SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **PHÚ THỌ**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS CẤP TỈNH** **NĂM HỌC 2025 - 2026**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn: TOÁN** Thời gian làm bài: **150** phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi: **03/02/2026** *(Đề thi gồm 05 trang)*

Lưu ý: Thí sinh làm bài cả phần tự luận và trắc nghiệm vào tờ giấy thi

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (6,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Để khuyến khích tiết kiệm điện, nhà cung cấp A quy định giá điện sinh hoạt được tính theo kiểu lũy tiến, nghĩa là nếu người sử dụng càng dùng nhiều điện thì giá mỗi số điện $(1\,\text{kWh})$ càng tăng lên theo các mức như sau:

Mức thứ nhất: Tính cho 100 số điện đầu tiên.

Mức thứ hai: Tính cho số điện từ số 101 đến 150, mỗi số đắt hơn 140 đồng so với mức thứ nhất.

Mức thứ ba: Tính cho số điện từ số 151 đến 200, mỗi số đắt hơn 400 đồng so với mức thứ hai.

...

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng (thuế VAT).

Tháng vừa qua, nhà bạn Phương dùng hết 160 số điện và phải trả 356840 đồng cho nhà cung cấp A. Hỏi giá mỗi số điện ở mức thứ nhất là bao nhiêu?

A. 2150 đồng. **B.** 1970 đồng. **C.** 1950 đồng. **D.** 2050 đồng.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = mx - 2m + 3$ cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 16 (đơn vị diện tích). Tổng tất cả các giá trị của m thỏa mãn là

A. 11. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -11.

Câu 3: Biết a, b là các số thực sao cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + (b+1)y = 5 \\ (a+1)x + (3-b)y = -12 \end{cases}$ có nghiệm là $(1;-3)$.

Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -4.

Câu 4: Bác Minh mua hai chiếc máy tính và phải trả tổng cộng 28,02 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 12% cho máy tính thứ nhất và 8% với máy tính thứ hai. Nếu mức thuế giá trị gia tăng là 10% đối với cả hai chiếc máy tính thì bác Minh phải trả thêm 30 nghìn đồng. Hỏi nếu không tính thuế giá trị gia tăng thì bác Minh phải trả bao nhiêu tiền cho chiếc máy tính thứ nhất?

A. $13{,}5$ triệu đồng. **B.** $13{,}2$ triệu đồng. **C.** $13{,}4$ triệu đồng. **D.** 12 triệu đồng.

Câu 5: Cho $S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2025^2} + \frac{1}{2026^2}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S > 2026$. **B.** $2025 < S < 2026$. **C.** $S = 2026$. **D.** $S < 2025$.

Câu 6: Trong một bài thi đánh giá của trường đại học X, ban giám khảo quy định mỗi thí sinh phải trả lời 25 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Trong mỗi câu hỏi, thí sinh trả lời đúng được cộng 4 điểm, trả lời sai bị trừ 1 điểm. Theo quy định, mỗi thí sinh phải trả lời hết 25 câu hỏi; người nào có số điểm từ 75 điểm trở lên sẽ vượt qua vòng sơ tuyển. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu hỏi thì vượt qua vòng sơ tuyển?

A. 20. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 21.

Câu 7: Rút gọn biểu thức $Q = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ với $1 < x < 2$ ta được

A. $Q = 2x - 3$. **B.** $Q = 3$. **C.** $Q = 1$. **D.** $Q = 3 - 2x$.

Câu 8: Với điều kiện $x \geq 0,\ x \neq 4$, kết quả thu gọn của biểu thức $A = \sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}\right)$ là

A. $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-4}$. B. $\dfrac{2x}{x-4}$. C. $\dfrac{2x}{4-x}$. D. $\dfrac{2x}{x+4}$.

Câu 9: Số các số tự nhiên n không vượt quá 2026 sao cho $n^3 + 5n$ chia hết cho 6 bằng

A. 1013. B. 2025. C. 2026. D. 2027.

Câu 10: Số các số nguyên dương n không phải là lũy thừa của 2, $n \leq 2025$ sao cho $2026^n + 1$ là hợp số bằng

A. 2025. B. 2014. C. 2015. D. 2024.

Câu 11: Gọi $A,\ B$ là giao điểm của Parabol $y = -x^2$ và đường thẳng $y = 2x - 3$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $4\sqrt{5}$. B. 20. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{3}$.

Câu 12: Giả sử a, b, c là các số nguyên $(a \neq 0)$ sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là $x_1,\ x_2$, trong đó có một nghiệm bằng $2 - \sqrt{3}$. Khi đó $(x_1 - x_2)^2$ bằng

A. 20. B. 16. C. 12. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 13: Năm bạn An, Bình, Cường, Dũng, Đức được xếp ngẫu nhiên ngồi trên một hàng ghế có năm chỗ ngồi. Khi đó xác suất của biến cố "Bình và An không ngồi cạnh nhau" bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. B. $\dfrac{1}{5}$. C. $\dfrac{4}{5}$. D. $\dfrac{3}{5}$.

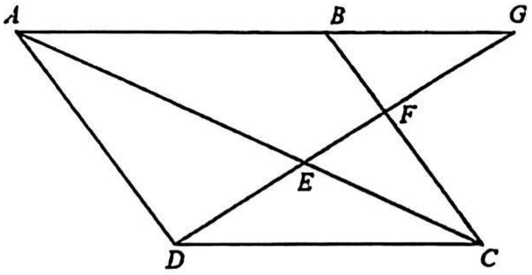
Câu 14: Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh của một thập giác đều (thập giác đều là đa giác lồi có 10 đỉnh, tất cả các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau). Khi đó xác suất để chọn được ba đỉnh tạo thành một tam giác có một góc lớn hơn 120° bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. B. $\dfrac{1}{4}$. C. $\dfrac{1}{40}$. D. $\dfrac{3}{10}$.

Câu 15: Cho tam giác ABC vuông tại B, cạnh $AB = 2x, AC = x^2 + 1$ với $x > 1$. Độ dài cạnh BC là

A. $x^2 - 1$. B. $x + 1$. C. $\sqrt{x^4 + 6x^2 + 1}$. D. $x - 1$.

Câu 16: Cho hình vẽ bên, biết tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, bốn điểm D, E, F, G thẳng hàng. Cho $DE = 6,3$ cm và $FG - EF = 1,05$ cm. Độ dài của DG bằng



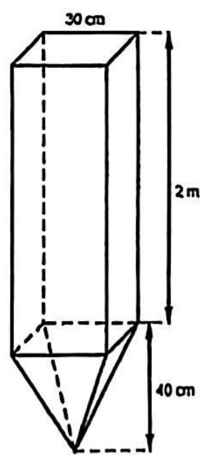
A. 16,1 cm.

B. 15,95 cm.

C. 15,75 cm.

D. 15,85 cm.

Câu 17: Một nhà máy sản xuất loại cọc bê tông: phần trên cọc bê tông có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông cạnh 30 cm, chiều cao 2 m; phần dưới cọc bê tông có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao 40 cm (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của cọc bê tông đó là



A. $0,72\ m^3$.

B. $0,216\ m^3$.

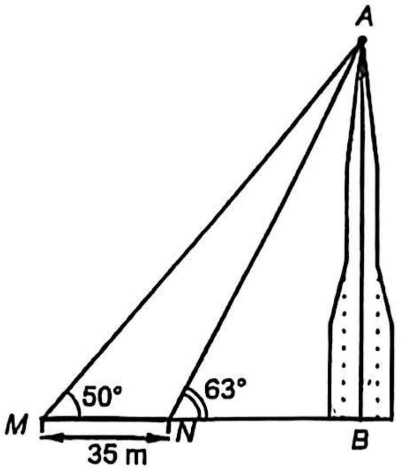
C. $0,192\ m^3$.

D. $0,24\ m^3$.

Câu 18: Cho hình thoi $ABCD$ có diện tích là $32\sqrt{3}\,cm^2$ và $AC = 8$ cm. Số đo $\widehat{ABD}$ bằng

A. 45°. **B.** 120°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Câu 19: Trong một lần quan sát một tháp truyền hình, bạn Nam muốn ước lượng chiều cao của tháp. Sau khi quan sát, Nam minh họa lại quá trình đo đạc như hình vẽ bên: chiều cao của tháp truyền hình là độ dài đoạn thẳng AB, hai điểm quan sát M, N cách nhau $35\,\text{m}$, góc quan sát $\widehat{M} = 50^\circ, \widehat{N} = 63^\circ$. Chiều cao của tháp (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét) là



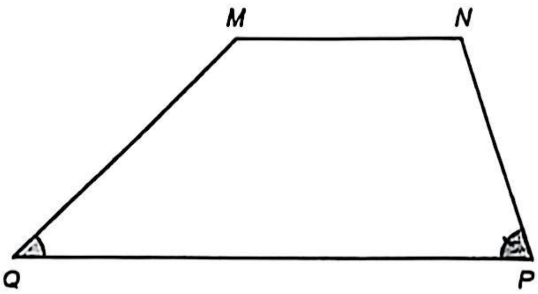
A. 45 m.

B. 106 m.

C. 108 m.

D. 110 m.

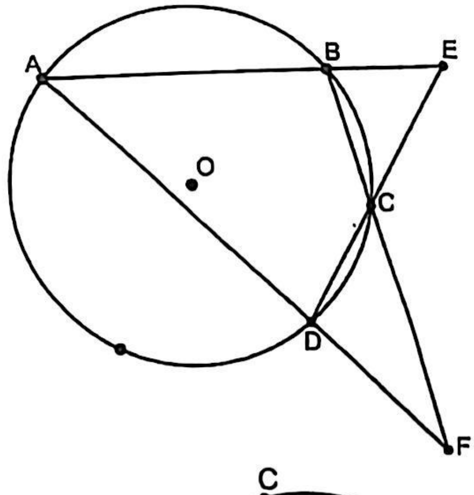
Câu 20: Mặt cắt ngang của một đoạn đê có dạng hình thang $MNPQ$ (tham khảo hình vẽ bên). Chiều rộng mặt trên đê MN là 4 m, chiều dài của sườn đê MQ là 4,5 m và $\widehat{Q} = 45^\circ, \widehat{P} = 69^\circ$. Chiều dài của chân đê PQ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét) là



A. 8,4 m. **B.** 15,5 m.

C. 8,2 m. **D.** 8,6 m.

Câu 21: Bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường tròn (O) như hình vẽ bên sao cho đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại điểm E, đường thẳng BC cắt đường thẳng AD tại điểm F và $\widehat{BEC} = 60^\circ$, $\widehat{CFD} = 30^\circ$. Khi đó số đo $\widehat{BCD}$ bằng



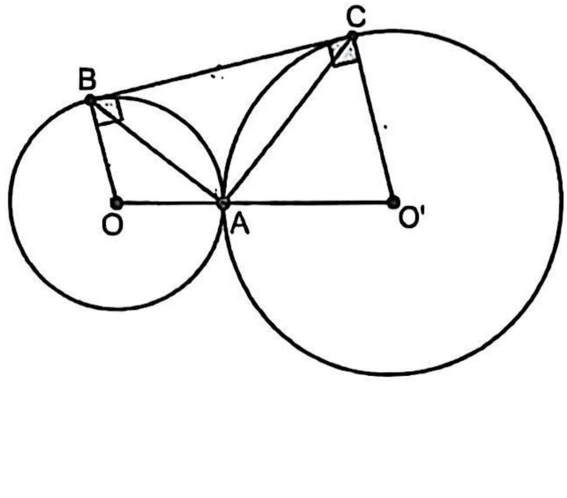
A. 150°.

B. 120°.

C. 135°.

D. 145°.

Câu 22: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Một đường thẳng tiếp xúc với các đường tròn $(O;R), (O';R')$ lần lượt tại các điểm B, C (tham khảo hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây ***sai***?



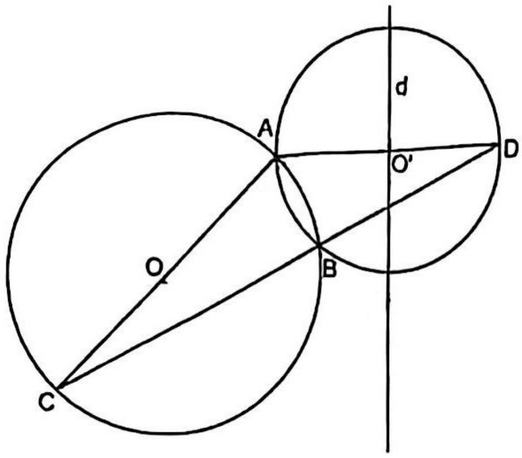
A. $OO' = R + R'$.

B. $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

C. $BC^2 = 4RR'$.

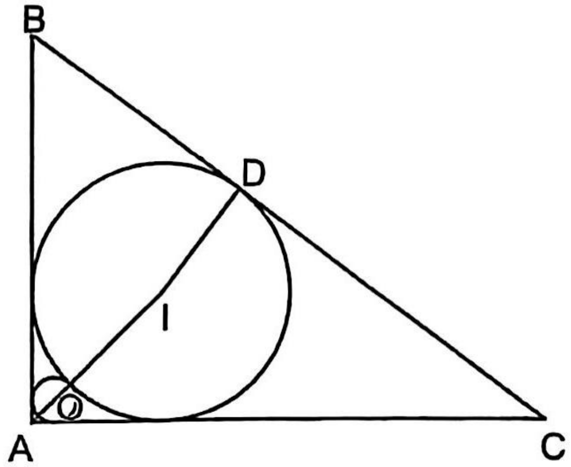
D. $AB = \dfrac{2RR'}{\sqrt{R(R+R')}}$.

Câu 23: Cho đường tròn $(O;6\,\text{cm})$ và một đường thẳng d sao cho khoảng cách từ O đến d bằng $8\,\text{cm}$. Đường tròn có tâm O' nằm trên đường thẳng d cắt đường tròn $(O;6\,\text{cm})$ tại hai điểm phân biệt A, B. Kẻ đường kính AC của đường tròn $(O;6\,\text{cm})$ và đường kính AD của đường tròn $(O';O'A)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $BC+BD$ bằng



A. 8 cm. **B.** 16 cm.
C. 14 cm. **D.** 6 cm.

Câu 24: Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB=6\,\text{cm}$, $AC=8\,\text{cm}$. Các đường phân giác trong của tam giác ABC cắt nhau tại điểm I. Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ I xuống đường thẳng BC. Một đường tròn tâm O có bán kính R (O thuộc đoạn IA) tiếp xúc ngoài với đường tròn $(I;ID)$ và các đường thẳng AB, AC. Khi đó R (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của xen-ti-mét) bằng



A. $0{,}34\,\text{cm}$.

B. $0{,}33\,\text{cm}$.

C. $0{,}83\,\text{cm}$.

D. $0{,}82\,\text{cm}$.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai (2,0 điểm). Thí sinh trả lời Câu 1; Câu 2. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn **đúng** hoặc **sai**.

Câu 1: Cho các số $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ và được tô màu như sau: các số $1,2,3,4,5$ được tô màu đỏ, các số $6,7,8,9$ được tô màu xanh và các số $10,11,12$ được tô màu vàng. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau (không phân biệt thứ tự) trong 12 số đã cho cùng một lúc.

a) Xác suất chọn được hai số khác màu và có tổng bằng 13 là $\dfrac{1}{11}$.

b) Xác suất chọn được hai số cùng màu và có tổng bằng 15 là $\dfrac{1}{33}$.

c) Xác suất chọn được hai số cùng màu là $\dfrac{19}{66}$.

d) Xác suất chọn được hai số khác màu và có tổng là số nguyên tố bằng $\dfrac{3}{11}$.

Câu 2: Một xưởng bánh kẹo sản xuất hai loại sản phẩm I và II. Một tấn sản phẩm I lãi 15 triệu đồng, một tấn sản phẩm II lãi 30 triệu đồng. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm I cần dùng máy T_1 trong 1 giờ, máy T_2 trong 1,5 giờ. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm II cần dùng máy T_1 trong 1,2 giờ, máy T_2 trong 1,2 giờ. Biết rằng một máy không thể cùng sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm; máy T_1 làm việc không quá 7,2 giờ trong một ngày; máy T_2 làm việc không quá 9 giờ trong một ngày. Giả thiết xưởng đó trong một ngày sản xuất x (tấn) sản phẩm I và y (tấn) sản phẩm II $(x\ge 0, y\ge 0)$.

a) Nếu gọi T (đơn vị triệu đồng) là số tiền lãi mỗi ngày của xưởng thì $T = 15x + 30y$.

b) Nếu trong một ngày xưởng sản xuất 6 tấn sản phẩm I thì sẽ không sản xuất sản phẩm II.

c) Nếu trong một ngày xưởng sản xuất 4 tấn sản phẩm I thì sẽ có thể sản xuất thêm 2,6 tấn sản phẩm II.

d) Số tiền lãi lớn nhất trong một ngày của xưởng là 144 triệu đồng.

PHẦN III. Tự luận (12,0 điểm)

Câu 1 *(3,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng $P = (a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c) + 4b^2c^2$ là số chính phương với mọi số nguyên a, b, c.

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $x^3 + y(x^2 + 2x - 1) + 2y^2 = 15 + x$.

Câu 2 *(3,0 điểm).*

a) Giải phương trình: $2\sqrt{x-3} + 3\sqrt{2x+1} = x^2 - 6x + 19$.

b) Công ty quảng cáo Y cần thiết kế một khối trang trí hình hộp chữ nhật: mỗi cạnh của hình hộp chữ nhật về phía ngoài gắn một thanh trang trí có độ dài bằng độ dài cạnh đó, với giá thành g (đơn vị: triệu đồng) của một thanh dài l (đơn vị: mét) tỉ lệ thuận với bình phương độ dài của nó, tính theo công thức $g = \frac{1}{4}l^2$; tất cả phần không gian bên trong của hình hộp chữ nhật đã cho được chế tạo bằng vật liệu trong suốt với giá thành 2 triệu đồng cho 1 m^3. Biết rằng tổng chi phí sử dụng cho cả khối là 1 triệu đồng. Hỏi tổng độ dài của tất cả các thanh trang trí lớn nhất là bao nhiêu?

Câu 3 *(4,0 điểm).*

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOM cắt đường thẳng BC tại điểm $D(D \neq M)$ và cắt đường tròn (O) tại điểm $E(E \neq A)$. Gọi F là giao điểm của đường thẳng AE với đường thẳng BC.

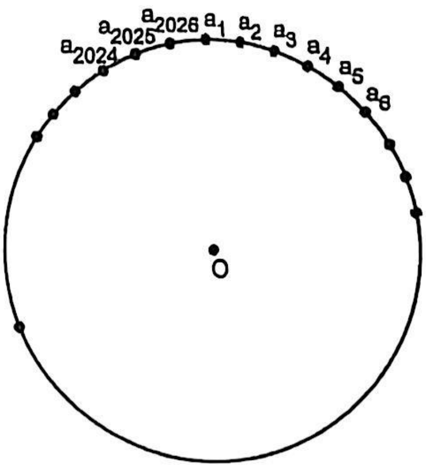
a) Chứng minh đường thẳng DA tiếp xúc với đường tròn (O) và $DA^2 = DB \cdot DC$.

b) Các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm N. Chứng minh $\widehat{ODA} = \widehat{OAN}$ và $\frac{FD}{FB} = \frac{FC}{FM}$.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AFM tiếp xúc trong với đường tròn (O).

Câu 4 *(2,0 điểm).*

Các số $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2026} \in \{-1;1\}$ được sắp xếp liên tiếp lên đường tròn theo thứ tự trên (tham khảo hình vẽ bên).



a) Hỏi đẳng thức $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + ... + a_{2025}a_{2026} + a_{2026}a_1 = 0$ có xảy ra được không?

b) Thầy Hùng muốn xác định giá trị của các số $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2026}$ bằng cách hỏi một số câu hỏi (không được lặp lại câu hỏi), trong đó mỗi câu hỏi chỉ được phép hỏi giá trị tích của ba số liên tiếp trên đường tròn (ba số a_k, a_{k+1}, a_{k+2} được gọi là ba số liên tiếp trên đường tròn, trong đó k là số nguyên dương không vượt quá 2026, $a_{2027} = a_1$, $a_{2028} = a_2$) và nhận được câu trả lời giá trị chính xác của tích ba số đó. Nếu thầy Hùng hỏi 2026 câu hỏi như trên thì có thể xác định được giá trị của 2026 số $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2026}$ không?

................**Hết**................

Họ và tên thí sinh: ....Số báo danh:......................

(Thí sinh không sử dụng tài liệu; Giám thị không giải thích gì thêm)

Lời giải kỳ thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS cấp tỉnh

Vũ Hoàng Sơn - Lã Duy Tùng - Triệu Tuấn Anh

4/2/2026

1 Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (6,0 điểm).

1. C	2. B	3. A	4. D	5. B	6. A	7. C	8. B	9. D	10. C	11. A	12. C
13. C	14. B	15. A	16. C	17. C	18. D	19. B	20. A	21. C	22. D	23. B	24. A

2 Phần II . Trắc nghiệm đúng sai (2,0 điểm).

1. S Đ Đ Đ	2. Đ Đ S S

3 Phần III. Tự luận (12,0 điểm).

Câu 1 (3,0 điểm).
a) Chứng minh rằng $P = (a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c) + 4b^2c^2$ là số chính phương với mọi số nguyên a, b, c.

b) Tìm tất cả số tự nhiên (x, y) sao cho $x^3 + y(x^2 + 2x - 1) + 2y^2 = 15 + x$

Lời giải:
a) Ta có: $P = (a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c) + 4b^2c^2$

$= [a-(b-c)] \cdot [a+(b-c)] \cdot [a-(b+c)] \cdot [a+(b+c)] + 4b^2c^2$

$= [a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2] + 4b^2c^2$

$= a^4 - a^2[(b-c)^2 + (b+c)^2] + (b-c)^2 \cdot (b+c)^2 + 4b^2c^2$

$= a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot (b^2+c^2) + (b^2-c^2)^2 + 4b^2c^2$

$= a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot (b^2+c^2) + (b^2+c^2)^2$

$= (a^2-b^2-c^2)^2.$

Lại do $a, b, c \in \mathbf{Z}$ nên $a^2 - b^2 - c^2 \in Z$.

Do đó $P = (a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c) + 4b^2c^2$ là số chính phương.

b) Từ giả thiết ta có: $x^3 + y(x^2 + 2x - 1) + 2y^2 = 15 + x$.

$$x^3 + x^2y + 2xy - y + 2y^2 = 15 + x.$$
$$x^2(x + y) + 2y(x + y) = 15 + (x + y).$$
$$x^2(x + y) + 2y(x + y) - (x + y) = 15.$$
$$(x^2 + 2y - 1)(x + y) = 15.$$

Do $x, y \in \mathbf{N}$ nên $x^2 + 2y - 1$; $x + y \in \mathbf{Z}$ lại do $x + y \in N$ và $(x^2 + 2y - 1)(x + y) = 15 > 0$ nên $x^2 + 2y - 1; x + y \in \mathbf{N}^*$.

Cho nên $x + y; x^2 + 2y - 1 \in \{1; 3; 5; 15\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

+) Trường hợp 1: $\begin{cases} x + y = 1(1) \\ x^2 + 2y - 1 = 15(2) \end{cases}$.

Từ phương trình (1) ta có $(x, y) \in \{(0; 1); (1; 0)\}$ vì $x, y \in \mathbf{N}$.

Thử lại ta thấy không thỏa mãn.

+) Trường hợp 2: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 2y - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + 2(3 - x) - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình này ta thu được $(x, y) \in \{(2; 1); (0; 3)\}$ (Thử lại đều thỏa mãn).

+) Trường hợp 3: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + 2y - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + 2(5 - x) - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 - 2x + 6 = 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình này vô nghiệm do $x^2 - 2x + 6 = (x - 1)^2 + 5 \geqslant 5 > 0$.

+) Trường hợp 4: $\begin{cases} x + y = 15 \\ x^2 + 2y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ x^2 + 2(15 - x) - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ x^2 - 2x + 28 = 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình này cũng vô nghiệm do $x^2 - 2x + 28 = (x - 1)^2 + 27 \geqslant 27 > 0$.

Như vậy phương trình có nghiệm nguyên (x, y) thỏa mãn là $(x, y) = \{(2; 1); (0; 3)\}$.

Câu 2 (3,0 điểm).
a) Giải phương trình $2\sqrt{x - 3} + 3\sqrt{2x + 1} = x^2 - 6x + 19$.

b) Công ty quảng cáo Y cần thiết kế một khối trang trí hình hộp chữ nhật: mỗi cạnh của hình hộp chữ nhật về phía ngoài gắn một thanh trang trí có độ dài bằng độ dài cạnh đó, với giá thành g (đơn vị; triệu đồng) của một thanh dài l (đơn vị: mét) tỉ lệ thuận với bình phương độ dài của nó, tính theo công thức $g = \dfrac{1}{4}l^2$; tất cả phần không gian bên trong của hình hộp chữ nhật đã cho được chế tạo bằng vật liệu trong suốt với giá trình 2 triệu đồng cho 1 m^3. Biết rằng tổng chi phí sử dụng cho cả khối là 1 triệu đồng. Hỏi tổng độ dài của tất cả các thanh trang trí lớn nhất là bao nhiêu ?

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ 2x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 3.$

Với điều kiện trên ta có:
Giả thiết: $x^2 - 6x + 19 = 2\sqrt{x-3} + 3\sqrt{2x+1}$.

$$(x^2 - 8x + 16) + (x - 3 - 2\sqrt{x-3} + 1) + (x + 5 - 3\sqrt{2x+1}) = 0.$$

$$(x-4)^2 + (\sqrt{x-3} - 1)^2 + \frac{(x+5)^2 - 9(2x+1)}{x+5+3\sqrt{2x+1}} = 0.$$

$$(x-4)^2 + (\sqrt{x-3} - 1)^2 + \frac{x^2 - 8x + 16}{x+5+3\sqrt{2x+1}} = 0.$$

$$(x-4)^2 + \frac{(x-4)^2}{(\sqrt{x-3}+1)^2} + \frac{x^2 - 8x + 16}{x+5+3\sqrt{2x+1}} = 0.$$

$$(x-4)^2[1 + \frac{1}{(\sqrt{x-3}+1)^2} + \frac{1}{x+5+3\sqrt{2x+1}}] = 0.$$

Đặt $A = 1 + \dfrac{1}{(\sqrt{x-3}+1)^2} + \dfrac{1}{x+5+3\sqrt{2x+1}}$. Rõ ràng $A > 0$ với mọi $x \geqslant 3$.
Cho nên $(x-4)^2 = 0$ hay $x = 4$ (Thử lại thỏa mãn bài toán).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

b) Gọi x, y, z lần lượt là độ dài của chiều dài, chiều rộng và chiều cao của khối trang trí (đơn vị mét); $(x, y, z \in R)$; $(x, y, z > 0)$.
Do hình hộp chữ nhật có 4 cạnh là chiều dài; 4 cạnh là chiều rộng và 4 cạnh là chiều cao nên khi đó tổng giá thành để trang trí các cạnh là:

$$A = 4 \cdot (\frac{1}{4}x^2) + 4 \cdot (\frac{1}{4}y^2) + 4 \cdot (\frac{1}{4}z^2) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá thành để trang trí không gian bên trong là:

$$B = 2 \cdot x \cdot y \cdot z = 2xyz \text{ (triệu đồng)}.$$

Do đó tổng giá thành để trang trí là: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ (triệu đồng).

Mặt khác tổng độ dài của tất cả các thanh trang trí là: $4(x + y + z)$ (mét).

Khi đó từ đề bài ta sẽ có $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

Lúc này cần tìm giá trị nhỏ nhất của $C = 4(x + y + z)$.

Thật vậy, từ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$:
Hay $1 - x^2 = y^2 + z^2 + 2xyz \geqslant 2yz + 2xyz = 2yz(x + 1)$.
Tức $(1 - x)(1 + x) \geqslant 2yz(x + 1)$ mà do $x + 1 > 0$ nên $1 - x \geqslant 2yz$. suy ra $x < 1$.
Tương tự có: $y, z < 1$.
Theo nguyên lý Di-rích-lê thì trong 3 số $x - \dfrac{1}{2}; y - \dfrac{1}{2}; z - \dfrac{1}{2}$ có ít nhất 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng

quát, giả sử 2 số cùng dấu đó là $y-\frac{1}{2}; z-\frac{1}{2}$.
Khi đó: $(y-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2}) \geqslant 0$

$$yz - \frac{1}{2} \cdot (y+z) + \frac{1}{4} \geqslant 0.$$
$$yz \geqslant \frac{1}{2} \cdot (y+z) - \frac{1}{4}.$$

Khi đó $1 - x \geqslant 2yz \geqslant 2[\frac{1}{2} \cdot (y+z) - \frac{1}{4}] = y + z - \frac{1}{2}$.
Hay $x+y+z \leqslant \frac{3}{2}$ hay $C = 4(x+y+z) \leqslant 6$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

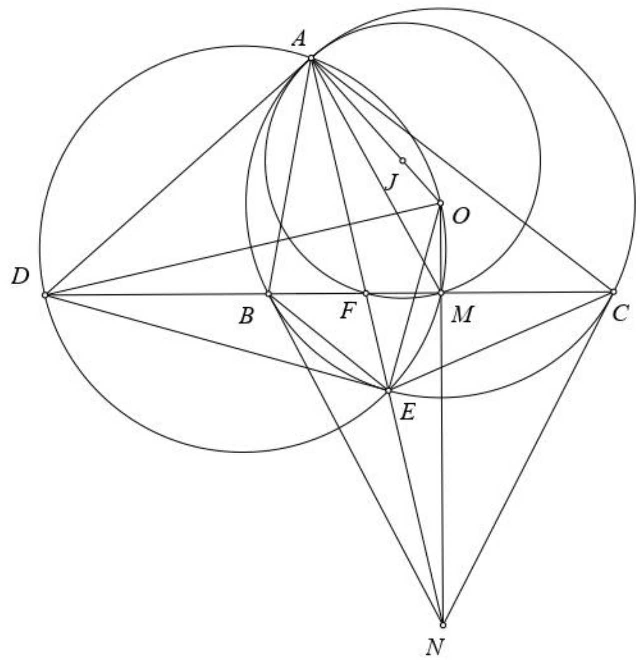
Vì vậy tổng độ dài của tất cả các thanh trang trí lớn nhất là 6 mét khi chiều dài, chiều rộng và chiều cao đều có độ dài là $0,5$ mét.

Vậy tổng độ dài của tất cả các thanh trang trí lớn nhất là 6 mét.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOM cắt đường thẳng BC tại điểm D $(D \neq M)$ và cắt đường tròn (O) tại điểm E $(E \neq A)$. Gọi F là giao điểm của đường thẳng AE với đường thẳng BC.
a) Chứng minh đường thẳng DA tiếp xúc với đường tròn (O) và $DA^2 = DB \cdot DC$.

b) Các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm N. Chứng minh $\widehat{ODA} = \widehat{OAN}$ và $\frac{FD}{FB} = \frac{FC}{FM}$.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AFM tiếp xúc trong với đường tròn (O).



Lời giải:

a). Do M là trung điểm của BC nên $MB = MC$, kết hợp với $OB = OC$ suy ra OM là trung trực của BC.

Từ đó ta sẽ có được $\widehat{OMB} = 90^\circ$ hay $\widehat{OMD} = 90^\circ$.

Suy ra 4 điểm A, O, M, D cùng thuộc đường tròn đường kính OD nên $\widehat{DAO} = 90^\circ$.

Do đó đường thẳng DA tiếp xúc với đường tròn (O).

Xét $\triangle DAB$ và $\triangle DCA$ có : $\begin{cases} \widehat{DAB} = 90^\circ - \widehat{OAB} = \dfrac{180^\circ - 2\widehat{OAB}}{2} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \widehat{ACB} = \widehat{DCA} \\ \widehat{ADB} = \widehat{CDA} \end{cases}$.

Khi đó $\triangle DAB \backsim \triangle DCA (g.g)$ suy ra $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DB}{DA}$ tức $DA^2 = DB \cdot DC$.

b). Vì tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm N nên $NB = NC$ tức N thuộc đường trung trực của BC hay O, M, N thẳng hàng

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông cho $\triangle OCN$ vuông ở C có:

$OC^2 = OM \cdot ON$ hay $OE^2 = OM \cdot ON$. Tức $\dfrac{OE}{OM} = \dfrac{ON}{OE}$ kết hợp với $\widehat{MOE} = \widehat{EON}$.

Suy ra $\triangle OME \backsim \triangle OEN (c.g.c)$

Hay $\widehat{OEN} = \widehat{OME} = 180° - \widehat{OAE} = 180° - \widehat{OEA}$ (Do tứ giác $AOME$ nội tiếp và $OA = OE$) .

Từ đó thu được 3 điểm A, E, N thẳng hàng nên $\widehat{ODA} = \widehat{OEA} = \widehat{OAE} = \widehat{OAN}$.

Lại có các tứ giác $ADEM$; $ABEC$ nội tiếp nên khi đó $FB \cdot FC = FA \cdot FE = FD \cdot FM$ hay $\dfrac{FD}{FB} = \dfrac{FC}{FM}$.

c). Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFM.

Từ phần a) ta có tứ giác $ADEO$ nội tiếp đường tròn đường kính OD nên $\widehat{OED} = 90°$.

Suy ra DE là tiếp tuyến tại E của (O).

Ta có: $\widehat{CAM} = \widehat{AMB} - \widehat{ACB} = \widehat{AED} - \widehat{AEB} = \widehat{DEB} = 90° - \widehat{OEB} = \dfrac{180° - 2\widehat{OEB}}{2} = \dfrac{\widehat{BOE}}{2} = \widehat{BAE}$.

Khi đó ta sẽ có $\widehat{DAF} = \widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{BAE} = \widehat{ACB} + \widehat{CAM} = \widehat{AMF}$.

Tức $\widehat{DAF} = \dfrac{\widehat{AJF}}{2} = \dfrac{180° - 2\widehat{JAF}}{2} = 90° - \widehat{JAF}$ hay $\widehat{DAJ} = 90°$.

Suy ra DA là tiếp tuyến tại A của (J) mà DA cũng là tiếp tuyến tại A của (O) nên (J) tiếp xúc trong với (O) tại A.

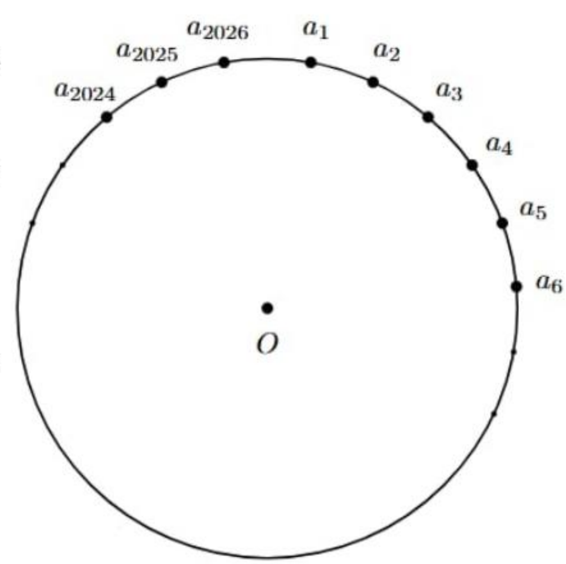
Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác AFM tiếp xúc trong với đường tròn (O).

Câu 4 (2,0 điểm).

Các số $a_1, a_2, \ldots, a_{2026} \in \{-1, 1\}$ được sắp xếp liên tiếp trên đường tròn theo thứ tự (tham khảo hình vẽ bên).

a) Hỏi đẳng thức $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \ldots + a_{2025}a_{2026} + a_{2026}a_1 = 0$ có xảy ra được không ?

b) Thầy Hùng muốn xác định giá trị của các số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2026}$ bằng cách hỏi một số câu hỏi (không được lặp lại câu hỏi), trong đó mỗi câu hỏi chỉ được phép hỏi giá trị tích của ba số liên tiếp trên đường tròn (ba số a_k, a_{k+1}, a_{k+2} được gọi là ba số liên tiếp trên đường tròn, trong đó k là số nguyên dương không vượt quá 2026, $a_{2027} = a_1$, $a_{2028} = a_2$) và nhận được câu trả lời giá trị chính xác của tích ba số đó. Nếu thầy Hùng hỏi 2026 câu hỏi như trên thì có thể xác định được giá trị của 2026 số $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ không ?



Lời giải:

a) Vì $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots+a_{2025}a_{2026}+a_{2026}a_1=0$ nên trong 2026 số $a_1a_2; a_2a_3; a_3a_4; \ldots; a_{2025}a_{2026}; a_{2026}a_1$ có đúng 1013 số bằng 1 và 1013 số bằng -1 (1).

Mặt khác $a_1a_2 \cdot a_2a_3 \cdot a_3a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2025}a_{2026} \cdot a_{2026}a_1 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2026})^2 = 1$

Do đó trong 2026 số $a_1a_2; a_2a_3; a_3a_4; \ldots; a_{2025}a_{2026}; a_{2026}a_1$ có chẵn số có giá trị bằng -1 (2).

Từ (1) và (2) ta sẽ thu được điều vô lý.

Như vậy đẳng thức $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots+a_{2025}a_{2026}+a_{2026}a_1=0$ không xảy ra.

b) Thầy Hùng sẽ cần hỏi giá trị của 2026 tích $a_1a_2a_3; a_2a_3a_4; \ldots; a_{2026}a_1a_2$ là bao nhiêu thông qua 2026 câu hỏi .

Do đó $a_1a_2a_3 \cdot a_2a_3a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2026}a_1a_2 = (a_1a_2\ldots a_{2026})^3$.

Lúc này thầy Hùng sẽ xác định được giá trị của $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2026}$.

Xét 675 tích $a_2a_3a_4; a_5a_6a_7; \ldots; a_{2024}a_{2025}a_{2026}$.

Khi đó ta sẽ có: $a_1 = \dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2026}}{a_2a_3a_4 \cdot a_5a_6a_7 \cdot \ldots \cdot a_{2024}a_{2025}a_{2026}}$ nên thầy Hùng sẽ xác định được giá trị của số a_1.

Xét 675 tích $a_3a_4a_5; a_6a_7a_8; \ldots; a_{2022}a_{2023}a_{2024}; a_{2025}a_{2026}a_1$.

Vì $a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \ldots a_{2025} \cdot a_{2026} = a_3a_4a_5 \cdot a_6a_7a_8 \cdot \ldots \cdot a_{2022}a_{2023}a_{2024} \cdot a_{2025}a_{2026}a_1$.

Và $a_2 = \dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2026}}{a_3a_4a_5 \cdot a_6a_7a_8 \cdot \ldots \cdot a_{2022}a_{2023}a_{2024} \cdot a_{2025}a_{2026}a_1}$

Nên thầy Hùng sẽ xác định được giá trị của a_2.

Vì thầy Hùng hỏi các giá trị của tích $a_ia_{i+1}a_{i+2}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2026; a_{2027}=a_1; a_{2028}=a_2)$.

Mà $a_3 = \dfrac{a_1a_2a_3}{a_1a_2}$ nên thầy Hùng sẽ xác định được giá trị của a_3.

$a_4 = \dfrac{a_2a_3a_4}{a_2a_3}$ nên thầy Hùng sẽ xác định được giá trị của a_4.

Cứ như thế thì thầy Hùng sẽ xác định được giá trị của 2026 số $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$.

Như vậy thầy Hùng hỏi 2026 câu hỏi như trên thì có thể xác định được giá trị của 2026 số $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$.