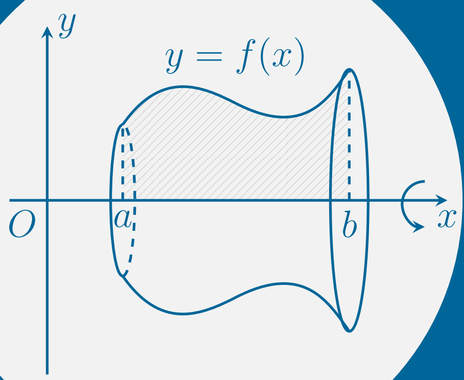
NGÔ ĐỨC TÀI



TÓM TẮT LÝ THUYẾT

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPTQG - TOÁN 12

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1.1.
Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng là $ax + by \leq c$ ($ax + by \geq c$, $ax + by < c$, $ax + by > c$), trong đó a, b, c là những số thực, a và b **không đồng thời** bằng 0, x và y là các ẩn số.

☆ Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một **nghiệm** của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \leq c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \leq c$ đúng.

☆ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có **vô số nghiệm**.

2 Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1.2.

☆ Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ gọi là **miền nghiệm** của bất phương trình.

☆ Đường thẳng $d\colon ax + by = c$ chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng bờ d

◇ Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by > c$.

◇ Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$

☆ **Bước 1**: Vẽ đường thẳng $d\colon ax + by = c$ trên mặt phẳng Oxy.

☆ **Bước 2**: Lấy điểm $M_0(x_0; y_0)$ (thường là gốc tọa độ O) không thuộc d.

☆ **Bước 3**: Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c.

☆ **Bước 4**: Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.

! Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ và biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.

BÀI 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1.3.

☆ **Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn** là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

☆ Cặp số $(x_0; y_0)$ là **nghiệm** của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ.

2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

Định nghĩa 1.4.

☆ Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là **miền nghiệm** của hệ bất phương trình đó.

☆ Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

☆ **Bước 1**: Trên cùng mặt phẳng Oxy, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.

☆ **Bước 2**: Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x;y) = ax + by$, với $(x;y)$ là các nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau

☆ **Bước 1**: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Giả sử đó là miền đa giác $A_1A_2\ldots A_n$.

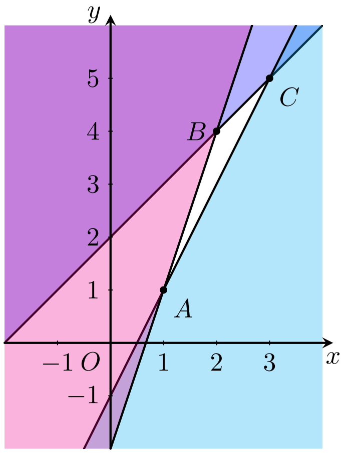
☆ **Bước 2**: Tính giá trị của biểu thức $F(x;y)$ tại các đỉnh của đa giác trên.

☆ **Bước 3**: So sánh các giá trị thu được, ta được giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) cần tìm.

Ví dụ 1

Cho các giá trị x, y thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 1 \leq 0 \\ 3x - y - 2 \geq 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 3x + 2y$.

Lời giải.



Miền nghiệm của hệ đã cho là miền trong tam giác ABC (kể cả đường biên) trong đó $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3;5)$. Giá trị lớn nhất của $T = 3x + 2y$

đạt được tại các đỉnh của tam giác ABC. Do $T_A = T(1;1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$, $T_B = T(2;4) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$ và $T_C = T(3;5) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 25$ nên giá trị lớn nhất của $T = 3x + 2y$ là 25 đạt được khi $x = 3$ và $y = 5$.

CHƯƠNG 2

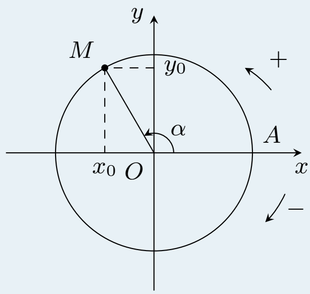
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

0.1 Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Định nghĩa 2.1.

Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α. Khi đó



☆ Hoành độ x_0 của M được gọi là **côsin** của α, kí hiệu là $\cos\alpha$.

☆ Tung độ y_0 của M được gọi là **sin** của α, kí hiệu là $\sin\alpha$.

☆ Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ được gọi là **tan** của α, kí hiệu là $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

☆ Nếu $\sin\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ được gọi là **côtang** của α, kí hiệu là $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

☆ Với mọi giá trị của α, ta có

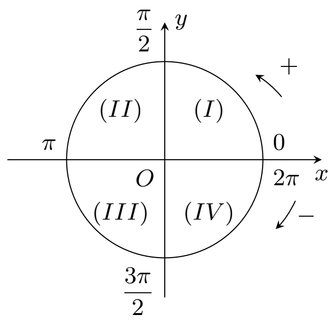
- $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.
- $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \ (k \in \mathbb{Z})$.

☆ $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

☆ $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

☆ **Dấu của các giá trị lượng giác**

	(I)	(II)	(III)	(IV)
sin	$+$	$+$	$-$	$-$
cos	$+$	$-$	$-$	$+$
tan	$+$	$-$	$+$	$-$
cot	$+$	$-$	$+$	$-$



0.2 Công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$	$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

0.3 Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Hai cung đối nhau	Hai cung bù nhau
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$
Hai cung hơn kém nhau π	**Hai cung phụ nhau**
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

!

Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k, ta có

- ☆ $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$.
- ☆ $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$.
- ☆ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$.
- ☆ $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$.

Bài 2. Công thức lượng giác

1 Công thức cộng

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$	$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$	$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b}$	$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}$

2 Công thức nhân đôi

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$	
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

3 Công thức hạ bậc

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$	$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

4 Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

5 Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$
$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$
$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$

Bài 3. Hàm số lượng giác

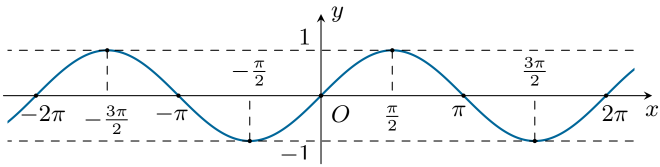
1 Sự biến thiên của hàm số lượng giác

	Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
Tập xác định	$\mathscr{D} = \mathbb{R}$	$\mathscr{D} = \mathbb{R}$
Tập giá trị	$T = [-1; 1]$	$T = [-1; 1]$
Tính chẵn lẻ	Là hàm số lẻ	Là hàm số chẵn
Tính tuần hoàn	Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$. Hàm số $y = \sin(ax+b)$ có chu kì tuần hoàn $T = \frac{2\pi}{\vert a\vert}$.	Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$. Hàm số $y = \cos(ax+b)$ có chu kì tuần hoàn $T = \frac{2\pi}{\vert a\vert}$.
Sự biến thiên	Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.	Hàm số đồng biến trên $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$. Hàm số nghịch biến trên $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.
	Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
Tập xác định	$\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

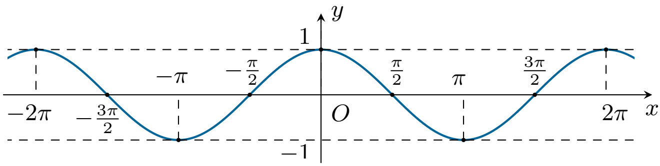
Tập giá trị	$T=\mathbb{R}$	$T=\mathbb{R}$
Tính chẵn lẻ	Là hàm số lẻ	Là hàm số lẻ
Tính tuần hoàn	Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi$. Hàm số $y=\tan(ax+b)$ có chu kì tuần hoàn $T=\dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}$.	Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi$. Hàm số $y=\cot(ax+b)$ có chu kì tuần hoàn $T=\dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}$.
Sự biến thiên	Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$.	Hàm số nghịch biến trên $(k\pi;\pi+k\pi)$.

2 Đồ thị hàm số

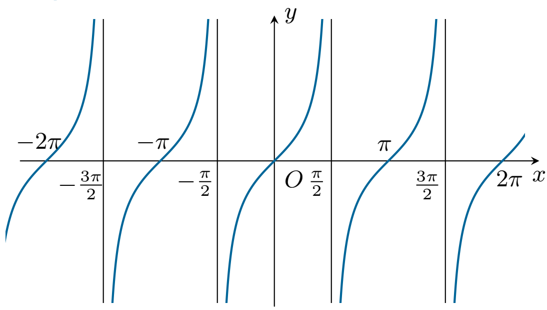
☆ Đồ thị hàm số $y=\sin x$



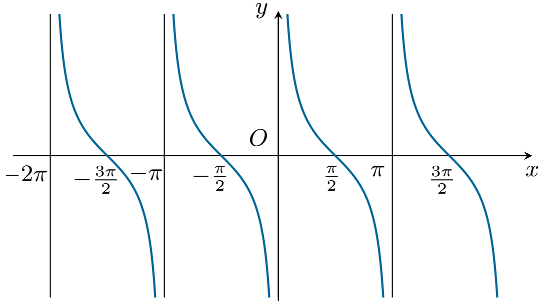
☆ Đồ thị hàm số $y=\cos x$



☆ Đồ thị hàm số $y=\tan x$



☆ Đồ thị hàm số $y = \cot x$



BÀI 4. Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình $\sin x = m$

☆ Điều kiện có nghiệm $-1 \leq m \leq 1$.

☆ Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

☆ Công thức nghiệm

◇ $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi. \end{array}\right.$

◇ $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ. \end{array}\right.$

☆ Một số trường hợp đặc biệt

◇ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

◇ $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

◇ $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

2. Phương trình $\cos x = m$

☆ Điều kiện có nghiệm $-1 \leq m \leq 1$.

☆ Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

☆ Công thức nghiệm

◇ $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi. \end{array}\right.$

◇ $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ. \end{array}\right.$

☆ Một số trường hợp đặc biệt

◇ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$ ◇ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$

◇ $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$

3 Phương trình $\tan x = m$

☆ Điều kiện có nghiệm $m \in \mathbb{R}$.

☆ Điều kiện xác định $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

☆ Công thức nghiệm

◇ $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi.$

◇ $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ.$

☆ Một số trường hợp đặc biệt

◇ $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$ ◇ $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

◇ $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

4 Phương trình $\cot x = m$

☆ Điều kiện có nghiệm $m \in \mathbb{R}$.

☆ Điều kiện xác định $x \neq k\pi$.

☆ Công thức nghiệm

◇ $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi.$

◇ $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ.$

☆ Một số trường hợp đặc biệt

◇ $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$ ◇ $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

◇ $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

CHƯƠNG 3

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

Bài 1. Dãy số

1 Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 3.1.

☆ Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u = u(n)$.

☆ Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khái niệm $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$.

☆ Số u_1 gọi là **số hạng đầu**, u_n gọi là **số hạng thứ** n và gọi là **số hạng tổng quát** của dãy số.

Định nghĩa 3.2.

☆ Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; \ldots; m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số hữu hạn**.

☆ Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, \ldots, u_m$.
Số u_1 gọi là **số hạng đầu** và số u_m gọi là **số hạng cuối**.

2 Các cách cho một dãy số

☆ Liệt kê các số hạng.

☆ Công thức số hạng tổng quát.

☆ Phương pháp mô tả.

☆ Phương pháp truy hồi.

3 Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

Định nghĩa 3.3.

☆ Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu $u_{n+1} > u_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

☆ Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu $u_{n+1} < u_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

! Một dãy số có thể **không tăng không giảm**.

Định nghĩa 3.4.

☆ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

☆ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

☆ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại m, M sao cho $m \leq u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 2. Cấp số cộng và cấp số nhân

1. Cấp số cộng

☆ **Định nghĩa**: Dãy số (u_n) được gọi là **cấp số cộng** nếu $\boxed{u_{n+1} = u_n + d}$, với $n \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{R}$.
Trong đó, $\boxed{d = u_{n+1} - u_n}$ được gọi là **công sai**.

☆ **Số hạng tổng quát** $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$, với $n \geq 2$.

☆ **Tính chất** $\boxed{u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k}$, với $k \geq 2$.
Khi đó điều kiện để ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng theo đúng thứ tự đó là $\boxed{\dfrac{a+c}{2} = b}$.

☆ **Tổng của n số hạng đầu** $\boxed{S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Cấp số nhân

☆ **Định nghĩa**: Dãy số (u_n) được gọi là **cấp số nhân** nếu $\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot q}$, với $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{R}$.
Trong đó, $\boxed{q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$ được gọi là **công bội**.

☆ **Số hạng tổng quát** $\boxed{u_n = u_1 \cdot q^{n-1}}$, với $n \geq 2$.

☆ **Tính chất** $\boxed{u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}}$, với $k \geq 2$. Khi đó điều kiện để ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân theo đúng thứ tự đó là $\boxed{a \cdot c = b^2}$.

☆ **Tổng của n số hạng đầu** $\boxed{S_n = \dfrac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}}$, với $q \neq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

☆ Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

☆ **Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn** là

$$\boxed{S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1 - q}}.$$

CHƯƠNG 4

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Bài 1. Lũy thừa với số mũ thực

1 Định nghĩa

1.1 Lũy thừa với số mũ nguyên

Định nghĩa 4.1.
Cho n là số nguyên dương.

☆ Với a tùy ý, ta có $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thừa số}}}$, với a là **cơ số** và n là **số mũ**.

☆ Với a là số thực khác 0, ta có $\boxed{a^0 = 1}$ và $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$.

1.2 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Định nghĩa 4.2.
Cho số thực a và số nguyên dương n. Số b được gọi là **căn bậc n** của số a nếu $\boxed{b^n = a}$.

!

☆ Nếu n là số lẻ thì mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a.

☆ Nếu n là số chẵn thì mỗi số thực **dương** a có hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

Định nghĩa 4.3.
Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Lũy thừa của a với số mũ r, kí hiệu là a^r, xác định bởi công thức $\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$.

1.3 Lũy thừa với số mũ thực

Định nghĩa 4.4.
Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim r_n = \alpha$. Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là **lũy thừa của a với số mũ α**, kí hiệu a^α, nghĩa là $\boxed{a^\alpha = \lim a^{r_n}}$.

2 Tính chất

2.1 Tính chất của lũy thừa

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(ab)^m = a^m \cdot b^m$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

$0 < a < b \xleftrightarrow{n>0} a^n < b^n$	$0 < a < b \xleftrightarrow{n<0} a^n > b^n$
$a^m > a^n \xleftrightarrow{a>1} m > n$	$a^m > a^n \xleftrightarrow{0<a<1} m < n$
$\begin{cases} a > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow a^m > 1$	$\begin{cases} a > 1 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow a^m < 1$
$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow a^m < 1$	$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow a^m > 1$

2.2 Tính chất của căn bậc n

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ \lvert a \rvert, & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
$\begin{cases} n \text{ tự nhiên lẻ} \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$	$\begin{cases} n \text{ tự nhiên chẵn} \\ 0 < a < b \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

BÀI 2. Logarit

1 Khái niệm logarit

Định nghĩa 4.5.
Cho a, $b > 0$ và $a \neq 1$. Số thực α để $a^{\alpha} = b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$. Nghĩa là $\boxed{\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b}$.

2 Các quy tắc tính logarit

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$a^{\log_a b} = b$	$\log_a (a^{\alpha}) = \alpha$
$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$		$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	
$\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$		$\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$	
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$		$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	
$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$		$\log_a b \cdot \log_b a = 1$	
$\log_a b > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$		$\log_a b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 < b \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$	
$\log_a b > \log_a c \overset{a>1}{\longleftrightarrow} b > c > 0$		$\log_a b > \log_a c \overset{0<a<1}{\longleftrightarrow} 0 < b < c$	

3 Logarit thập phân và logarit tự nhiên

3.1 Logarit thập phân

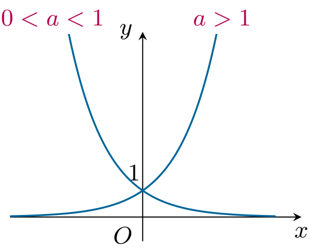
☆ Logarit cơ số 10 của một số dương a gọi là logarit thập phân của a, kí hiệu là $\log a$ hoặc $\lg a$. Nghĩa là $\boxed{\log a = \log_{10} a}$.

3.2 Logarit tự nhiên

☆ Logarit cơ số e của số dương a gọi là logarit tự nhiên của a, kí hiệu là $\ln a$. Nghĩa là $\boxed{\ln a = \log_{\mathrm{e}} a}$. Trong đó $\mathrm{e} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}7183$.

BÀI 3. Hàm số mũ và hàm số logarit

1 Hàm số mũ $y = a^x$



☆ **Tập xác định**: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

☆ **Tập giá trị**: $T = (0; +\infty)$.

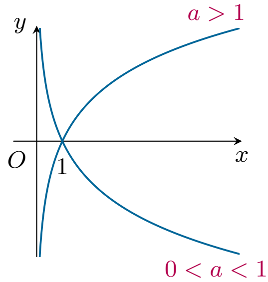
☆ Hàm số $y = a^x$ **liên tục** trên $\mathbb{R}$.

☆ **Sự biến thiên**

$0 < a < 1$	**Nghịch biến** trên $\mathbb{R}$
$a > 1$	**Đồng biến** trên $\mathbb{R}$

☆ **Đồ thị** luôn đi qua điểm $(0; 1)$, $(1; a)$.

2 Hàm số logarit $y = \log_a x$



☆ **Tập xác định**: $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

☆ **Tập giá trị**: $T = \mathbb{R}$.

☆ Hàm số $y = \log_a x$ **liên tục** trên $\mathbb{R}$.

☆ **Sự biến thiên**

$0 < a < 1$	**Nghịch biến** trên $\mathscr{D}$
$a > 1$	**Đồng biến** trên $\mathscr{D}$

☆ **Đồ thị** luôn đi qua điểm $(1; 0)$, $(a; 1)$.

BÀI 4. Bài toán lãi suất - tăng trưởng

☆ **Lãi đơn**: $\boxed{S_n = A(1 + nr\%)}$, với A là số tiền gửi, $r\%$ là lãi suất, n là thời gian gửi và S_n là tổng số tiền nhận được.

☆ **Lãi kép - Bài toán tiết kiệm**: $\boxed{S_n = A(1 + r\%)^n}$, với A là số tiền gửi, $r\%$ là lãi suất, n là thời gian gửi và S_n là tổng số tiền nhận được.

☆ **Lãi kép liên tục**: $\boxed{S_n = A \cdot \mathrm{e}^{n \cdot r\%}}$, với A là số tiền gửi, $r\%$ là lãi suất, n là thời gian gửi và S_n là tổng số tiền nhận được.

BÀI 5. Phương trình, bất phương trình mũ và logarit

1 Phương trình và bất phương trình mũ

1.1 Phương trình mũ

☆ Phương trình mũ cơ bản: $\boxed{a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b}$.

☆ Phương pháp đưa về cùng cơ số: $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$.

1.2 Bất phương trình mũ

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$	$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

!

☆ Phương pháp giải bất phương trình mũ tương tự phương pháp giải phương trình mũ.

☆ Bất phương trình $a^x > 0$ có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

2 Phương trình và bất phương trình logarit

2.1 Phương trình logarit

☆ Phương trình logarit cơ bản $\boxed{\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b. \end{cases}}$

☆ Phương pháp đưa về cùng cơ số

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}}$$

2.2 Bất phương trình logarit

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) > a^b$	$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

!

- ☆ Khi giải phương trình và bất phương trình logarit **phải tìm điều kiện xác định**.
- ☆ Phương pháp giải bất phương trình logarit tương tự phương pháp giải phương trình logarit.

CHƯƠNG 5

ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

BÀI 1. Đạo hàm

1 Các quy tắc tính đạo hàm

1.1 Bảng đạo hàm các hàm thường gặp

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$(C)' = 0$, với $\forall C \in \mathbb{R}$	
$(x)' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	

$\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)'=\dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$	
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=u'\cdot\cos u$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'\cdot\sin u$
$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^u)'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$
$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$(\mathrm{e}^u)'=u'\cdot\mathrm{e}^u$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln a}$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

1.2 Quy tắc tính đạo hàm

$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$(k\cdot u)'=k\cdot u'$	$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	$[f(u(x))]'=u'(x)\cdot f'(u(x))$	

2 Ý nghĩa của đạo hàm trong hình học và vật lí

2.1 Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

☆ Một vật chuyển động có phương trình của quãng đường s theo thời gian t là $s=s(t)$. Khi đó

- Vận tốc tức thời của vật đó là $\boxed{v(t)=s'(t)}$.
- Gia tốc tức thời của vật đó là $\boxed{a(t)=v'(t)=s''(t)}$.

☆ Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số theo thời gian t có dạng $Q=Q(t)$. Khi đó cường độ tức thời của dòng điện là $\boxed{I(t)=Q'(t)}$.

2.2 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

☆ **Phương trình tiếp tuyến** của đồ thị hàm số $(C)\colon y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là $\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + y_0}$, với $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

☆ **Một số điều kiện thường dùng**

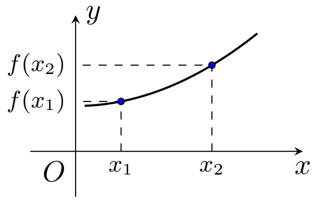
Điều kiện	Công thức
Tiếp tuyến có hệ số góc k	$f'(x_0) = k$
Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax + b$	$f'(x_0) = a$
Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$	$f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$

Bài 2. Ứng dụng của đạo hàm

1 Tính đơn điệu của hàm số

☆ Hàm số đồng biến trên K nếu

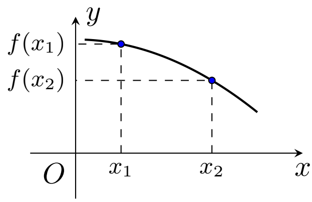
$$\forall x_1,\, x_2 \in K\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Trên K, đồ thị là một "**đường đi lên**" khi xét từ trái sang phải.

☆ Hàm số nghịch biến trên K nếu

$$\forall x_1,\, x_2 \in K\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Trên K, đồ thị là một "**đường đi xuống**" khi xét từ trái sang phải.

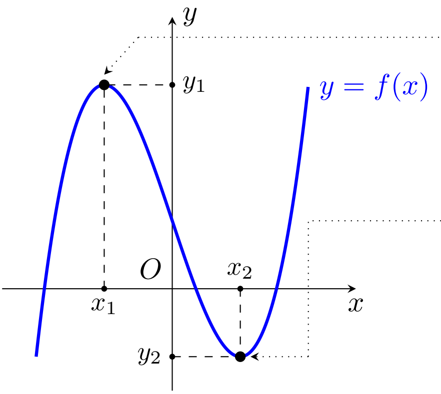
Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

Định lí 5.1.

- Nếu $y' \geq 0$, $\forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- Nếu $y' \leq 0$, $\forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

2 Cực trị của hàm số

Các tên gọi:



$(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số;

- x_1 là điểm cực đại của hàm số;
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số.

$(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số;

- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số;
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.

Ghi nhớ cách xét dấu:

!

(1) Nếu

$$f'(x) = (x-a)(x-b)^2(x-c)^{2n}(x-d)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}*$$

thì phương trình $f'(x) = 0$ có

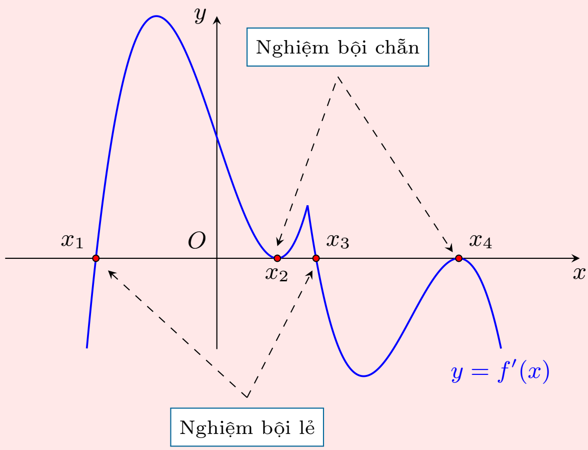
☆ $x = a$ là nghiệm đơn;

☆ $x = b$ là nghiệm kép;

☆ $x = c$ là nghiệm bội chẵn;

☆ $x = d$ là nghiệm bội lẻ.

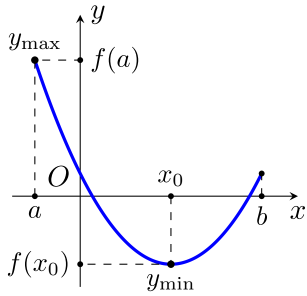
(2) Khi xét dấu $f'(x)$ thì $f'(x)$ sẽ không đổi dấu khi qua nghiệm kép (nghiệm bội chẵn) và đổi dấu khi qua nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ).



3 Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$. Ta có

① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu
$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$$
Kí hiệu $\boxed{\max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = M}$



② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu
$$\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$$
Kí hiệu $\boxed{\min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = n}$

③ Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a; b]$ *và có đạo hàm trên* $(a; b)$ *(có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và* $f'(x) = 0$ *chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong* $(a; b)$), thì ta có thể giải như sau:

- Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;
- Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
- Tính toán $f(a)$, $f(x_0)$, $f(x_i)$, $f(b)$ $\quad (\star)$
- Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(\star)$ thì
$$M = \max_{[a;b]} f(x); \quad n = \min_{[a;b]} f(x)$$

④ Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.

- Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a, b:
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.
- Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm a, b, c:
$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$
Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

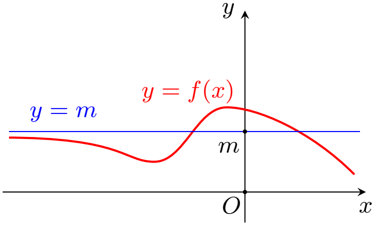
4 Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

4.1 Đường tiệm cận ngang (TCN):

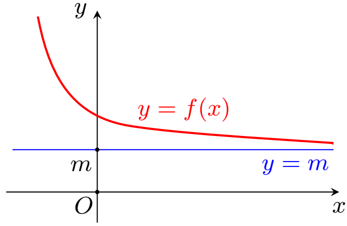
① **Định nghĩa:** Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m$

② **Các bước tìm TCN:**

① Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

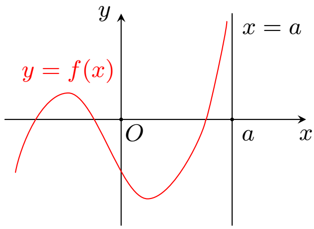
② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

4.2 Đường tiệm cận đứng (TCĐ)

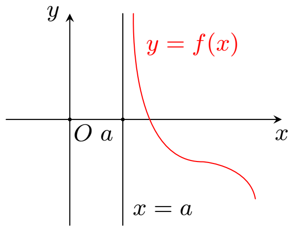
① **Định nghĩa:** Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

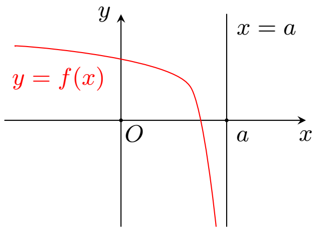
Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới.



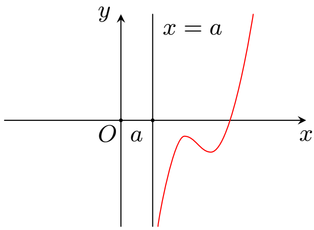
a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

2 Các bước tìm TCĐ:

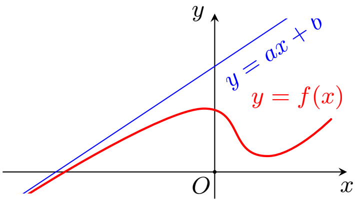
> **!**
>
> ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
>
> ② Tính giới hạn một bên tại x_0. Nếu xảy ra $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

4.3 Đường tiệm cận xiên

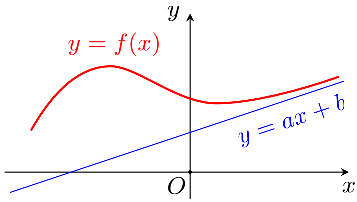
1 Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới:



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

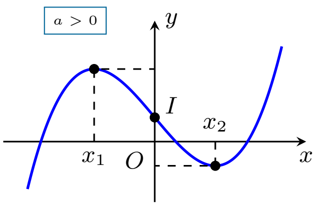
② **Các bước tìm TCX y = ax + b:** Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

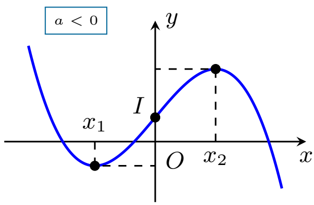
> **!**
>
> ① Tính $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$.
>
> ② Tính $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$.

5 Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản

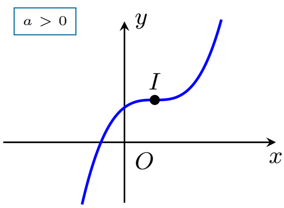
5.1 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

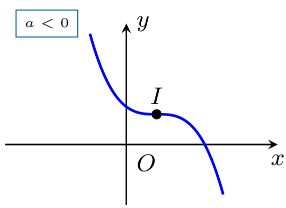
- **TH1.** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



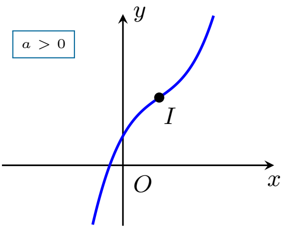


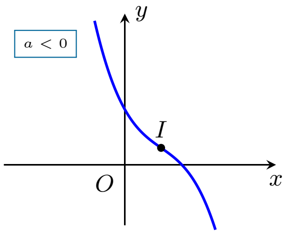
- **TH2.** $y' = 0$ có nghiệm kép x_0. Khi đó, hàm số không có cực trị.





- **TH3.** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.





!

① Hàm số không có điểm cực trị

$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

② Hàm số có hai điểm cực trị

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$

③ Liên hệ tổng tích hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$$

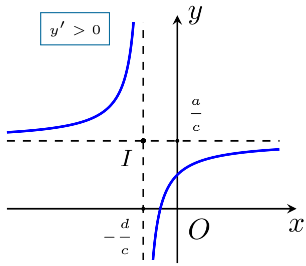
④ Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị, nó chính là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

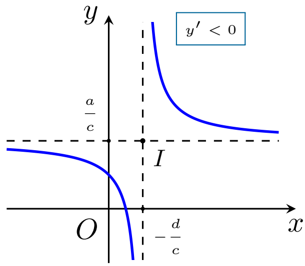
5.2 Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx+d)^2}$.

- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

- Hình dạng đồ thị:





!

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

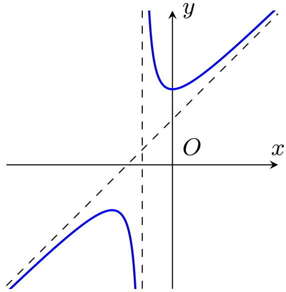
5.3 Hàm số $\mathbf{y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}}$ $(\mathbf{a \neq 0, m \neq 0})$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\dfrac{n}{m} \right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b.n - m.c}{(mx+n)^2}$

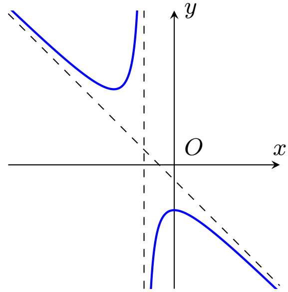
- Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.

- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.

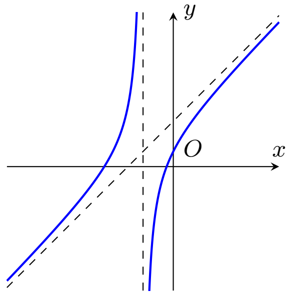
- Hình dạng đồ thị:



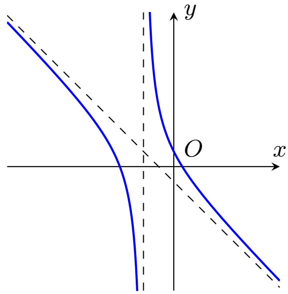
$a > 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a < 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a > 0$, $y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0$, $y' = 0$ vô nghiệm

CHƯƠNG 6

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Bài 1. Nguyên hàm

1 Định nghĩa

Định nghĩa 6.1.

☆ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $\mathscr{K}$. Hàm số $F(x)$ gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathscr{K}$.

☆ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) + C$, với $C \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \text{ với } C \in \mathbb{R}}$$

! Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì khi đó tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho $G(x) = F(x) + C$.

2 Tính chất của nguyên hàm

☆ $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$, với $C \in \mathbb{R}$.

☆ $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, với $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☆ $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

$\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}x = C$	$\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
$\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x} + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$
$\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
$\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	$\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

☆ **Một số công thức nguyên hàm đặc biệt**

$\displaystyle\int (ax+b)^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
$\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\displaystyle\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\cos(ax+b) + C$
$\displaystyle\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax+b) + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\tan(ax+b) + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\cot(ax+b) + C$
$\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{ax+b} + C$
$\displaystyle\int a^{mx+n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\cdot\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$

4 Ý nghĩa vật lí của nguyên hàm

☆ Một vật chuyển động có phương trình vận tốc theo thời gian t là $v(t)$ thì phương trình chuyển động của vật là $\boxed{s(t) = \displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t}$.

☆ Một vật chuyển động có phương trình gia tốc theo thời gian t là $a(t)$ thì phương trình vận tốc của vật là $\boxed{v(t) = \displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t}$.

BÀI 2. Tích phân

1 Định nghĩa

Định nghĩa 6.2.
Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$

2 Tính chất của tích phân

☆ $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

☆ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

☆ $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, với $k\in\mathbb{R}$.

☆ $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

☆ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

☆ Tích phân **không** phụ thuộc vào ẩn, nghĩa là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3 Ý nghĩa vật lí của tích phân

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t có phương trình là $v = v(t)$. Khi đó

☆ Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2 là

$$\boxed{\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t}.$$

☆ Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2 là

$$\boxed{\int\limits_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,\mathrm{d}t}.$$

!

☆ Độ dịch chuyển là khoảng cách từ vị trí đầu đến vị cuối của vật, cho biết độ dài và sự thay đổi vị trí của vật.

☆ Quãng đường là độ dài của vật thực hiện được trong suốt quá trình chuyển động.

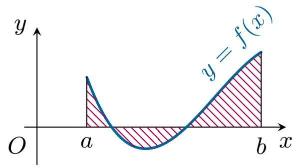
☆ **Ví dụ**: Một vật di chuyển từ điểm O đến điểm A sau đó lùi lại về điểm B trong khoảng thời gian t_1 tới t_2 như hình vẽ sau

Khi đó, độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian t_1 tới t_2 bằng đoạn OB, còn quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2 bằng $OA + AB$.

Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân

1 Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và trục Ox là $\boxed{S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$.



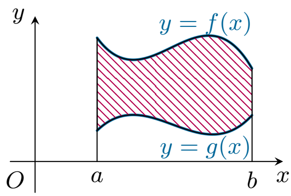
! ☆ Nếu đề bài chưa cho a, b thì a, b là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

☆ Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nhiều hơn 2 nghiệm thì a, b lần lượt là nghiệm nhỏ nhất và nghiệm lớn nhất của phương trình $f(x) = 0$.

☆ Nếu đề bài cho hình phẳng giới hạn bởi trục Oy thì nghĩa là đề bài cho hình phẳng giới hạn bởi đường $x = 0$.

☆ Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$\boxed{S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x}.$$



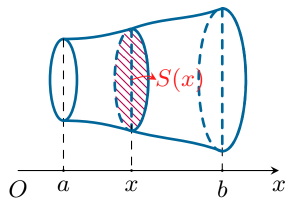
! Nếu đề bài chưa cho a, b thì a, b là nghiệm của phương trình

$$f(x) = g(x).$$

2 Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể

2.1 Thể tích của vật thể

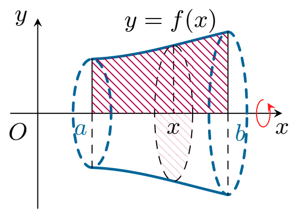
☆ Gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi 2 mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại a, b. Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \le x \le b$). Khi đó, thể tích V của phần vật thể B là



$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x}$$

2.2 Thể tích của khối tròn xoay

☆ Cho hàm số $f(x)$ liên tục, **không âm** trên $[a;b]$. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox, $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể tròn xoay là



$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

☆ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể đó là

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|\,\mathrm{d}x}.$$

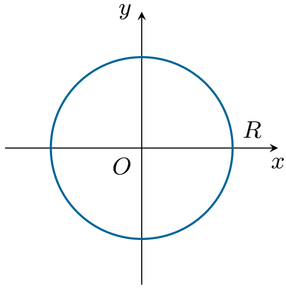
☆ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục Oy, $y = c$, $y = d$ khi quay quanh trục Oy tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể đó là

$$\boxed{V = \pi \int_c^d g^2(y)\,\mathrm{d}y}.$$

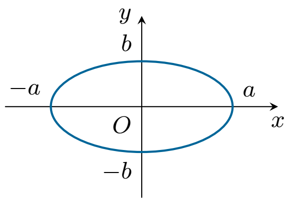
3 Một số phương trình hình phẳng cần nhớ

☆ Phương trình đường thẳng có dạng là $\boxed{y = ax + b}$. Nếu đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì phương trình có dạng $\boxed{y = b}$.

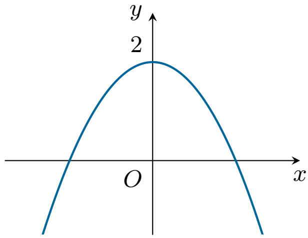
☆ Đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính R có phương trình là $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$. Nếu đặt hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là tâm của đường tròn thì phương trình của đường tròn là $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$. Khi đó, phương trình của nửa đường tròn phía trên trục Ox là $\boxed{y = \sqrt{R^2 - x^2}}$.



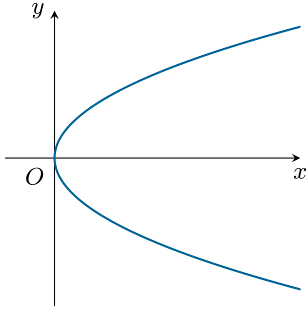
☆ Đường elip có độ dài trục lớn bằng $2a$ và trục bé bằng $2b$ có phương trình là $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$. Khi đó, phương trình của nửa elip phía trên trục Ox là $\boxed{y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}}$.



☆ Parabol có trục đối xứng song song hoặc trùng với trục Oy có phương trình là $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$. Ta thường đặt hệ trục sao cho trục đối xứng trùng với trục của Oy, khi đó phương trình của parabol có dạng là $\boxed{y = ax^2 + c}$.



☆ Parabol đi qua gốc tọa độ O và nhận trục Ox làm trục đối xứng có phương trình là $\boxed{x = ay^2}$. Khi đó, phương trình của nửa parabol phía trên trục Ox là $\boxed{y = \sqrt{\frac{x}{a}}}$.

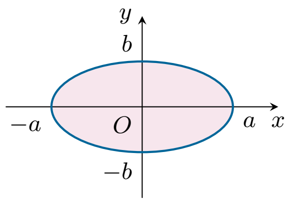


4 Diện tích và thể tích một số hình đặc biệt

4.1 Công thức diện tích hình elip

Cho hình elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó diện tích của hình elip được tính theo công thức

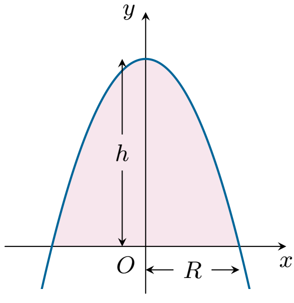
$$\boxed{S = \pi ab}$$



4.2 Công thức diện tích cổng parabol

Đường thẳng $y = m$ vuông góc với trục parabol (P) tạo thành một cổng parabol có diện tích được tính theo công thức

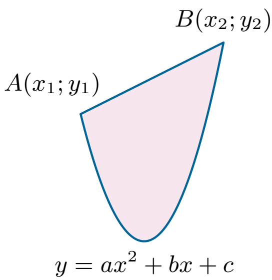
$$\boxed{S = \frac{4}{3}Rh}$$



4.3 Công thức diện tích parabol bị cắt bởi đường chéo

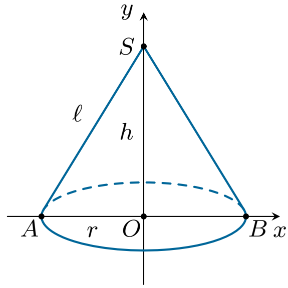
Một parabol $y = ax^2 + bx + c$ có 2 điểm A, B lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thuộc (P). Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và AB được tính theo công thức

$$\boxed{S = \frac{a(x_1 - x_2)^3}{6}}$$



4.4 Công thức thể tích và diện tích hình nón

Cho đoạn thẳng SA quay xung quanh trục Oy, ta được hình nón (N) có đỉnh S và đáy là đường tròn tâm O bán kính OA. Khi đó $SA = \ell$ gọi là đường sinh, $OA = r$ gọi là bán kính đáy, $SO = h$ gọi là đường cao của hình nón. Ta có $\ell^2 = h^2 + r^2$.



☆ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot \ell}$.

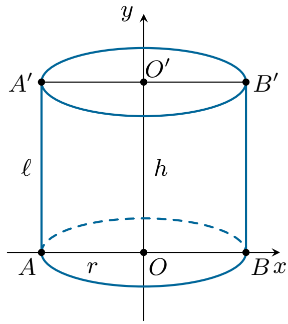
☆ **Diện tích toàn phần**:

$$\boxed{S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi \cdot r \cdot \ell + \pi \cdot r^2}.$$

☆ **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h}$.

4.5 Công thức thể tích và diện tích hình trụ

Cho đoạn thẳng AA' quay xung quanh trục Oy, ta được hình trụ (T) có đáy là đường tròn tâm O, bán kính OA. Khi đó $AA' = \ell$ gọi là đường sinh, $OA = r$ gọi là bán kính đáy, $OO' = h$ gọi là chiều cao của hình trụ. Ta có $\ell = h$.



☆ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot r \cdot h}$.

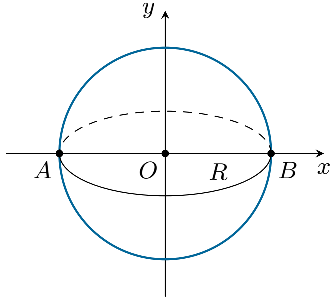
☆ **Diện tích toàn phần**:

$$\boxed{S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2}.$$

☆ **Thể tích**: $\boxed{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$.

4.6 Công thức thể tích và diện tích hình cầu

Cho đường tròn tâm O bán kính R quanh xung quanh trục Ox, ta được hình cầu tâm O bán kính R.

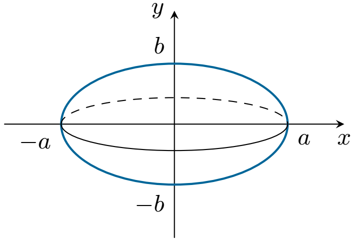


☆ **Diện tích của mặt cầu:** $\boxed{S = 4\pi R^2}$.

☆ **Thể tích của khối cầu:** $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$.

4.7 Công thức thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi Elip

Cho Elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi Elip (E)



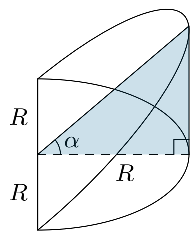
☆ Quanh trục Ox là $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi ab^2}$.

☆ Quanh trục Oy là $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b}$.

4.8 Công thức thể tích hình nêm

☆ **Thể tích khối nêm loại I**

Chọn trục Ox trùng với đường kính. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-R \le x \le R)$ là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh lần lượt là $\sqrt{R^2 - x^2}$ và $\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan\alpha$. Khi đó, diện tích thiết diện là $S(x) = \dfrac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right) \cdot \tan\alpha$.



$\Rightarrow$ Thể tích của vật thể là

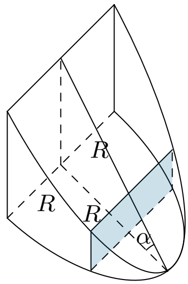
$$\boxed{V = \int_{-R}^{R} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right) \cdot \tan\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha}$$

☆ Thể tích khối nêm loại II

Chọn trục Ox trùng với bán kính. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq R)$ là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh lần lượt là $2\sqrt{R^2 - x^2}$ và $(R - x) \cdot \tan\alpha$. Khi đó, diện tích thiết diện là

$$S(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}(R - x) \cdot \tan\alpha.$$

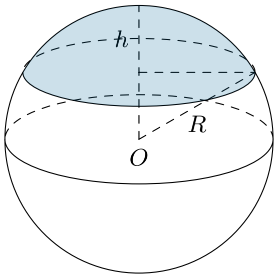
$\Rightarrow$ Thể tích của vật thể là



$$\boxed{\begin{aligned} V &= \int\limits_0^R S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^R 2\sqrt{R^2 - x^2}(R - x) \cdot \tan\alpha\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) R^3 \tan\alpha \end{aligned}}$$

4.9 Công thức thể tích khối chỏm cầu

Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $(0 < h \leq R)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục Ox và đường thẳng $x = R - h$, $x = R$ quay quanh trục Ox. Thể tích của khối chỏm cầu là

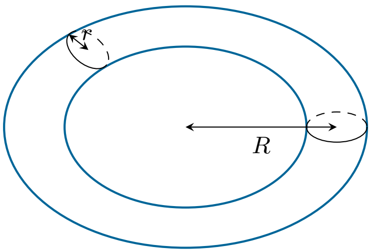


$$\boxed{V = \pi \int\limits_{R-h}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)}$$

4.10 Công thức thể tích cái phao

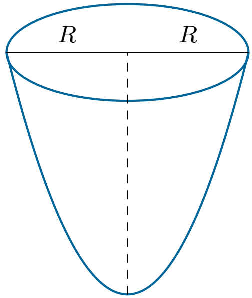
Thể tích của một cái phao có bán kính R và r như hình vẽ là

$$\boxed{V = 2\pi^2 r^2 R}$$



4.11 Công thức thể tích chảo Parabol

Khối chảo Parbol có bán kính R và chiều cao h sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{\frac{R^2}{h}x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 0$, $x = h$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối chảo Parabol là



$$\boxed{V = \pi \int\limits_0^h \frac{R^2}{h} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi R^2 h}$$

CHƯƠNG 7

THỐNG KÊ

BÀI 1. Các đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm

1 Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

1.1 Số trung bình

Định nghĩa 7.1.
Số trung bình của mẫu số liệu x_1, x_2, ..., x_n, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bằng công thức

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}.$$

! Nếu mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức $\boxed{\overline{x} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{n}}$, trong đó m_k là tần số của x_k và $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

☆ **Ý nghĩa**

- Số trung bình cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu.
- Nếu mẫu số liệu **không có** giá trị bất thường (rất lớn hoặc rất bé so với đa số các giá trị khác) thì ta dùng số trung bình để làm đại diện cho mẫu số liệu.

1.2 Số trung vị

Định nghĩa 7.2.
Số trung vị của mẫu số liệu, kí hiệu là M_e, là giá trị chính giữa của mẫu số liệu.

☆ Số trung vị **không nhất thiết** là một số trong mẫu số liệu.

☆ **Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta làm như sau**

- **Bước 1**: Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm và xác định số giá trị n của mẫu số liệu.
- **Bước 2**: Nếu n là số lẻ thì số hạng thứ $\dfrac{n+1}{2}$ là số trung vị. Nếu n là số chẵn thì số trung vị là số trung bình cộng của số hạng thứ $\dfrac{n}{2}$ và số hạng thứ $\dfrac{n}{2}+1$.

☆ **Ý nghĩa**

- Số trung vị chia đôi mẫu số liệu thành hai phần.
- Số trung vị **không** bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường, còn số trung bình thì **bị ảnh hưởng** bởi giá trị bất thường.
- Nếu mẫu số liệu **không có** giá trị bất thường thì số trung bình và số trung vị xấp xỉ bằng nhau. Còn nếu mẫu số liệu có giá trị bất thường thì ta **không sử dụng số trung bình** để đo xu thế trung tâm mà dùng **trung vị**.

1.3 Tứ phân vị

Định nghĩa 7.3.
Tứ phân vị của mẫu số liệu gồm ba giá trị, gọi là tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba (lần lượt kí hiệu Q_1, Q_2, Q_3), ba giá trị này chia mẫu số liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau.

☆ **Để tìm tứ phân vị của mẫu số liệu, ta làm như sau**

- **Bước 1**: Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- **Bước 2**: Tìm trung vị của mẫu số liệu. Giá trị này là Q_2.
- **Bước 3**: Tìm trung vị của nửa mẫu số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1.
- **Bước 4**: Tìm trung vị của nửa mẫu số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3.

☆ **Ý nghĩa**

- Nếu mẫu số liệu có nhiều số liệu có sự chênh lệch lớn so với trung vị thì ta nên chọn thêm những số khác làm đại diện của mẫu đó.

◇ Bộ ba giá trị Q_1, Q_2, Q_3 phản ánh độ phân tán của mẫu số liệu. Nhưng mỗi giá trị Q_1, Q_2, Q_3 lại đo xu thế trung tâm của phần số liệu tương ứng của mẫu đó.

1.4 Mốt

Định nghĩa 7.4.
Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất, kí hiệu M_o.

! Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

☆ **Ý nghĩa**: Có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

2 Các số đặc trưng đo độ phân tán

2.1 Khoảng biến thiên

Định nghĩa 7.5.
Khoảng biến thiên, kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu, nghĩa là

$$\boxed{R = x_{\max} - x_{\min}}.$$

☆ **Ý nghĩa**

◇ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu phản ánh sự "dao động", "sự dàn trải" của các số liệu trong mẫu đó.

◇ Khoảng biến thiên sẽ bị **ảnh hưởng** bởi các giá trị bất thường trong mẫu số liệu. Do đó, khi mẫu số liệu **có giá trị bất thường** thì khoảng biến thiên **không phản ánh** chính xác độ dàn trải trong mẫu số liệu.

2.2 Khoảng tứ phân vị

Định nghĩa 7.6.
Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, nghĩa là

$$\boxed{\Delta_Q = Q_3 - Q_1}.$$

☆ **Ý nghĩa**

◇ Khoảng tứ phân vị cho biết mức độ phân tán của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp và có thể giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó.

◇ Nếu mẫu số liệu **có giá trị bất thường** thì ta **sử dụng khoảng tứ phân vị** để đo độ phân tán thay cho khoảng biến thiên.

2.3 Phát hiện giá trị bất thường của mẫu số liệu

☆ **Để phát hiện giá trị bất thường của mẫu số liệu, ta làm như sau**

◇ **Bước 1**: Xác định tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 của mẫu số liệu.

◇ **Bước 2**: Tính khoảng tứ phân vị Δ_Q của mẫu số liệu.

◇ **Bước 3**: Tính $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$ và $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$.

◇ **Bước 4**: Tìm các giá trị nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$ của mẫu số liệu, các giá trị đó là giá trị bất thường của mẫu số liệu.

2.4 Phương sai - Độ lệch chuẩn

Định nghĩa 7.7.
Cho mẫu số liệu thống kê có n giá trị x_1, x_2, ..., x_n và có số trung bình cộng là $\overline{x}$.

☆ **Phương sai** là giá trị $\boxed{s^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$.

☆ **Độ lệch chuẩn** là căn bậc hai của phương sai, nghĩa là $\boxed{s = \sqrt{s^2}}$.

☆ **Ý nghĩa**

◇ Phương sai và độ lệch chuẩn đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Mẫu số liệu nào có phương sai hay độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

◇ Khi ta cần chú ý đến đơn vị đo của số liệu thống kê thì ta sử dụng độ lệch chuẩn để đo độ phân tán.

Bài 2. Các đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm

1 Mẫu số liệu ghép nhóm

Định nghĩa 7.8.
Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

☆ **Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau**

◇ **Bước 1**: Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành các nhóm.

◇ **Bước 2**: Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.

!
☆ Độ dài của nhóm $[a; b)$ là $b - a$.
☆ Không nên chia thành quá nhiều nhóm hoặc quá ít nhóm.
☆ Các nhóm không giao nhau, các nhóm nên có độ dài như nhau và tổng độ dài các nhóm lớn hơn khoảng biến thiên.

2 Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	$\ldots$	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	$\ldots$	m_k
Giá trị đại diện	x_1	x_2	$\ldots$	x_k

!
Giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là $\boxed{x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}}$.

2.1 Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ **Số trung bình** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính theo công thức

$$\boxed{\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{n}},$$

trong đó $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

> **!** Đối với số liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng $k_1 - k_2$, trong đó k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm $k_1 - k_2$ được hiểu là nhóm gồm các giá trị k_1, $k_1 + 1$, $\ldots$, k_2. Khi đó, ta cần hiểu chỉnh lại mẫu số liệu ghép nhóm bằng cách chuyển nhóm $k_1 - k_2$ thành nhóm $[k_1 - 0{,}5; k_2 + 0{,}5)$.

☆ **Ý nghĩa**: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

2.2 Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ **Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau**

◇ **Bước 1**: Xác định nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm. Giả sử đó là nhóm thứ p: $[a_p; a_{p+1})$.

◇ **Bước 2**: Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\boxed{M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)},$$

nếu $p = 1$, ta quy ước $m_1 + \ldots + m_{p-1} = 0$.

☆ **Ý nghĩa**: Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng trung vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu. Nếu mẫu số liệu **có giá trị bất thường** thì ta dùng trung vị thay cho số trung bình để đại diện cho mẫu số liệu.

2.3 Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ Để tính **tứ phân vị thứ nhất Q_1** của mẫu số liệu ghép nhóm, đầu tiên ta xác định nhóm chứa Q_1, giả sử đó là nhóm thứ p: $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$\boxed{Q_1 = a_p + \dfrac{\dfrac{n}{4} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)}.$$

☆ Để tính **tứ phân vị thứ ba Q_3** của mẫu số liệu ghép nhóm, đầu tiên ta xác định nhóm chứa Q_3, giả sử đó là nhóm thứ p: $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$\boxed{Q_3 = a_p + \dfrac{\dfrac{3n}{4} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)}.$$

☆ **Tứ phân vị thứ hai Q_2** chính là trung vị M_e.

☆ **Ý nghĩa**: Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

2.4 Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ Để tìm **mốt** của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ◈ **Bước 1**: Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa mốt) của mẫu số liệu ghép nhóm, giả sử đó là nhóm j: $[a_j; a_{j+1})$.
- ◈ **Bước 2**: Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\boxed{M_o = a_j + \dfrac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot (a_{j+1} - a_j)}.$$

☆ **Ý nghĩa**: Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng mốt của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

3 Các số đặc trưng đo độ phân tán

3.1 Khoảng biến thiên

☆ **Khoảng biến thiên** của mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức

$$\boxed{R = a_{k+1} - a_1}.$$

☆ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

☆ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm **chịu ảnh hưởng** của giá trị bất thường

☆ **Ý nghĩa**: Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán của mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

3.2 Khoảng tứ phân vị

☆ **Khoảng tứ phân vị** của mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức

$$\boxed{\Delta_Q = Q_3 - Q_1}.$$

☆ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.

☆ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm **không chịu ảnh hưởng** của giá trị bất thường.

☆ **Ý nghĩa**: Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.

! Để xác định **giá trị bất thường** của mẫu số liệu ghép nhóm ta làm tương tự như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

3.3 Phương sai và độ lệch chuẩn

☆ **Phương sai** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s^2, là một số được tính theo công thức

$$\boxed{s^2 = \frac{m_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + m_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \ldots + m_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2}{n}}.$$

☆ **Độ lệch chuẩn** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s, là căn bậc hai số học của phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, nghĩa là

$$\boxed{s = \sqrt{s^2}}.$$

☆ Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.

☆ **Ý nghĩa**: Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán. Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

! Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n}\left(m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \ldots + m_k \cdot x_k^2\right) - (\overline{x})^2}.$$

4 Cách sử dụng máy tính Casio để tính các số đặc trưng

☆ Để tính các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm, thì ta làm như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm ở phía trên, nhưng phải bật cột tần số trong thống kê. Các giá trị của cột x chính là các giá trị đại diện của từng nhóm.

☆ Máy tính Casio **chỉ có thể** tính được số trung bình $\overline{x}$, phương sai $\sigma^2 x$, độ lệch chuẩn σx. Các đại lượng Q_1, Med, Q_3 mà máy tính hiển thị đều **không chính xác**.

CHƯƠNG 8

TỔ HỢP - XÁC SUẤT

Bài 1. Đại số tổ hợp

1 Quy tắc đếm

☆ **Quy tắc cộng**: Một công việc X có thể thực hiện theo một trong k phương án khác nhau như sau

- Phương án 1 có n_1 cách thực hiện.
- Phương án 2 có n_2 cách thực hiện.
- ...
- Phương án k có n_k cách thực hiện.

$\Rightarrow$ Khi đó số cách thực hiện công việc X là $\boxed{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$ cách.

☆ **Quy tắc nhân**: Để thực công việc X thì phải hoàn thành k công đoạn liên tiếp như sau

- Công đoạn 1 có n_1 cách thực hiện.
- Công đoạn 2 có n_2 cách thực hiện.
- ...
- Công đoạn k có n_k cách thực hiện.

$\Rightarrow$ Khi đó số cách thực hiện công việc X là $\boxed{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k}$ cách.

!

☆ Quy tắc cộng được áp dụng khi công việc được chia thành các phương án phân biệt (thực hiện một trong các phương án để hoàn thành công việc).

☆ Quy tắc nhân được áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn nối tiếp nhau (phải thực hiện tất cả các công đoạn để hoàn thành công việc).

2 Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

2.1 Hoán vị

☆ **Hoán vị** chỉ được sử dụng khi bài toán yêu cầu **sắp xếp** n phần tử.

☆ Số cách sắp xếp n phần tử vào n chỗ là $\boxed{\mathrm{P}_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$.

☆ Để ấn 5! trong máy tính Casio, ta làm như sau 5 u.

2.2 Tổ hợp

☆ **Tổ hợp** được sử dụng khi nào toán yêu cầu **chọn** k phần tử trong n phần tử, chú ý mỗi phần tử chỉ xuất hiện một lần.

☆ Số cách chọn k phần tử trong n phần tử là $\boxed{\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$.

☆ **Tính chất**: $\boxed{\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}}$ và $\boxed{\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k = \mathrm{C}_n^k}$.

☆ Để ấn C_7^4 trong máy tính Casio, ta làm như sau 7 q P 4.

2.3 Chỉnh hợp

☆ **Chỉnh hợp** được sử dụng khi bài toán yêu cầu **chọn** k phần tử trong n phần tử, rồi **sắp xếp** k phần tử đó.

☆ Số cách chọn k phần tử trong n phần tử rồi sắp xếp là $\boxed{\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$.

☆ Mối quan hệ giữa hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp $\boxed{\mathrm{A}_n^k = \mathrm{C}_n^k \cdot \mathrm{P}_k}$.

☆ Để ấn A_7^4 trong máy tính Casio, ta làm như sau 7 q O 4.

> **!** Chỉnh hợp và tổ hợp đều chọn k phần tử trong n phần tử, nhưng chỉnh hợp là chọn **có xếp thứ tự**, còn tổ hợp là chọn **không xếp thứ tự**.

BÀI 2. Biến cố và định nghĩa cổ điển của xác suất

1 Biến cố

1.1 Định nghĩa

☆ **Phép thử ngẫu nhiên** là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể biết được trước khi phép thử được thực hiện.

☆ **Không gian mẫu** của phép thử là tập hợp tất cả các kết quả có thể khi thực hiện phép thử, kí hiệu là Ω.

☆ **Biến cố** E là một tập con của không gian mẫu Ω.

☆ **Kết quả thuận lợi** cho một biến cố E liên quan đến phép thử T là kết quả của phép thử T làm cho biến cố đó xảy ra.

1.2 Các biến cố thường gặp

Cho hai biến cố A và B. Khi đó

☆ **Biến cố đối** của biến cố A là biến cố "A không xảy ra", kí hiệu là $\overline{A}$.

☆ **Biến cố giao** của hai biến cố A và B là biến cố "A và B cùng xảy ra", kí hiệu là $A \cap B$ (hay AB).

☆ **Biến cố hợp** của hai biến cố A và B là biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$.

☆ Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** với nhau nếu biến cố A xảy ra thì biến cố B không xảy ra và ngược lại. Khi đó $A \cap B = \varnothing$.

☆ Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** với nhau nếu sự xảy ra của A **không** làm ảnh hưởng đến việc xảy ra của B.

2 Định nghĩa cổ điển của xác suất

Định nghĩa 8.1.
Cho phép thử T có không gian mẫu là Ω. Giả sử các kết quả có thể của T là đồng khả năng. Nếu E là một biến cố liên quan đến phép thử T thì **xác suất** của E được cho bởi công thức

$$\boxed{\mathrm{P}(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}},$$

trong đó $n(\Omega)$ và $n(E)$ tương ứng là số phần tử của không gian mẫu Ω và biến cố E.

☆ **Tính chất**

◇ $P(\varnothing) = 0$ và $P(\Omega) = 1$.

◇ $0 \leq P(A) \leq 1$.

3 Các quy tắc tính xác suất

☆ Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ của A là

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}.$$

☆ Cho hai biến cố A và B bất kì khi đó

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}.$$

☆ Nếu hai biến cố A và B **xung khắc** thì

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}.$$

! Hai biến cố AB và $A\overline{B}$ xung khắc với nhau khi đó

$$\boxed{P(AB) + P(A\overline{B}) = P(AB \cup A\overline{B}) = P(A)}$$

☆ Nếu hai biến cố A và B **độc lập** thì

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}.$$

BÀI 3. Xác suất có điều kiện

1 Định nghĩa xác suất có điều kiện

Định nghĩa 8.2.
Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là **xác suất của A với điều kiện B**, kí hiệu là $P(A \mid B)$. Nếu $P(B) > 0$ thì

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}}.$$

! Với mỗi biến cố ngẫu nhiên A và B, trong đó $P(B) > 0$, ta có

$$\boxed{P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)}$$

2 Công thức nhân xác suất

Định lí 8.3.

Cho hai biến cố A, B là biến cố bất kì. Khi đó

$$\boxed{\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}$$

! Cho hai biến cố A và B thỏa mãn $0 < \mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó, A và B **độc lập** khi và chỉ khi $\boxed{\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)}$ và $\boxed{\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A)}$.

3 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

☆ Cho biến cố A và B, Khi đó, ta có **công thức xác suất toàn phần** như sau

$$\boxed{\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \mid \overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{A})}.$$

☆ Cho A và B là biến cố, với $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó, ta có **công thức Bayes** như sau

$$\boxed{\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \mid \overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{A})}}.$$

! Công thức Bayes có thể viết dưới dạng $\boxed{\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}}$.

CHƯƠNG 9

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

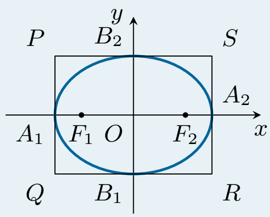
Bài 1. Ba đường conic

1 Elip

Định nghĩa 9.1.
Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2. Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Với số $a > c$, tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là **đường elip**. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai **tiêu điểm** và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự** của elip.

Định nghĩa 9.2.

Cho elip có **phương trình chính tắc** là $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$, với $a > b > 0$.



☆ $c^2 = a^2 - b^2$.

☆ **Tiêu điểm** của elip là $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

☆ **Tiêu cự** của elip là $2c$.

☆ Elip có hai **trục đối xứng** là Ox, Oy và **tâm đối xứng** là gốc tọa độ O.

☆ Elip có **đỉnh** là $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.

☆ **Độ dài trục lớn** của elip là $A_1A_2 = 2a$.

☆ **Độ dài trục bé** của elip là $B_1B_2 = 2b$.

☆ **Hình chữ nhật cơ sở** của elip có bốn đỉnh là $P(-a; b)$, $Q(-a; -b)$, $R(a; -b)$ và $S(a; b)$.

☆ Với điểm $M(x; y)$ thuộc elip, ta có **bán kính qua tiêu** của M là

◇ $MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x$.

◇ $MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x$.

☆ **Tâm sai** của elip là $e = \dfrac{c}{a}$.

☆ Các **đường chuẩn** của elip ứng với F_1 và F_2 là $\Delta \colon x = \mp \dfrac{a}{e}$.

2 Hypebol

Định nghĩa 9.3.

Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2. Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Với số $a > 0$ và $a < c$, tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ được gọi là **đường hypebol**. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai **tiêu điểm** và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự** của hypebol.

Định nghĩa 9.4.

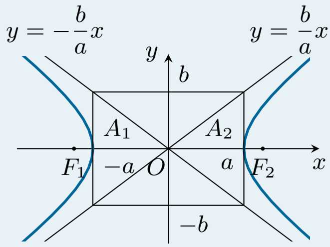
Cho hypebol có **phương trình chính tắc** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$, với $a, b > 0$.

☆ $c^2 = a^2 + b^2$.

☆ Hypebol có hai **tiêu điểm** là $F_1(-c;0)$ và $F_2(c;0)$.

☆ **Tiêu cự** của hybebol là $2c$.

☆ Hypebol có hai **đỉnh** là $A_1(-a;0)$ và $A_2(a;0)$.



☆ Hypebol có hai **trục đối xứng** là Ox và Oy, và có **tâm đối xứng** là gốc tọa độ O.

☆ Trục Ox được gọi là **trục thực** và trục Oy được gọi là **trục ảo**.

☆ **Độ dài trục thực** của hypebol là $2a$.

☆ **Độ dài trục ảo** của hypebol là $2b$.

☆ **Hình chữ nhật cơ sở** có đỉnh là $(-a;b)$, $(-a;-b)$, $(a;-b)$, $(a;b)$.

☆ Hypebol có hai **đường tiệm cận** có phương trình là $y = \pm \dfrac{b}{a}x$.

☆ Với điểm $M(x;y)$ thuộc hypebol, ta có **bán kính qua tiêu** của M là

◇ $MF_1 = \left|a + \dfrac{c}{a}x\right|$.

◇ $MF_2 = \left|a - \dfrac{c}{a}x\right|$.

☆ **Tâm sai** của hypebol là $e = \dfrac{c}{a}$.

☆ Các **đường chuẩn** của hypebol ứng với F_1 và F_2 là $\Delta\colon x = \mp\frac{a}{e}$.

3 Parabol

Định nghĩa 9.5.

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là đường **parabol**. Điểm F được gọi là **tiêu điểm**, Δ được gọi là **đường chuẩn** và khoảng cách từ F đến Δ được gọi là **tham số tiêu** của parabol.

! Parabol trong hình học **không phải** là một hàm số.

Định nghĩa 9.6.

Cho parabol có **phương trình chính tắc** $\boxed{y^2 = 2px}$, với $p > 0$.

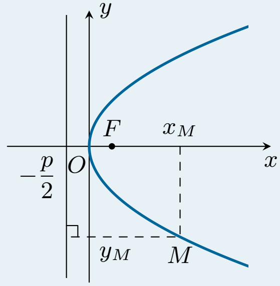
☆ Parabol có **tiêu điểm** $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

☆ Parabol có **đường chuẩn** là $\Delta\colon x = -\frac{p}{2}$.

☆ Parabol có một **trục đối xứng** là Ox.

☆ Parabol có **đỉnh** là $O(0;0)$.

☆ **Tham số tiêu** của p của parabol gấp đôi khoảng cách giữa đỉnh $O(0;0)$ và **tiêu điểm** $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.



☆ Với $M(x;y)$ thuộc parabol, **bán kính qua tiêu** của M là $MF = x + \frac{p}{2}$.

☆ Parabol có **tâm sai** $e = 1$.

CHƯƠNG 10

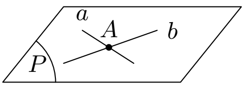
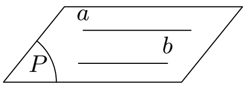
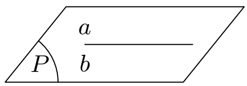
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 1. Quan hệ song song trong không gian

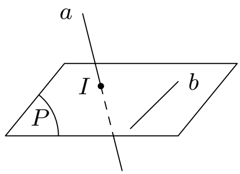
1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó, vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b xảy ra một trong hai trường hợp sau

☆ **Trường hợp 1**: Nếu a và b đồng phẳng.

		
a cắt b tại điểm A	a song song với b	a trùng với b

☆ **Trường hợp 2**: Nếu a và b không đồng phẳng hay a và b chéo nhau.



Định lí 10.1.

$$\text{Nếu } \begin{cases} (\alpha)\cap(\beta)=a \\ (\alpha)\cap(\gamma)=b \\ (\beta)\cap(\gamma)=c \end{cases} \text{ thì } \left[\begin{array}{l} a,b,c \text{ đồng quy} \\ a//b//c. \end{array}\right.$$

Hệ quả 10.2.

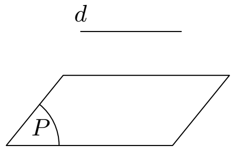
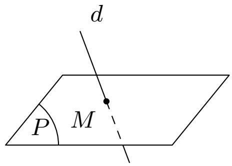
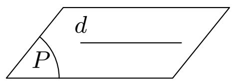
$$\text{Nếu } \begin{cases} a\subset(\alpha) \\ b\subset(\beta) \\ a//b \\ (\alpha)\cap(\beta)=\Delta \end{cases} \text{ thì } \left[\begin{array}{l} \Delta//a//b \\ \Delta\equiv a \\ \Delta\equiv b. \end{array}\right.$$

Định lí 10.3.

Nếu $\begin{cases} d_1 // d_3 \\ d_2 // d_3 \end{cases}$ thì $\left[\begin{array}{l} d_1 // d_2 \\ d_1 \equiv d_2. \end{array}\right.$

2 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Khi đó, ví trị tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (α) xảy ra một trong ba trường hợp sau

		
$d//(P)$	$d \cap (P) = \{M\}$	$d \subset (P)$

Định lí 10.4.

Nếu $\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d' \subset (P), d' // d \end{cases}$ thì $d//(P)$.

Định lí 10.5.

Nếu $\begin{cases} a//(\alpha) \\ a \subset (\beta), (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases}$ thì $a//b$.

Hệ quả 10.6.

Nếu $\begin{cases} (P)//d \\ (Q)//d \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases}$ thì $d//\Delta$.

3 Hai mặt phẳng song song

Định nghĩa 10.7.
Cho hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó $(\alpha)//(\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$.

Định lí 10.8.

Nếu $\begin{cases} a//(\beta) \\ b//(\beta) \\ a \cap b = \{A\} \text{ và } a, b \subset (\alpha) \end{cases}$ thì $(\alpha)//(\beta)$.

Định lí 10.9.

Nếu $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ (\alpha) \cap (\gamma) = a \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \end{cases}$ thì $a//b$.

Định lí 10.10.

Cho $(P)//(Q)//(R)$.

Nếu $\begin{cases} d \cap (P) = \{A\}, d \cap (Q) = \{B\}, d \cap (R) = \{C\} \\ d' \cap (P) = \{A'\}, d' \cap (Q) = \{B'\}, d' \cap (R) = \{C'\} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

Bài 2. Quan hệ vuông góc trong không gian

1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa 10.11.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Khi đó $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \forall a \subset (\alpha), d \perp a$.

Định lí 10.12.

Nếu $\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \cap b = \{A\} \\ a, b \subset (\alpha) \end{cases}$ thì $d \perp (\alpha)$.

Định nghĩa 10.13.
Cho đoạn thẳng AB, gọi I là trung điểm của AB. Mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với AB gọi là **mặt phẳng trung trực** của AB.

Tính chất 10.14.

☆ $\left.\begin{array}{l} d // d' \\ d \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow d' \perp (P)$.

☆ $\left.\begin{array}{l} d \perp (P) \\ d' \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow d // d'$.

☆ $\left.\begin{array}{l} (P)//(Q) \\ d \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (Q)$.

☆ $\left.\begin{array}{l} d \perp (P) \\ d \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P)//(Q)$.

☆ $\left.\begin{array}{l} d//(P) \\ d' \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp d'$.

☆ $\left.\begin{array}{l} d \perp d' \\ (P) \perp d' \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d//(P) \\ d \subset (P). \end{array}\right.$

2 Hai mặt phẳng vuông góc

Định lí 10.15.
Nếu $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases}$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Định lí 10.16.

☆ $\left.\begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha), a \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$.

☆ $\left.\begin{array}{l} (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (\gamma)$.

Bài 3. Góc và khoảng cách trong không gian

1 Góc trong không gian

1.1 Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa 10.17.
Góc giữa hai đường thẳng m và n, kí hiệu (m, n), là góc giữa hai đường thẳng a và b đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n.

Với hai đường thẳng a và b bất kì thì

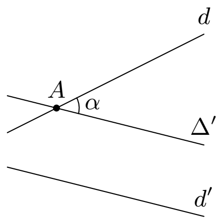
☆ $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.

☆ $(a, b) = 0^\circ$ thì $\left[\begin{array}{l} a \equiv b \\ a // b. \end{array}\right.$

Cách xác định góc giữa hai đường thẳng d và d' trong không gian

☆ **Cách 1**: Sử dụng định nghĩa.

◇ **Bước 1**: Lấy một điểm A bất kỳ (thường $A \in d$ hoặc $A \in d'$). Qua A, dựng đường thẳng Δ và Δ' theo thứ tự song song với d và d'.
$\Rightarrow (d, d') = (\Delta, \Delta')$.



◇ **Bước 2**: Tính góc giữa hai đường thẳng Δ và Δ' bằng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông hoặc dùng định lí hàm số sin, cosin trong tam giác thường.

☆ **Cách 2**: Sử dụng tích vô hướng.

◇ **Bước 1**: Tìm hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ theo thứ tự là các vectơ chỉ phương của đường thẳng d và d'.

◇ **Bước 2**: Tính số đo góc α giữa hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ thường sử dụng tích vô hướng của hai vectơ để tính góc.

◇ **Bước 3**: Khi đó, góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng

- Bằng góc α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- Bằng góc $180^\circ - \alpha$ nếu $\alpha > 90^\circ$.

1.2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 10.18.

☆ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì $(a, (P)) = 90^\circ$.

☆ Nếu đường thẳng a không vuông mặt phẳng (P) thì $(a, (P)) = (a, a')$, với a' là hình chiếu của a trên mặt phẳng (P).

Với đường thẳng a và mặt phẳng (P) bất kì thì

☆ $0^\circ \leq (a, (P)) \leq 90^\circ$.

☆ $(a, (P)) = 0^\circ$ thì $a \subset (P)$.

Ngô Đức Tài – 0889 971 004

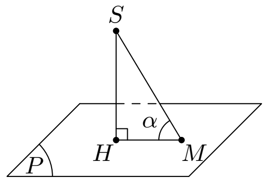
Cách xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P)

☆ **Cách 1**: Trực tiếp

◈ **Bước 1**: Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

◈ **Bước 2**: Lấy điểm $S \in d$ và dựng $SH \perp (P)$. Khi đó

$$(d,(P)) = (d, HM) = \widehat{SMH} = \alpha.$$



◈ **Bước 3**: Tính số đo của góc $\widehat{SMH}$.

☆ **Cách 2**: Tính gián tiếp theo một trong hai hướng sau.

◈ **Hướng 1**: Chọn một đường thẳng $\Delta // d$ mà góc giữa Δ và (P) có thể tính được. Từ đó, ta có $(d,(P)) = (\Delta,(P))$.

◈ **Hướng 2**: Chọn một mặt phẳng $(Q)//(P)$ mà góc giữa d và (Q) có thể tính được. Từ đó, ta có $(d,(P)) = (d,(Q))$.

1.3 Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa 10.19.
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Kẻ $a \perp (P)$ và $b \perp (Q)$. Khi đó

$$((P),(Q)) = (a,b).$$

! Với hai mặt phẳng (P) và (Q) bất kì thì

☆ $0^\circ \leq ((P),(Q)) \leq 90^\circ$.

☆ $((P),(Q)) = 0^\circ$ thì $\left[\begin{array}{l}(P) \equiv (Q)\\ (P)//(Q).\end{array}\right.$

Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

☆ **Cách 1**: Sử dụng định nghĩa.

◈ **Bước 1**: Từ điểm O kẻ $OE \perp (P)$, $OF \perp (Q)$. Khi đó

$$((P),(Q)) = (OE, OF).$$

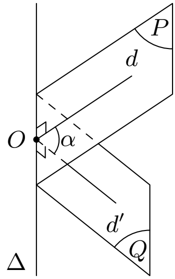
◈ **Bước 2**: Tính góc (OE, OF).

☆ **Cách 2**: Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau.

◈ **Bước 1**: Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q).

◈ **Bước 2**: Từ một điểm O trên Δ, trong mặt phẳng (P) kẻ đường thẳng $d \perp \Delta$, trong mặt phẳng (Q), kẻ đường thẳng $d' \perp \Delta$.

◈ **Bước 3**: Khi đó, $((P),(Q)) = (d,d') = \alpha$.



☆ **Cách 3**: Sử dụng hai mặt phẳng vuông góc.

◈ **Bước 1**: Tìm mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

◈ **Bước 2**: Tìm giao tuyến $(R) \cap (P) = d$ và $(R) \cap (Q) = \Delta$.

◈ **Bước 3**: Khi đó $((P),(Q)) = (d,\Delta)$.

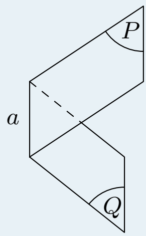
☆ **Cách 4**: Dùng diện tích của đa giác chiếu.
Gọi S là diện tích của đa giác $\mathscr{H}$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (Q) và φ là góc giữa (P) và (Q). Khi đó

$$\boxed{S' = S \cdot \cos\varphi} \text{ hay } \boxed{\cos\varphi = \frac{S'}{S}}.$$

1.4 Góc nhị diện

Định nghĩa 10.20.

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một **góc nhị diện**, kí hiệu là $[P,a,Q]$. Đường thẳng a gọi là cạnh và các nửa mặt phẳng (P), (Q) gọi là các mặt của góc nhị diện đó.



!

☆ $0^\circ \leq [P, a, Q] \leq 180^\circ$.

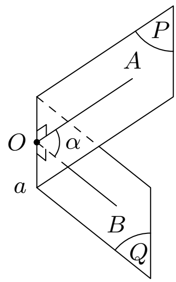
☆ Với $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (Q) \\ M, N \notin a \end{cases}$ thì $[P, a, Q] = [M, a, N]$.

Cách xác định góc nhị diện $[P, a, Q]$

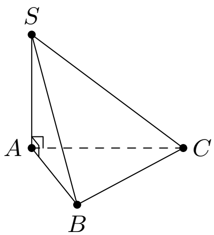
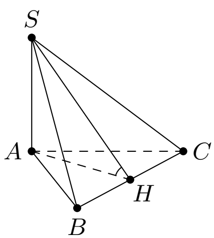
☆ **Bước 1**: Từ một điểm O bất kì trên đường thẳng a, vẽ tia $OA \perp a$, $OA \subset (P)$ và $OB \perp a$, $OB \subset (Q)$. Khi đó

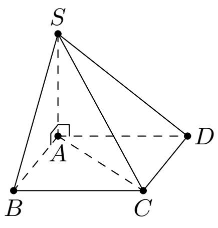
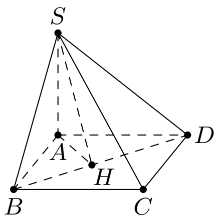
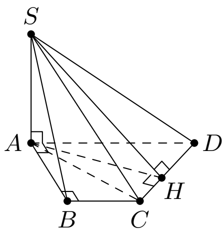
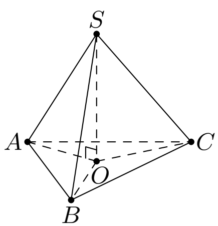
$$[P, a, Q] = \widehat{AOB}$$

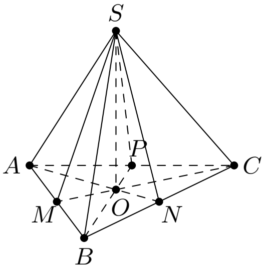
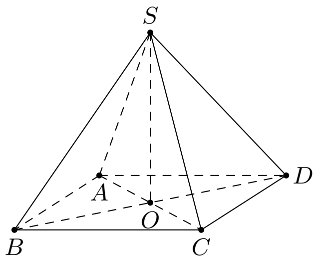
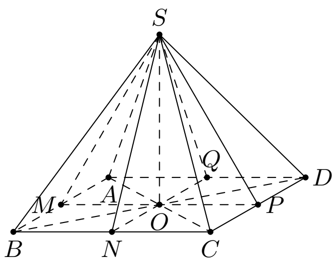
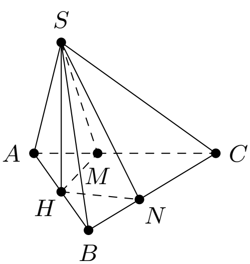
☆ **Bước 2**: Tính góc $\widehat{AOB}$.

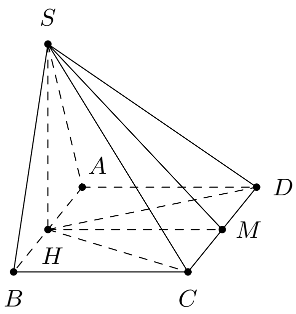


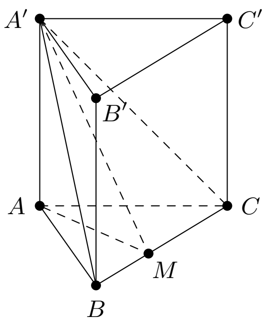
1.5 Cách xác định góc của một số hình chóp thường gặp

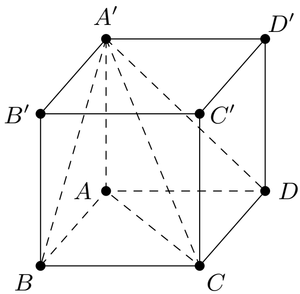
<table>
<tr><th colspan="3">Hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$(SB, (ABC)) = \widehat{SBA}$</td><td>$(SC, (ABC)) = \widehat{SCA}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B $((SBC), (ABC)) = \widehat{SBA}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C $((SBC), (ABC)) = \widehat{SCA}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì kẻ $AH \perp BC$, khi đó $((SBC), (ABC)) = \widehat{SHA}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nếu $\triangle ABC$ đều thì gọi H là trung điểm BC, khi đó $((SBC), (ABC)) = \widehat{SHA}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$[S, BC, A] = ((SBC), (ABC))$</td></tr>
</table>

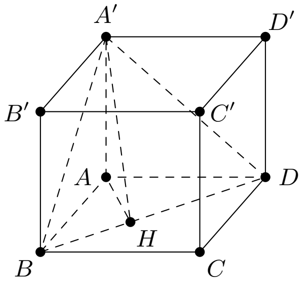
<table>
<tr><th colspan="3">Hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình chữ nhật (hình vuông), $SA \perp (ABCD)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>$(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA}$</td><td>$(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$</td></tr>
<tr><td>$(SD, (ABCD)) = \widehat{SDA}$</td><td>$(SB, (SAD)) = \widehat{BSA}$</td></tr>
<tr><td>$(SC, (SAD)) = \widehat{DSC}$</td><td>$(SC, (SAB)) = \widehat{BSC}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(SD, (SAB)) = \widehat{DSA}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">$[S, BC, A] = ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SBA}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$[S, CD, A] = ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SDA}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$[S, BD, A] = ((SBD), (ABCD)) = \widehat{SHA}$
Nếu $ABCD$ là hình vuông thì $H \equiv O$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình thang vuông tại A, B, $SA \perp (ABCD)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>$(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA}$</td><td>$(SD, (ABCD)) = \widehat{SDA}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$[S, BC, A] = ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SBA}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$[S, CD, A] = ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SHA}$
Nếu $AB = BC = \dfrac{AD}{2}$ thì $H \equiv C$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Hình chóp tam giác đều S.ABC</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$(SA, (ABC)) = \widehat{SAO}$</td><td>$(SB, (ABC)) = \widehat{SBO}$</td></tr>
<tr><td>$SC, (ABC)) = \widehat{SCO}$</td><td>$\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>$[S, AB, C] = ((SAB), (ABC)) = \widehat{SMO}$</td></tr>
<tr><td>$[S, BC, A] = ((SBC), (ABC)) = \widehat{SNO}$</td></tr>
<tr><td>$[S, AC, B] = ((SAC), (ABC)) = \widehat{SPO}$</td></tr>
<tr><td>$\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hình chóp tứ giác đều S.ABCD</td></tr>
<tr><td rowspan="5">
</td><td>$(SA, (ABCD)) = \widehat{SAO}$</td></tr>
<tr><td>$(SB, (ABCD)) = \widehat{SBO}$</td></tr>
<tr><td>$(SC, (ABCD)) = \widehat{SCO}$</td></tr>
<tr><td>$(SD, (ABCD)) = \widehat{SDO}$</td></tr>
<tr><td>$\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SDO}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">
</td><td>$[S, AB, O] = ((SAB), (ABCD)) = \widehat{SMO}$</td></tr>
<tr><td>$[S, BC, O] = ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SNO}$</td></tr>
<tr><td>$[S, CD, O] = ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SPO}$</td></tr>
<tr><td>$[S, AD, O] = ((SAD), (ABCD)) = \widehat{SQO}$</td></tr>
<tr><td>$\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = \widehat{SQO}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hình chóp S.ABC có mặt bên (SAB) vuông góc với đáy</td></tr>
<tr><td rowspan="5">
</td><td>$(SA, (ABC)) = \widehat{SAH}$</td></tr>
<tr><td>$(SB, (ABC)) = \widehat{SBH}$</td></tr>
<tr><td>$(SC, (ABC)) = \widehat{SCH}$</td></tr>
<tr><td>$((SAC), (ABC)) = \widehat{SMH}$</td></tr>
<tr><td>$((SBC), (ABC)) = \widehat{SNH}$</td></tr>
</table>

Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với đáy là hình chữ nhật	
	$(SA,(ABCD))=\widehat{SAH}$
	$(SC,(ABCD))=\widehat{SCH}$
	$(SB,(ABCD))=\widehat{SBH}$
	$(SD,(ABCD))=\widehat{SDH}$
	$((SAD),(ABCD))=\widehat{SAH}$
	$((SBC),(ABCD))=\widehat{SBH}$
	$((SCD),(ABCD))=\widehat{SMH}$

Hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$	
	$(A'B,(ABC))=\widehat{A'BA}$
	$(A'C,(ABC))=\widehat{A'CA}$
	$[A',BC,A']=((A'BC),(ABC))=\widehat{A'MA}$
	☆ Điểm M là hình chiếu của điểm A trên đoạn thẳng BC. ☆ Nếu $\triangle ABC$ cân tại A (hoặc đều) thì M là trung điểm của BC.

Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$	
	$(A'B,(ABCD))=\widehat{A'BA}$
	$(A'C,(ABCD))=\widehat{A'CA}$
	$(A'D,(ABCD))=\widehat{A'DA}$



☆ $((A'BD),(ABCD)) = \widehat{A'HA}$, với H là hình chiếu của điểm A trên đoạn thẳng BD.

☆ Nếu $ABCD$ là hình vuông thì $H \equiv O$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

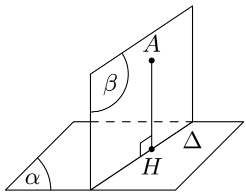
2 Khoảng cách trong không gian

2.1 Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Định nghĩa 10.21.
Cho điểm A và mặt phẳng (α). Khi đó $\mathrm{d}(A,(\alpha)) = AH$, với H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (α).

Cách xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α)

☆ **Bước 1**: Tìm mặt phẳng (β) đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α).



☆ **Bước 2**: Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.

☆ **Bước 3**: Trong mặt phẳng (β), kẻ $AH \perp \Delta$.
$\Rightarrow OH \perp (\alpha) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(\alpha)) = AH$.

☆ **Bước 4**: Tính độ dài đoạn AH.

!

☆ Nếu đã có đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì kẻ $Ax // d$ cắt (α) tại H.

☆ Nếu $AB // (\alpha)$ thì $\boxed{\mathrm{d}(A,(\alpha)) = \mathrm{d}(B,(\alpha))}$.

☆ Nếu AB cắt (α) tại I thì $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}(A,(\alpha))}{\mathrm{d}(B,(\alpha))} = \dfrac{AI}{BI}}$.

2.2 Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Định nghĩa 10.22.
Nếu $d // (\alpha)$ thì $\mathrm{d}(d,(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\alpha))$, với mọi $A \in d$.

2.3 Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

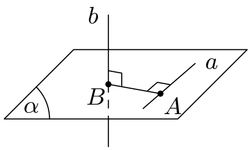
Định nghĩa 10.23.
Nếu $(\alpha) // (\beta)$ thì $\mathrm{d}((\alpha),(\beta)) = \mathrm{d}(A,(\beta))$, với mọi $A \in (\alpha)$.

2.4 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Định nghĩa 10.24.
Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng Δ cắt và vuông góc với hai đường thẳng a, b thì được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b. Nếu Δ cắt a tại A và cắt b tại B thì AB gọi là **đoạn vuông góc chung** của a và b.

Cách xác định đoạn vuông góc chung của hai đường chéo nhau *a* và *b*

☆ **Nếu *a* và *b* vuông góc với nhau.**

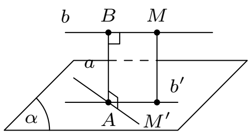


◇ **Bước 1**: Dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.

◇ **Bước 2**: Trong (α), dựng $BA \perp a$ tại A.
$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b.

☆ **Nếu *a* và *b* không vuông góc với nhau.**

Cách 1



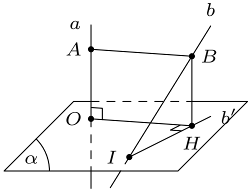
◇ **Bước 1**: Dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.

◇ **Bước 2**: Lấy điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.

◇ **Bước 3**: Từ M' dựng $b' // b$ cắt a tại A.

◇ **Bước 4**: Từ A dựng $AB // MM'$ cắt b tại B.
$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2



- **Bước 1**: Dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O, (α) cắt b tại I.
- **Bước 2**: Dựng hình chiếu vuông góc b' của b lên (α).
- **Bước 3**: Trong mặt phẳng (α), vẽ $OH \perp b'$ tại H.
- **Bước 4**: Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- **Bước 5**: Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
  $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b.

Định nghĩa 10.25.
Nếu hai đường thẳng chéo nhau a và b có đoạn vuông góc chung AB thì

$$\boxed{\mathrm{d}(a,b) = AB}$$

Cách xác định khoảng cách giữa hai đường chéo nhau *a* và *b*

☆ **Cách 1**: Dựng đường vuông góc chung AB của hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khi đó

$$\boxed{\mathrm{d}(a,b) = AB}.$$

☆ **Cách 2**: Tìm mặt phẳng (α) chứa a và song song với b. Khi đó

$$\boxed{\mathrm{d}(a,b) = \mathrm{d}(b,(\alpha))}.$$

☆ **Cách 3**: Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng a và b. Khi đó

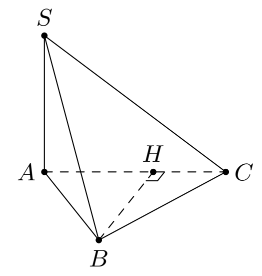
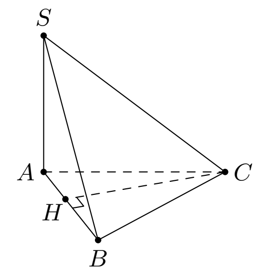
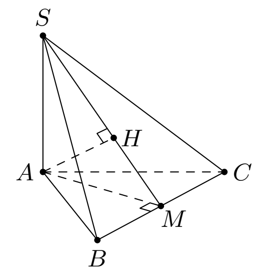
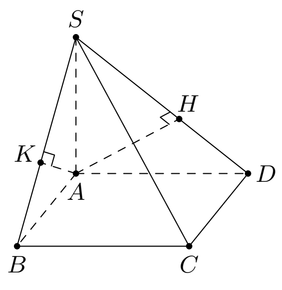
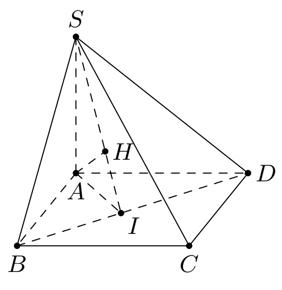
$$\boxed{\mathrm{d}(a,b) = \mathrm{d}((\alpha),(\beta))}.$$

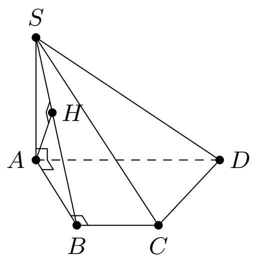
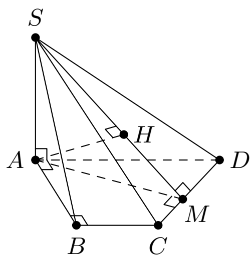
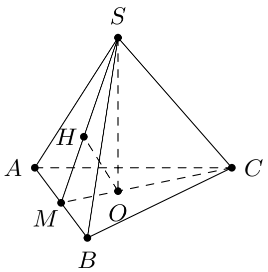
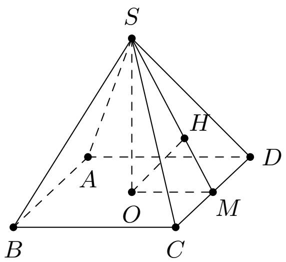
☆ **Cách 4**: Tính khoảng cách dựa vào thể tích tứ diện

$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}(AB,CD) \cdot \sin(AB,CD)}$$

với AB, CD là hai cạnh đối nhau của một tứ diện.

2.5 Cách xác định khoảng cách trong một số hình chóp thường gặp

<table>
<tr><th colspan="3">Hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>$\mathrm{d}(B,(SAC)) = BH$</td><td>$\mathrm{d}(C,(SAB)) = CH$</td><td>$\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$</td></tr>
<tr><td colspan="3">☆ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $H \equiv A \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}(B,(SAC)) = AB \\ \mathrm{d}(C,(SAB)) = CA. \end{cases}$
☆ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $H \equiv C \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SAC)) = BC$.
☆ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B thì $H \equiv B \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAC)) = BC$.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Hình chóp $S.ABCD$, có $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông), $SA \perp (ABCD)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td colspan="2">$\mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{d}(B,(SCD)) = AH$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{d}(D,(SBC)) = AK$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td colspan="2">$\mathrm{d}(A,(SBD)) = AH$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{d}(C,(SBD)) = AH$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nếu $ABCD$ là hình vuông thì $I \equiv O$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình thang vuông tại A, B, $SA \perp (ABCD)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{d}(A,(SBC)) = \mathrm{d}(D,(SBC)) = AH$</td><td>$\mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nếu $AD = 2AB = 2BC$ thì $M \equiv C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hình chóp tam giác đều S.ABC</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>$\mathrm{d}(O,(SAB)) = OH$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{d}(C,(SAB)) = 3\mathrm{d}(O,(SAB))$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{d}(O,(SAB)) = \mathrm{d}(O,(SBC)) = \mathrm{d}(O,(SAC))$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{d}(A,(SBC)) = \mathrm{d}(B,(SAC)) = \mathrm{d}(C,(SAB))$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hình chóp tứ giác đều S.ABCD</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>$\mathrm{d}(O,(SCD)) = OH$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{d}(A,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD))$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{d}(O,(SAB)) = \mathrm{d}(O,(SBC)) = \mathrm{d}(O,(SCD)) = \mathrm{d}(O,(SAD))$</td></tr>
</table>

Bài 4. Thể tích của khối đa diện

1 Thể tích khối đa diện

☆ Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h}.$$

☆ Thể tích V của khối chóp cụt đều có diện tích đáy lớn S, diện tích đáy bé S' và chiều cao h là

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S + S' + \sqrt{S \cdot S'}\right)}.$$

☆ Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là

$$\boxed{V = S \cdot h}.$$

☆ Thể tích V của khối hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}.$$

☆ Thể tích V của khối lập phương có cạnh a là

$$\boxed{V = a^3}.$$

2 Phân biệt các khối đa diện cơ bản

2.1 Hình chóp

☆ **Hình chóp đều** là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của các đa giác đáy.

☆ **Hình chóp tam giác đều** là hình chóp có đáy là tam giác đều và chân đường cao trùng với trọng tâm của đáy.

☆ **Hình chóp tứ giác đều** là hình chóp có đáy là hình vuông, chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo hình vuông.

☆ **Tứ diện đều** là hình chóp tam giác đều nhưng có tất cả các cạnh bằng nhau.

2.2 Hình lăng trụ

☆ **Lăng trụ đứng** là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy.

☆ **Lặng trụ đều** là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

☆ **Lăng trụ tam giác đều** là lăng trụ **đứng** và có đáy là **tam giác đều**.

☆ **Lăng trụ tứ giác đều** là lăng trụ **đứng**, có đáy là **hình vuông**.

☆ **Lăng trụ có đáy là tam giác đều** là lăng trụ **xiên**, có đáy là tam giác đều.

☆ **Lăng trụ có đáy là tứ giác đều** là lăng trụ **xiên**, có đáy là hình vuông.

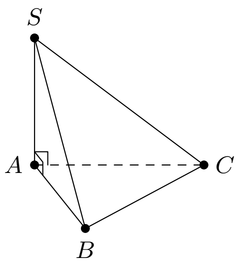
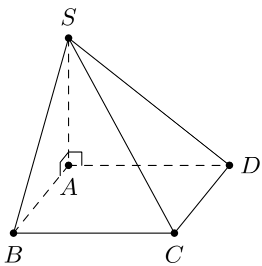
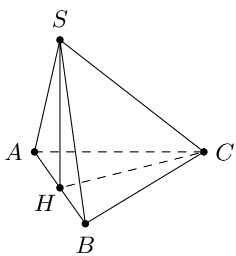
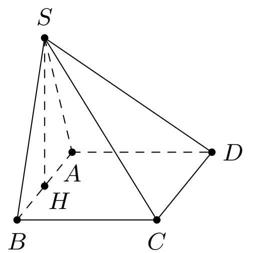
☆ **Hình hộp** là lăng trụ **xiên** có đáy là hình bình hành.

☆ **Hình hộp đứng** là lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

☆ **Hình hộp chữ nhật** là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

☆ **Hình lập phương** là hình lăng trụ đứng có đáy và các mặt bên là hình vuông.

3 Một số hình chóp thường gặp

<table>
<tr><th colspan="2">Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">☆ Chiều cao của hình chóp là SA.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

☆ Chiều cao hình chóp là SH, với SH là đường cao của tam giác SAB.

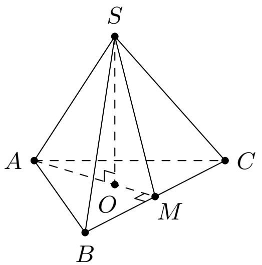
☆ Nếu $\triangle SAB$ đều thì H là trung điểm của AB và $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$.

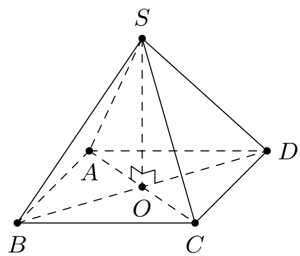
☆ Nếu $\triangle SAB$ vuông tại S thì $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2}$.

☆ Nếu $\triangle SAB$ vuông cân tại S thì $SH = \dfrac{AB}{2}$.

☆ Nếu $\triangle SAB$ cân tại S thì $SH = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$.

Hình chóp đều





☆ Chiều cao hình chóp là SO, với O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

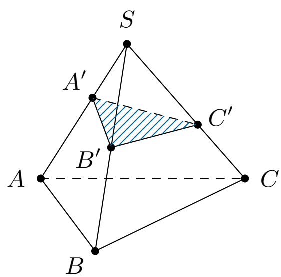
☆ Với hình chóp tam giác đều $S.ABC$ thì $SO = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AB^2}{3}}$.

☆ Với hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ thì $SO = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AB^2}{2}}$.

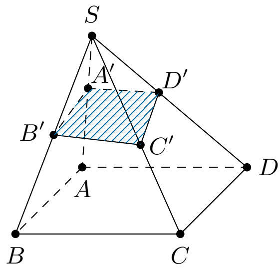
4 Tỉ số thể tích

☆ Cho hình chóp $S.ABC$, gọi A', B', C' lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC. Khi đó, ta có

$$\boxed{\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}}$$



☆ Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD. Khi đó, ta có

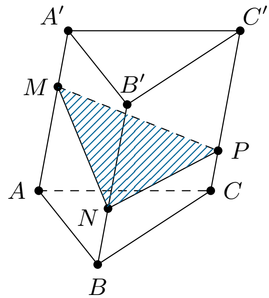


$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{abcd}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}$$

với $\begin{cases} a = \dfrac{SA'}{SA}, b = \dfrac{SB'}{SB}, c = \dfrac{SC'}{SC}, d = \dfrac{SD'}{SD} \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d}. \end{cases}$

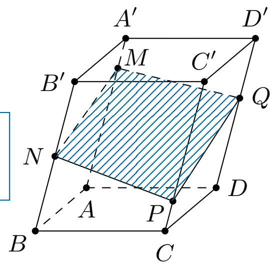
☆ Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, một mặt phẳng (P) cắt 3 cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P. Khi đó

$$\boxed{\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}} = \frac{A'M+B'N+C'P}{AM+BN+CP}}$$



☆ Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, một mặt phẳng (P) cắt 4 cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P, Q. Khi đó

$$\boxed{\frac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}} = \frac{A'M+B'N+C'P+D'Q}{AM+BN+CP+DQ}}$$



5 Một số công thức tính nhanh thể tích khối đa diện

☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có ba cạnh $SA \perp SB \perp SC$, $SA = a$, $SB = b$ và $SC = c$ là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có ba cạnh $SA \perp SB \perp SC$, $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$ là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{2}}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có ba mặt $(SAB) \perp (SBC) \perp (SAC)$, $S_{\triangle SAB} = S_1$, $S_{\triangle SBC} = S_2$, $S_{\triangle SAC} = S_3$ là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}}{3}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $(SAB) \perp (SBC)$, $\widehat{BSC} = \alpha$ và $\widehat{ASB} = \beta$ là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \beta}{12}}$$

☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $\widehat{ASB} = \beta$, $\widehat{ASC} = \varphi$ và $((SAB),(SAC)) = \alpha$ là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}.$$

☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSA} = \varphi$ là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $S_{\triangle SAB} = S_1$, $S_{\triangle SAC} = S_2$, $((SAB),(SAC)) = \alpha$ là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}}.$$

☆ Thể tích của tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$, $\mathrm{d}(AB,CD) = \mathrm{d}$ và $(AB,CD) = \alpha$ là

$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot a\cdot b\cdot \mathrm{d}\cdot\sin\alpha}.$$

☆ Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$ là

$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}}.$$

☆ Thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a là

$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{a^3\tan\alpha}{24}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3\cdot\sin\beta\cos^2\beta}{4}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{a^3\cdot\tan\beta}{12}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với đáy là α là

$$\boxed{V_{S.ABC} = \frac{a^3\cot\alpha}{24}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bằng a là

$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đáy bằng a, và các cạnh bên bằng b là

$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α là

$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \cdot \tan\alpha}{6}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng b, góc giữa mặt bên và mặt đáy là α là

$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{4b^3 \cdot \tan\alpha}{3\sqrt{(2+\tan^2\alpha)^3}}}.$$

☆ Thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng β là

$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \cdot \tan\alpha}.$$

☆ Thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{SAB} = \alpha$, với $\alpha \in (45^\circ; 90^\circ)$ là

$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}{6}}.$$

CHƯƠNG 11

VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Vectơ trong không gian

1 Định nghĩa

Định nghĩa 11.1.

☆ Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

☆ Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ là chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Ngoài ra, vectơ còn được kí kiệu là $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, ...

☆ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

☆ Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

☆ Hai vectơ cùng phương thì chúng có cùng hướng hoặc ngược hướng.

☆ $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{b}\right| \\ \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \text{ cùng hướng.} \end{cases}$

☆ Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu $\overrightarrow{0}$.

2 Các phép toán vectơ

☆ **Quy tắc ba điểm**: Với ba điểm A, B, C, ta có

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}.$$

☆ **Quy tắc hình bình hành**: Cho hình bình hành $ABCD$, ta có

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}.$$

☆ **Quy tắc hình hộp**: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}}$$

☆ **Quy tắc hiệu**: Với ba điểm A, B, C ta có

$$\boxed{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}}.$$

! Với hai điểm A, B bất kì, ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$.

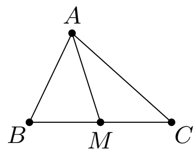
☆ **Tích của một số với một vectơ**: Cho vectơ $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ và số $k \neq 0$. Khi đó, $k \cdot \overrightarrow{a}$ là một vectơ

- ◇ Có độ dài bằng $|k| \cdot |\overrightarrow{a}|$.
- ◇ Cùng hướng với $\overrightarrow{a}$ nếu $k > 0$.
- ◇ Ngược hướng với $\overrightarrow{a}$ nếu $k < 0$.

!
☆ Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Khi đó $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \neq 0$, sao cho $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$.

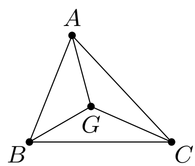
☆ Điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

☆ **Quy tắc trung điểm**: Nếu M là trung điểm của BC thì



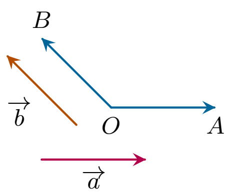
- ◇ $\boxed{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}}$.
- ◇ $\boxed{\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}$, với A là điểm bất kì.

☆ **Quy tắc trọng tâm**: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khi đó ta có



- ◇ $\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}}$.
- ◇ $\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}}$, với M là điểm bất kì.

☆ **Góc giữa hai vectơ**: Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Từ một điểm O bất kì, vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là góc $\widehat{AOB}$.



$$\boxed{\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \widehat{AOB}}$$

!

☆ $0^\circ \le \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \le 180^\circ$.

☆ Nếu $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 90^\circ$ thì $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

☆ $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}\right) = \widehat{BAC}$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = 180^\circ - \widehat{BAC}$.

☆ **Tích vô hướng của hai vectơ** $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, và được xác định bởi công thức $\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}$.

!

☆ $\cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$. ☆ $\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$.

☆ $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.

BÀI 2. Tọa độ của vectơ trong không gian

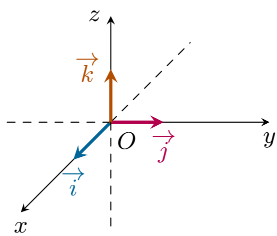
1 Hệ trục tọa độ trong không gian

☆ **Gốc tọa độ**: $O(0;0;0)$.

☆ **Trục tọa độ**: trục hoành Ox, trục tung Oy, trục cao Oz.

☆ **Mặt phẳng tọa độ**: (Oxy), (Oyz), (Oxz) đôi một vuông góc với nhau.

☆ **Vectơ đơn vị**: $\overrightarrow{i} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$ và $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$.



2 Tọa độ của vectơ

Định nghĩa 11.2.
Trong không gian $Oxyz$, $\overrightarrow{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{i} + a_2 \cdot \overrightarrow{j} + a_3 \cdot \overrightarrow{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

☆ **Các phép toán vectơ**

Cho hai vectơ $\overrightarrow{a_1} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$	$k \cdot \overrightarrow{a} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2; k \cdot a_3)$
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$	$\overrightarrow{a}$ cùng phương $\overrightarrow{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$	$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$
$\lvert\overrightarrow{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\lvert\overrightarrow{a}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{b}\rvert}$

3 Tọa độ của điểm

Định nghĩa 11.3.

Trong không gian $Oxyz$, $\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \overrightarrow{i} + y_M \cdot \overrightarrow{j} + z_M \cdot \overrightarrow{k} \Leftrightarrow M(x_M; y_M; z_M)$.

☆ **Tọa độ điểm đặc biệt**

$M \in Ox$ thì $M(x; 0; 0)$	$M \in (Oxy)$ thì $M(x; y; 0)$
$M \in Oy$ thì $M(0; y; 0)$	$M \in (Oyz)$ thì $M(0; y; z)$
$M \in Oz$ thì $M(0; 0; z)$	$M \in (Oxz)$ thì $M(x; 0; z)$

☆ **Tọa độ của vectơ** $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

☆ **Độ dài đoạn thẳng** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

☆ Điểm M là **trung điểm** của $AB \Leftrightarrow M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

☆ Điểm G là **trọng tâm** của $\triangle ABC$ thì

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

☆ Nếu $ABCD$ là **hình bình hành** thì $A + C = B + D$.

☆ Điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng là

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_A) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_A) \\ z_B - z_A = k(z_C - z_A) \end{cases}$$

☆ Điểm M chia đoạn AB theo tỉ lệ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ với $k \neq 1$ thì
$$M\left(\frac{x_A - kx_B}{1-k}; \frac{y_A - ky_B}{1-k}; \frac{z_A - kz_B}{1-k}\right).$$

☆ Điểm M thỏa mãn điều kiện $a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} + c \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ thì
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{a \cdot x_A + b \cdot x_B + c \cdot x_C}{a+b+c} \\ y_I = \dfrac{a \cdot y_A + b \cdot y_B + c \cdot y_C}{a+b+c} \\ z_I = \dfrac{a \cdot z_A + b \cdot z_B + c \cdot z_C}{a+b+c}. \end{cases}$$

☆ Điểm D là **chân đường phân giác trong** AD của $\triangle ABC$ thì
$$\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}.$$

☆ Điểm E là **chân đường phân giác ngoài** AE của $\triangle ABC$ thì
$$\overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}.$$

☆ Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ thì
$$BC \cdot \overrightarrow{IA} + CA \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{BC \cdot x_A + CA \cdot x_B + AB \cdot x_C}{BC + CA + AB} \\ y_I = \dfrac{BC \cdot y_A + CA \cdot y_B + AB \cdot y_C}{BC + CA + AB} \\ z_I = \dfrac{BC \cdot z_A + CA \cdot z_B + AB \cdot z_C}{BC + CA + AB}. \end{cases}$$

4 Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng

Định nghĩa 11.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó, **tích có hướng** của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là một vectơ, ký hiệu là $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$, có tọa độ xác định bởi
$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= \left(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1\right).\end{aligned}$$

☆ Tính chất và ứng dụng

Tính chất	
$\overrightarrow{a}$ cùng phương $\overrightarrow{b} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0}$	$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] \perp \overrightarrow{a}$ và $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] \perp \overrightarrow{b}$
$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]$	$\left\|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right\| = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cdot \sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$
Ứng dụng trong tính diện tích, thể tích	
Diện tích tam giác *ABC* $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\|$	**Diện tích hình bình hành *ABCD*** $S_{ABCD} = \left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right\|$
Thể tích tứ diện *ABCD* $V = \dfrac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AD}\right\|$	**Thể tích hình hộp *ABCD.A′B′C′D′*** $V = \left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] \cdot \overrightarrow{AA'}\right\|$
Tính đồng phẳng	
$\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{c}$ đồng phẳng thì $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] \cdot \overrightarrow{c} = 0$	
A, B, C, D đồng phẳng thì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$	

CHƯƠNG 12

TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Phương trình mặt phẳng

1 Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

☆ Vectơ $\overrightarrow{n}$ khác $\overrightarrow{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

☆ Mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến là

$$\boxed{\overrightarrow{n} = (A; B; C)}.$$

☆ Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng tọa độ

Mặt phẳng	Vectơ pháp tuyến
(Oxy)	$\overrightarrow{n}_{(Oxy)} = \left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right] = \overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$
(Oyz)	$\overrightarrow{n}_{(Oyz)} = \left[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right] = \overrightarrow{i} = (1; 0; 0)$
(Oxz)	$\overrightarrow{n}_{(Oxz)} = \left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right] = \overrightarrow{j} = (0; 1; 0)$

2 Phương trình mặt phẳng

☆ Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ là

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}.$$

☆ Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$, với $a \cdot b \cdot c \neq 0$ thì có phương trình là

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}.$$

☆ **Phương trình của các mặt phẳng đặc biệt**

Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax + By + Cz + D = 0$.

Các hệ số	Phương trình	Tính chất
$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A=0$	$By+Cz+D=0$	$(\alpha)//Ox$
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	$(\alpha)//Oy$
$C=0$	$Ax+By+D=0$	$(\alpha)//Oz$
$A=D=0$	$By+Cz=0$	$(\alpha)\supset Ox$
$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	$(\alpha)\supset Oy$
$C=D=0$	$Ax+By=0$	$(\alpha)\supset Oz$
$A=B=0$	$Cz+D=0$	$(\alpha)//(Oxy)$
$B=C=0$	$Ax+D=0$	$(\alpha)//(Oyz)$
$A=C=0$	$By+D=0$	$(\alpha)//(Oxz)$
$A=B=D=0$	$Cz=0$	$(\alpha)\equiv(Oxy)$
$B=C=D=0$	$Ax=0$	$(\alpha)\equiv(Oyz)$
$A=C=D=0$	$By=0$	$(\alpha)\equiv(Oxz)$

3 Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q)\colon A'x+B'y+C'z+D'=0$.

Mối quan hệ	Điều kiện
$(P)\equiv(Q)$	$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}$
$(P)//(Q)$	$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}$
(P) cắt (Q)	$\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'}$ hoặc $\dfrac{B}{B'}\neq\dfrac{C}{C'}$ hoặc $\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{C}{C'}$
$(P)\perp(Q)$	$AA'+BB'+CC'=0$

4 Khoảng cách

☆ **Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ tới mặt phẳng (P)**

$$\boxed{\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

☆ **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song**

Cho $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q)\colon Ax+By+Cz+D'=0$. Khi đó

$$\boxed{\mathrm{d}((P),(Q))=\dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

5 Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng thường gặp

① **Viết phương trình (P) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng.**

☆ **Cách xác định $\overrightarrow{n}$**: $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

② **Viết phương trình (P) đi qua A và song song với mặt phẳng (Q).**

☆ **Cách xác định $\overrightarrow{n}$**: $\overrightarrow{n}_{(P)}=\overrightarrow{n}_{(Q)}$.

③ **Viết phương trình (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d.**

☆ **Cách xác định $\overrightarrow{n}$**: $\overrightarrow{n}_{(P)}=\overrightarrow{u}_{d}$.

④ **Viết phương trình (P) là mặt phẳng trung trực của AB.**

☆ **Bước 1**: Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

☆ **Bước 2**: Xác định vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}$.

☆ **Bước 3**: Viết phương trình mặt phẳng (P).

⑤ **Viết phương trình (P) đi qua A và chứa đường thẳng d.**

☆ **Cách xác định $\overrightarrow{n}$**: $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right]$, với M là điểm thuộc d.

⑥ **Viết phương trình (P) chứa hai đường d_1 và d_2 cắt nhau.**

☆ **Cách xác định $\overrightarrow{n}$**: $\overrightarrow{n}_{(P)}=[\overrightarrow{u}_{d_1},\overrightarrow{u}_{d_2}]$.

☆ (P) đi qua điểm M thuộc d_1 (hoặc thuộc d_2).

⑦ **Viết phương trình (P) chứa d_1 và song song với d_2, với d_1 và d_2 chéo nhau.**

☆ **Cách xác định $\overrightarrow{n}$**: $\overrightarrow{n}_{(P)}=[\overrightarrow{u}_{d_1},\overrightarrow{u}_{d_2}]$.

☆ (P) đi qua điểm M thuộc d_1.

8 **Viết phương trình (P) đi qua A và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.**

☆ **Cách xác định $\vec{n}$**: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$.

9 **Viết phương trình (P) vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (Q) và (R).**

☆ **Cách xác định $\vec{n}$**: $\vec{n}_{(P)} = \left[\vec{n}_{(Q)}, \vec{n}_{(R)}\right]$.

10 **Viết phương trình (P) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Q).**

☆ **Cách xác định $\vec{n}$**: $\vec{n}_{(P)} = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(Q)}\right]$.

☆ (P) đi qua điểm M thuộc d.

11 **Viết phương trình (P) đi qua A, song song đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Q).**

☆ **Cách xác định $\vec{n}$**: $\vec{n}_{(P)} = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(Q)}\right]$.

12 **Viết phương trình (P) song song với (Q) và cách M một khoảng h.**

☆ **Bước 1**: Nếu mặt phẳng $(Q)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ thì mặt phẳng (P) có phương trình là $Ax + By + Cz + m = 0$ $(m \neq D)$.

☆ **Bước 2**: Với $M(x_0; y_0; z_0)$, ta có

$$\mathrm{d}(M, (P)) = h \Rightarrow \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + m|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = h.$$

13 **Viết phương trình (P) chứa d và cách M một khoảng h.**

☆ **Bước 1**: Gọi vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P} = (A; B; C)$, với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.
$\Rightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_d} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0.$ (1)

☆ **Bước 2**: Chọn một điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ thuộc $d \Rightarrow A$ cũng thuộc (P).
$\Rightarrow (P)\colon A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$
Thiết lập phương trình khoảng cách từ M tới (P) theo h. (2)

☆ **Bước 3**: Từ (1) rút C theo A, B (hoặc A, B theo C) rồi thế vào (2).
Giải phương trình đẳng cấp (2) để tìm A, B, C.

(14) Viết phương trình (P) chứa d và tạo với (Q) một góc α.

☆ **Bước 1**: Gọi vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P} = (A; B; C)$, với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.
$\Rightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_d} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0.$ (1)

☆ **Bước 2**: Thiết lập phương trình

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_Q}\right|}. \quad (2)$$

☆ **Bước 3**: Từ (1) và (2), tính C theo A, B rồi đưa về phương trình đẳng cấp A, B, từ đó tìm A, B, C.

(15) Viết phương trình (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(I; R)$ tại A.

☆ **Cách xác định $\vec{n}$**: $\vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{IA}$.

6 Một số công thức tính nhanh

☆ Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$. Hình chiếu của M trên (P) là $\boxed{H(x_M - At; y_M - Bt; z_M - Ct)}$, trong đó $\boxed{t = \dfrac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2}}$.

☆ Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$. Điểm đối xứng của M qua (P) là $\boxed{H(x_M - 2At; y_M - 2Bt; z_M - 2Ct)}$, trong đó $\boxed{t = \dfrac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2}}$.

☆ Mặt phẳng phân giác của hai mặt phẳng $(P)\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q)\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ là

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}}.$$

☆ Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng $(Q)\colon ax + by + cz + d_1 = 0$ và $(R)\colon ax + by + cz + d_2 = 0$ $(d_1 \neq d_2)$ là

$$\boxed{ax + by + cz + \frac{d_1 + d_2}{2} = 0}.$$

BÀI 2. Phương trình đường thẳng trong không gian

1 Vectơ chỉ phương của đường thẳng

☆ Vectơ $\overrightarrow{u}$ khác $\overrightarrow{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

☆ Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ hoặc $d\colon \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$.

☆ Vectơ chỉ phương của các trục tọa độ

Trục tọa độ	Vectơ chỉ phương
Ox	$\overrightarrow{u}_{Ox} = \overrightarrow{i} = (1; 0; 0)$
Oy	$\overrightarrow{u}_{Oy} = \overrightarrow{i} = (0; 1; 0)$
Oz	$\overrightarrow{u}_{Oz} = \overrightarrow{i} = (0; 0; 1)$

2 Phương trình đường thẳng

☆ **Phương trình tham số** của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$ là

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}}.$$

☆ **Phương trình chính tắc** của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$ $(a; b; c \neq 0)$ là

$$\boxed{\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}}.$$

! Một đường thẳng có nhiều phương trình tham số và phương trình chính tắc tùy thuộc vào điểm và vectơ chỉ phương sử dụng để viết phương trình.

3. Vị trí tương đối

3.1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$ và d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$.

Vị trí	Điều kiện
$d // d'$	$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] = \overrightarrow{0} \\ \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MM'}\right] \neq \overrightarrow{0} \end{cases}$
$d \equiv d'$	$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] = \overrightarrow{0} \\ \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MM'}\right] = \overrightarrow{0} \end{cases}$
d cắt d'	$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] \neq \overrightarrow{0} \\ \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases}$
d chéo nhau d'	$\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0$

3.2 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$.

Vị trí	Điều kiện	Vị trí	Điều kiện
$d \subset (P)$	$\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\ M \in (P) \end{cases}$	$d // (P)$	$\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\ M \notin (P) \end{cases}$
d cắt (P)	$\overrightarrow{u} \neq k\overrightarrow{n}$	$d \perp (P)$	$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{n}$

4. Khoảng cách

4.1 Khoảng cách từ điểm tới đường thẳng

Cho đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$. Khi đó, khoảng cách từ M tới đường thẳng d là

$$\boxed{\mathrm{d}(M, d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}}$$

4.2 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho đường thẳng d đi qua điểm M, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$ và đường thẳng d' qua M', có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d' là

$$\boxed{\mathrm{d}(d, d') = \frac{\left|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'}\right|}{|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}']|}}$$

5 Một số dạng toán viết phương trình đường thẳng thường gặp

1. **Viết phương trình d đi qua hai điểm A, B cho trước.**

   ☆ Cách xác định $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

2. **Viết phương trình d đi qua A và song song với đường thẳng d'.**

   ☆ Cách xác định $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_{d'}}$.

3. **Viết phương trình d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P).**

   ☆ Cách xác định $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_{(P)}}$.

4. **Viết phương trình d đi qua A và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2.**

   ☆ Cách xác định $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}]$.

5. **Viết phương trình d đi qua A và song song với hai mặt phẳng (P), (Q).**

   ☆ Cách xác định $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}]$.

6. **Viết phương trình d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).**

   ☆ Cách xác định $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}]$.

   ☆ **Chú ý**: Ta cần tìm thêm một điểm A mà d đi qua, đó là điểm chung của hai mặt phẳng (P), (Q). Để tìm điểm này ta đi giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ bằng cách chọn $z = 0$.

7 **Viết phương trình d đi qua A, vuông góc và cắt đường thẳng d'.**

☆ **Bước 1**: Tham số hóa phương trình của đường thẳng d'.

☆ **Bước 2**: Gọi $H \in d'$, để H là hình chiếu vuông góc của A lên d' thì $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_{d'}}$, khi đó $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AH}$.

☆ **Bước 3**: Viết phương trình d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$.

8 **Viết phương trình d đi qua A và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.**

☆ **Bước 1**: Tham số hóa d_1, d_2 và gọi M, N (theo tham số t_1, t_2) thuộc d_1, d_2.

☆ **Bước 2**: Thiết lập điều kiện để A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ cùng phương. Tìm được t_1, t_2.

☆ **Bước 3**: Thay t_1 vào phương trình của d_1, tìm được M. Ta có d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AM}$.

9 **Viết phương trình d đi qua A vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.**

☆ **Bước 1**: Tham số hóa tọa độ d_2 và gọi M (theo tham số t_2) thuộc d_2.

☆ **Bước 2**: Thiết lập điều kiện $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{u_{d_1}}$ để tìm t_2.

☆ **Bước 3**: Thay t_2 vào d_2 để tìm M. Khi đó $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AM}$.

10 **Viết phương trình d song song với Δ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.**

☆ **Bước 1**: Tham số hóa d_1, d_2 và gọi M, N (theo tham số t_1, t_2) thuộc d_1, d_2.

☆ **Bước 2**: Thiết lập điều kiện $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_\Delta}$ để tìm t_1, t_2.

☆ **Bước 3**: Thay t_1, t_2 vào d_1 và d_2 để tìm M, N. Ta có d đi qua M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{MN}$.

11 **Viết phương trình d nằm trong (P) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.**

☆ **Bước 1**: Tìm giao điểm M, N của d_1, d_2 với (P).

☆ **Bước 2**: d đi qua M, N. Ta có $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{MN}$.

(12) Viết phương trình d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 chéo nhau.

☆ **Bước 1**: Tham số hóa d_1, d_2 và gọi M, N (theo tham số t_1, t_2) thuộc d_1, d_2.

☆ **Bước 2**: Thiết lập điều kiện $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_{d_1}} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_{d_2}} = 0 \end{cases}$ để tìm t_1, t_2.

☆ **Bước 3**: Thay t_1, t_2 vào d_1 và d_2 để tìm M, N. Ta có d đi qua M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{MN}$.

(13) Viết phương trình d là hình chiếu của Δ xuống mặt phẳng (P).

☆ **Cách 1**

◇ **Bước 1**: Tìm giao điểm I của Δ và (P).

◇ **Bước 2**: Lấy điểm M thuộc Δ và tìm hình chiếu vuông góc H của M đến (P).

◇ **Bước 3**: Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{IH}$.

☆ **Cách 2**

◇ **Bước 1**: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với (P).

◇ **Bước 2**: Khi đó đường thẳng d chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

6. Một số công thức tính nhanh

☆ Hình chiếu của $M(x_M; y_M; z_M)$ trên đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ là

$$\boxed{H(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)}$$

với $\boxed{t = \dfrac{a(x_M - x_0) + b(y_M - y_0) + c(z_M - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}}$.

☆ Điểm đối xứng của $M(x_M; y_M; z_M)$ qua đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ là

$$\boxed{M'(2x_0 - x_M + 2at; 2y_0 - y_M + 2bt; 2z_0 - z_M + 2ct)}$$

với $\boxed{t = \dfrac{a(x_M - x_0) + b(y_M - y_0) + c(z_M - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}}$.

☆ Phương trình hình chiếu vuông của đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ lên mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 - at + \left[a\left(B^2 + C^2\right) - A(bB + cC)\right]k \\ y = y_0 - bt + \left[b\left(A^2 + C^2\right) - B(aA + cC)\right]k \\ z = z_0 - ct + \left[c\left(A^2 + B^2\right) - C(aA + bB)\right]k \end{cases}}$$

với $\boxed{t = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa + Bb + Cc}}$.

Bài 3. Công thức tính góc trong không gian

1 Góc giữa hai mặt phẳng

☆ Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(P)}$ và $\overrightarrow{n}_{(Q)}$. Khi đó góc giữa (P) và (Q) được tính theo công thức

$$\boxed{\cos\left((P),(Q)\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_Q}\right|}}$$

2 Góc giữa hai đường thẳng

Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$ và đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$. Khi đó góc giữa hai d và d' được tính theo công thức

$$\boxed{\cos(d, d') = \left|\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u'}\right|}}$$

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$. Khi đó, góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) được tính theo công thức $\boxed{\sin(d,(P)) = |\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})| = \dfrac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{n}|}}$.

BÀI 4. Phương trình mặt cầu

1. Phương trình mặt cầu

☆ Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R là

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2}$$

☆ Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $\boxed{a^2+b^2+c^2-d>0}$. Mặt cầu đó có tâm $\boxed{I(a;b;c)}$ và bán kính $\boxed{R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}}$.

2. Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu

Cho mặt cầu (S_1) có tâm I_1, bán kính R_1 và mặt cầu (S_2) có tâm I_2, bán kính R_2.

Mối quan hệ	Điều kiện
(S_1), (S_2) ngoài nhau	$I_1I_2 > R_1 + R_2$
(S_1), (S_2) trong nhau	$I_1I_2 < \|R_1 - R_2\|$
(S_1), (S_2) tiếp xúc ngoài	$I_1I_2 = R_1 + R_2$
(S_1), (S_2) tiếp xúc trong	$I_1I_2 = \|R_1 - R_2\|$
(S_1), (S_2) cắt nhau theo một đường tròn	$\|R_1 - R_2\| < I_1I_2 < R_1+R_2$

3. Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

Mối quan hệ	Điều kiện
Δ không cắt mặt cầu (S)	$\mathrm{d}(I,\Delta) > R$
Δ tiếp xúc với mặt cầu (S)	$\mathrm{d}(I,\Delta) = R$
Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B	$\mathrm{d}(I,\Delta) < R$

4. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R và mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$.
Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P), ta có $IH=\mathrm{d}(I,(P))$.

Mối quan hệ	Điều kiện
Mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S)	$\mathrm{d}(I,(P))>R$
Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)	$\mathrm{d}(I,(P))=R$
Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S)	$\mathrm{d}(I,(P))<R$

! Nếu mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn $C(H,r)$ thì đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$.

5. Một số dạng toán viết phương trình mặt cầu thường gặp

1. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB.

☆ **Bước 1**: Tìm tọa độ tâm I là trung điểm của AB.

☆ **Bước 2**: Tính bán kính $R=IA$ (hoặc $=IB$).

☆ **Bước 3**: Viết phương trình mặt cầu (S).

2. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ tiếp xúc với (P).

☆ **Cách xác định R**: $R=\mathrm{d}(I;(P))$.

3. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn $(J;r)$.

☆ **Cách xác định R**: $R^2=IJ^2+r^2$.

☆ **Chú ý**: $IJ=\mathrm{d}(I,(P))$.

4. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với đường thẳng d tại tiếp điểm H.

☆ **Cách xác định R**: $R=IH=\mathrm{d}(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$ với M là một điểm bất kì thuộc d.

5 **Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d theo dây cung AB.**

☆ **Cách xác định R**: $R^2 = \mathrm{d}^2(I, d) + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$.

6 **Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D cho trước.**

☆ **Cách 1**

◇ **Bước 1**: Gọi I là tâm của mặt cầu.

◇ **Bước 2**: Thiết lập hệ phương trình $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2. \end{cases}$

◇ **Bước 3**: Giải hệ phương trình tìm được tâm I và bán kính $R = IA$.

◇ **Bước 4**: Viết phương trình mặt cầu (S).

☆ **Cách 2**

◇ **Bước 1**: Gọi phương trình mặt cầu (S) là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

◇ **Bước 2**: Thay tọa độ A, B, C, D vào phương trình của (S), từ đó lập hệ phương trình.

◇ **Bước 3**: Giải hệ phương trình tìm được a, b, c, d.

7 **Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm $I \in (P)$.**

☆ **Bước 1**: Gọi tâm $I(a; b; c)$.

☆ **Bước 2**: Thiết lập hệ phương trình $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ I \in (P). \end{cases}$

☆ **Bước 3**: Giải hệ phương trình tìm được I và bán kính $R = IA$.

☆ **Bước 4**: Viết phương trình mặt cầu (S).

8 **Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (S') cho trước.**

☆ **Bước 1**: Tìm tọa độ tâm I' và bán kính R' của mặt cầu (S').

☆ **Bước 2**: Tìm bán kính R của S.

◈ Nếu tiếp xúc trong thì $II' = |R - R'|$.

◈ Nếu tiếp xúc ngoài thì $II' = R + R'$.

☆ **Bước 3**: Viết phương trình mặt cầu (S).

9 **Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B thỏa mãn $\triangle IAB$ vuông hoặc đều.**

☆ **Bước 1**: Tìm mối quan hệ giữa bán kính với AB.

◈ Nếu $\triangle IAB$ vuông thì sẽ vuông cân tại I.
Do đó, cạnh huyền $AB = \sqrt{2}IA \Leftrightarrow IA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow R = IA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$.

◈ Nếu $\triangle IAB$ đều thì $R = AB$.

☆ **Bước 2**: Áp dụng công thức $R^2 = \mathrm{d}^2(I, d) + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$ để tìm R.

☆ **Bước 3**: Viết phương trình mặt cầu (S).

Bài 5. Một số bài toán cực trị trong hình không gian

1 **Dạng 1**: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B. Tìm M thuộc mặt phẳng (P) để $MA + MB$ nhỏ nhất.

☆ Nếu A, B **trái phía** với (P).

◈ Để $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$, A, B thẳng hàng. Khi đó M là giao điểm của AB với mặt phẳng (P).

☆ Nếu A, B **cùng phía** với (P).

◈ **Bước 1**: Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua (P).

◈ **Bước 2**: Tìm tọa độ điểm $M = A'B \cap (P)$.

2 **Dạng 2**: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B. Tìm M thuộc mặt phẳng (P) để $|MA - MB|$ lớn nhất.

☆ Nếu A, B **cùng phía** với (P) thì $|MA - MB|$ lớn nhất khi M, A, B thẳng hàng $\Leftrightarrow M = AB \cap (P)$.

☆ Nếu A, B **trái phía** so với (P).

◇ **Bước 1**: Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua (P).

◇ **Bước 2**: Tìm tọa độ điểm $M = A'B \cap (P)$.

3. **Dạng 3**: Cho $M(x_0; y_0; z_0)$ sao cho $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \neq 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt ba trục tọa độ tại ba điểm A, B, C sao cho V_{OABC} đạt giá trị nhỏ nhất.

☆ **Công thức**: $(P)\colon \dfrac{x}{x_0} + \dfrac{y}{y_0} + \dfrac{z}{z_0} = 3$.

4. **Dạng 4**: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ $M \notin d$ đến (P) lớn nhất.

☆ **Tính chất**: $MH \leq ME$ với E và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên d và (P).

☆ **Công thức**: Mặt phẳng (P) đi qua A thuộc d và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{ME}$.

5. **Dạng 5**: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách M một khoảng lớn nhất.

☆ **Tính chất**: $MH \leq MA$, với H là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

☆ **Công thức**: (P) đi qua A và có $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AM}$.

6. **Dạng 6**: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho (P) tạo với đường thẳng Δ (không song song với d) một góc lớn nhất.

☆ **Công thức**: (P) qua $A \in d$ và có $\overrightarrow{n_P} = \left[[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_\Delta}], \overrightarrow{u_d}\right]$.

7. **Dạng 7**: Cho $\Delta // (P)$. Viết phương trình đường thẳng d thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d // \Delta$ và cách Δ một khoảng nhỏ nhất.

☆ **Cách làm**: Lấy điểm $A \in \Delta$ và hạ hình chiếu vuông góc của A là A' lên (P). Khi đó, d đi qua A' và có $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{u_\Delta}$.

8. **Dạng 8**: Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và nằm trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ M tới đường thẳng d là lớn nhất (AM không vuông góc với (P)).

☆ **Tính chất**: khoảng cách luôn $\leq MA$.

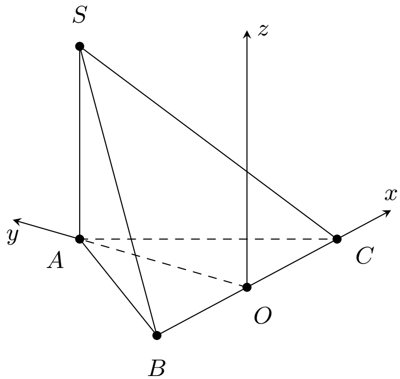
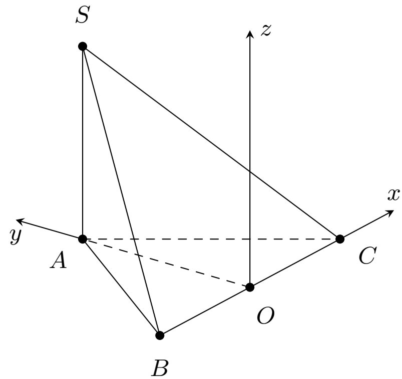
☆ **Công thức**: d đi qua M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AM}\right]$.

9 **Dạng 9**: Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và nằm trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ M tới đường thẳng d là nhỏ nhất (AM không vuông góc với (P)).

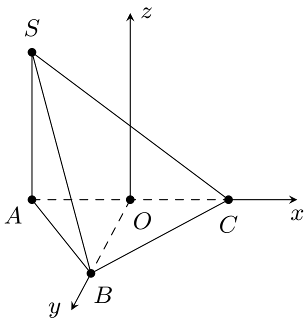
☆ **Công thức**: d đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AM}\right], \overrightarrow{n_P}\right]$.

Bài 6. Phương pháp tọa độ hóa hình không gian

1 Hình chóp

<table>
<tr><th colspan="2">Hình chóp có cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy</th></tr>
<tr><td>Đáy là tam giác đều</td><td>Đáy là tam giác cân tại A</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>☆ Gọi O là trung điểm của BC. Chọn hệ trục như hình vẽ.
☆ Tọa độ điểm
$O(0;0;0)$ | $A\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};0\right)$
$B\left(-\dfrac{AB}{2};0;0\right)$ | $C\left(\dfrac{AB}{2};0;0\right)$
$S\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};SA\right)$</td><td>☆ Gọi O là trung điểm của BC. Chọn hệ trục như hình vẽ.
☆ Tọa độ điểm
$O(0;0;0)$ | $A\left(0;OA;0\right)$
$B\left(-OB;0;0\right)$ | $C\left(OC;0;0\right)$
$S\left(0;OA;SA\right)$</td></tr>
</table>

Đáy là tam giác cân tại B



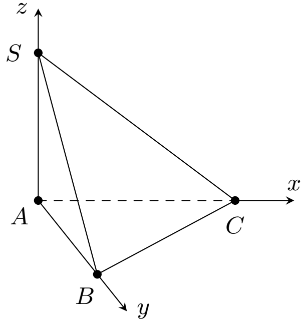
☆ Gọi O là trung điểm của AC. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$O(0;0;0)$	$A(-OA;0;0)$
$B(0;OB;0)$	$C(OC;0;0)$

$S(-OA;0;SA)$

Đáy là tam giác vuông tại A

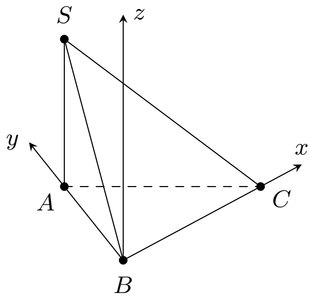


☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$A(0;0;0)$	$B(0;AB;0)$
$C(AC;0;0)$	$S(0;0;SA)$

Đáy là tam giác vuông tại B

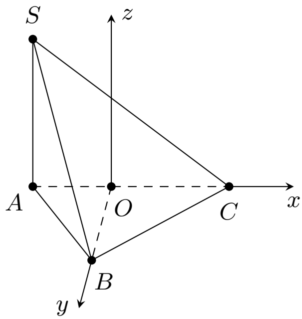


☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$B(0;0;0)$	$A(0;AB;0)$
$C(BC;0;0)$	$S(0;AB;SA)$

Đáy là tam giác thường



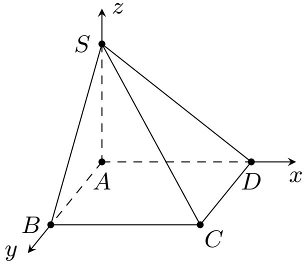
☆ Dựng đường cao BO của $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$O(0;0;0)$	$A(-OA;0;0)$
$B(0;OB;0)$	$C(OC;0;0)$

$S(-OA;0;SA)$

Đáy là hình vuông, hình chữ nhật



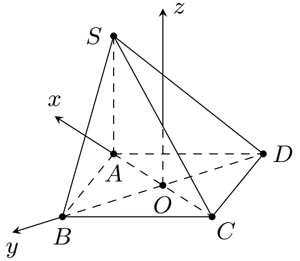
☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$A(0;0;0)$	$B\,(0;AB;0)$
$C\,(AD;AB;0)$	$D(AD;0;0)$

$S\,(0;0;SA)$

Đáy là hình thoi

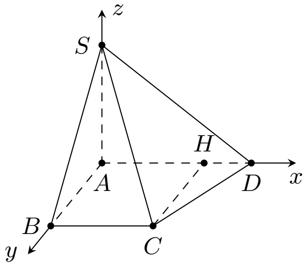


☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$O(0;0;0)$	$A(OA;0;0)$
$B\,(0;OB;0)$	$C\,(-OC;0;0)$
$D(0;-OD;0)$	$S\,(OA;0;SA)$

Đáy là hình thang vuông



☆ Dựng $CH \perp AD$. Chọn hệ trục như hình vẽ.

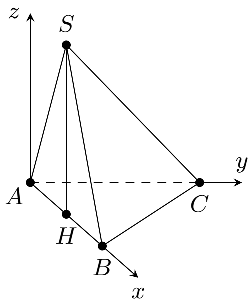
☆ Tọa độ điểm

$A\,(0;0;0)$	$B\,(0;AB;0)$
$C\,(AH;AB;0)$	$D\,(AD;0;0)$

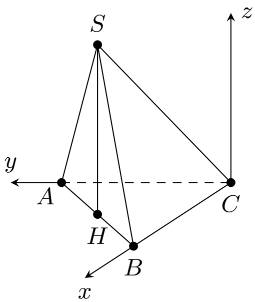
$S\,(0;0;SA)$

Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác vuông tại A, mặt bên là tam giác cân tại S



Đáy là tam giác vuông tại C, mặt bên là tam giác cân tại S



☆ Gọi H là trung điểm của AB. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

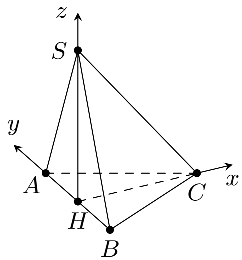
$$\begin{array}{c|c} A(0;0;0) & B\left(AB;0;0\right) \\ C\left(0;AC;0\right) & S\left(\dfrac{AB}{2};0;SH\right) \end{array}$$

☆ Gọi H là trung điểm của AB. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{c|c} A(0;AC;0) & B\left(BC;0;0\right) \\ C\left(0;0;0\right) & S\left(\dfrac{BC}{2};\dfrac{AC}{2};SH\right) \end{array}$$

Đáy là tam giác cân tại C, mặt bên là tam giác cân tại S



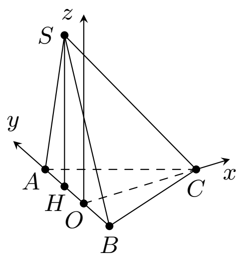
☆ Gọi H là trung điểm của AB. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{c|c} H(0;0;0) & A\left(0;\dfrac{AB}{2};0\right) \\ B\left(0;-\dfrac{AB}{2};0\right) & C\left(CH;0;0\right) \end{array}$$

$$S\left(0;0;SH\right)$$

Đáy là tam giác thường, mặt bên là tam giác thường



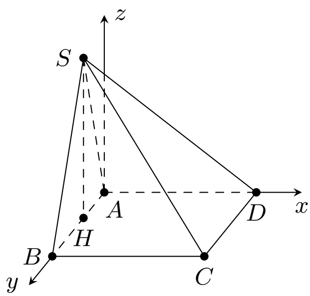
☆ Dựng đường cao CO của $\triangle ABC$ và đường cao SH của $\triangle SAB$. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{c|c} O(0;0;0) & A(0;OA;0) \\ B(0;-OB;0) & C(OC;0;0) \end{array}$$

$$S(0;OH;SH)$$

Đáy là hình chữ nhật, mặt bên là tam giác thường

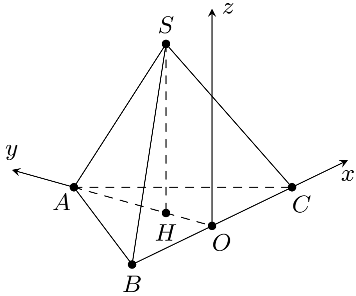
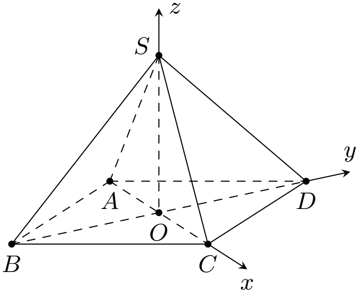


☆ Dựng đường cao đường cao SH trong $\triangle SAB$. Chọn hệ trục như hình vẽ.

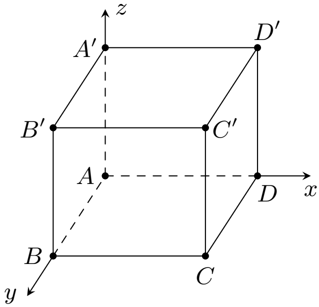
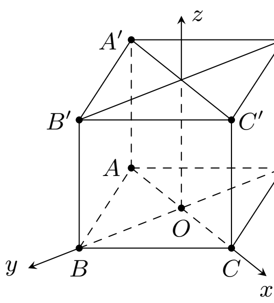
☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{c|c} A(0;0;0) & B(0;AB;0) \\ C(AD;AB;0) & D(AD;0;0) \end{array}$$

$$S(0;AH;SH)$$

Hình chóp đều	
Hình chóp tam giác đều 	☆ Gọi O là trung điểm của BC. Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm $O(0;0;0)$ | $A\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};0\right)$ $B\left(-\dfrac{AB}{2};0;0\right)$ | $C\left(\dfrac{AB}{2};0;0\right)$ $S\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{6};SH\right)$
Hình chóp tứ giác đều 	☆ Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm $O(0;0;0)$ | $A\left(-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right)$ $B\left(0;-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2};0\right)$ | $C\left(\dfrac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right)$ $D\left(0;\dfrac{AB\sqrt{2}}{2};0\right)$ | $S(0;0;SO)$

2 Hình lăng trụ

Lăng trụ đứng	
Hình hộp chữ nhật	Lăng trụ đứng có đáy là hình thoi
	

☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$A(0;0;0)$	$B(0;AB;0)$
$C(AD;AB;0)$	$D(AD;0;0)$
$A'(0;0;AA')$	$B'(0;AB;AA')$
$C'(AD;AB;AA')$	$D'(AD;0;AA')$

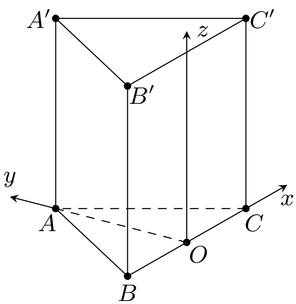
☆ Gọi O là tâm hình thoi đáy $ABCD$. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$O(0;0;0)$	$A(-OA;0;0)$
$B(0;OB;0)$	$C(OC;0;0)$
$D(0;-OD;0)$	$A'(-OA;0;AA')$
$B'(0;OB;AA')$	$C'(OC;0;CC')$

$D'(0;-OD;DD')$

Lăng trụ tam giác đều



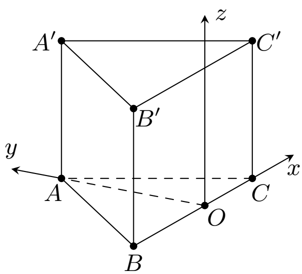
☆ Gọi O là trung điểm của BC. Chọn hệ trục như hình vẽ

☆ Tọa độ điểm

$O(0;0;0)$	$A\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};0\right)$
$B\left(-\dfrac{AB}{2};0;0\right)$	$C\left(\dfrac{AB}{2};0;0\right)$
$A'\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};AA'\right)$	$B'\left(-\dfrac{AB}{2};0;AA'\right)$

$C'\left(\dfrac{AB}{2};0;AA'\right)$

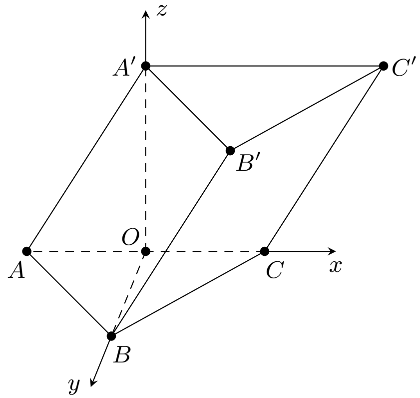
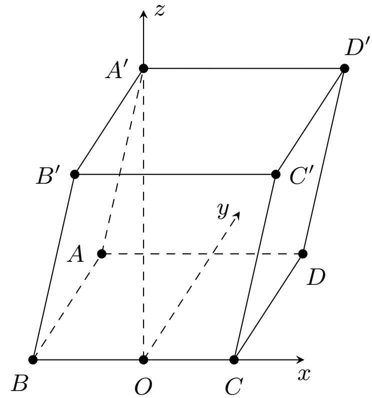
Lăng trụ đứng có đáy là tam giác thường



☆ Dựng đường cao AO trong $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$A(0;OA;0)$	$B(-OB;0;0)$
$C(OC;0;0)$	$A'(0;OA;AA')$
$B'(-OB;0;AA')$	$C'(OC;0;AA')$

<table>
<tr><th colspan="2">Lăng trụ xiên</th></tr>
<tr><td>Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh của tam giác đáy

</td>
<td>Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông (hình chữ nhật), hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó

</td></tr>
<tr><td>☆ Chọn hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A, B, C, A'.
☆ Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$</td>
<td>☆ Chọn hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A, B, C, D, A'.
☆ Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$</td></tr>
</table>