

CẤU TRÚC

PHẦN	TT	NỘI DUNG	CÁC DẠNG TOÁN	Trang
<b>ĐẠI SỐ</b>	1	<b>Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Góc lượng giác</li> <li>Giá trị lượng giác của góc lượng giác</li> <li>Áp dụng tính chất của GTLG</li> <li>GTGL của các góc có liên quan đặc biệt</li> <li>Tính giá trị biểu thức sử dụng các phép biến đổi lượng giác.</li> <li>TXĐ; tính chẵn lẻ, tính đồng biến nghịch biến của hàm số. GTLN, GTNN của hàm số.</li> <li>Giải phương trình lượng giác.</li> </ol>	1-12
	2	<b>Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Xác định số hạng dãy số</li> <li>Xét tính tăng giảm, bị chặn của dãy số</li> <li>Xác định số hạng, công sai của CSC</li> <li>Tính tổng n số hạng đầu tiên của CSC</li> <li>Xác định số hạng, công bội của CSN</li> <li>Tính tổng n số hạng đầu tiên của CSN</li> </ol>	12-17
	3	<b>Giới hạn. Hàm số liên tục</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Tính giới hạn của dãy số và ứng dụng</li> <li>Tính giới hạn của hàm số và ứng dụng</li> <li>Xét tính liên tục tại một điểm, trên một khoảng, đoạn.</li> </ol>	18-24
<b>HÌNH HỌC</b>	4	<b>Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.</li> <li>Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.</li> <li>Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui.</li> <li>Chứng minh hai đường thẳng song song.</li> <li>Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.</li> <li>Chứng minh hai mặt phẳng song song</li> </ol>	25-33

# PHẦN I: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

## Chương 1: Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác.

1. Góc lượng giác. Giá trị lượng giác của góc lượng giác
2. Hàm số lượng giác
  - Tập xác định của hàm số.
  - Tính chất tuần hoàn, sự biến thiên, tính chẵn lẻ của hàm số.
  - GTNN, GTLN của hàm số.
3. Phương trình lượng giác
  - Phương trình lượng giác cơ bản .

## Chương 2: Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân

1. Dãy số:
  - Dãy số tăng, dãy số giảm. Dãy số bị chặn.
  - Tìm số hạng tổng quát của dãy số.
2. Cấp số cộng, cấp số nhân:
  - Định nghĩa. Tính chất.
  - Số hạng tổng quát.
  - Tổng n số hạng đầu tiên của CSC, CSN.

## Chương 3: Giới hạn

1. Giới hạn của dãy số.
2. Giới hạn của hàm số.
3. Hàm số liên tục.

## CHƯƠNG 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### A. TRẮC NGHIỆM

#### Bài 1. Góc lượng giác – GTLG của góc lượng giác

**Câu 1:** Góc có số đo  $108^\circ$  đổi ra radian là

- A.  $\frac{3\pi}{5}$ .                      B.  $\frac{\pi}{10}$ .                      C.  $\frac{3\pi}{2}$ .                      D.  $\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 2:** Biết một số đo của góc  $(Ox, Oy) = \frac{3\pi}{2} + 2001\pi$ . Giá trị tổng quát của góc  $(Ox, Oy)$  là

- A.  $(Ox, Oy) = \frac{3\pi}{2} + k\pi$ .                      B.  $(Ox, Oy) = \pi + k2\pi$ .  
C.  $(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .                      D.  $(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**Câu 3:** Góc có số đo  $\frac{2\pi}{5}$  đổi sang độ là

- A.  $240^\circ$ .                      B.  $135^\circ$ .                      C.  $72^\circ$ .                      D.  $270^\circ$ .

**Câu 4:** Cho  $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$ . Với  $k$  bằng bao nhiêu thì  $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$ ?

- A.  $k \in \emptyset$ .                      B.  $k = 3$ .                      C.  $k = -5$ .                      D.  $k = 5$ .

**Câu 5:** Giá trị  $k$  để góc  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  thỏa mãn  $10\pi < \alpha < 11\pi$  là

- A.  $k = 4$ .                      B.  $k = 6$ .                      C.  $k = 7$ .                      D.  $k = 5$ .

**Câu 6:** Xét góc lượng giác  $(OA; OM) = \alpha$ , trong đó  $M$  là điểm không nằm trên các trục tọa độ  $Ox$  và  $Oy$ . Khi đó  $M$  thuộc góc phần tư nào để  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  cùng dấu

- A. I và (II).                      B. I và (III).                      C. I và (IV).                      D. (II) và (III).

- Câu 7:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $\sin \alpha < 0$ .      **B.**  $\cos \alpha > 0$ .      **C.**  $\tan \alpha < 0$ .      **D.**  $\cot \alpha > 0$ .
- Câu 8:** Cho  $a = \frac{\pi}{3} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Để  $a \in (19; 27)$  thì giá trị của  $k$  là  
**A.**  $k = 2, k = 3$ .      **B.**  $k = 3, k = 4$ .      **C.**  $k = 4, k = 5$ .      **D.**  $k = 5, k = 6$ .
- Câu 9:** Cho góc lượng giác  $(OA, OB)$  có số đo bằng  $\frac{\pi}{5}$ . Hỏi trong các số sau, số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc lượng giác  $(OA, OB)$ ?  
**A.**  $\frac{6\pi}{5}$ .      **B.**  $-\frac{11\pi}{5}$ .      **C.**  $\frac{9\pi}{5}$ .      **D.**  $\frac{31\pi}{5}$ .
- Câu 10:** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là  
**A.**  $30^\circ$ .      **B.**  $40^\circ$ .      **C.**  $50^\circ$ .      **D.**  $60^\circ$ .
- Câu 11:** Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng 6,5 cm (lấy  $\pi = 3,1416$ ).  
**A.** 22054 cm.      **B.** 22063 cm.      **C.** 22054 mm.      **D.** 22044 cm.
- Câu 12:** Trong mặt phẳng định hướng cho ba tia  $Ou, Ov, Ox$ . Xét các hệ thức sau:  
(I).  $sđ(Ou, Ov) = sđ(Ou, Ox) + sđ(Ox, Ov) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(II).  $sđ(Ou, Ov) = sđ(Ox, Ov) + sđ(Ox, Ou) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(III).  $sđ(Ou, Ov) = sđ(Ov, Ox) + sđ(Ox, Ou) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
Hệ thức nào là hệ thức Sa-lơ về số đo các góc:  
**A.** Chỉ (I).      **B.** Chỉ (II).      **C.** Chỉ (III).      **D.** Chỉ (I) và (III).
- Câu 13:** Nếu góc lượng giác có  $sđ(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2}$  thì hai tia  $Ox$  và  $Oz$   
**A.** Trùng nhau.      **B.** Vuông góc.  
**C.** Tạo với nhau một góc bằng  $\frac{3\pi}{4}$ .      **D.** Đối nhau.
- Câu 14:** Có bao nhiêu điểm  $M$  trên đường tròn định hướng gốc  $A$  thỏa mãn  $sđ \widehat{AM} = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$   
**A.** 6.      **B.** 4.      **C.** 3.      **D.** 12.
- Câu 15:** Xét góc lượng giác  $\frac{\pi}{4}$ , trong đó  $M$  là điểm biểu diễn của góc lượng giác. Khi đó  $M$  thuộc góc phần tư nào?  
**A.** I.      **B.** II.      **C.** III.      **D.** IV.
- Câu 16:** Giá trị  $\cot \frac{89\pi}{6}$  là  
**A.**  $\sqrt{3}$ .      **B.**  $-\sqrt{3}$ .      **C.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .      **D.**  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .
- Câu 17:** Cho  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Kết quả đúng là  
**A.**  $\sin a > 0, \cos a > 0$ .      **B.**  $\sin a < 0, \cos a < 0$ .  
**C.**  $\sin a > 0, \cos a < 0$ .      **D.**  $\sin a < 0, \cos a > 0$ .
- Câu 18:** Cho  $2\pi < a < \frac{5\pi}{2}$ . Kết quả đúng là

A.  $\tan a > 0, \cot a > 0.$

B.  $\tan a < 0, \cot a < 0.$

C.  $\tan a > 0, \cot a < 0.$

D.  $\tan a < 0, \cot a > 0.$

**Câu 19:** Chọn đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau

A.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$

B.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$

C.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x.$

D.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x.$

**Câu 20:** Đơn giản biểu thức  $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ , ta có:

A.  $A = 2 \sin a.$

B.  $A = 2 \cos a.$

C.  $A = \sin a - \cos a.$

D.  $A = 0.$

**Câu 21:** Trong các giá trị sau,  $\sin \alpha$  có thể nhận giá trị nào?

A.  $-0,7.$

B.  $\frac{4}{3}.$

C.  $-\sqrt{2}.$

D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}.$

**Câu 22:** Trong các công thức sau, công thức nào sai?

A.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

B.  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

C.  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

D.  $\tan \alpha + \cot \alpha = 1 \left( \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$

**Câu 23:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$

A.  $\cot \alpha = 2.$

B.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}.$

C.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}.$

D.  $\cot \alpha = \sqrt{2}.$

**Câu 24:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  là:

A.  $\frac{4}{5}.$

B.  $-\frac{4}{5}.$

C.  $\pm \frac{4}{5}.$

D.  $\frac{16}{25}.$

**Câu 25:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Giá trị của  $A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$  là:

A.  $5.$

B.  $\frac{5}{3}.$

C.  $7.$

D.  $\frac{7}{3}.$

**Câu 26:** Các cặp đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

A.  $\sin \alpha = 1$  và  $\cos \alpha = 1.$

B.  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  và  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

C.  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  và  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}.$

D.  $\sin \alpha = \sqrt{3}$  và  $\cos \alpha = 0.$

**Câu 27:** Cho tam giác ABC. Hãy tìm mệnh đề **sai**

A.  $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}.$

B.  $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}.$

C.  $\sin(A+B) = \sin C.$

D.  $\cos(A+B) = \cos C.$

**Câu 28:** Đơn giản biểu thức  $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$ , ta có

A.  $A = \cos a + \sin a.$

B.  $A = 2 \sin a.$

C.  $A = \sin a - \cos a.$

D.  $A = 0.$

**Câu 29:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  lần lượt là

A.  $-\frac{5}{13}; \frac{2}{3}$ .      B.  $\frac{2}{3}; -\frac{5}{12}$ .      C.  $-\frac{5}{13}; \frac{5}{12}$ .      D.  $\frac{5}{13}; -\frac{5}{12}$ .

**Câu 30:** Cho  $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$  với  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Khi đó

A.  $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$ .      B.  $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ .  
 C.  $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ .      D.  $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$ .

### Bài 2. Các phép biến đổi lượng giác

**Câu 1:** Trong các công thức sau, công thức nào sai?

A.  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .      B.  $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$ .  
 C.  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ .      D.  $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ .

**Câu 2:** Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

A.  $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ .      B.  $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ .  
 C.  $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$ .      D.  $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$ .

**Câu 3:** Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

A.  $\tan(a-b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ .      B.  $\tan(a-b) = \tan a - \tan b$ .  
 C.  $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ .      D.  $\tan(a+b) = \tan a + \tan b$ .

**Câu 4:** Trong các công thức sau, công thức nào sai?

A.  $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ .      B.  $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ .  
 C.  $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$ .      D.  $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) - \cos(a+b)]$ .

**Câu 5:** Trong các công thức sau, công thức nào sai?

A.  $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ .      B.  $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ .  
 C.  $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ .      D.  $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ .

**Câu 6:** Rút gọn biểu thức:  $\sin(a-17^\circ) \cdot \cos(a+13^\circ) - \sin(a+13^\circ) \cdot \cos(a-17^\circ)$ , ta được:

A.  $\sin 2a$ .      B.  $\cos 2a$ .      C.  $-\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 7:** Rút gọn biểu thức:  $\cos 54^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cdot \cos 86^\circ$ , ta được:

A.  $\cos 50^\circ$ .      B.  $\cos 58^\circ$ .      C.  $\sin 50^\circ$ .      D.  $\sin 58^\circ$ .

**Câu 8:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$  với  $\tan a = \frac{1}{7}$  và  $\tan b = \frac{3}{4}$ . Tính  $a+b$ .

A.  $\frac{\pi}{3}$ .      B.  $\frac{\pi}{4}$ .      C.  $\frac{\pi}{6}$ .      D.  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Câu 9:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức SAI.

A.  $\sin \frac{A+B+3C}{2} = \cos C$ .      B.  $\cos(A+B-C) = -\cos 2C$ .  
 C.  $\tan \frac{A+B-2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$ .      D.  $\cot \frac{A+B+2C}{2} = \tan \frac{C}{2}$ .

**Câu 10:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức **SAI**.

**A.**  $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ .

**B.**  $\cos(A+B+2C) = -\cos C$ .

**C.**  $\sin(A+C) = -\sin B$ .

**D.**  $\cos(A+B) = -\cos C$ .

**Câu 11:** Cho  $\sin a = \frac{3}{5}$ ;  $\cos a < 0$ ;  $\cos b = \frac{3}{4}$ ;  $\sin b > 0$ . Giá trị  $\sin(a-b)$  bằng:

**A.**  $-\frac{1}{5}\left(\sqrt{7} + \frac{9}{4}\right)$ .

**B.**  $-\frac{1}{5}\left(\sqrt{7} - \frac{9}{4}\right)$ .

**C.**  $\frac{1}{5}\left(\sqrt{7} + \frac{9}{4}\right)$ .

**D.**  $\frac{1}{5}\left(\sqrt{7} - \frac{9}{4}\right)$ .

### Bài 3. Hàm số lượng giác và đồ thị

**Câu 1:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm chẵn?

**A.**  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

**B.**  $y = |\sin x|$

**C.**  $y = 1 - \sin x$

**D.**  $y = \sin x + \cos x$

**Câu 2:** Chọn phát biểu **đúng**:

**A.** Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \cot x$  đều là hàm số chẵn.

**B.** Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \cot x$  đều là hàm số lẻ.

**C.** Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \tan x$  đều là hàm số chẵn.

**D.** Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \tan x$  đều là hàm số lẻ.

**Câu 3:** Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

**A.** Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số lẻ.

**B.** Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ.

**C.** Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ.

**D.** Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.

**Câu 4:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

**A.**  $y = -2\cos x$ .

**B.**  $y = -2\sin x$ .

**C.**  $y = 2\sin(-x)$ .

**D.**  $y = \sin x - \cos x$ .

**Câu 5:** Xét tính chẵn lẻ của hàm số  $y = \frac{\sin 2x}{2\cos x - 3}$  thì  $y = f(x)$  là

**A.** Hàm số chẵn.

**B.** Hàm số lẻ.

**C.** Không chẵn không lẻ.

**D.** Vừa chẵn vừa lẻ.

**Câu 6:** Cho các hàm số:  $y = \sin 2x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ . Có bao nhiêu hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \pi$ .

**A.** 1

**B.** 2

**C.** 3

**D.** 4

**Câu 7:** Trong các hàm số  $y = \tan x$ ;  $y = \sin 2x$ ;  $y = \sin x$ ;  $y = \cot x$ , có bao nhiêu hàm số thỏa mãn tính chất  $f(x+k\pi) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**A.** 3.

**B.** 2.

**C.** 1.

**D.** 4.

**Câu 8:** Trong bốn hàm số: (1)  $y = \cos 2x$ , (2)  $y = \sin x$ ; (3)  $y = \tan 2x$ ; (4)  $y = \cot 4x$  có mấy hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ ?

**A.** 1.

**B.** 0.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Câu 9:** Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên mỗi khoảng nào dưới đây.

**A.**  $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 10:** Khẳng định nào sau đây sai?

**A.**  $y = \tan x$  nghịch biến trong  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**B.**  $y = \cos x$  đồng biến trong  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

C.  $y = \sin x$  đồng biến trong  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .      D.  $y = \cot x$  nghịch biến trong  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 11:** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Hàm số  $y = \cot x$  đồng biến trên khoảng  $(0; \pi)$ .

B. Hàm số  $y = \sin x$  nghịch biến trên khoảng  $(\pi; 2\pi)$ .

C. Hàm số  $y = \cos x$  nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

D. Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ .

**Câu 12:** Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Hàm số  $y = \tan x$  tuần hoàn với chu kì  $2\pi$ .

B. Hàm số  $y = \cos x$  tuần hoàn với chu kì  $\pi$ .

C. Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

D. Hàm số  $y = \cot x$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 13:** Với  $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ , mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Cả hai hàm số  $y = -\sin 2x$  và  $y = -1 + \cos 2x$  đều nghịch biến.

B. Cả hai hàm số  $y = -\sin 2x$  và  $y = -1 + \cos 2x$  đều đồng biến.

C. Hàm số  $y = -\sin 2x$  nghịch biến, hàm số  $y = -1 + \cos 2x$  đồng biến.

D. Hàm số  $y = -\sin 2x$  đồng biến, hàm số  $y = -1 + \cos 2x$  nghịch biến.

**Câu 14:** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

A.  $y = \sin x$ .

B.  $y = \cos x$ .

C.  $y = \tan x$ .

D.  $y = -\cot x$ .

**Câu 15:** Hàm số nào đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ :

A.  $y = \cos x$ .

B.  $y = \cot 2x$ .

C.  $y = \sin x$ .

D.  $y = \cos 2x$ .

**Câu 16:** Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x) = \cos 2x$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  là:

A.

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$y$	$-1$	$1$	$-1$	$1$	$-1$

B.

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$y$	$1$	$-1$	$1$	$-1$	$1$

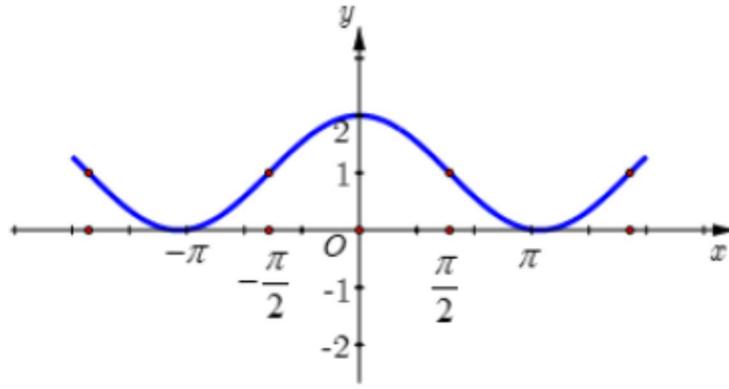
C.

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$y$	$-2$	$2$	$-2$	$2$	$-2$

D.

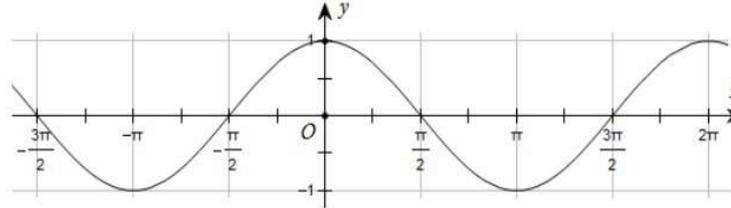
$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$y$	$2$	$2$	$2$	$-2$	$2$

**Câu 17:** Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.  $y = \cos x + 1$ .      B.  $y = 2 - \sin x$ .      C.  $y = 2 \cos x$ .      D.  $y = \cos^2 x + 1$ .

**Câu 18:** Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?



- A.  $y = 1 + \sin 2x$ .      B.  $y = \cos x$ .      C.  $y = -\sin x$ .      D.  $y = -\cos x$ .

**Câu 19:** Tập xác định của hàm số  $y = 2 \sin x$  là

- A.  $[0; 2]$ .      B.  $[-1; 1]$ .      C.  $\mathbb{R}$ .      D.  $[-2; 2]$ .

**Câu 20:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \cot x + \sin 5x + \cos x$

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$       B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$       D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

**Câu 21:** Chọn khẳng định sai?

- A. Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 B. Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  là  $\mathbb{R}$ .  
 C. Tập xác định của hàm số  $y = \cos x$  là  $\mathbb{R}$ .  
 D. Tập xác định của hàm số  $y = \tan x$  là  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 22:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là:

- A.  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 C.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 23:** Tập xác định của hàm số  $y = -\tan x$  là:

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
 C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 24:** Tập  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  là tập xác định của hàm số nào sau đây?

- A.  $y = \cot x$ .      B.  $y = \cot 2x$ .      C.  $y = \tan x$ .      D.  $y = \tan 2x$

**Câu 25:** Hàm số  $y = \frac{2 \sin x + 1}{1 - \cos x}$  xác định khi

- A.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$       B.  $x \neq k\pi$       C.  $x \neq k2\pi$       D.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

**Câu 26:** Tìm điều kiện xác định của hàm số  $y = \frac{1 - 3 \cos x}{\sin x}$

- A.  $x \neq k2\pi$ .      B.  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ .      C.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .      D.  $x \neq k\pi$ .

**Câu 27:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 2}$  là

- A.  $(-2; +\infty)$       B.  $(2; +\infty)$       C.  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .      D.  $\mathbb{R}$ .

**Câu 28:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$  là:

- A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$       B.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$       C.  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$ .      D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$

**Câu 29:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2 \sin x + 1$  là

- A.  $-1$ .      B.  $1$ .      C.  $-\frac{1}{2}$ .      D.  $3$ .

**Câu 30:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin 2x$  là:

- A.  $[-2; 2]$ .      B.  $[0; 2]$ .      C.  $[-1; 1]$ .      D.  $[0; 1]$ .

**Câu 31:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 - \sin x$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $M = 1; m = -1$ .      B.  $M = 2; m = 1$ .      C.  $M = 3; m = 0$ .      D.  $M = 3; m = 1$ .

**Câu 32:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 \sin 2x - 5$  lần lượt là:

- A.  $3; -5$ .      B.  $-2; -8$ .      C.  $2; -5$ .      D.  $8; 2$ .

**Câu 33:** Gọi  $m$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3 + 2 \sin 2x$  trên đoạn  $\left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$ . Giá trị  $m$  thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

- A.  $3 < m < 6$ .      B.  $m^2 = 16$ .      C.  $4 < m < 5$ .      D.  $m = 3 + \sqrt{3}$ .

**Câu 34:** Khi  $x$  thay đổi trong khoảng  $\left( \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right)$  thì  $y = \sin x$  lấy mọi giá trị thuộc

- A.  $\left[ -1; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .      B.  $\left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right]$       C.  $[-1; 1]$ .      D.  $\left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right]$ .

#### Bài 4. Phương trình lượng giác cơ bản

**Câu 1:** Phương trình  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  có nghiệm là:

- A.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ .      B.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .      C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$ .

**Câu 2:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin 30^\circ$  là

- A.  $S = \{30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .  
 B.  $S = \{\pm 30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

C.  $S = \{\pm 30^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

D.  $S = \{30^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = -1$  là:

A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 4:** Phương trình lượng giác:  $2\cos x + \sqrt{2} = 0$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .

D.  $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .

**Câu 5:** Phương trình  $\tan x = \sqrt{3}$  có tập nghiệm là

A.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $\emptyset$ .

C.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 6:** Nghiệm của phương trình  $\tan 3x = \tan x$  là

A.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 7:** Giải phương trình:  $\tan^2 x = 3$  có nghiệm là:

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

D. vô nghiệm.

**Câu 8:** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3} + 3\tan x = 0$  là:

A.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ .

B.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**Câu 9:** Giải phương trình  $\sqrt{3}\tan 2x - 3 = 0$ .

A.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

## B. TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho biết một GTLG, tính các GTLG còn lại, với:

a)  $\cos a = \frac{4}{5}, 270^\circ < a < 360^\circ$

b)  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

c)  $\sin a = \frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} < a < \pi$

d)  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$

e)  $\cot a = 3, \pi < a < \frac{3\pi}{2}$

f)  $\tan \alpha = -2, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

**Bài 2.** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$ .

**Bài 3.** Cho biết một GTLG, tính giá trị của biểu thức, với:

a)  $B = \frac{8 \tan^2 a + 3 \cot a - 1}{\tan a + \cot a}$  khi  $\sin a = \frac{1}{3}, 90^\circ < a < 180^\circ$

b)  $C = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 2 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + 4 \cos^2 a}$  khi  $\cot a = -3$

**Bài 4.** Đơn giản biểu thức  $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$ .

**Bài 5.** Chứng minh biểu thức  $D = \cos^2 x \cdot \cot^2 x + 3 \cos^2 x - \cot^2 x + 2 \sin^2 x$  không phụ thuộc  $x$ .

**Bài 6.** Đơn giản biểu thức  $A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$ .

**Bài 7.** Tính giá trị của biểu thức  $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ \cdot \sin 113^\circ$

**Bài 8.** Cho  $\sin a + \cos a = \frac{5}{4}$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = \sin a \cdot \cos a$       b)  $B = \sin a - \cos a$       c)  $C = \sin^3 a - \cos^3 a$

**Bài 9.** Cho  $\tan a - \cot a = 3$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = \tan^2 a + \cot^2 a$       b)  $B = \tan a + \cot a$       c)  $C = \tan^4 a - \cot^4 a$

**Bài 10.** CMR biểu thức  $A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$  không phụ thuộc  $x$

**Bài 11.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $\tan a \cdot \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b}$

b)  $\frac{\sin a}{\sin a - \cos a} - \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} = \frac{1 + \cot^2 a}{1 - \cot^2 a}$

c)  $1 - \frac{\sin^2 a}{1 + \cot a} - \frac{\cos^2 a}{1 + \tan a} = \sin a \cdot \cos a$

d)  $\frac{\sin^2 a}{\sin a - \cos a} - \frac{\sin a + \cos a}{\tan^2 a - 1} = \sin a + \cos a$

**Bài 12.** Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

a)  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$  khi  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$  khi  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

**Bài 13.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ .

b)  $B = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

**Bài 14.** Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau:

a)  $A = \sin^2 20^\circ + \sin^2 100^\circ + \sin^2 140^\circ$

b)  $B = \cos^2 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos^2 130^\circ$

**Bài 15.** Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

a)  $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$  khi  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

b)  $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$  khi  $\tan \alpha = 2$

**Bài 16.** Tính giá trị của biểu thức sau:

a)  $A = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$

b)  $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

**Bài 17.** Rút gọn biểu thức

1)  $A = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos^2 x$

2)  $B = \frac{\sin 3x \cdot \cos 5x - \sin 5x \cdot \cos 3x}{\cos x}$

3)  $C = \frac{2}{\sin 4x} - \cot g 2x$

4)  $D = \frac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4}$

$$5) E = \frac{\cotg \frac{a}{2} + \tg \frac{a}{2}}{\cotg \frac{a}{2} - \tg \frac{a}{2}}$$

$$6) H = \frac{2\cos^2 a - 1}{2\tg\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$$

**Bài 18.** Chứng minh đẳng thức

$$1) 4.\cos^4 x - 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{3}{2}$$

$$2) \cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x = \frac{\sin 4x}{4}$$

$$3) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} \cdot \cos 4x + \frac{3}{4}$$

$$4) \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot g\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

**Bài 19.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

$$a) y = 2 \cos 3x$$

$$b) y = x + \sin x$$

$$c) y = x \cdot \cot x + \cos x$$

$$d) y = x^2 + \tan |x|$$

**Bài 20.** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

$$a) y = 1 - \sin 5x.$$

$$b) y = \cos^2 x - 1.$$

**Bài 21.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau

$$a) y = \sin x \text{ trên } \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$$

$$b) y = \cos x \text{ trên } \left(\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$c) y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ trên } \left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$d) y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ trên } \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$$

**Bài 22.** Tìm tập xác định của các hàm số sau?

$$a) y = \cos x + \sin x$$

$$b) y = \frac{1 + \tan x}{\sin x}$$

$$c) y = \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$d) y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Bài 23.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

$$a) y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$$

$$b) y = -5 + 2 \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$c) y = 2\sqrt{\cos 3x} - 1$$

$$d) y = \frac{\sin^2(3x)}{2} - 3 \cos^2(3x)$$

$$e) y = 4 - 2 \cos 2x.$$

$$f) y = \sqrt{3 + \sin^{2018} x}.$$

**Bài 24.** Giải các phương trình sau:

$$a) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$b) \sin(3x - 30^\circ) = \sin 45^\circ$$

$$c) \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$d) \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$e) \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$f) \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right)$$

$$g) \cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h) \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{4}$$

**Bài 25.** Giải các phương trình sau:

$$a) \tan(2x - 1) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$b) \tan(3x - 10^\circ) = \sqrt{3}$$

$$c) 3 \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

$$d) \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$e) 2 \cot(3x) = 3$$

$$f) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

## CHƯƠNG 2: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

### A. TRẮC NGHIỆM

#### Bài 1. Dãy số

**Câu 1:** Cho dãy số  $(u_n)$ , biết  $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ . Viết năm số hạng đầu của dãy số.

**A.**  $u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$ .

**B.**  $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$ .

**C.**  $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{8}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$

**D.**  $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{7}{2}, u_5 = \frac{11}{3}$ .

**Câu 2:** Cho dãy số  $(u_n)$ , biết  $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$ . Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

**A.**  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$ .

**B.**  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$ .

**C.**  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$ .

**D.**  $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$ .

**Câu 3:** Cho dãy số  $(u_n)$ , biết  $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$ . Số  $\frac{8}{15}$  là số hạng thứ mấy của dãy số?

**A.** 8.

**B.** 6.

**C.** 5.

**D.** 7.

**Câu 4:** Cho dãy số  $(u_n)$ , biết  $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$ . Số  $\frac{7}{12}$  là số hạng thứ mấy của dãy số?

**A.** 6.

**B.** 8.

**C.** 9.

**D.** 10.

**Câu 5:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{n+1}{n}$ . Tính  $u_5$ .

**A.** 5.

**B.**  $\frac{6}{5}$ .

**C.**  $\frac{5}{6}$ .

**D.** 1.

**Câu 6:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n+1}$ .

Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

**A.** 2.

**B.** 4.

**C.** 1.

**D.** Không có.

**Câu 7:** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_n = 3n + 6$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Dãy số tăng

**B.** Dãy số giảm

**C.** Dãy số không tăng, không giảm

**D.** Cả A, B, C đều sai

**Câu 8:** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_n = \frac{n+5}{n+2}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Dãy số tăng

**B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm      D. Có số hạng  $u_{n+1} = \frac{n+5}{n+2} + 1$

**Câu 9:** Trong các dãy số  $(u_n)$  cho bởi số hạng tổng quát  $u_n$  sau, dãy số nào tăng?

A.  $u_n = \frac{n}{2^n}$ .      B.  $u_n = \frac{n}{2n^2+1}$ .      C.  $u_n = \frac{n^2+1}{3n+2}$ .      D.  $u_n = (-2)^n \sqrt{n^2-1}$ .

**Câu 10:** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_n = \sqrt{5n+2}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng      B. Dãy số giảm  
C. Dãy số không tăng, không giảm      D. Cả A, B, C đều sai

**Câu 11:** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_n = \frac{1}{3n+2}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng      B. Dãy số giảm  
C. Dãy số không tăng, không giảm      D. Cả A, B, C đều đúng

**Câu 12:** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_n = \frac{-1}{2n+3}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số bị chặn.      B. Dãy số bị chặn trên.  
C. Dãy số bị chặn dưới.      D. Không bị chặn

**Câu 13:** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_n = \frac{4n+5}{n+1}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số bị chặn.      B. Dãy số bị chặn trên.  
C. Dãy số bị chặn dưới.      D. Không bị chặn

**Câu 14:** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_n = \frac{n^3}{n^2+1}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số bị chặn.      B. Dãy số bị chặn trên.  
C. Dãy số bị chặn dưới.      D. Không bị chặn

**Câu 15:** Trong các dãy số sau dãy số nào bị chặn?

A. Dãy  $(a_n)$ , với  $a_n = \sqrt{n^3+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .      B. Dãy  $(b_n)$ , với  $b_n = n^2 + \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  
C. Dãy  $(c_n)$ , với  $c_n = (-2)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .      D. Dãy  $(d_n)$ , với  $d_n = \frac{3n}{n^3+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

## Bài 2. Cấp số cộng

**Câu 1:** Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

A.  $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$ .      B.  $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$ .  
C.  $(u_n): 1; 3; 6; 10; 15; \dots$       D.  $(u_n): -1; 1; -1; 1; -1; \dots$

**Câu 2:** Trong các dãy số sau, có bao nhiêu dãy số là cấp số cộng?

a) Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 4n$ . b) Dãy số  $(v_n)$  với  $v_n = 2n^2 + 1$ .

b) Dãy số  $(w_n)$  với  $w_n = \frac{n}{3} - 7$ . d) Dãy số  $(t_n)$  với  $t_n = \sqrt{5} - 5n$ .

A. 4.      B. 2.      C. 1.      D. 3.

**Câu 3:** Xác định  $a$  để 3 số  $1+2a; 2a^2-1; -2a$  theo thứ tự thành lập một cấp số cộng?

A. Không có giá trị nào của  $a$ .      B.  $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$ .  
C.  $a = \pm 3$ .      D.  $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- Câu 4:** Các dãy số có số hạng tổng quát  $u_n$ . Trong các dãy số sau, dãy số nào không phải là cấp số cộng?  
**A.**  $u_n = 2n + 5$ .      **B.** 49, 43, 37, 31, 25. **C.**  $u_n = 1 + 3^n$ .      **D.**  $u_n = (n + 3)^2 - n^2$ .
- Câu 5:** Biết bốn số 5;  $x$ ; 15;  $y$  theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của biểu thức  $3x + 2y$  bằng.  
**A.** 50.      **B.** 70.      **C.** 30.      **D.** 80.
- Câu 6:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_1 = 7$  công sai  $d = 2$ . Giá trị  $u_2$  bằng  
**A.** 14.      **B.** 9.      **C.**  $\frac{7}{2}$ .      **D.** 5
- Câu 7:** Cho một cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_1 = \frac{1}{3}$ ,  $u_8 = 26$ . Tìm công sai  $d$   
**A.**  $d = \frac{11}{3}$ .      **B.**  $d = \frac{10}{3}$ .      **C.**  $d = \frac{3}{10}$ .      **D.**  $d = \frac{3}{11}$ .
- Câu 8:** Cho dãy số  $(u_n)$  là một cấp số cộng có  $u_1 = 3$  và công sai  $d = 4$ . Biết tổng  $n$  số hạng đầu của dãy số  $(u_n)$  là  $S_n = 253$ . Tìm  $n$ .  
**A.** 9.      **B.** 11.      **C.** 12.      **D.** 10.
- Câu 9:** Cho dãy số vô hạn  $\{u_n\}$  là cấp số cộng có công sai  $d$ , số hạng đầu  $u_1$ . Hãy chọn khẳng định sai?  
**A.**  $u_5 = \frac{u_1 + u_9}{2}$ .      **B.**  $u_n = u_{n-1} + d, n \geq 2$ .  
**C.**  $S_{12} = \frac{n}{2}(2u_1 + 11d)$ .      **D.**  $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- Câu 10:** Cho một cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_1 = 5$  và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát  $u_n$ .  
**A.**  $u_n = 1 + 4n$ .      **B.**  $u_n = 5n$ .      **C.**  $u_n = 3 + 2n$ .      **D.**  $u_n = 2 + 3n$ .
- Câu 11:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_4 = -12$ ,  $u_{14} = 18$ . Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.  
**A.**  $S_{16} = -24$ .      **B.**  $S_{16} = 26$ .      **C.**  $S_{16} = -25$ .      **D.**  $S_{16} = 24$ .
- Câu 12:** Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng?  
**A.** 6, 12, 18.      **B.** 8, 13, 18.      **C.** 7, 12, 17.      **D.** 6, 10, 14.
- Câu 13:** Một đồng hồ đánh giờ, khi kim giờ chỉ số  $n$  (từ 1 đến 12) thì đồng hồ đánh đúng  $n$  tiếng. Hỏi trong một ngày (24 giờ) đồng hồ đánh được bao nhiêu tiếng?  
**A.** 156.      **B.** 152.      **C.** 148.      **D.** 160.
- Câu 14:** Sinh nhật lần thứ 17 của An vào ngày 01 tháng 5 năm 2018. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá 3850000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình nên An quyết định bỏ ống heo 1000 đồng vào ngày 01 tháng 02 năm 2018. Trong các ngày tiếp theo, ngày sau bỏ ống heo nhiều hơn ngày trước 1000 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của mình, An có bao nhiêu tiền (tính đến ngày 30 tháng 4 năm 2018)?  
**A.** 4095000 đồng.      **B.** 89000 đồng.      **C.** 4005000 đồng.      **D.** 3960000 đồng.
- Câu 15:** Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ..., cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là  
**A.** 77.      **B.** 79.      **C.** 76.      **D.** 78.

**Câu 16:** Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

- A. 2250.                      B. 1740.                      C. 4380.                      D. 2190.

### Bài 3. Cấp số nhân

**Câu 1:** Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A. 128; -64; 32; -16; 8; ...                      B.  $\sqrt{2}$ ; 2; 4;  $4\sqrt{2}$ ; ...  
C. 5; 6; 7; 8; ...                      D. 15; 5; 1;  $\frac{1}{5}$ ; ...

**Câu 2:** Trong các dãy số sau, dãy số nào **không phải** là một cấp số nhân?

- A. 2; 4; 8; 16; ...                      B. 1; -1; 1; -1; ...  
C.  $1^2$ ;  $2^2$ ;  $3^2$ ;  $4^2$ ; ...                      D.  $a$ ;  $a^3$ ;  $a^5$ ;  $a^7$ ; ... ( $a \neq 0$ ).

**Câu 3:** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = -2$  và  $q = -5$ . Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

- A. -2; 10; 50; -250.                      B. -2; 10; -50; 250.  
C. -2; -10; -50; -250.                      D. -2; 10; 50; 250.

**Câu 4:** Trong các dãy số  $(u_n)$  cho bởi số hạng tổng quát  $u_n$  sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A.  $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$ .                      B.  $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$ .                      C.  $u_n = n + \frac{1}{3}$ .                      D.  $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$ .

**Câu 5:** Trong các dãy số  $(u_n)$  cho bởi số hạng tổng quát  $u_n$  sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A.  $u_n = 7 - 3n$ .                      B.  $u_n = 7 - 3^n$ .                      C.  $u_n = \frac{7}{3n}$ .                      D.  $u_n = 7 \cdot 3^n$ .

**Câu 6:** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

- A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.  
B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.  
C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.  
D. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

**Câu 7:** Xác định  $x$  dương để  $2x - 3$ ;  $x$ ;  $2x + 3$  lập thành cấp số nhân.

- A.  $x = 3$ .                      B.  $x = \sqrt{3}$ .  
C.  $x = \pm\sqrt{3}$ .                      D. không có giá trị nào của  $x$ .

**Câu 8:** Với giá trị  $x$  nào dưới đây thì các số  $-4$ ;  $x$ ;  $-9$  theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

- A.  $x = 36$ .                      B.  $x = -\frac{13}{2}$ .                      C.  $x = 6$ .                      D.  $x = -36$ .

**Câu 9:** Tìm  $b > 0$  để các số  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $\sqrt{b}$ ;  $\sqrt{2}$  theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

- A.  $b = -1$ .                      B.  $b = 1$ .                      C.  $b = 2$ .                      D.  $b = -2$ .

**Câu 10:** Cho cấp số nhân  $(a_n)$  có  $a_1 = 3$  và  $a_2 = -6$ . Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đã cho.

- A.  $a_5 = -24$ .                      B.  $a_5 = 48$ .                      C.  $a_5 = -48$ .                      D.  $a_5 = 24$ .

**Câu 11:** Một khu rừng có trữ lượng gỗ là  $4 \cdot 10^5$  mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ

- A.  $4 \cdot 10^5 \cdot (0,05)^5$ .                      B.  $4 \cdot 10^5 \cdot (1,4)^5$ .                      C.  $4 \cdot 10^5 \cdot (1,04)^5$ .                      D.  $4 \cdot (10,4)^5$ .

**Câu 12:** Bài toán "**Lãi kép**": Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi

người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

A. 196715000 đồng. B. 196716000 đồng. C. 183845000 đồng. D. 183846000 đồng.

**Câu 13:** Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

A. 34 tháng. B. 32 tháng. C. 31 tháng. D. 30 tháng.

### B. TỰ LUẬN

**Bài 1.** Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

1). Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 2n^3 - 5n + 1$

2). Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 3^n - n$ .

3). Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ .

4). Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

**Bài 2.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a)  $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$ .

b)  $u_n = 3 \cdot \cos \frac{nx}{3}$ . c)  $u_n = 2n^3 + 1$ .

d)  $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$ .

e)  $u_n = n + \frac{1}{n}$ .

**Bài 4.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a).  $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

b).  $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

c).  $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

d).  $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}$

**Bài 5.** Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

a). Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 19n - 5$

b). Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = -3n + 1$

c). Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = n^2 + n + 1$

d). Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = (-1)^n + 10n$

**Bài 6.** Định x để 3 số  $10 - 3x, 2x^2 + 3, 7 - 4x$  theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

**Bài 7.** Một tam giác vuông có chu vi bằng  $3a$ , và 3 cạnh lập thành một CSC. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo  $a$ .

**Bài 8.** Ba góc của một tam giác vuông lập thành một CSC. Tìm số đo các góc đó.

**Bài 9.** Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a)  $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases}$

**Bài 10.** Cho CSN  $(u_n)$  có các số hạng thỏa:  $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.

b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?

c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

**Bài 11.** Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

**Bài 12.** Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

**Bài 13.** Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

**Bài 14.** Cho  $x, 3, y$  theo thứ tự lập thành cấp số nhân và  $x^4 = y\sqrt{3}$ . Tìm  $x, y$ .

### CHƯƠNG 3. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

#### A. TRẮC NGHIỆM

##### Bài 1. Giới hạn dãy số

**Câu 1:** Phát biểu nào sau đây là sai?

A.  $\lim u_n = c$  ( $u_n = c$  là hằng số).

B.  $\lim q^n = 0$  ( $|q| > 1$ ).

C.  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

D.  $\lim \frac{1}{n^k} = 0$  ( $k > 1$ ).

**Câu 2:** Tính  $L = \lim \frac{n-1}{n^3+3}$ .

A.  $L = 1$ .

B.  $L = 0$ .

C.  $L = 3$ .

D.  $L = 2$ .

**Câu 3:**  $\lim \frac{2018}{n}$  bằng

A.  $-\infty$ .

B. 0.

C. 1.

D.  $+\infty$ .

**Câu 4:** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A.  $u_n = \frac{n^2-2}{5n+3n^2}$ .

B.  $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$ .

C.  $u_n = \frac{1-2n}{5n+3n^2}$ .

D.  $u_n = \frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$ .

**Câu 5:** Tìm  $\lim u_n$  biết  $u_n = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1}$ .

A.  $\frac{3}{4}$ .

B.  $\frac{3}{5}$ .

C.  $\frac{2}{3}$ .

D.  $\frac{4}{3}$ .

**Câu 6:** Tính giới hạn  $\lim \left[ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$ .

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 7:** Giá trị của  $\lim \frac{2-n}{n+1}$  bằng

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

**Câu 8:** Tính giới hạn  $I = \lim \frac{2n+2017}{3n+2018}$ .

A.  $I = \frac{2}{3}$ .

B.  $I = \frac{3}{2}$ .

C.  $I = \frac{2017}{2018}$ .

D.  $I = 1$ .

**Câu 9:** Tìm  $\lim \frac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}$ .

A. 2.

B. 8.

C. 1.

D. 4.

**Câu 10:** Giá trị của  $\lim \frac{2n^2-3}{1-2n^2}$  bằng

A. -3.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

**Câu 11:**  $\lim (2-3n)^4 (n+1)^3$  là:

A.  $-\infty$

B.  $+\infty$

C. 81

D. 2

**Câu 12:** Tính giới hạn  $L = \lim \frac{n^3-2n}{3n^2+n-2}$

- A.  $L = +\infty$ .                      B.  $L = 0$ .                      C.  $L = \frac{1}{3}$ .                      D.  $L = -\infty$ .

**Câu 13:** Tính giới hạn của dãy số  $u_n = \frac{-2+3n-2n^3}{3n-2}$

- A.  $\frac{-2}{3}$ .                      B.  $-\infty$ .                      C. 1.                      D.  $+\infty$ .

**Câu 14:**  $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$  bằng

- A.  $\frac{3}{2}$ .                      B. 2.                      C. 1.                      D.  $+\infty$ .

**Câu 15:** Cho  $I = \lim \frac{\sqrt{4n^2+5+n}}{4n-\sqrt{n^2+1}}$ . Khi đó giá trị của  $I$  là:

- A.  $I = 1$ .                      B.  $I = \frac{5}{3}$ .                      C.  $I = -1$ .                      D.  $I = \frac{3}{4}$ .

**Bài 2. Giới hạn hàm số**

**Câu 1:** Cho các giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$ , hỏi  $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$  bằng

- A. 5.                      B. 2.                      C. -6.                      D. 3.

**Câu 2:** Giá trị của  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1)$  bằng

- A. 2.                      B. 1.                      C.  $+\infty$ .                      D. 0.

**Câu 3:** Tính giới hạn  $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$

- A.  $L = -\infty$ .                      B.  $L = 0$ .                      C.  $L = +\infty$ .                      D.  $L = 1$ .

**Câu 4:** Tính  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2020}{2x - 1}$ .

- A. 0.                      B.  $-\infty$ .                      C.  $+\infty$                       D. 2019.

**Câu 5:** Tìm giới hạn  $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x^2+x+4}$ .

- A.  $-\frac{1}{6}$ .                      B.  $-\infty$ .                      C.  $+\infty$ .                      D. 1.

**Câu 6:** Giới hạn nào sau đây có kết quả bằng  $+\infty$ ?

- A.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$                       B.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{(x-1)^2}$                       C.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-1}{(x-1)^2}$                       D.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)^2}$

**Câu 7:** Cho  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$ . Tính  $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + 4x - 1]$ .

- A. 5.                      B. 6.                      C. 11.                      D. 9.

**Câu 8:** Cho  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1}-1)}{x}$  và  $J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x+1}$ . Tính  $I - J$ .

- A. 6.                      B. 3.                      C. -6.                      D. 0.

**Câu 9:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .                      B.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$ .                      C.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$ .                      D.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ .

**Câu 10:** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng  $-\infty$ ?

- A.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$ .                      B.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+4}{x-2}$ .                      C.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2}$ .                      D.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$ .

**Câu 11:** Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là  $+\infty$ ?

A.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x-1}{4-x}$ .      B.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x + 3)$ .      C.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$ .      D.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x-1}{4-x}$ .

**Câu 12:** Giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1}$  bằng

A.  $+\infty$ .      B.  $-\infty$ .      C.  $\frac{2}{3}$ .      D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 13:**  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1}$  bằng

A.  $+\infty$ .      B.  $-\infty$ .      C. 1.      D. 0

**Câu 14:** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-2x}{x-1}$

A.  $-\infty$ .      B. -2.      C. 0.      D.  $+\infty$ .

**Câu 15:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x-1}$ .

A. 0.      B.  $+\infty$ .      C.  $-\infty$ .      D. 1.

**Câu 16:** Tìm  $a$  để hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$  có giới hạn tại  $x = 2$ .

A. -1.      B. -2.      C. 2.      D. 1.

**Câu 17:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ mx + m + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ ,  $m$  là tham số. Tìm giá trị của  $m$  để hàm số

có giới hạn tại  $x = 0$ .

A.  $m = \frac{1}{2}$ .      B.  $m = 1$ .      C.  $m = 0$ .      D.  $m = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 18:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + 1)$

A.  $+\infty$ .      B.  $-\infty$ .      C. 2.      D. 0.

### Bài 3. Hàm số liên tục

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(a; b)$ . Điều kiện cần và đủ để  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  là

A.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  và  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .      B.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$  và  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$   
 C.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  và  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .      D.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$  và  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$ .

**Câu 2:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a; b]$ . Tìm mệnh đề đúng.

A. Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $f(a)f(b) > 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  không có nghiệm trong khoảng  $(a; b)$ .

B. Nếu  $f(a)f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm trong khoảng  $(a; b)$

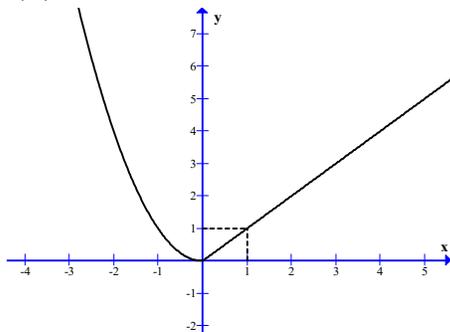
C. Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục, tăng trên  $[a; b]$  và  $f(a)f(b) > 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  không có nghiệm trong khoảng  $(a; b)$ .

D. Nếu phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm trong khoảng  $(a; b)$  thì hàm số  $f(x)$  phải liên tục trên  $(a; b)$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Nếu  $f(a).f(b) > 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  không có nghiệm nằm trong  $(a; b)$ .
- B. Nếu  $f(a).f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm nằm trong  $(a; b)$ .
- C. Nếu  $f(a).f(b) > 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm nằm trong  $(a; b)$ .
- D. Nếu phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm nằm trong  $(a; b)$  thì  $f(a).f(b) < 0$ .

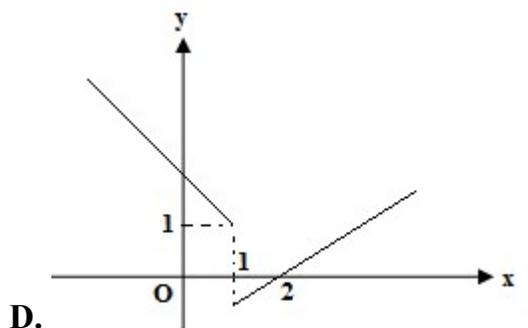
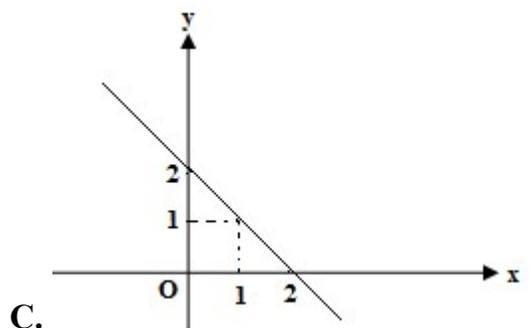
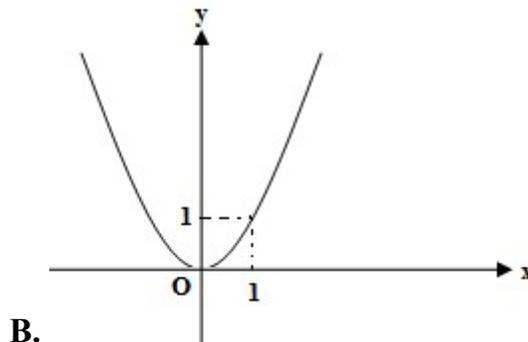
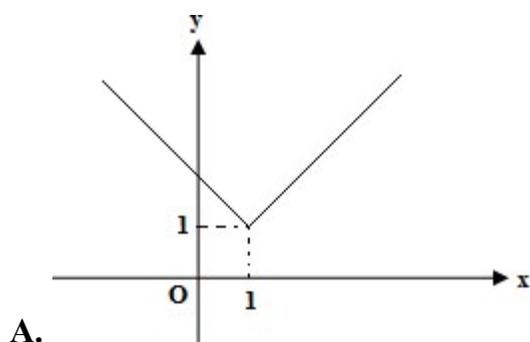
**Câu 4:** Cho đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ sau:



Chọn mệnh đề đúng.

- A. Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại điểm  $x = 0$  nhưng không liên tục tại điểm  $x = 0$ .
- B. Hàm số  $y = f(x)$  liên tục tại điểm  $x = 0$  nhưng không có đạo hàm tại điểm  $x = 0$ .
- C. Hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có đạo hàm tại điểm  $x = 0$ .
- D. Hàm số  $y = f(x)$  không liên tục và không có đạo hàm tại điểm  $x = 0$ .

**Câu 5:** Hình nào trong các hình dưới đây là đồ thị của hàm số không liên tục tại  $x = 1$ ?



**Câu 6:** Cho các mệnh đề:

1. Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(a; b)$  và  $f(a).f(b) < 0$  thì tồn tại  $x_0 \in (a; b)$  sao cho  $f(x_0) = 0$ .
2. Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $f(a).f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm.

3. Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục, đơn điệu trên  $[a; b]$  và  $f(a).f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm duy nhất.

A. Có đúng hai mệnh đề sai.

B. Cả ba mệnh đề đều đúng.

C. Cả ba mệnh đề đều sai.

D. Có đúng một mệnh đề sai.

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = \begin{cases} \frac{1-x^3}{1-x}, & \text{khi } x < 1 \\ 1, & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ . Hãy chọn kết luận đúng

A.  $y$  liên tục phải tại  $x = 1$ .

B.  $y$  liên tục tại  $x = 1$ .

C.  $y$  liên tục trái tại  $x = 1$ .

D.  $y$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 8:** Cho hàm số  $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại  $x_0 = 3$ .

B. Hàm số gián đoạn và không có đạo hàm tại  $x_0 = 3$ .

C. Hàm số có đạo hàm nhưng không liên tục tại  $x_0 = 3$ .

D. Hàm số liên tục và có đạo hàm tại  $x_0 = 3$ .

**Câu 9:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ . Chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số liên tục tại  $x = 2$ .

B. Hàm số gián đoạn tại  $x = 2$ .

C.  $f(4) = 2$ .

D.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-x}$ . Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục tại  $x = -1$ .

B. Hàm số liên tục tại  $x = 0$ .

C. Hàm số liên tục tại  $x = 1$ .

D. Hàm số liên tục tại  $x = \frac{1}{2}$ .

**Câu 11:** Hàm số nào sau đây liên tục tại  $x = 1$ :

A.  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ . B.  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ . C.  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ . D.  $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ .

**Câu 12:** Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm  $x_0 = -1$ .

A.  $y = (x + 1)(x^2 + 2)$ . B.  $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ . C.  $y = \frac{x}{x - 1}$ . D.  $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$ .

**Câu 13:** Hàm số nào sau đây gián đoạn tại  $x = 2$ ?

A.  $y = \frac{3x - 4}{x - 2}$ . B.  $y = \sin x$ . C.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ . D.  $y = \tan x$ .

**Câu 14:** Hàm số  $y = \frac{x}{x + 1}$  gián đoạn tại điểm  $x_0$  bằng?

A.  $x_0 = 2018$ .

B.  $x_0 = 1$ .

C.  $x_0 = 0$

D.  $x_0 = -1$ .

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{x^2-1}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số không liên tục tại các điểm  $x = \pm 1$ . B. Hàm số liên tục tại mọi  $x \in \mathbb{R}$ .  
 C. Hàm số liên tục tại các điểm  $x = -1$ . D. Hàm số liên tục tại các điểm  $x = 1$ .

**Câu 16:** Tìm  $m$  để hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$  liên tục tại  $x = -2$

- A.  $m = -4$ . B.  $m = 2$ . C.  $m = 4$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ . Giá trị của tham số  $m$  để hàm số liên tục tại điểm

$x_0 = 1$  là:

- A.  $m = -\frac{1}{2}$ . B.  $m = 2$ . C.  $m = 1$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 18:** Để hàm số  $y = \begin{cases} x^2+3x+2 & \text{khi } x \leq -1 \\ 4x+a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$  liên tục tại điểm  $x = -1$  thì giá trị của  $a$  là

- A.  $-4$ . B.  $4$ . C.  $1$ . D.  $-1$ .

**Câu 19:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m-1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ . Tìm  $m$  để hàm số liên tục tại  $x_0 = 1$ .

- A.  $m = 1$ . B.  $m = 3$ . C.  $m = 0$ . D.  $m = 2$ .

## B. TỰ LUẬN

**Bài 1.** Tìm các giới hạn sau:

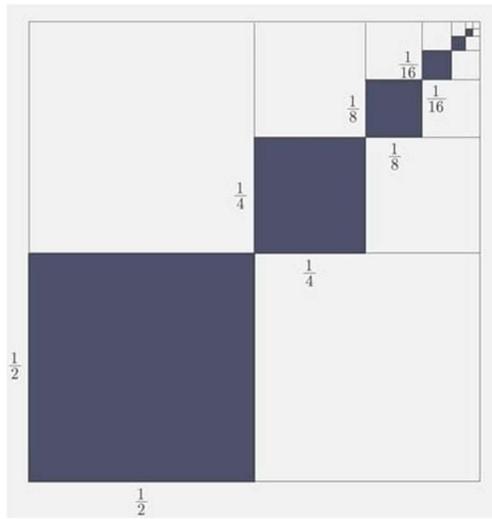
- a.  $\lim \frac{n+1}{n^2-2}$ . b.  $\lim \frac{3n^3-2n+5}{2n^2+5n-3}$ . c.  $\lim \frac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$ . d.  $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$ .  
 e.  $\lim \frac{n\sqrt{n}-1}{n+n\sqrt{n}}$ . f.  $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2}+2}{n+\sqrt{n}}$ . g.  $\lim (\sqrt{4n^2+5n}-2n)$  h.  $\lim (\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})$   
 i.  $\lim \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} \right]$

**Bài 2.** Tìm giới hạn

- a.  $\lim (n^3 + n^2 + n + 1)$  b.  $\lim (-n^2 + n\sqrt{n} - 1)$   
 c.  $\lim (\sqrt[3]{1+2n-n^3} - n)$  d.  $\lim (n + \sqrt{n^2 - n + 1})$

**Bài 3.** Người ta lấy bốn trung điểm các cạnh của hình vuông trên để được hình vuông nhỏ hơn nằm bên trong hình vuông bên ngoài. Quy trình làm như vậy diễn ra tới vô hạn. Tính diện tích tất cả hình vuông có trong bài toán.

**Bài 4.** Để trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột Mickey quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1. Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, 4, ..., n, ... trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó. Giả sử quy trình tô màu của chuột Mickey có thể tiến ra vô hạn (như hình vẽ dưới đây). Tính tổng diện tích mà chuột Mickey phải tô màu.



**Bài 5.** Tìm các giới hạn sau:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$       b.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$       c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$       d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$

**Bài 6.** Tìm các giới hạn sau:

a.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$       b.  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$       c.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$   
d.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$       e.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2}$       f.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3} + 2}{x+1}$   
g.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x}$       h.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1}$       i.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}$

**Bài 7.** Tìm các giới hạn sau:

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}$       b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$       c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x - 4}$   
d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - x)$       e.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$       f.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x)$

**Bài 8.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 2x & x \geq 1 \\ x^3 - 3x & x < 1 \end{cases}$

Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ . Hàm số có giới hạn tại  $x=1$  không? Vì sao?

**Bài 9.** Tìm các giới hạn sau:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$       b)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^3 + x^2}}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{4 - 4x^3}{3x^2 + 5x}}$

**Bài 10.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 5x^4 - 6x^2 - x & x \geq 1 \\ x^3 - 3x & x < 1 \end{cases}$  Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ . Hàm số có giới hạn tại

$x=1$  không? Vì sao?

**Bài 11.** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} & x \neq 1 \\ \frac{1}{8} & x = 1 \end{cases}$

a). Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . So sánh  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  và  $f(1)$

b). Tìm  $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$ . So sánh  $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$  và  $f(-3)$ .

**Bài 12.** Chứng minh rằng hàm số sau liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases} \quad \text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

**Bài 13.** Xét tính liên tục của hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$  trên tập xác định của nó.

Từ (1) và (2) suy ra  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài 14.** Xét tính liên tục của hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$  trên tập xác định của nó.

**Bài 15.** Chứng minh rằng phương trình  $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$  luôn có nghiệm.

**Bài 16.** Chứng minh rằng phương trình:  $(m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2 = 0$  luôn có nghiệm.

**Bài 17.** Chứng minh rằng phương trình  $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$  luôn có 3 nghiệm.

## PHẦN II: HÌNH HỌC

### Chương 4: Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song

1. Giao tuyến của hai mặt phẳng, giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng. Ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui.
2. Hai đường thẳng song song.
3. Đường thẳng song song với mặt phẳng.
4. Hai mặt phẳng song song.

#### A. TRẮC NGHIỆM

##### Bài 1. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

- Câu 1:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên  $AB, AD$  lần lượt lấy các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $MN$  cắt  $BD$  tại  $I$ . Điểm  $I$  không thuộc mặt phẳng nào sau đây:  
A.  $(ABD)$ .                      B.  $(BCD)$ .                      C.  $(CMN)$ .                      D.  $(ACD)$ .
- Câu 2:** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  và điểm  $S$  không thuộc mp  $(ABCD)$ . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng xác định bởi các điểm  $A, B, C, D, S$ ?  
A. 5.                                  B. 6.                                  C. 8.                                  D. 7.
- Câu 3:** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là đúng:  
A. Qua ba điểm không thẳng hàng có vô số mặt phẳng.  
B. Qua hai điểm có một và chỉ một mặt phẳng.  
C. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng sẽ có vô số điểm chung.  
D. Trong không gian, một đường thẳng và một mặt phẳng có tối đa một điểm chung.
- Câu 4:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì tất cả những điểm chung của chúng sẽ nằm trên:  
A. Một đường tròn.                      B. Một đoạn thẳng.  
C. Một đường thẳng.                      D. Năm tùy ý.
- Câu 5:** Một mặt phẳng được xác định nếu biết:  
A. Bốn điểm không thẳng hàng.                      B. Một điểm và một đường thẳng.  
C. Hai đường thẳng.                      D. Ba điểm không thẳng hàng.
- Câu 6:** Cho mp  $(P)$ , điểm  $A$  thuộc mp  $(P)$  và điểm  $B$  không thuộc mp  $(P)$ . Đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  Giữa  $d$  và  $(P)$  sẽ có:  
A. Vô số điểm chung.                      B. Đúng một điểm chung.  
C. Ít nhất hai điểm chung.                      D. Nhiều hơn một điểm chung.
- Câu 7:** Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cắt nhau theo giao tuyến  $d$  Trong  $(P)$  cho đường thẳng  $a$ , trong  $(Q)$  cho đường thẳng  $b$ . Giả sử  $a \cap b = M$ ,  $a \cap d = N$ ,  $d \cap b = K$ . Phát biểu nào sau đây là đúng:  
A. Ba điểm  $M, N, K$  thẳng hàng.                      B. Ba điểm  $M, N, K$  trùng nhau.  
C. Ba điểm  $M, N, K$  lập thành tam giác cân.                      D. Ba điểm  $M, N, K$  lập thành tam giác vuông.
- Câu 8:** Trong không gian cho mặt phẳng  $(P)$  và ba điểm không thẳng hàng  $A, B, C$  không nằm trong  $(P)$ . Gọi  $M, N, K$  lần lượt là giao điểm của các đường thẳng  $AB, AC, BC$  với mặt phẳng  $(P)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng.  
A. Ba điểm  $M, N, K$  thẳng hàng.                      B. Ba điểm  $M, N, K$  trùng nhau.  
C. Ba điểm  $M, N, K$  lập tam giác cân.                      D. Ba điểm  $M, N, K$  lập tam giác vuông.

- Câu 9:** Hình tứ diện có:  
 A. Bốn cạnh                      B. Năm cạnh                      C. Sáu cạnh                      D. Bảy cạnh
- Câu 10:** Cho hình tứ diện  $ABCD$  Khẳng định nào sau đây là đúng?  
 A.  $AB$  và  $CD$  cắt nhau.                      B. Bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng.  
 C. Bốn điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng.                      D.  $AC$  và  $BD$  cắt nhau.
- Câu 11:** Các mặt của hình tứ diện là:  
 A. Tứ giác                      B. Tam giác                      C. Hình bình hành                      D. Hình vuông
- Câu 12:** Hình chóp tứ giác là hình chóp có:  
 A. Mặt bên là tứ giác                      B. Tất cả các mặt là tứ giác  
 C. Mặt đáy là tứ giác                      D. Bốn mặt là tứ giác
- Câu 13:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  là đường thẳng:  
 A.  $SA$                       B.  $SB$                       C.  $SB$                       D.  $AC$
- Câu 14:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAO)$  và  $(SBD)$  là đường thẳng:  
 A.  $SA$ .                      B.  $SB$ .                      C.  $BD$ .                      D.  $SO$ .

### Bài 2. Hai đường thẳng song song trong không gian

- Câu 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào Đúng?  
 A. một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.  
 B. một đường thẳng cắt 2 đường thẳng cắt nhau trước thì cả 3 đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.  
 C. Một đường thẳng cắt 2 đường thẳng cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thì cả 3 đường thẳng đó đồng phẳng.  
 D. Một đường thẳng cắt 2 đường thẳng chéo nhau thì 3 đường thẳng đó đồng phẳng.
- Câu 2:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?  
 A. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.  
 B. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.  
 C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.  
 D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- Câu 3:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?  
 A. Qua hai đường thẳng song song, luôn xác định được duy nhất một mặt phẳng.  
 B. Nếu hai mặt phẳng có 1 điểm chung thì chúng có vô số điểm chung.  
 C. Tồn tại 4 điểm không đồng phẳng.  
 D. Qua 3 điểm luôn xác định duy nhất một mặt phẳng.
- Câu 4:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào Đúng?  
 A. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì đồng quy.  
 B. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì đồng phẳng.  
 C. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không đồng phẳng thì đồng quy.  
 D. Ba đường thẳng đồng quy thì đồng phẳng.
- Câu 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(SCD)$  là:  
 A. Đường thẳng qua  $S$  và song song với  $CD$ .  
 B. Đường thẳng qua  $S$  và song song với  $AD$ .  
 C. Đường  $SO$  với  $O$  là tâm hình bình hành.  
 D. Đường thẳng qua  $S$  và cắt  $AB$ .



- B.** Nếu hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.  
**C.** Nếu đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung thì chúng song song với nhau.  
**D.** Hai đường thẳng song song nếu chúng không có điểm chung.

- Câu 2:** Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABD$  và  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$ , sao cho  $BM = 2MC$ . Đường thẳng  $MG$  song song với mp :
- A.**  $(ABD)$ .                      **B.**  $(ABC)$ .                      **C.**  $(ACD)$ .                      **D.**  $(BCD)$ .
- Câu 3:** Cho tứ diện  $ABCD$  và ba điểm  $P, Q, R$  lần lượt nằm trên cạnh  $AB, CD, BC$ ; biết  $PR \parallel AC$ . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(PQR)$  và  $(ACD)$  là:
- A.**  $Qx \parallel AC$ .                      **B.**  $Qx \parallel AB$ .                      **C.**  $Qx \parallel BC$ .                      **D.**  $Qx \parallel CD$ .
- Câu 4:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$  và  $AC$ . Gọi  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(DMN)$  và  $(DBC)$ . Xét vị trí tương đối của  $d$  và  $(ABC)$  là:
- A.**  $d \parallel (ABC)$ .                      **B.**  $d$  không song song  $(ABC)$ .  
**C.**  $d \subset (ABC)$ .                      **D.**  $d$  cắt  $(ABC)$ .
- Câu 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $AB$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.**  $MN \parallel (SAB)$ .                      **B.**  $MN \parallel BD$                       **C.**  $MN \parallel (SBC)$                       **D.**  $MN$  cắt  $BC$ .
- Câu 6:** Cho các mệnh đề:
- $a \parallel b, b \subset (P) \Rightarrow a \parallel (P)$ .
  - $a \parallel (P), \forall (Q) \supset a : (Q) \cap (P) = b \Rightarrow b \parallel a$ .
  - Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.
  - Nếu  $a, b$  là hai đường thẳng chéo nhau thì có vô số mặt phẳng chứa  $a$  và song song với  $b$ .
- Số mệnh đề đúng là:
- A.** 3.                      **B.** 1.                      **C.** 2.                      **D.** 4.
- Câu 7:** Cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa  $a$  và song song với  $b$ ?
- A.** 2.                      **B.** Không có mặt phẳng nào.  
**C.** Vô số.                      **D.** 1.
- Câu 8:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) sẽ:
- A.** cắt đường thẳng đó.                      **B.** trùng với đường thẳng đó.  
**C.** song song với đường thẳng đó.                      **C.** chéo với đường thẳng đó.
- Câu 9:** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của 2 cạnh  $SA$  và  $SB$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.**  $MN \parallel AC$ .                      **B.**  $MN \parallel (ABC)$ .                      **C.**  $MN \parallel BC$ .                      **D.**  $MN \parallel SC$ .
- Câu 10:** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:
- A.** Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi nó đi qua 3 điểm.  
**B.** Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết hai đường thẳng cắt nhau nằm trong nó.  
**C.** Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.  
**D.** Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.
- Câu 11:** Tìm khẳng định đúng:
- A.** Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.  
**B.** Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì chéo nhau.

- C. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì trùng nhau.  
 D. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng có thể chéo nhau, song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

#### Bài 4. Hai mặt phẳng song song

- Câu 1:** Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?  
 A. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.  
 B. Nếu hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì song song với nhau  
 C. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau;  
 D. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia
- Câu 2:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?  
 A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.  
 B. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại.  
 C. Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại.  
 D. Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.
- Câu 3:** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  nằm trong 2 mặt phẳng phân biệt. Kết quả nào sau đây là đúng?  
 A.  $AD \parallel (BEF)$ .      B.  $(AFD) \parallel (BEC)$ .      C.  $(ABD) \parallel (EFC)$ .      D.  $EC \parallel (ABF)$ .
- Câu 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một hình bình hành. Gọi  $A', B', C', D'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SA, SB, SC, SD$ . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:  
 A.  $A'B' \parallel (SAD)$ .      B.  $A'C' \parallel (SBD)$ .      C.  $(A'C'D') \parallel (ABC)$ .      D.  $A'C' \parallel BD$ .
- Câu 5:** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:  
 A. Nếu hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng  $(P)$  đều song song với mặt phẳng  $(Q)$ .  
 B. Nếu hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng  $(P)$  đều song song với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng  $(Q)$ .  
 C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt  $(P)$  và  $(Q)$  thì  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau.  
 D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.
- Câu 6:** Hãy chọn câu sai:  
 A. Nếu mặt phẳng  $(P)$  chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng  $(Q)$  thì  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau.  
 B. Nếu hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song nhau thì mặt phẳng  $(R)$  đã cắt  $(P)$  đều phải cắt  $(Q)$  và các giao tuyến của chúng song song nhau.  
 C. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.  
 D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.



- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

**Câu 16:** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $D'$  là trung điểm của  $A'B'$  khi đó  $CB'$  song song với:

- A.  $AD'$ .
- B.  $C'D'$ .
- C.  $AC'$ .
- D.  $(AC'D')$ .

**Câu 17:** Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.
- C. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.
- D. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

**Câu 18:** Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau. Mệnh đề nào sau đây sai:

- A.  $d \subset (P)$  và  $d' \subset (Q)$  thì  $d // d'$ .
- B. Mọi đường thẳng đi qua điểm  $A \in (P)$  và song song với  $(Q)$  đều nằm trong  $(P)$ .
- C. Nếu đường thẳng  $a \subset (Q)$  thì  $a // (P)$ .
- D. Nếu đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(P)$  thì  $\Delta$  cũng cắt  $(Q)$ .

**Câu 19:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $SD$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $OM // SC$ .
- B.  $(OMN) // (SBC)$ .
- C.  $MN // (SBC)$ .
- D.  $ON$  và  $CB$  cắt nhau.

**Câu 20:** Hãy chọn câu **sai**:

- A. Nếu mặt phẳng  $(P)$  chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng  $(Q)$  thì  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau.
- B. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.
- C. Nếu hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song nhau thì mặt phẳng  $(R)$  đã cắt  $(P)$  đều phải cắt  $(Q)$  và các giao tuyến của chúng song song nhau.
- D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

## B. TỰ LUẬN

**Bài 1:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là tứ giác lồi. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SA$ . Tìm giao tuyến của mặt phẳng  $(MBC)$  với các mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(SAB)$ .

**Bài 2:** Cho tam giác  $ABC, S$  là một điểm không thuộc mặt phẳng  $(ABC)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SCM)$  và  $(SAN)$ .

**Bài 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD, M$  là trung điểm của  $BI$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAM)$  và  $(SBC)$ .

- Bài 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình thang ( $AD // BC, AD > BC$ ). Gọi  $M$  là trung điểm của  $SA$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MCD)$  và  $(SBC)$ .
- Bài 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, OC, SA$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SCD)$  và  $(MNP)$ .
- Bài 6:** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Trên cạnh  $SA$  và  $SC$  lấy  $M$  và  $N$  sao cho đường thẳng  $MN$  cắt  $AC$  tại  $I$ . Điểm  $P$  thuộc cạnh  $AB$ .  
Xác định giao điểm của:
- Đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .
  - Đường thẳng  $PI$  và mặt phẳng  $(SAB)$ .
- Bài 7:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SA$ . Xác định giao điểm của
- Đường thẳng  $BD$  và mặt phẳng  $(SAC)$ .
  - Đường thẳng  $DM$  và mặt phẳng  $(SAB)$ .
- Bài 8:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  trung điểm của  $AD$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAB$ .
- Xác định giao điểm của  $CM$  với mặt phẳng  $(SAB)$
  - Xác định giao tuyến hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCM)$ .
  - Xác định giao tuyến hai mặt phẳng  $(GCM)$  và  $(SBC)$ .
- Bài 9:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên  $AC, AD$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $MN$  không song song với  $CD$ . Gọi  $O$  là điểm thuộc miền trong tam giác  $BCD$ . Tìm giao điểm của
- Đường thẳng  $BD$  và mặt phẳng  $(OMN)$ .
  - Đường thẳng  $BC$  và mặt phẳng  $(OMN)$ .
- Bài 10:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có hai điểm  $M, N$  lần lượt thuộc hai cạnh  $SA, SB$  và  $O$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$ . Xác định giao điểm của
- Đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(SOC)$ .
  - Đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SOC)$ .
  - Đường thẳng  $SO$  và mặt phẳng  $(CMN)$
- Bài 11:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ .  $M$  là trung điểm của  $SC$ ,  $N$  là trung điểm của  $OB$ . Tìm giao điểm của đường thẳng  $SD$  và mp  $(AMN)$ .
- Bài 12:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, BC$ ;  $Q$  là một điểm nằm trên cạnh  $AD$  và  $P$  là giao điểm của  $CD$  với mặt phẳng  $(MNQ)$ .  
Chứng minh:  $PQ // MN // CD$ .
- Bài 13:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang với cạnh đáy là  $AB; CD (AB > CD)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB$ . Chứng minh:  $MN // CD$ .
- Bài 14:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $I$  và  $J$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC$  và  $ABD$ .  
Chứng minh:  $IJ // CD$ .
- Bài 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một tứ giác lồi. Gọi  $M, N, J$  lần lượt là trung điểm của  $SD, AB, CD$  và gọi  $G, K$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $SAB, ABC$ .  
Chứng minh:  $GK // MJ$ .

- Bài 16:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $AC$ . Chứng minh rằng  $MN \parallel (BCD)$ .
- Bài 17:** Cho tứ diện  $ABCD$  với  $M, N$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABD, ACD$ . Chứng minh rằng:  $MN \parallel (ABC)$ .
- Bài 18:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  với đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $F, G$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $SA$  và  $BC$ . Chứng minh rằng:  $FG \parallel (SCD)$ .
- Bài 19:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ ;  $G, G'$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $SAB$  và  $SBC$ .
- Chứng minh  $MN \parallel (SAC)$ .
  - Chứng minh  $GG' \parallel (SAC)$ .
- Bài 20:** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là  $O$  và  $O'$ .
- Chứng minh rằng  $OO'$  song song với các mặt phẳng  $(ADF)$  và  $(BCE)$ .
  - Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm trên các cạnh  $AE, BD$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AE, BN = \frac{1}{3}BD$ . Chứng minh rằng  $MN$  song song với mặt phẳng  $(CDEF)$ .
- Bài 21:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAB, I$  là trung điểm của  $AB$  và  $M$  là điểm trên cạnh  $AD$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AD$ . Đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $AB$  cắt  $CI$  tại  $N$ . Chứng minh rằng  $MG \parallel (SCD)$ .
- Bài 22:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang, đáy lớn là  $AD$  thỏa mãn  $AD = 2BC$ . Gọi  $O$  là giao điểm  $AC$  và  $BD, G$  là trọng tâm tam giác  $SCD$ . Chứng minh rằng  $OG \parallel (SBC)$ .
- Bài 23:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang, đáy lớn là  $AD$  thỏa  $AD = 2BC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SD$ . Chứng minh rằng  $CM \parallel (SAB)$ .
- Bài 24:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .
- Bài 25:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang với các cạnh đáy là  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC, G$  là trọng tâm của tam giác  $SAB$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(IJG)$ .
- Bài 26:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G_1$  và  $G_2$  theo thứ tự là trọng tâm tam giác  $ABD$  và tam giác  $ACD$ . Tìm giao tuyến của mặt phẳng  $(AG_1G_2)$  với mặt phẳng  $(ABC)$ .
- Bài 27:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành.  $Sx$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBD)$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $DC$ . Chứng minh  $MN$  song song với giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .
- Bài 28:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $SD$ .
- Chứng minh:  $(SBC) \parallel (OMN)$ .

b) Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $AB, ON, SB$ . Chứng minh  $PQ \parallel (SBC)$  và  $(OMR) \parallel (SCD)$ .

**Bài 29:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB, SC$ .

a) Chứng minh:  $(MNP) \parallel (ABC)$ .

b) Gọi  $H, G, L$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $SAB, SAC, SBC$ .

Chứng minh:  $(HGL) \parallel (MNP)$ .

**Bài 30:** Cho hai hình vuông  $ABCD$  và  $ABEF$  ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo  $AC$  và  $BF$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $AM = BN$ . Các đường thẳng song song với  $AB$  vẽ từ  $M, N$  lần lượt cắt  $AD$  và  $AF$  tại  $M'$  và  $N'$ . Chứng minh:

a)  $(ADF) \parallel (BCE)$ .

b)  $(DEF) \parallel (MM'NN')$ .

**Bài 31:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $G, H, K$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC, BCD, A'AD$ . Chứng minh rằng  $(GHK) \parallel (A'BCD')$ .

**Bài 32:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AC, AA', A'C', BC$ . Chứng minh rằng  $(MNQ) \parallel (A'B'C')$ .

---HẾT---