chọn SAI.

Câu 21. **[MĐ2]** Có bao nhiêu cách xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào một hàng dọc sao cho 2 bạn nam bất kì không đứng liền nhau và 2 bạn nữ bất kì không đứng liền nhau?

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: 1152.

Các vị trí hàng dọc được đánh số từ 1 đến 8.
Có hai trường hợp:
Trường hợp 1:

+ Xếp 4 bạn nam vào 4 vị trí $1,3,5,7$ có $4!$ (cách).

+ Xếp 4 bạn nữ vào 4 vị trí $2,4,6,8$ có $4!$ (cách).

Theo quy tắc nhân có $4!\cdot 4!=576$ cách xếp.
Trường hợp 2:

+ Xếp 4 bạn nữ vào 4 vị trí $1,3,5,7$ có $4!$ (cách).

+ Xếp 4 bạn nam vào 4 vị trí $2,4,6,8$ có $4!$ (cách).

Theo quy tắc nhân có $4!\cdot 4!=576$ cách xếp.
Vậy theo quy tắc cộng có $576+576=1152$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu.

Câu 22. **[MĐ2]** Có bao nhiêu cách lập một mật khẩu là một dãy 8 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số mà số 1 xuất hiện 3 lần, số 2 xuất hiện 3 lần, số 3 xuất hiện 2 lần?

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: 560.

Ta có dãy gồm 8 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số nên có $8!$ cách lập.
Vì số 1 xuất hiện 3 lần, số 2 xuất hiện 3 lần, số 3 xuất hiện 2 lần nên số cách lập thỏa yêu cầu là $\dfrac{8!}{3!3!2!}=560$ cách.

Câu 23. **[MĐ3]** Một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài, trong đó có 13 tứ quý (mỗi tứ quý là một bộ 4 quân bài cùng giá trị, ví dụ 4 quân Át, 4 quân K,…). Rút ngẫu nhiên 6 quân bài. Xác suất rút được 6 quân bài bao gồm 1 tứ quý và 2 quân bài còn lại ở 2 tứ quý khác nhau là $\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: 132.

Gọi Ω là không gian mẫu.
Rút ngẫu nhiên 6 quân bài từ bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài nên $n\left(\Omega\right)=C_{52}^{6}$ (cách).
Gọi A là biến cố "Rút được 6 quân bài bao gồm 1 tứ quý và 2 quân bài còn lại ở 2 tứ quý khác nhau".

+ Chọn 3 tứ quý từ 13 tứ quý có C_{13}^{3} cách.

+ Trong 3 tứ quý trên, một tứ quý ta lấy đủ 4 quân bài và 2 tứ quý còn lại, ta lấy từ mỗi tứ quý một quân bài.

Suy ra $n\left(A\right)=C_{13}^{3}\cdot 3\cdot C_{4}^{1}\cdot C_{4}^{1}=13728$ (cách).

Vậy xác suất của biến cố A là $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{13728}{C_{52}^{6}}=\dfrac{132}{195755}$.

Vậy $a=132$.

Câu 24. **[MĐ3]** Hai bạn Hải và Bình cùng tham dự một kì thi trắc nghiệm, vòng 1 thi Toán, vòng 2 thi Tiếng Anh. Mỗi vòng thi có 8 mã đề được đánh số từ 1 đến 8 . Mỗi bạn phải bốc thăm ngẫu nhiên 1 đề Toán và 1 đề Tiếng Anh. Xét biến cố A: "Hai bạn có chung mã đề ở duy nhất một vòng thi". Xác suất của biến cố A là $\dfrac{a}{b}$ với a, b là các số tự nhiên khác 0, $b<50$. Giá trị của $a+b$ là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Nắng Đông; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: 39.

Gọi Ω là không gian mẫu.

Suy ra $n\left(\Omega\right)=8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=4096$ (cách).

Xét biến cố A : "Hai bạn có chung mã đề ở duy nhất một vòng thi".

Có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Hai bạn chung mã đề thi ở vòng thứ nhất và khác mã đề thi ở vòng thứ hai. Khi đó có $8\cdot A_{8}^{2}=448$ cách.

Trường hợp 2: Hai bạn chung mã đề thi ở vòng thứ hai và khác mã đề thi ở vòng thứ nhất. Khi đó có $8\cdot A_{8}^{2}=448$ cách.

Suy ra $n\left(A\right)=448+448=896$ (cách).

Và xác suất của biến cố A là $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{896}{4096}=\dfrac{7}{32}$.

Vậy $a=7;b=32$ nên $a+b=39$.

Câu 25. **[MĐ3]** *Câu lạc bộ văn nghệ của trường Giải Phóng có 40 bạn đều biết chơi ít nhất một trong hai loại đàn là organ và guitar, trong đó có 27 bạn biết chơi đàn organ, 25 bạn biết chơi đàn guitar. Chọn ngẫu nhiên 1 bạn. Xác suất chọn được bạn biết chơi đàn organ, biết bạn đó chơi được đàn guitar, là bao nhiêu?*

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: $0,48$.

Gọi A là biến cố "Bạn được chọn biết chơi đàn organ"

Gọi B là biến cố "Bạn được chọn biết chơi đàn guitar"

Số bạn biết chơi cả hai môn là $27+25-40=12$.

Vậy trong số 25 bạn biết chơi guitar thì có 12 bạn biết chơi organ.

Vậy xác suất chọn được bạn biết chơi đàn organ, biết bạn đó chơi được đàn guitar, là $P\left(A|B\right)=\dfrac{n\left(A\cap B\right)}{n\left(B\right)}=\dfrac{12}{25}=0,48$.

Câu 26. **[MĐ3]** *Lớp* $12A$ *có* 37 *học sinh, trong đó có* 15 *học sinh thích môn Tin học,* 20 *học sinh thích môn Tiếng Anh,* 10 *học sinh không thích môn nào trong hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên* 1 *học sinh. Xác suất chọn được học sinh thích môn Tin học, biết học sinh đó thích môn Tiếng Anh, là bao nhiêu?*

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: $0,4$.

Gọi A *là biến cố "Bạn được chọn thích Tin học"*

Gọi B *là biến cố "Bạn được chọn thích Tiếng Anh"*

Ta có số học sinh thích ít nhất một trong hai môn là $37-10=27$.

Số bạn thích cả hai môn là $20+15-27=8$.

Vậy trong số 20 *bạn thích Tiếng Anh thì có* 8 *bạn thích Tin học.*

Vậy xác suất chọn được học sinh thích môn Tin học, biết học sinh đó thích môn Tiếng Anh, là $P\left(A|B\right)=\dfrac{n\left(A\cap B\right)}{n\left(B\right)}=\dfrac{8}{20}=0,4$.

Câu 27. **[MĐ3]** *Có hai thùng* I *và* II *chứa các sản phẩm có khối lượng và hình dạng như nhau. Thùng* I *có* 5 *chính phẩm và* 4 *phế phẩm, thùng* II *có* 6 *chính phẩm và* 8 *phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên* 1 *sản phẩm từ thùng* I *sang thùng* II. *Sau đó, lấy ngẫu nhiên* 1 *sản phẩm từ thùng* II *để sử dụng. Xác suất lấy được chính phẩm từ thùng* II *là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?*

Lời giải

GVSB: Ninh Đoàn; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: $0,44$.

Xác suất lấy được một chính phẩm từ thùng I là $\dfrac{5}{9}$.

Xác suất lấy được một phế phẩm từ thùng I là $\dfrac{4}{9}$.

Lấy 1 sản phẩm từ thùng I và bỏ sang thùng II, khi đó ta có các trường hợp sau

TH1. Lấy được chính phẩm từ thùng I.

Khi đó thùng II sẽ có 7 chính phẩm và 8 phế phẩm.

Vậy xác suất lấy được chính phẩm từ thùng II sẽ là $\dfrac{7}{15}$.

TH2. Lấy được phế phẩm từ thùng I.

Khi đó thùng II sẽ có 6 chính phẩm và 9 phế phẩm.

Vậy xác suất lấy được chính phẩm từ thùng II sẽ là $\dfrac{6}{15}$.

Vậy, xác suất của bài toán sẽ là $P=\dfrac{5}{9}.\dfrac{7}{15}+\dfrac{4}{9}.\dfrac{6}{15}=\dfrac{59}{135}\approx 0,44$.

Câu 28. **[MĐ2]** Tỉ lệ bị bệnh cúm tại một địa phương bằng 0,25. Khi thực hiện xét nghiệm chẩn đoán, nếu người có bệnh cúm thì khả năng phản ứng dương tính là 96%, nếu người không bị bệnh cúm thì khả năng phản ứng dương tính 8%. Chọn ngẫu nhiên 1 người tại địa phương đó. Xác suất người được chọn có phản ứng dương tính là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Th Tiến_PK-KQ; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: $0,3$

Xét biến cố C: "Người được chọn có phản ứng dương tính".

Khi đó xảy ra 1 trong 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: A: "Người được chọn bị bệnh cúm và xét nghiệm đúng".

Trường hợp 2: B: "Người được chọn không bị bệnh cúm và xét nghiệm sai".

Vậy xác suất người được chọn có phản ứng dương tính là:

$P(C)=P(A)+P(B)=0,25.0,96+(1-0,25).0,08=0,3$.

Câu 29. **[MĐ2]** Thực hiện khảo sát tại một địa phương mà số trẻ em nam gấp 1,5 lần số trẻ em nữ, có 8% số trẻ em nam bị hen phế quản, 5% số trẻ em nữ bị hen phế quản. Chọn ngẫu nhiên 1 trẻ em. Giả sử trẻ em được chọn bị hen phế quản. Xác suất chọn được trẻ em nam là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

GVSB: Th Tiến_PK-KQ; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: $0,7$

Giả sử địa phương có 1000 trẻ. Như vậy có 600 trẻ nam và 400 trẻ nữ; trong đó có 48 trẻ nam và 20 trẻ nữ bị hen phế quản.

Xét 2 biến cố sau:

A: "Trẻ em được chọn là nam".

B: "Trẻ em được chọn bị hen phế quản".

Khi đó, xác suất chọn được trẻ em nam, với điều kiện bị hen phế quản chính là xác suất chọn được A với điều kiện B.

Ta có: $P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{48}{48+20}\approx 0,7$.

Câu 30. **[MĐ2]** Trường Bình Phúc có 20% học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc, trong số học sinh đó có 85% học sinh biết chơi đàn guitar. Ngoài ra, có 10% số học sinh không tham gia câu lạc bộ âm nhạc cũng biết chơi đàn guitar. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Giả sử học sinh đó biết chơi đàn guitar. Xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc là bao nhiêu?

Lời giải

GVSB: Th Tiến_PK-KQ; GVPB: Đỗ Hải Thu

Trả lời: $0,63$

Xét 2 biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn thuộc câu lạc bộ âm nhạc".

B: "Học sinh được chọn biết chơi đàn guitar".

Khi đó, xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc, với điều kiện biết chơi đàn guitar chính là xác suất chọn được A với điều kiện B.

Ta có: $P(A|B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{0,2.0,85}{0,2.0,85+0,1}\approx 0,63$.

---------------------------------------Hết---------------------------------------