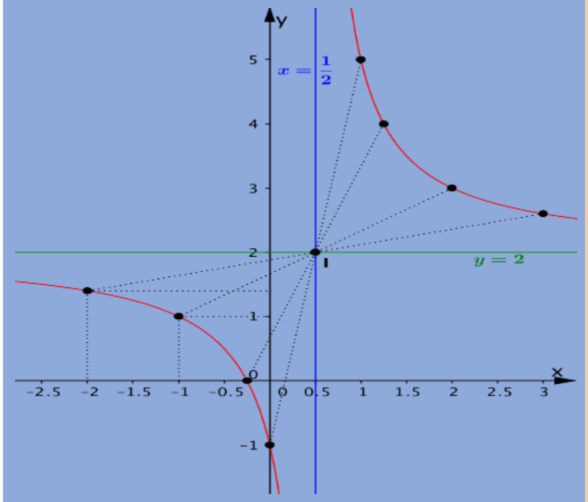
VÕ CÔNG TRƯỜNG
0983 900 570

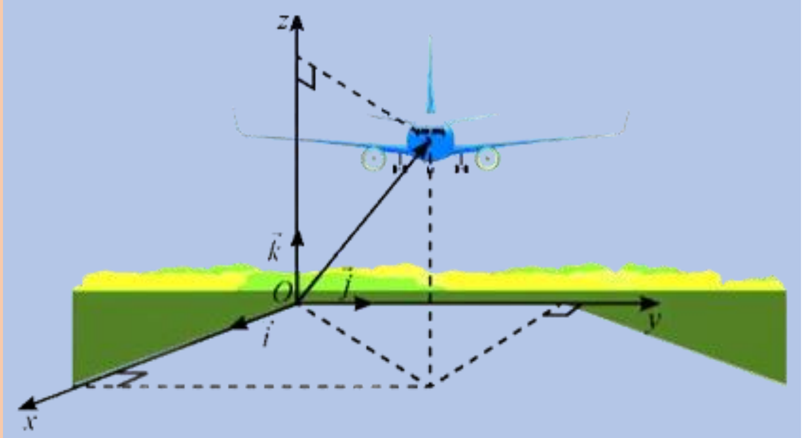


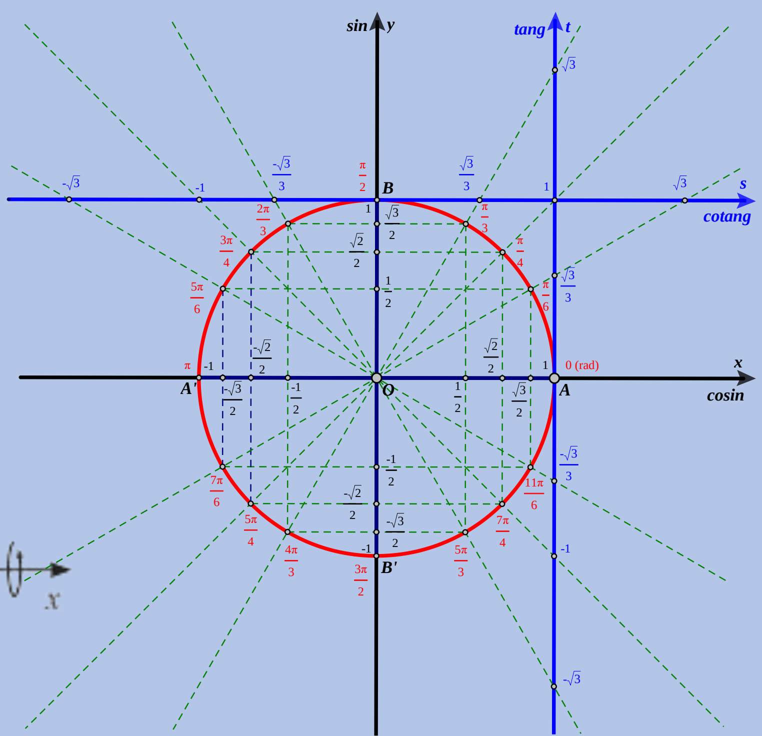
TÀI LIỆU ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

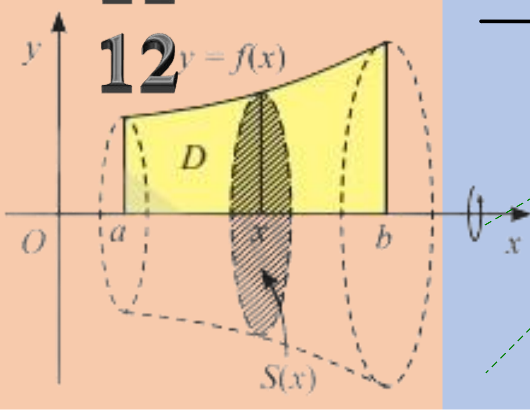
THEO CHƯƠNG TRÌNH MỚI 2018

MÔN TOÁN

HỆ THỐNG KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN LỚP 10 11 12







2024-2025

MỤC LỤC

☞ CHƯƠNG TRÌNH TOÁN LỚP 12

PHẦN☞ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

CHƯƠNG ☞ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bảng công thức đạo hàm

Hàm sơ cấp	*Hàm hợp*	*Phép toán*
(1) $(C)'=0$	Quy tắc đạo hào của hàm hợp $\boxed{\left[f(u)\right]'=f'(u).u'}$	(25) $(u\pm v)'=u'\pm v'$
(2) $(x)'=1$		(26) $(u.v)'=u'.v+u.v'$
(3) $(x^{\alpha})'=\alpha.x^{\alpha-1}$	(14) $(u^{\alpha})'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$	(27) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$
(4) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$	(15) $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2.\sqrt{u}}$	(28) $(k.u)'=k.u'$, (k là hằng số)
(5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{-1}{x^2}$	(16) $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$	(29) $\left(\dfrac{k}{v}\right)'=\dfrac{-k.v'}{v^2}$
(6) $(\sin x)'=\cos x$	(17) $(\sin u)'=u'.\cos u$	***Đặc biệt***
(7) $(\cos x)'=-\sin x$	(18) $(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$	(30) $\left(\dfrac{1}{x^{\alpha}}\right)'=\dfrac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$
(8) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	(19) $(\cos u)'=-u'.\sin u$	(31) $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
(9) $(\cot x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	(20) $(\cot u)'=\dfrac{-u'}{\sin^2 u}$	(32) $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)'=\dfrac{adx^2+2aex+(be-cd)}{(dx+e)^2}$
(10) $(a^x)'=a^x.\ln a$	(21) $(a^u)'=a^u.\ln a.u'$	
(11) $(e^x)'=e^x$	(22) $(e^u)'=e^u.u'$	
(12) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x.\ln a}$	(23) $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$	
(13) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	(24) $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$	

1. Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa

Kí hiệu K là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $y=f(x)$

- Gọi là *đồng biến* trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K$ mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$.
- Gọi là *nghịch biến* trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K$ mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$.

Định lý

- Nếu $f'(x)>0,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K
- Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K

Chú ý

(1) Trên K,

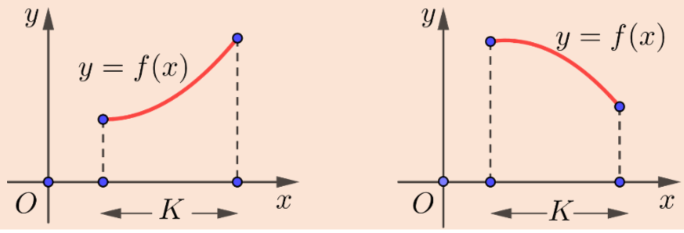
• Nếu $f'(x)=0$ thì hàm số $y=f(x)$ không đổi

• Nếu $f'(x)\geq 0$ và $f'(x)=0$ tại hữu hạn điểm thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến

• Nếu $f'(x)\leq 0$ và $f'(x)=0$ tại hữu hạn điểm thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến

(2) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị *đi lên* từ trái sang phải (*Hình trái*).

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị *đi xuống* từ trái sang phải (*Hình phải*).



2. Cực trị của hàm số

Khái niệm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0\in(a;b)$.

• $\exists h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực đại*** tại x_0.

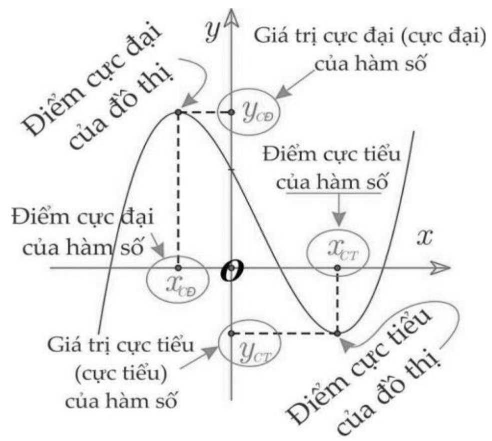
• $\exists h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực tiểu*** tại x_0.

Chú ý

(1) x_0: Điểm Cực đại (Cực tiểu) của ***hàm số*** → Gọi chung là điểm Cực trị của ***hàm số***

(2) y_{CD}: Giá trị Cực đại; y_{CT}: Giá trị Cực tiểu của HS; Gọi chung là Giá trị Cực trị; Gọi gọn là Cực trị.

(3) $(x_0;y_{CD})$: Điểm Cực đại, $(x_0;y_{CT})$: Điểm Cực tiểu của ***đồ thị hàm số***.



Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị tại một điểm

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

• Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

• Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Nhận xét

(1) Định lí trên được thể hiện bằng bảng biến thiên

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	

Nếu đạo hàm đổi dấu từ (+) sang (–) khi x qua điểm x_0 xác định thì hàm số đạt cực đại tại x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	

Nếu đạo hàm đổi dấu từ (–) sang (+) khi x qua điểm x_0 xác định thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0

(2) Nếu $f'(x_0)=0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không đạt cực trị tại x_0.

(3) Số điểm cực trị của hàm số bằng số lần đổi dấu của đạo hàm tại các điểm xác định của hàm số.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. XÉT SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Tìm đạo hàm. Tìm nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm.

Bước 3. Lập bảng biến thiên:

x	Điền TXĐ; nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm (theo thứ tự tăng dần).
y'	Xét dấu đạo hàm y'
y	Vẽ chiều biến thiên (mũi tên chéo lên khi $y'>0$, chéo xuống khi $y'<0$); Điền Giới hạn hàm số, Giá trị hàm số tại các điểm x tương ứng vào đầu, cuối các mũi tên

Bước 4. Dựa vào bảng biến thiên, kết luận chiều biến thiên trên từng khoảng.

PHƯƠNG PHÁP XÉT DẤU BIỂU THỨC

Xét dấu biểu thức $f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định (Nếu cần)

Bước 2. Tìm nghiệm của $f(x)$.

Bước 3. Lập bảng xét dấu

Cách 1. Xét dấu bằng các quy tắc đã biết:

(1) *Dấu của Nhị thức bậc nhất* $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		*Trái dấu a*	0	*Cùng dấu a*	

(2) *Dấu của Tam thức bậc hai* $f(x)=ax^2+bx+c,\ (a\neq 0)$, $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta<0$	x	$-\infty$		$+\infty$
	$f(x)$		*Cùng dấu a*	

$\Delta=0$	x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
	$f(x)$		*Cùng dấu a*	0	*Cùng dấu a*	

$\Delta>0$	x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
	$f(x)$		*Cùng dấu a*	0	*Trái dấu a*	0	*Cùng dấu a*	

Cách 2. Xét dấu bằng cách tính giá trị biểu thức (Dùng máy tính cầm tay)

Các nghiệm chia tập xác định thành nhiều khoảng, mỗi khoảng chọn một điểm đại diện và tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm đó, xác định dấu và điền dấu vào bảng xét dấu

Ví dụ 1: Giả sử $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right. \left(x_1<x_2<x_3\right)$.

x	a	x_1	b	x_2	c	x_3	d
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
	$f(a)>0$		$f(b)<0$		$f(c)<0$		$f(d)>0$

Cách 3. Xét dấu bằng quy tắc xét dấu khoảng

Quy tắc: Hai khoảng liền kề nghiệm đơn (bội lẻ) khác dấu; Hai khoảng liền kề nghiệm kép (bội chẵn) cùng dấu

1.Xác định loại nghiệm của $f(x)$ (nếu được): nghiệm nào là nghiệm đơn (bội lẻ), nghiệm kép (bội chẵn)

2.Xác định dấu của $f(x)$ trên một khoảng nào đó, từ đó lần lượt suy ra dấu của các khoảng còn lại.

Ví dụ 2: Giả sử $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right. \left(x_1<x_2<x_3\right)$. Trong đó: x_1, x_3 là nghiệm đơn; x_2 là nghiệm kép

x		x_1		x_2		x_3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

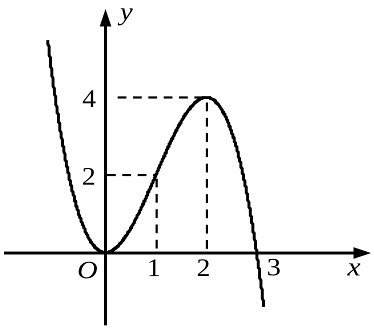
Cách 4. Xét dấu bằng đồ thị

Chú ý

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $f(x)=0$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Lời giải

Đồ thị và trục hoành có 2 điểm chung tại hoành độ $x=0,\ x=3$, nên ta có:

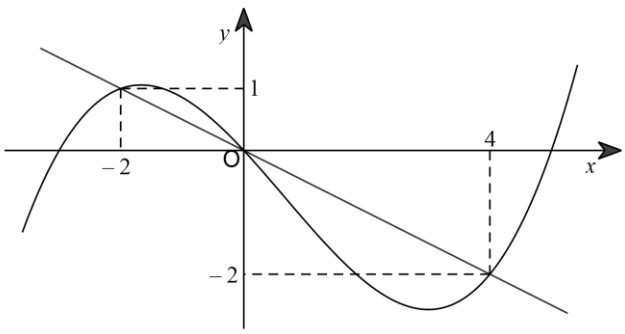
$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Trên $(-\infty;0)$, $(0;3)$ đồ thị nằm trên trục hoành nên $f(x)$ có giá trị dương; trên $(3;+\infty)$ đồ thị nằm dưới trục hoành nên $f(x)$ có giá trị âm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)=g(x)-h(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ với $y=g(x)$, $y=h(x)$ lần lượt có đồ thị là đường cong và đường thẳng như hình vẽ.



Lời giải

Đồ thị 2 hàm số $y=g(x)$, $y=h(x)$ có 3 điểm chung tại hoành độ $x=-2,\ x=0,\ x=4$, nên ta có:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)-h(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Trên $(-\infty;-2)$, $(0;4)$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm dưới $y=h(x)$ nên $g(x)<h(x)\Leftrightarrow g(x)-h(x)<0$ hay $f(x)$ có giá trị âm;

Trên $(-2;0)$, $(4;+\infty)$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm trên $y=h(x)$ nên $g(x)>h(x)\Leftrightarrow g(x)-h(x)>0$ hay $f(x)$ có giá trị dương.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dạng 1.1. Hàm số cho bởi bảng biến thiên, đồ thị.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

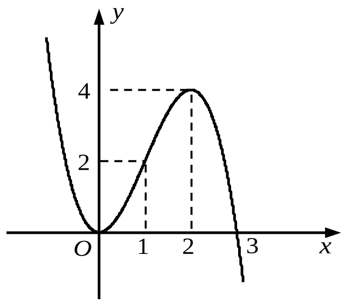
A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $y'<0$ trên các khoảng $(-2;0)$, $(2;+\infty)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$, $(2;+\infty)$. Chọn đáp án **A**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;3)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị đi lên trên các khoảng $(-2;0)$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$. Chọn đáp án **C**

Dạng 1.2. Hàm số cho bởi biểu thức hoặc biểu thức đạo hàm

Ví dụ 7: Hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-4;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-3x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$. Chọn đáp án **B**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;3)$. Chọn đáp án **C**

2. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Tìm đạo hàm. Tìm nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm.

Bước 3. Lập bảng biến thiên:

x	Điền TXĐ; nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm (theo thứ tự tăng dần).
y'	Xét dấu đạo hàm y'
y	Vẽ chiều biến thiên (mũi tên chéo lên khi $y'>0$, chéo xuống khi $y'<0$); Điền Giới hạn hàm số, Giá trị hàm số tại các điểm x tương ứng vào đầu, cuối các mũi tên

Bước 4. Dựa vào bảng biến thiên và định lí, kết luận cực trị.

Dạng 2.1. Hàm số cho bởi bảng biến thiên hoặc đồ thị

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=5$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, dễ dàng thấy đáp án **A**

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$-$	

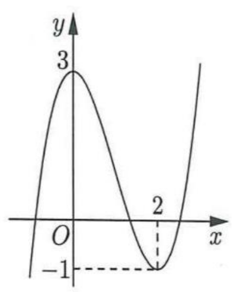
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi x qua các điểm $x=-1$, $x=0$, $x=1$, nhưng $x=0$ là điểm không xác định nên hàm số chỉ có điểm cực trị. Chọn đáp án **C**

Ví dụ 11: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là



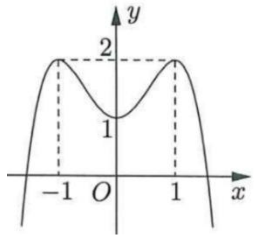
A. -1. **B.** 3.

C. 2. **D.** 0.

Lời giải

Dựa và đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0;3)$, điểm cực tiểu là $(2;-1)$. Chọn đáp án **B**

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



A. $(-1;2)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(1;2)$. **D.** $(1;0)$.

Lời giải

Dựa và đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại là $(-1;2)$, $(1;2)$ và 1 điểm cực tiểu là $(0;1)$. Chọn đáp án **B**

Dạng 2.2. Hàm số cho bởi biểu thức hoặc biểu thức đạo hàm

Ví dụ 13: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó: $x_{CD}=1 \Rightarrow y_{CD}=4 \Rightarrow x_{CD}+y_{CD}=5.$ Chọn đáp án **A**

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;2;3;4\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$\searrow$				$\nearrow$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2. Chọn đáp án **C**

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên D

- Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* (**GTLN**) của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu $f\left(x\right)\le M;\forall x\in D$ và $\exists x_0\in D:f\left(x_0\right)=M$.

  Kí hiệu $M=\max\limits_{x\in D} f\left(x\right)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f\left(x\right)$.

- Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* (**GTNN**) của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu $f\left(x\right)\ge m;\forall x\in D$ và $\exists x_0\in D:f\left(x_0\right)=m$

  Kí hiệu $m=\min\limits_{x\in D} f\left(x\right)$ hoặc $m=\min\limits_{D} f\left(x\right)$.

Tóm tắt

$$\begin{cases} f\left(x\right)\le M,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D:\ f\left(x_0\right)=M \end{cases}\Leftrightarrow \max\limits_{D} f\left(x\right)=M \qquad \begin{cases} f\left(x\right)\ge m,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D:\ f\left(x_0\right)=m \end{cases}\Leftrightarrow \min\limits_{D} f\left(x\right)=m$$

Chú ý :

(1) Nếu hàm số chỉ có 1 cực đại trên K thì $\max\limits_{K} y=y_{CD}$. Nếu hàm số chỉ có 1 cực tiểu trên K thì $\min\limits_{K} y=y_{CT}$

(2) Nếu hàm số đồng biến trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì $\min\limits_{[a;b]} y=y\left(a\right)$, $\max\limits_{[a;b]} y=y\left(b\right)$

Nếu hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì $\min\limits_{[a;b]} y=y\left(b\right)$, $\max\limits_{[a;b]} y=y\left(a\right)$

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$

Bước 1: Tìm đạo hàm $f'\left(x\right)$, Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $\left(a;b\right)$, tại đó $f'\left(x\right)=0$ hoặc $f'\left(x\right)$ không xác định. (Tìm các nghiệm và các điểm không xác định của đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên khoảng $\left(a;b\right)$)

Bước 2: Tính $f\left(a\right),f\left(b\right),f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right)$

Bước 3: Kết luận: $\max\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=\max\left\{f\left(a\right),f\left(b\right),f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right)\right\}$. (Giá trị lớn nhất ở Bước 2)

$\min\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=\min\left\{f\left(a\right),f\left(b\right),f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right)\right\}$. (Giá trị nhỏ nhất ở Bước 2)

3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (hay nửa khoảng) K

Bước 1. Lập bảng biến thiên → Đặt K vào vị trí thích hợp;

Bước 2. Dựa vào bảng biến thiên, nhận xét và kết luận GTLN-GTNN

Chú ý: Trên một khoảng hàm số có thể không có hay chỉ có GTLN hoặc GTNN.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Ví dụ 15: Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau. Chọn mệnh đề đúng.

x	2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	-4	↗	12

A. $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x)=5$. **B.** $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x)=-4$.

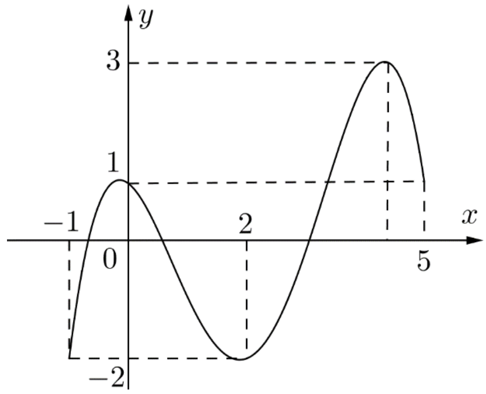
C. $\max\limits_{(2;+\infty)} f(x)=12$. **D.** $\max\limits_{(2;+\infty)} f(x)=7$.

Lời giải

Dựa vào hàng giá trị $f\left(x\right)$ ta thấy, giá trị -4 là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khonagr $\left(2;+\infty\right)$.

Chọn **B**

Ví dụ 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng



A. -1 **B.** 4
C. 1 **D.** 2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy, Điểm cao nhất của đồ thị là điểm có tung độ bằng 3, điểm thấp nhất của đồ thị có tung độ bằng -2

Vậy giá trị lớn nhất là 3 và giá trị nhỏ nhất là -2. Chọn **C**

Ví dụ 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 1. **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Lời giải

• Đạo hàm: $f'(x)=-4x^3+24x^2$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;2] \\ x=\sqrt{6}\notin[-1;2] \\ x=-\sqrt{6}\notin[-1;2] \end{array}\right.$

• $f(-1)=12,\quad f(2)=33,\quad f(0)=1$

Vậy, $\max\limits_{[-1,2]} f(x)=33$

Ví dụ 18: Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$.. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$.. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{33}{5}$.. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$..

Lời giải

• Đạo hàm: $y'=3-\dfrac{8}{x^3}$;

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^3}=3 \Leftrightarrow x^3=\dfrac{8}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$

• Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{(0;+\infty)} y=y\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}\right)=3\sqrt[3]{9}$

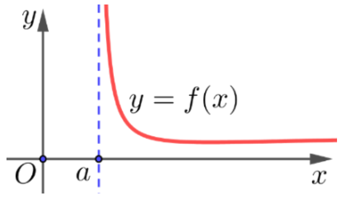
BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

1. Tiệm cận đứng

Định nghĩa

Đường thẳng $x=a$ được gọi là một ***đường tiệm cận đứng*** (hay tiệm cận đúng) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=-\infty$



Cách tìm tiệm cận đứng

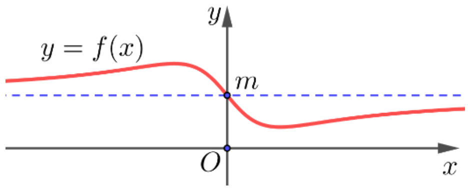
Để tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì ta tính giới hạn của hàm số tại các nghiệm của mẫu. Dựa vào định nghĩa ta kết luận tiệm cận đứng. ***(Xem sơ đồ ở trang sau)***

2. Tiệm cận ngang

Định nghĩa

Đường thẳng $y=m$ được gọi là một ***đường tiệm cận ngang*** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=m$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=m$



Cách tìm tiệm cận ngang

Để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số thì ta tính giới hạn của hàm số tại 2 đầu vô cực. Dựa vào định nghĩa ta kết luận tiệm cận đứng. ***(Xem sơ đồ ở trang sau)***

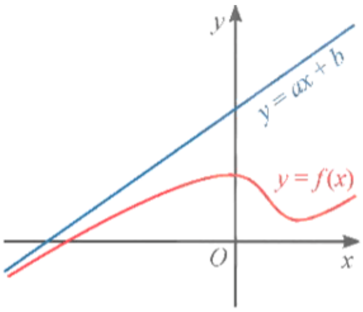
3. Tiệm cận xiên

Định nghĩa

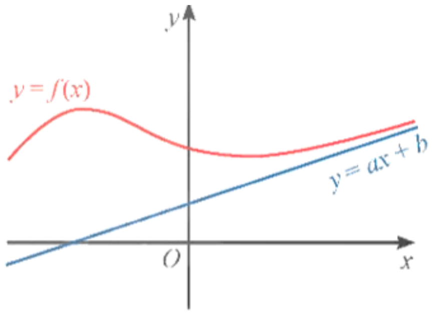
Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$, được gọi là ***đường tiệm cận xiên*** (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$ hoặc

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$



a) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$



b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

Cách tìm tiệm cận xiên

Trường hợp tổng quát:

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]=b$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=a$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]=b$ thì đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên

Trường hợp hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$, với bậc của $P\left(x\right)$ lớn hơn bậc của $Q\left(x\right)$ một đơn vị

Cách 1. Chia đa thức

Nếu $y=f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=ax+b+\dfrac{R\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$, $a\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{R\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=0$ thì đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên

Cách 2.

Tính hệ số a, b của tiệm cận xiên $y=ax+b$ theo công thức:

- $a=\dfrac{a_T}{a_M}$ là thương của 2 hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu;
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]$ hay $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]$

SƠ ĐỒ TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN

ĐƯỜNG TIỆM CẬN *(của đồ thị hàm số $y = f(x)$)*

- **Tiệm cận ngang**
  - Tính giới hạn tại vô cực
    - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$. → TCN: $y = y_0$
    - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ hoặc không có $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ → Không có TCN
- **Tiệm cận đứng**
  - Tính giới hạn tại x_0 (nghiệm Mẫu)
    - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$. → TCĐ: $x = x_0$
    - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ hoặc không có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ → Không có TCĐ $x = x_0$
- **Tiệm cận xiên**
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$. → TCX: $y = mx + n$
- ***Hàm nhất biến*** $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$
  - TCN: $y = \frac{a}{c}$
  - TCĐ: $y = \frac{-d}{c}$ (nghiệm của mẫu)
- ***Hàm bậc hai trên bậc nhất*** $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ *(Với $a, d \neq 0$ và nghiệm mẫu khác nghiệm tử)*
  - TCĐ: $y = \frac{-e}{d}$ (nghiệm của mẫu)
  - TCX: $y = mx + n$
    - $m = \frac{a}{d}$
    - $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx)]$
- ***Hàm hữu tỷ:*** $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *(Đa thức chia Đa thức)*
  - Bậc Tử > Bậc Mẫu → Không có TCN
  - Bậc Tử = Bậc Mẫu → TCN: $y = \frac{a_T}{a_M}$ (thương của 2 hệ số của lũy thừa bậc cao nhất ở tử và mẫu)
  - Bậc Tử < Bậc Mẫu → TCN: $y = 0$
  - TH1: Mẫu có nghiệm x_0 và Tử không có nghiệm x_0; TH2: Tử và Mẫu có nghiệm trùng x_0, nhưng Bậc nghiệm bội của Mẫu > Bậc nghiệm bội x_0 của Tử → TCĐ: $x = x_0$
  - Không có TCĐ
    - TH1: Mẫu vô nghiệm;
    - TH2: Mọi nghiệm của Mẫu đều trùng nghiệm Tử và Bậc nghiệm bội của Mẫu $\leq$ Bậc nghiệm bội của Tử

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG, ĐỨNG.

Ví dụ 19: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; 3$	$\nearrow$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 2 đường thẳng $y=0,\ y=5$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=1$. Chọn **C**

Ví dụ 20: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ là

A. $y=\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ nên $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn **B**

Hay ta có thể dùng công thức: Phương trình tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}=\dfrac{3}{1}=3$

Ví dụ 21: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty; \lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$, suy ra đồ thị có tiệm cận đứng là $x=1$. Chọn **C**

Hay ta có thể dùng công thức: Phương trình tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{-1}{1}=1$

Ví dụ 22: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=5$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=3$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận. Chọn **C**

Ví dụ 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D=[-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^-} y=-\dfrac{9}{4}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} y=0$.

Vậy đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=0$. Chọn **C**

2. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN.

Ví dụ 24: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{(x-2).x}=1$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{x-2}=-1.$

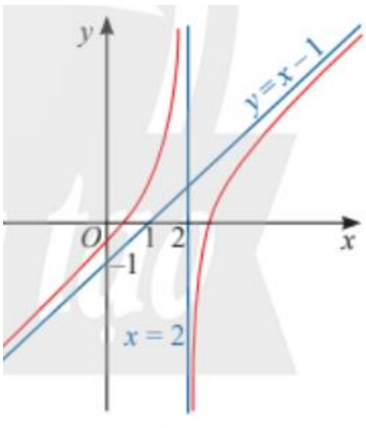
Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-1$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-1$.

Chú ý

Hệ số $a=\dfrac{a_T}{a_M}=\dfrac{1}{1}=1$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ cùng với tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận xiên $y=x-1$ của nó được thể hiện trong Hình 10.



Hình 10

BÀI 4. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Sơ đồ khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Sự biến thiên:

+ Tìm đạo hàm. Tìm nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm.

+ Tính giới hạn của hàm số tại các "đầu ngoặc tròn" của TXĐ. Suy ra các đường tiệm cận (nếu có)

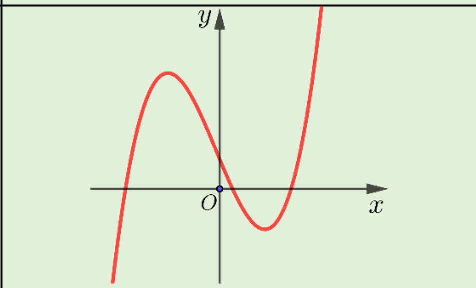
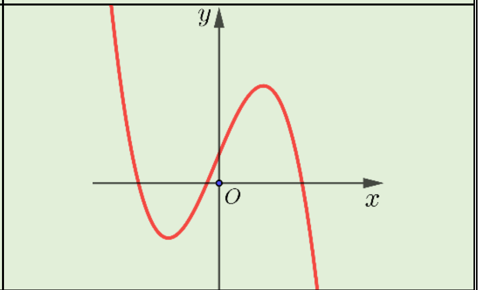
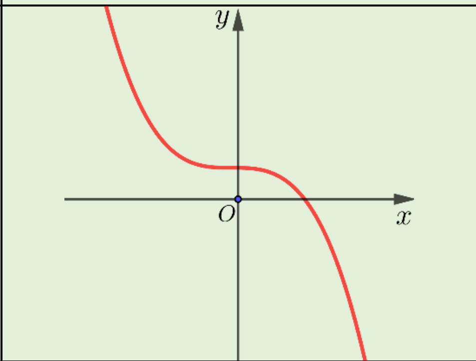
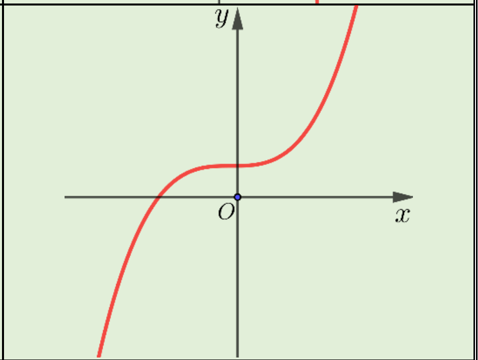
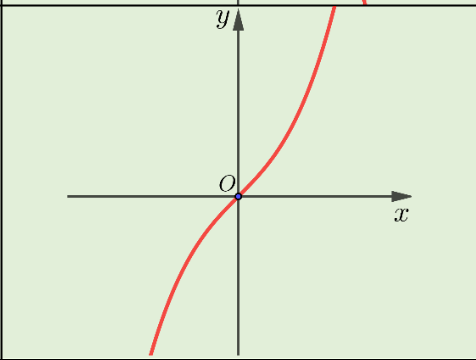
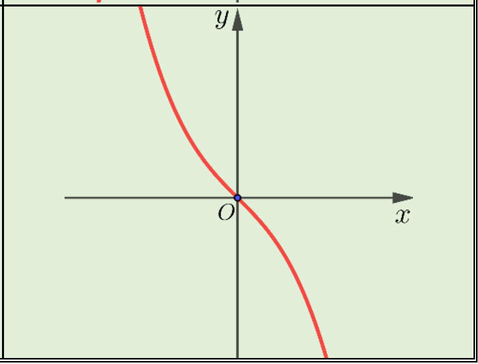
+ Lập bảng biến thiên:

x	Điền TXĐ; nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm (theo thứ tự tăng dần).
y'	Xét dấu đạo hàm
y	Vẽ chiều biến thiên (mũi tên chéo lên khi $y'>0$, chéo xuống khi $y'<0$); Điền Giới hạn hàm số, Giá trị hàm số tại các điểm x tương ứng vào đầu, cuối các mũi tên

Bước 3. Vẽ đồ thị: Lập bảng giá trị (hay điểm đặc biệt), vẽ đồ thị và nhận xét về đồ thị

2. Các dạng đồ thị hàm số thường gặp

a) ***Hàm số bậc 3:*** $y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$

	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.		
Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép.		
Phương trình $y'=0$ vô nghiệm.		

Nhận xét đồ thị:

(1)***Hai đầu đồ thị:*** ĐTHS bậc 3 (bậc lẻ nói chung) luôn có một đầu đi lên và một đầu đi xuống.

Đầu bên phải: Đi lên → $a>0$; Đi xuống → $a<0$.

(2)***Giao điểm với trục Oy:*** Nằm phía trên trục hoành → $d>0$; Nằm phía dưới trục hoành → $d<0$

Qua O $\Leftrightarrow d=0$

(3)***Điểm cực trị:*** Hai điểm cực trị nằm:

Khác phía so với trục Oy → $a.c<0$;

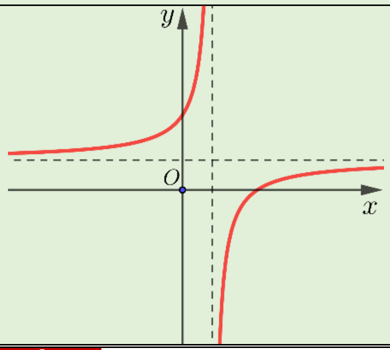
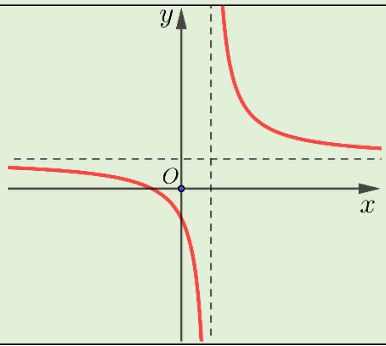
Cùng phía bên phải Oy → $a,\ c$ trái dấu với b; ***Cùng phía bên trái*** Oy → $a,\ b,\ c$ cùng dấu.

Có điểm cực trị thuộc Oy → $c=0$

(4) ***Tâm đối xứng:*** điểm $I\left(x_0;y_0\right)$, với $x_0=\dfrac{-b}{3a}$ (là nghiệm PT $y''=0$) và $y_0=f\left(x_0\right)$

Tâm đối xứng cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị.
Tâm đối xứng nằm ***bên phải*** trục Oy → $a,\ b$ trái dấu; ***bên trái*** trục Oy → $a,\ b$ cùng dấu.

b) ***Hàm số nhất biến:*** $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad\left(ad-bc\neq 0\right)$

$y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}>0$	$y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}<0$
	

Nhận xét đồ thị:

(1) ***Tâm đối xứng*** là điểm $I\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ (là giao điểm 2 đường tiệm cận).

(2) ***Tiệm cận ngang:*** $y=\dfrac{a}{c}$;

Tiệm cận đứng: $x=\dfrac{-d}{c}$ (nghiệm của mẫu).

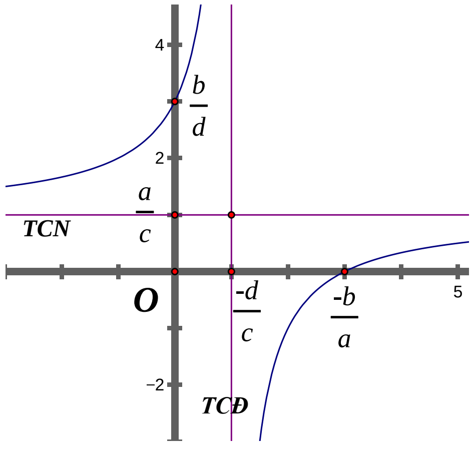
(3) ***Giao điểm với Oy:*** $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}$;

Giao điểm với Ox: $y=0\Rightarrow x=\dfrac{-b}{a}$ (nghiệm của tử).

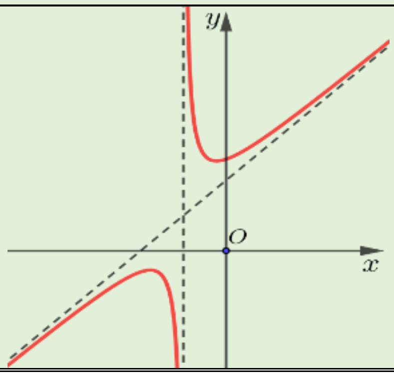
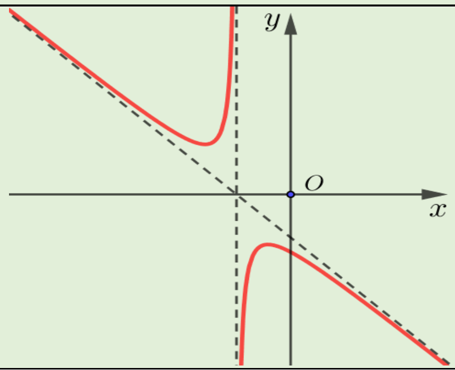
Qua O $\Leftrightarrow b=0$

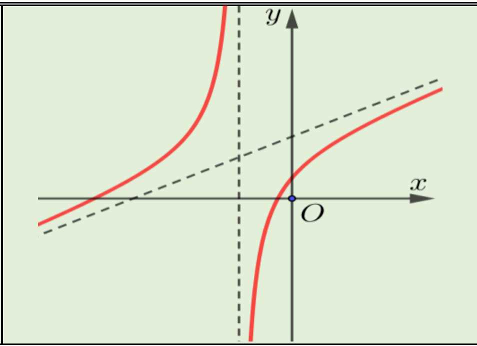
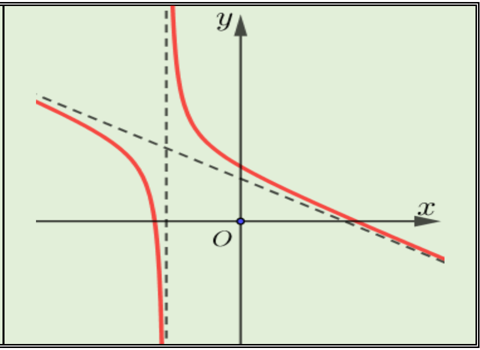
(4) ***Hàm số đồng biến*** $\Leftrightarrow ad-bc>0$;

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow ad-bc<0$



c) ***Hàm số hữu tỷ bậc hai chia bậc một:*** $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\quad(a\neq 0)$

	a, d ***cùng dấu***	*a, d* ***trái dấu***
Phương trình $y'=0$ ***có hai nghiệm phân biệt.***		

Phương trình $y'=0$ vô nghiệm.		

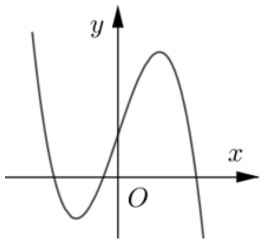
Nhận xét đồ thị:

(1)*Tiệm cận đứng* $x=-\dfrac{e}{d}$ (Nghiệm của mẫu)

(2)*Tiệm cận xiên:* Đi lên nếu $a,\ d$ cùng dấu và đi xuống nếu $a,\ d$ trái dấu.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Ví dụ 25: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

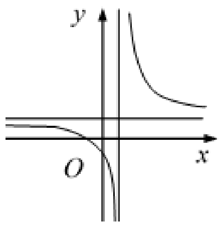
C. $y=x^3-3x+1$. **D.** $y=-x^3-2x^2-1$.

Lời giải

Đồ thị có đầu bên trái đi lên, đầu bên phải đi xuống nên hàm số bậc lẻ và $a>0$, do đó loại câu A, C

Giao điểm của đồ thị và trục tung nằm phái trên trục hoành nên $d>0$. Do đó chọn **B**

Ví dụ 26: Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào sau?



A. $y=\dfrac{2x-3}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-x}{x-1}$.

C. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

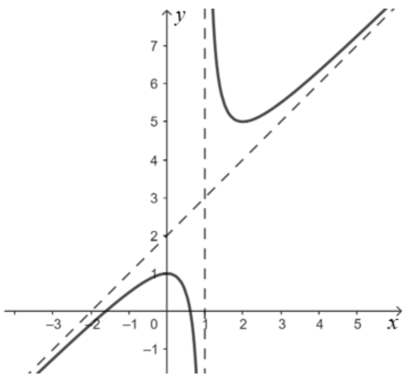
Lời giải

Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ nằm phía trên trục hoành nên $\dfrac{a}{c}>0$, do đó loại câu B.

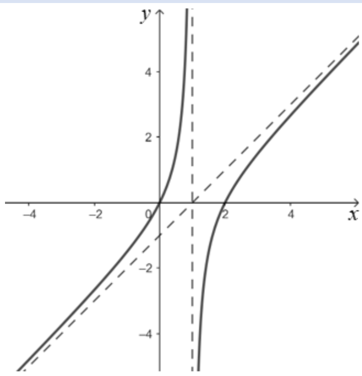
Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}$ nằm bên phải trục tung nên $\dfrac{-d}{c}>0$ (nghiệm của mẫu là số dương), do đó loại câu C.

Giao điểm của đồ thị và trục tung nằm phía dưới trục hoành nên tung độ giao điểm $y=\dfrac{b}{d}<0$. Do đó chon câu **D**

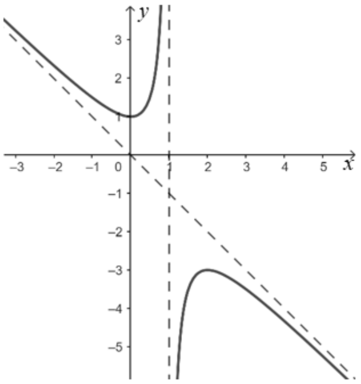
Ví dụ 27: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

A. 

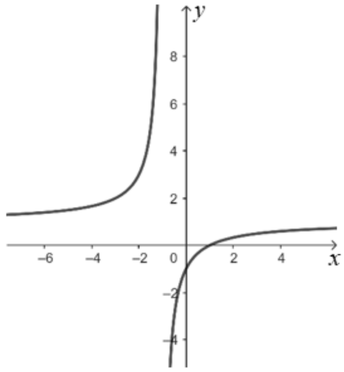
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải

Câu D không đúng dạng đồ thị nên loại.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bẳng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chọn **A**

Chú ý. Có thể nhận xét, do đạo hàm có 2 nghiệm và hệ số a, d cùng dấu nên đồ thị có dạng câu **A**

BỔ SUNG KIẾN THỨC: SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

(1) Số nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

(2) Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=g(x)$.

BÀI TOÁN 1. CHO 2 HÀM SỐ. XÁC ĐINH GIAO ĐIỂM CỦA 2 ĐỒ THỊ HÀM SỐ

(Dấu hiệu nhận biết: Trong đề có từ "Cắt", "tiếp xúc", "giao điểm" hay "điểm chung"…)

Tìm giao điểm: của đường cong $(C): y=f(x)$ ***và đường thẳng*** $(d): y=g(x)$

Bước 1. Lập PT hoành độ giao điểm của (C) và (d) : $f(x)=g(x)$ (*)

Bước 2. Giải PT(*) tìm x (là hoành độ giao điểm)→Thay x vào $y=f(x)$ hay $y=g(x)$ →Tính y (là tung độ giao điểm).

Ví dụ 28: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3+3x^2=3x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Ví dụ 29: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-x^3+7x=0$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{7} \end{array}\right..$$

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành bằng 3.

BÀI TOÁN 2: DÙNG ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN ĐỂ XÁC ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Cho hàm số $y=f(x)$ ***có bảng biến thiên hoặc đồ thị → Tìm nghiệm (hay số nghiệm) phương trình*** $F(x)=0$ ***(có chứa*** $f(x)$***)***

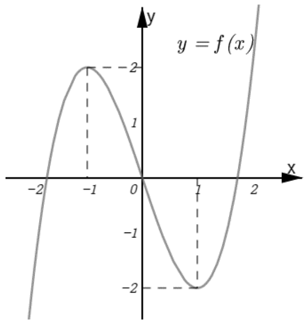
Bước 1. Biến đổi: $F(x)=0(1) \Leftrightarrow f(x)=b$ (2)

(PT(2) là PT hoành độ giao điểm của $(C): y=f(x)$ và $(d): y=b$, với (d) là đường thẳng cùng phương trục Ox và cắt trọc Oy tại điểm có tung độ $y=b$)

Bước 2. Vẽ thêm đường thẳng $(d): y=b$ lên bảng biến thiên hoặc đồ thị.

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị: Kết luận (Số nghiệm PT $F(x)=0$ bằng Số điểm chung của $(C): y=f(x)$ $(d): y=b$

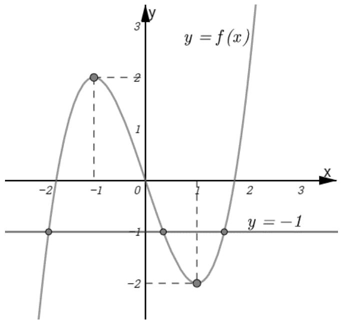
Ví dụ 30: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=-1$ là



A. 3. **B.** 1.
C. 0 **D.** 2

Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=-1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Ví dụ 31: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x\right)+3=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2f\left(x\right)+3=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$y=-\dfrac{3}{2}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

CHƯƠNG ☞ NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x)=f(x)$, với mọi $x\in K$.

Định lý

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K, kí hiệu $\int f(x)dx$ và viết:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

Như vậy:

$F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

$\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

$\Leftrightarrow \int f(x)dx=F(x)+C$ (họ nguyên hàm)

Chú ý

(1) Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$

Vậy, $dF(x)=F'dx=f(x)dx$

(2) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

(3) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

(4) $\int f'(x)dx=f(x)+C$

2. Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số lũy thừa (1) $\int 0\mathrm{d}x=C$ (2) $\int 1\mathrm{d}x=x+C$ (3) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$ **Nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{x}$** (4) $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$	**Nguyên hàm của hàm số lượng giác** (5) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$ (6) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$ (7) $\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\tan x+C$ (8) $\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x=-\cot x+C$ **Nguyên hàm của hàm số mũ** (9) $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$ (10) $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (0<a\neq1)$

Công thức nguyên hàm bổ sung

(11) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$ (12) $\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C$	(13) $\int\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ (14) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C$	(15) $\int(ax+b)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^n}{n+1}+C$ $(a\neq0,\ n\neq-1)$

3. Các tính chất của nguyên hàm

(1) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$, với k là hằng số khác 0

(2) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. TÌM HỌ NGUYÊN HÀM

Ví dụ 32: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+6x$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(\cos x+6x)\mathrm{d}x = \int \cos x\mathrm{d}x + 6\int x\mathrm{d}x = \sin x + 3x^2 + C$.

Ví dụ 33: Tìm họ nguyên hoàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^4+2x}{x^2}$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{x^4-2x}{x^2}\mathrm{d}x = \int\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - 2\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - 2\ln x + C$.

2. TÌM NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN

Ví dụ 34: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x = -\cos x + \sin x + C$

Mà $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2 \Leftrightarrow -\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}+C=2 \Leftrightarrow 1+C=2 \Leftrightarrow C=1$

Vậy $F(x)=-\cos x+\sin x+1$.

Ví dụ 35: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. Tính $F(1)$

Lời giải

Ta có $F(x)=\int(e^x+2x)\mathrm{d}x = e^x+x^2+C$

Mà $F(0)=1+C=\dfrac{3}{2} \Rightarrow C=\dfrac{1}{2} \Rightarrow F(x)=e^x+x^2+\dfrac{1}{2}$.

Vậy $F(1)=e^1+1^2+\dfrac{1}{2}=e+\dfrac{3}{2}$

3. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài toán chuyển động (liên hệ giữa quãng đường, tốc độ và gia tốc)

Bước 1: Xét mối liên hệ giữa các đại lượng

▪Xét mối quan hệ giữa các đại lượng quãng đường $s(t)$ và tốc độ $v(t)$ theo thời gian t

+ Tốc độ là đạo hàm của quãng đường: $v(t)=s'(t)$

+ Quãng đường là nguyên hàm của tốc độ: $\int v(t)dt = s(t)+C$

▪Xét mối quan hệ giữa các đại lượng tốc độ $v(t)$ và gia tốc $a(t)$ theo thời gian t

+ Gia tốc là đạo hàm của tốc độ: $a(t)=v'(t)$

+ Tốc độ là nguyên hàm của gia tốc: $\int a(t)dt = v(t)+C$

Bước 2: Dựa vào điều kiện của giả thiết để tìm đại lượng theo yêu cầu.

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 36: Một ô tô đang chạy thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ chậm dần đều được tính theo hàm số $v(t)=18-2t$ (m/s). Tính quãng đường ô tô chạy được từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn.

Lời giải

Ta có $\int v(t)dt=\int(18-2t)dt=18t-t^2+C$

Tại thời điểm hãm phanh thì $t=0,\ s=0$, ta có: $s(0)=0\Leftrightarrow 18.0-0^2+C=0\Leftrightarrow C=0$

Nên $s(t)=18t-t^2$

Khi dừng hẳn thì $v=0$, ta có: $18-2t=0\Leftrightarrow t=9$

Vậy quãng đường ô tô chạy được từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là $s(10)=18.10-10^2=80$ (m)

BÀI 2. TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình thang cong

Hình thang cong

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và *không âm* trên đoạn $\left[a;b\right]$.

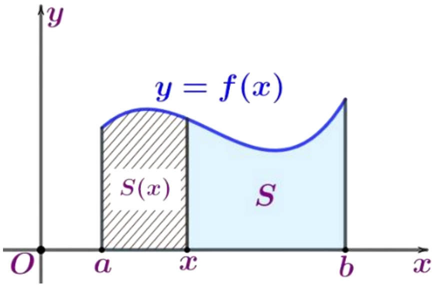
Hình phẳng giới hạn bởi:

» đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$,

» trục hoành,

» hai đường thẳng $x=a,x=b\ \left(a<b\right)$

được gọi là hình thang cong.



Diện tích hình thang cong

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b\ \left(a<b\right)$

được tính bởi công thức: $S=F\left(b\right)-F\left(a\right)$

✓ Trong đó $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$.

2. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f\left(x\right)$, kí hiệu $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

✓ Viết $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)\Big|_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right)$

✓ Gọi $\int\limits_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên,

✓ $f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân, ✓ $f\left(x\right)$ là hàm số dưới dấu tích phân

Chú ý

(1) Trường hợp $a=b$: $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0$;Trường hợp $a>b$: $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$

(2)Tích phân không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

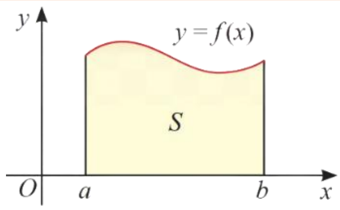
(3)Nếu hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ và $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì

$\int\limits_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(b\right)-f\left(a\right)$

(4)***Ý nghĩa hình học của tích phân***

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoànhvà hai đường thẳng $x=a,x=b$

Vậy $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.



(5)Tốc độ $v\left(t\right)\ge 0$ tại mọi thời điểm $t\in\left[a;b\right]$ thì quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b được tính theo công thức:

$s=s\left(b\right)-s\left(a\right)=\int\limits_a^b v\left(t\right)\mathrm{d}t$.

(6) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

3. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó, ta có các tính chất:

Tính chất 1: $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Tính chất 2: $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$; $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Tính chất 3: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ $c\in(a;b)$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. SỬ DỤNG CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

1	$\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (Tích phân đảo cận $\rightarrow$ thêm dấu trừ).
3	$\int\limits_a^b k.f(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$.
4	$\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
5	Trong đoạn $[a;b]$, tồn tại $c\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

☑ Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 37: Cho $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int\limits_0^3 [2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^3 [2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2.5-3.2 = 4$.

Ví dụ 38: Cho $\int\limits_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t = -4$. Tính $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y$

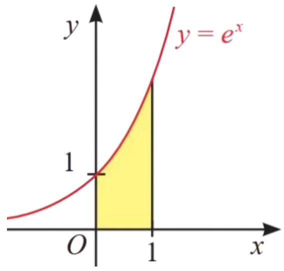
Lời giải

Ta có: $\int\limits_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$, $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y = \int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x = -4-1=-5$. Vậy $\int_2^4 f(y)\mathrm{d}y = -5$.

Ví dụ 39: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$.



Lời giải

Hàm số $y=f(x)=e^x$ không âm trên đoạn $[0;1]$ và có một nguyên hàm $F(x)=e^x$.

Diện tích hình thang cong là $S=F(1)-F(0)=e^1-e^0=e-1$ (đvdt).

2. TÍCH PHÂN HÀM SỐ CHO BỞI NHIỀU CÔNG THỨC

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{khi } x\le b \\ h(x) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

Bước 1. Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$

Bước 2. Tách cận: $J=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x+\int_b^c h(x)\mathrm{d}x$.

Bước 3. Tính các tích phân thành phần, suy ra kết quả.

Ví dụ 40: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{khi } x\ge 2 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+3)=3 \end{cases}$ và $f(2)=3$.

Do đó hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

Ta có: $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 (x^2-2x+3)\mathrm{d}x+\int_2^3 (x^2-1)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_2^3=\frac{23}{3}$.

3. BÀI TOÁN THỰC TẾ: BÀI TOÁN CƠ HỌC

» ***Tính quãng đường chuyển động:*** Một vật chuyển động với tốc độ $v(t)$, quãng đường chuyển động của vật trong khoảng thời gian $t=a$ đến $t=b$ $(a<b)$ là $s=\int_a^b v(t)dt$.

» ***Tính tốc độ chuyển động:*** Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)$, tốc độ của vật đó trong khoảng thời gian $\Delta t=t_2-t_1$ là $v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)dx$.

» ***Tính tốc độ trung bình của chuyển động:*** Một vật chuyển động với tốc độ $v(t)$, tốc độ trung chuyển động của vật trong khoảng thời gian $t=a$ đến $t=b$ $(a<b)$ là $\overline{v}=\frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)dt$.

Ví dụ 41: Một vật chuyển động với tốc độ $10\,m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Hàm tốc độ $\int a(t)\mathrm{d}t=\int(3t+t^2)\mathrm{d}t=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+C$.

Lấy mốc thời gian $(t=0)$ lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0)=10\Rightarrow C=10$.

Ta được: $v(t)=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}+10$.

Sau 10 giây kể từ lúc tăng tốc, quãng đường vật đi được là:

$$s=\int_0^{10}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+10t\right)\Bigg|_0^{10}=\frac{4300}{3}m.$$

Ví dụ 42: Một ô tô chuyển động với tốc độ $20\,m/s$ thì hãm phanh nên tốc độ của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t)=20-50t\ (0\le t\le 4)$. Tính tốc độ trung bình của ô tô trong khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn.

Lời giải

Tốc độ ô tô lúc hãm phanh là $20\,m/s$ hay $v(t)=20-50t=20\Leftrightarrow t=0$

Ô tô dừng khi tốc độ bằng 0 hay $v(t)=20-50t=0\Leftrightarrow t=4$

Vậy tốc độ trung bình của ô tô trong khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn là

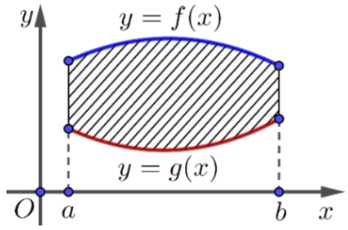
$$\overline{v}=\frac{1}{4-0}\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^4(20-50t)dt=10\ (m/s)$$

BÀI 3. .ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. Tính diện tích hình phẳng

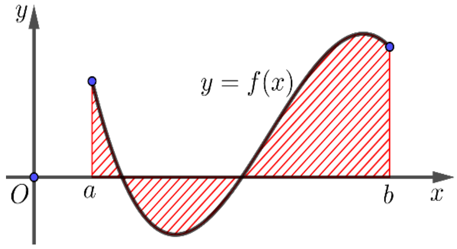
Định lí 1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường: $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$, $x=a,\ x=b\ \left(a<b\right)$ được tính bởi công thức: $\mathrm{S}=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ (1)



Chú ý

(a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường: $y=f\left(x\right)$, trục hoành $Ox: y=0,\ x=a,\ x=b\ \left(a<b\right)$ được tính bởi công thức: $\mathrm{S}=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ (2)



(b) Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x=a,\ x=b$) thì ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$, tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,...,x_n$ (gọi là các hoành độ giao điểm) → Chọn cận dưới trong công thức (1), (2) là số nhỏ nhất và cận trên là số lớn nhất trong các số a,b (nếu có), $x_1,\ x_2,...,x_n$.

(c) Nếu phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$ có n nghiệm $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\left[a;b\right]$ (giả sử $x_1<x_2<...<x_n$) thì tích phân (*) được tách thành tổng (phân đoạn tích phân) như sau:

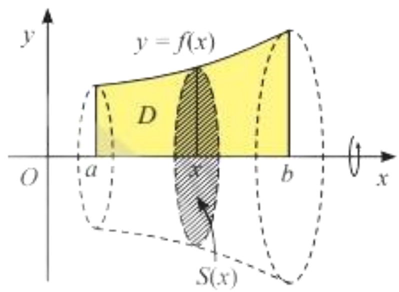
$$\mathrm{S}=\left|\int\limits_a^{x_1}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$$

2. Tính thể tích khối tròn xoay

Định lí 2

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f\left(x\right), Ox,\ x=a\ ,\ x=b\ \left(a<b\right)$ được tính bởi công thức:

$$V=\pi\int\limits_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x\ (3)$$



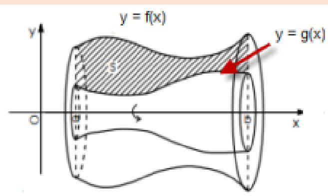
Chú ý

(a) Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x=a,\ x=b$) thì ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f\left(x\right)=0$, tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,...,x_n$ (gọi là các hoành độ giao điểm) → Chọn cận dưới trong công thức (1), (2) là số nhỏ nhất và cận trên là số lớn nhất trong các số a,b (nếu có), $x_1,\ x_2,...,x_n$.

(b) *(Mở rộng)* Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f\left(x\right);\ y=g\left(x\right);\ x=a\ ;\ x=b$ (Với $f\left(x\right).g\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left[a;b\right]$) được tính bởi công thức:

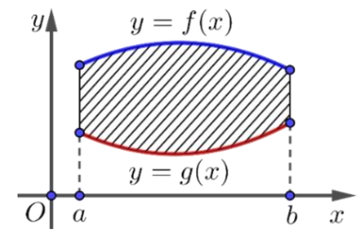
$$V=\pi\int\limits_a^b\left|f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)\right|\mathrm{d}x\ (4)$$



CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC, TÍNH DIỆN TÍCH CỦA HÌNH PHẲNG CHO BỞI HÌNH VẼ

Phương pháp: Dùng Định lí 1



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường: $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$ (1)

Bước 1. Xác định $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ theo hình vẽ

Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường thì a là hoành độ giao điểm cực trái (nhỏ nhất) và b là hoành độ giao điểm cực phải (lớn nhất) của 2 đường $y = f(x)$, $y = g(x)$

Bước 2. Lập công thức tính diện tích (1) và tính kết quả

Chú ý

a) Có thể áp dụng phương pháp trên đối với dạng toán tính thể tích vật thể tròn xoay.

b) Nếu hình phẳng được phân chia ra nhiều phần bởi các giao điểm có hoành độ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a;b]$ thì dùng công thức phân đoạn tích phân:

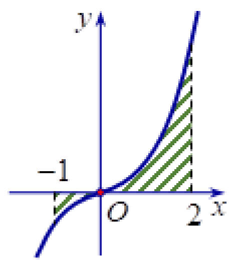
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_n}^{b} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$$

Xét dấu $f(x) - g(x)$ trên từng đoạn tích phân để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Trên đoạn $[m;n]$:

Nếu $f(x) - g(x) \geq 0$ (đường $y = f(x)$ nằm phía trên đường $y = g(x)$) thì $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$

Nếu $f(x) - g(x) < 0$ (đường $y = f(x)$ nằm phía dưới đường $y = g(x)$) thì $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$



Ví dụ 43: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ). Đặt $a = \int_{-1}^{0} f(x) \mathrm{d}x$, $b = \int_0^2 f(x) \mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = b - a$. **B.** $S = -b - a$.
C. $S = a - b$. **D.** $S = b + a$.

Lời giải

Ta thấy:

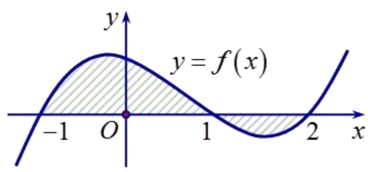
Hình phẳng được giới hạn bởi 4 đường: $y = f(x)$, trục hoành $Ox: y = 0$, $x = a$, $x = b$

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là $S = \int_{-1}^{2} |f(x) - 0| \mathrm{d}x$

Do hình phẳng được phân chia ra 2 phần bởi giao điểm O có hoành độ $x = 0$ nên

$$S = \int_{-1}^{2} |f(x) - 0| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |f(x) - 0| \mathrm{d}x + \int_0^2 |f(x) - 0| \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0} [0 - f(x)] \mathrm{d}x + \int_0^2 [f(x) - 0] \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} f(x) \mathrm{d}x + \int_0^2 f(x) \mathrm{d}x = -a + b$$ (Chọn **A**)



Ví dụ 44: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ. Mệnh đề nào đúng?

A. $S = -\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x - \int_1^2 f(x) \mathrm{d}x$ **B.** $S = \int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x - \int_1^2 f(x) \mathrm{d}x$

C. $S = -\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x + \int_1^2 f(x) \mathrm{d}x$ **D.** $S = \int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x + \int_1^2 f(x) \mathrm{d}x$

Lời giải

Ta thấy:

Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành $Ox: y = 0$

Giao điểm cực trái có hoành độ $x=-1$, giao điểm cực phải có hoành độ $x=2$.

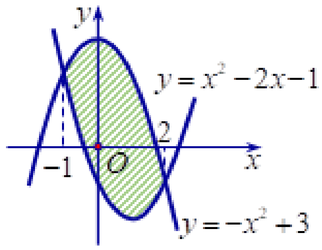
Vậy diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-0\right|dx$

Do hình phẳng được phân chia ra 2 phần bởi giao điểm có hoành độ $x=1$ nên

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-0\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-0\right|dx+\int_{1}^{2}\left|f(x)-0\right|dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-0\right]dx+\int_{1}^{2}\left[0-f(x)\right]dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{1}^{2}f(x)dx$$ (Chọn **B**)

Ví dụ 45: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}(2x-2)dx$. **B.** $\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)dx$.

C. $\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$. **D.** $\int_{-1}^{2}(-2x+2)dx$.

Lời giải

Ta thấy:

Hình phẳng được giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y=x^2-2x-1,\ y=-x^2+3$

Giao điểm cực trái có hoành độ $x=-1$, giao điểm cực phải có hoành độ $x=2$ và hình phẳng không bị phân chia.

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là

$S=\int_{-1}^{2}\left|(x^2-2x-1)-(-x^2+3)\right|dx=\int_{-1}^{2}\left[(x^2-2x-1)-(-x^2+3)\right]dx=\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)dx$ (do trên đoạn $[-1;2]$ phần đồ thị $y=-x^2+3$ nằm trên đồ thị $y=x^2-2x-1$). (Chọn **B**)

2. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CHO BẰNG CÔNG THỨC

Phương pháp: Dùng Định lí 1

Bước 1. Xác định $y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b$

Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x=a,\ x=b$) thì ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$, tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,...,x_n$ (gọi là các hoành độ giao điểm) → Chọn cận dưới trong công thức (1), (2) là số nhỏ nhất và cận trên là số lớn nhất trong các số a,b (nếu có), $x_1,\ x_2,...,x_n$.

Bước 2. Lập công thức tính diện tích và tính kết quả

Ví dụ 46: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^4-4x^2+4,\ \ y=x^2$, đường thẳng $x=0$, $x=1$.

Lời giải

Hình phẳng đã cho giới hạn đủ 4 đường.

Diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_{0}^{1}\left|x^4-4x^2+4-x^2\right|dx=\int_{0}^{1}\left|x^4-5x^2+4\right|dx=\frac{38}{15}$

Ví dụ 47: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$.

Lời giải

Trục hoành có phương trình $y=0$. Hình phẳng đã cho giới hạn đủ 4 đường.

Diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_{1}^{2}\left|(x^2-4x+3)-0\right|dx=\int_{1}^{2}\left|x^2-4x+3\right|dx=\frac{2}{3}$.

Ví dụ 48: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$.

Lời giải

Hình phẳng đã cho giới hạn không đủ 4 đường.

Giải phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$

Ta có: $x(1-x)-(x^3-x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2=a \\ x=1=b \end{array}\right.$

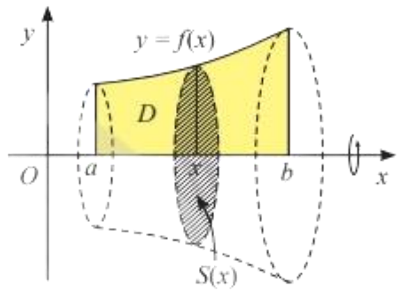
Vậy diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_{-2}^{1}\left|x(1-x)-(x^3-x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{37}{12}$

3. TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

Phương pháp: Dùng định lí 2

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f(x)$, Ox, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính bởi công thức:

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \quad (3)$$



Bước 1. Xác định $y=f(x)$, $Ox: y=0,\ x=a,\ x=b$

Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x=a,\ x=b$) thì ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f(x)=0$, tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,...,x_n$ (gọi là các hoành độ giao điểm) → Chọn cận dưới trong công thức (1), (2) là số nhỏ nhất và cận trên là số lớn nhất trong các số a,b (nếu có), $x_1,\ x_2,...,x_n$.

Bước 2. Lập công thức tính thể tích (3) và tính kết quả

Ví dụ 49: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox: $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$.

Lời giải

Hình phẳng đã cho giới hạn đủ 4 đường như Định lí 2.

Thể tích khối tròn xoay đã cho là $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{202}{5}\pi$

Ví dụ 50: Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=-x^2+2x$ và trục Ox.

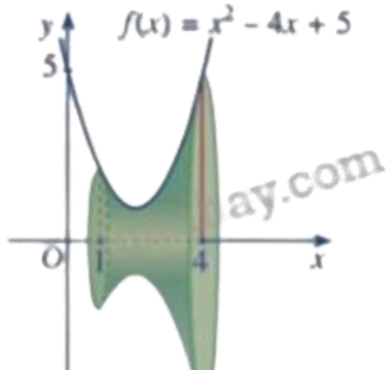
Lời giải

Hình phẳng đã cho giới hạn không đủ 4 đường như Định lí 2.

Giải phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường $y=-x^2+2x$ và $y=0$

Ta có: $-x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0=a \\ x=2=b \end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay đã cho là $V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.



Hình 39

PHẦN☞ HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

CHƯƠNG ☞ VECTƠ VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: VECTO VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Các khái niệm liên quan đến vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như vectơ trong mặt phẳng:

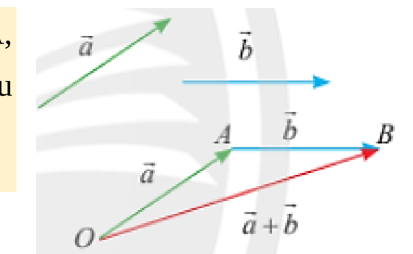
- Giá vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ.
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- Hai vectơ được gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.
- Vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối được gọi là vectơ-không. Vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ. tích của vectơ với một số.

Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vecto $\vec{a},\vec{b}$. Lấy điểm O bất kì và hai điểm A, Bbsao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$.

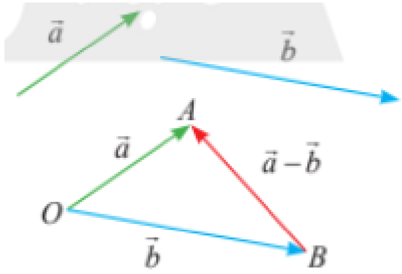
Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Hiệu của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a}+(-\vec{b})$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.



Tích của vectơ với một số

Trong không gian, cho số thực $k\neq 0$ và vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$.

Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

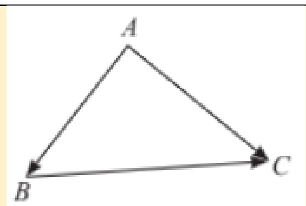
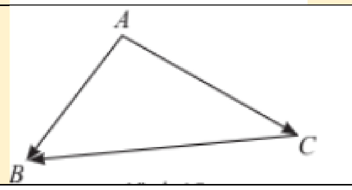
Chú ý:

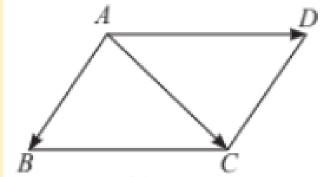
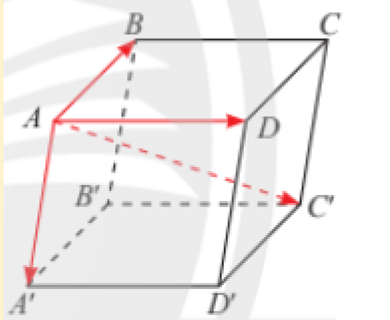
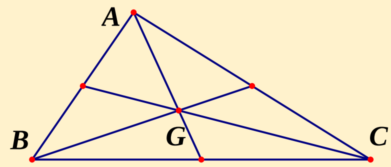
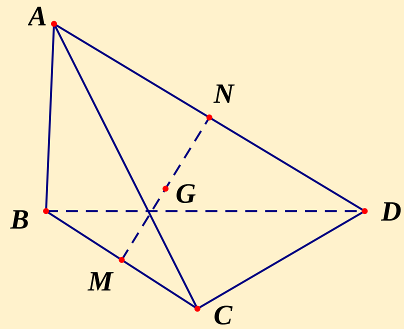
(a)Các tính chất về phép toán vectơ trong không gian tương tự như trong mặt phẳng

(b) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

(c) Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chi khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

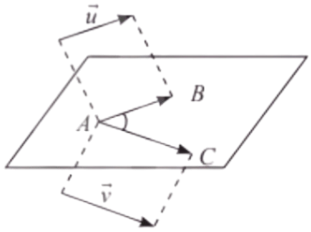
Các quy tắc về phép toán vectơ.

1.Quy tắc ba điểm	Với ba điểm A,B,C. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$	
2.Quy tắc hiệu vectơ	Với ba điểm A,B,C. Ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.$	

3.Quy tắc hình bình hành	Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.	
4.Quy tắc hình hộp	Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'CD'$. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.	
5.Quy tắc trung điểm đoạn thẳng	Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2.\overrightarrow{IM}$, $\forall I$	
6.Quy tắc trọng tâm tam giác	Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3.\overrightarrow{IG}$, $\forall I$	
7.Quy tắc trọng tâm tứ giác (tứ diện)	Nếu G là trọng tâm của tứ giác (hay tứ diện) $ABCD$ thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4.\overrightarrow{IG}$, $\forall I$	

3. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian



Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó, ta gọi BAC là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u},\vec{v})$.

Nhận xét:

$0^\circ \le (\vec{u},\vec{v}) \le 180^\circ$;

Nếu $(\vec{u},\vec{v})=90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, ki hiệu $\vec{u}\cdot\vec{v}$, được xác định bởi công thức

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Chú ý:

(1) Trong trường hợp $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

(2) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=|\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2\ge 0$; $\vec{u}^2=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$

(3) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

(4) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

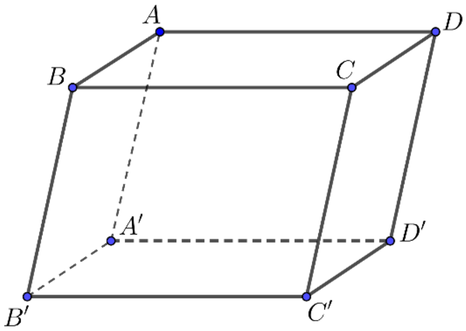
Nhận xét:

Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất sau:

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số k, ta có:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (2) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (3) $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right)$.

Ví dụ 51: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'C'}$.



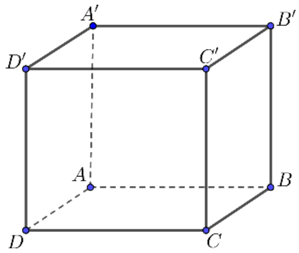
Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A'C'} = 2.\overrightarrow{AC}$. Chọn **C**

Ví dụ 52: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



Ta có $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = DAB$

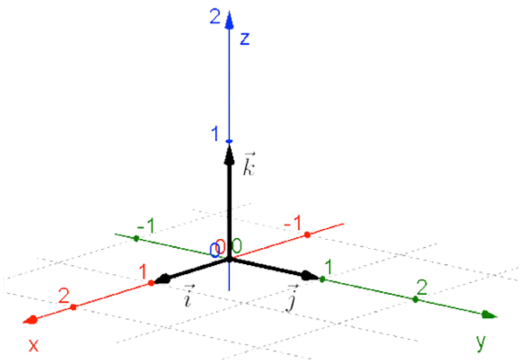
Ta thấy $AB \perp AD \Rightarrow DAB = 90°$. Vậy $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = 90°$

Chọn **A**

BÀI 2: TOẠ ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản là hệ tọ độ $Oxyz$.



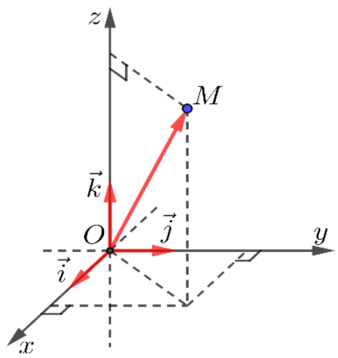
Nhận xét:

- Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- Các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các trục tọa độ.
- Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặtphẳng toạ độ.
- Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.
- Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

2. Tọa độ của điểm và vectơ

Tọa độ của điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M. Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$; x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M.



Toạ độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Nhận xét:

(1) Toạ độ của điểm M là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, tức là $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$.

(2) Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

TỌA ĐỘ CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT

Điểm thuộc trục tọa độ	***Điểm thuộc mặt phẳng tọa độ***
$M \in Ox \Leftrightarrow M(x;0;0)$	$M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x;y;0)$
$M \in Oy \Leftrightarrow M(0;y;0)$	$M \in (Oxz) \Leftrightarrow M(x;0;z)$
$M \in Oz \Leftrightarrow M(0;0;z)$	$M \in (Oyz) \Leftrightarrow M(0;y;z)$

Hình chiếu của điểm lên mặt phẳng tọa độ, trục tọa độ

Hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ lên MP tọa độ:	(Oxy) là $H(a;b;0)$	Hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ lên trục tọa độ:	Ox là $H(a;0;0)$
	(Oxz) là $H(a;0;c)$		Oy là $H(0;b;0)$
	(Oyz) là $H(0;b;c)$		Oz là $H(0;0;c)$

Điểm đối xứng của 1 điểm qua mặt phẳng tọa độ, trục tọa độ

Điểm đối xứng của điểm $M(a;b;c)$ qua mặt phẳng tọa độ:	(Oxy) là $M'(a;b;-c)$	Hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ qua trục tọa độ:	Ox là $M'(a;-b;-c)$
	(Oxz) là $M'(a;-b;c)$		Oy là $M'(-a;b;-c)$
	(Oyz) là $M'(-a;b;c)$		Oz là $M'(-a;-b;c)$

BÀI 3: BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và số thực k. Khi đó:

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$	$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$	$k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

Nhận xét:

Cho hai vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3), \vec{b}\neq\vec{0}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\begin{cases} a_1=kb_1 \\ a_2=kb_2 \\ a_3=kb_3 \end{cases}$

hay $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}, \ (b_1.b_2.b_3\neq 0)$

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi công thức $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Nhận xét:

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$, $(\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0})$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

(3) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$, $(\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0})$.

3. Vận dụng

(1) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

(2) $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

(3) Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

(4) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

(5) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương ***hay*** $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}, k\in\mathbb{R}$

Ví dụ 53: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;-1;5)$ và $\vec{b}=(0;-2;-4)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau: $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Ta có:

$\vec{a}+\vec{b}=(2+0;(-1)+(-2);5+(-4))=(2;-3;1)$.

$2\vec{a}=(4;-2;10)$, $\dfrac{1}{2}\vec{b}=(0;-1;-2)$. Do đó: $2\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}=(4;-1;12)$.

Ví dụ 54: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-3;4)$, $\overrightarrow{DC}=(-3-x;5-y;1-z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}1=2(-3-x)\\-3=2(5-y)\\4=2(1-z)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{7}{2}\\y=\dfrac{13}{2}\\z=-1\end{cases}$.

Vậy $D\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{13}{2};-1\right)$.

Ví dụ 55: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-2),B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$. Tìm chu vi của ΔABC.

Lời giải

Theo công thức tính độ dài ta được

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{3}$; $BC=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{10}$; $AC=\sqrt{0+4+16}=2\sqrt{5}$.

Chu vi của ABC: $\sqrt{3}+\sqrt{10}+2\sqrt{5}$.

Ví dụ 56: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5),B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;2)$, $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+1;-4)$.

A, B, M thẳng hàng. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=7\end{cases}$.

Ví dụ 57: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Tính số đo BAC.

Lời giải

Ta có: $BAC=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}=(1;5;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(5;4;-1)$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1.5+5.4+(-2)(-1)}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{35}}{70}$$

Vậy $BAC=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\approx 40°29'$

CHƯƠNG ☞ PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

• Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có ***giá vuông góc*** với mặt phẳng (α) được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của mặt phẳng (α)

• Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *không cùng phương* và *giá* của chúng *song song* hoặc *nằm trên* mặt phẳng(α) thì $\vec{a},\vec{b}$ được gọi là ***cặp vectơ chỉ phương*** của mặt phẳng (α).

Nhận xét

(1)Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\cdot\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α) (Nói cách khác, một mặt phẳng có vô số vectơ pháp tuyến và chúng cùng phương nhau)

(2) Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó, hoặc biết một điểm và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

2. Tích có hướng của 2 vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

Vectơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là ***tích có hướng*** của hai $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

Nhận xét

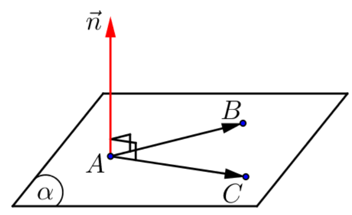
(1) Biểu thức $a_1b_2-a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Tương tự $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2$, $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}=a_3b_1-a_1b_3$.

Như vậy: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

(2)$\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$

(3)Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

(4)Nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ (1), với A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là ***phương trình tổng quát*** của mặt phẳng.

Nhận xét

(1)Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (với A, B, C không đồng thời bằng 0) đều xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ làm vectơ pháp tuyến.

(2) Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

(Nói cách khác, Một điểm thuộc một mặt phẳng khi chỉ khi tọa độ của điểm thỏa mãn phương trình của mặt phẳng. Khái quát, Một Điểm thuộc một Hình khi chỉ khi tọa độ của Điểm thỏa mãn phương trình của Hình)

(3)Mặt phẳng(α) qua $M(x_o;y_o;z_o)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ có phương trình là

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ (2)\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$, với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

(4) Phương trình mặt phẳng trong các ***trường hợp đặ biệt:***

Tính chất mặt phẳng	Phương trình	Hệ số

(α) đi qua/chứa gốc O.	$(\alpha): Ax+By+Cz=0$	$D=0$
(α) song song hoặc chứa Ox.	$(\alpha): By+Cz+D=0$	$A=0$ (Chứa Ox khi $D=0$)
(α) song song hoặc chứa Oy.	$(\alpha): Ax+Cz+D=0$	$B=0$ (Chứa Oy khi $D=0$)
(α) song song hoặc chứa Oz.	$(\alpha): Ax+By+D=0$	$C=0$ (Chứa Oz khi $D=0$)
(α) song song (Oxy).	$(\alpha): Cz+D=0$	$A=B=0$
(α) song song (Oxz).	$(\alpha): By+D=0$	$A=C=0$
(α) song song (Oyz).	$(\alpha): Ax+D=0$	$B=C=0$
Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x=0$; $(Oxz): y=0$; $(Oxy): z=0$		

(5) ***Phương trình theo đoạn chắn:***

Mặt phẳng cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ có phương trình dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (3) $(a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)$ (gọi là ***phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn***)

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó:

1	$(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k.\overrightarrow{n_2}\\ D_1\neq k.D_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1\neq k.D_2\end{cases} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$, $(A_2.B_2.C_2.D_2\neq 0)$
2	$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k.\overrightarrow{n_2}\\ D_1= k.D_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1= k.D_2\end{cases} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, $(A_2.B_2.C_2.D_2\neq 0)$
3	$(\alpha_1),(\alpha_2)$ cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương
4	$(\alpha_1)\perp(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách	***Cách tính & Công thức***
1.Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ ***đến mặt phẳng*** $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$	$d(M,(\alpha))=\frac{\lvert Ax_o+By_o+Cz_o+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
2.Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song: $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ Với $(A';B';C')=k(A;B;C)$	***Cách 1:*** Bằng khoảng cách từ 1 điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. Lấy $M(x_0;y_0;z_0)\in(\beta)$. Khi đó: $\mathrm{d}((\alpha),(\beta))=\mathrm{d}(M;(\alpha))$
	Cách 2: Đồng nhất hệ số của phương trình 2 mặt phẳng: Biến đổi 2 phương trình của 2 mặt phẳng sao cho các hệ số của x, y, z tương ứng bằng nhau. Chẳng hạn $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): Ax+By+Cz+D_0=0$ Khi đó: $d((\alpha);(\beta))=\frac{\lvert D-D_0\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

ĐẶC BIỆT

Khoảng cách từ điểm	***Đến***	***Bằng***
$M(x_M;y_M;z_M)$	Gốc tọa độ O	$\sqrt{x_M{}^2+y_M{}^2+z_M{}^2}$
	Trục tọa độ Ox	$\sqrt{y_M{}^2+z_M{}^2}$ (cho hoành độ bằng 0)

	Mặt phẳng tọa độ (Oxy)	$\sqrt{z_M^{\ 2}}=\lvert z_M\rvert$ (cho hoành độ và tung độ bằng 0)

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. XÁC ĐỊNH VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG

(1) Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của mặt phẳng (α).

(2) Nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến

(3) Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ thì vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

(4) Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Ví dụ 58: rong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-y+2z-1=0$. Vectơ nào dưới đây không phải là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-3;1;-2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;1;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;-1;2)$ **D.** $\overrightarrow{n_4}=(6;-2;4)$

Lời giải

Dựa vào phương trình $(P):3x-y+2z-1=0$, ta thấy véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\overrightarrow{n_3}=(3;-1;2)$

$\overrightarrow{n_1}=(-3;1;-2)=-1(3;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

$\overrightarrow{n_4}=(6;-2;4)=2(3;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

Ví dụ 59: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$. Xác định một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng AB.

Lời giải

Đường thẳng AB là giá của $\overrightarrow{AB}$.

Do mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng AB nên một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8)$

Ví dụ 60: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;5)$. Tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Lời giải

Do mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α)

Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-10;4;6)$.

2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG

Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

(Nói cách khác, Một điểm thuộc một mặt phẳng khi chỉ khi tọa độ của điểm thỏa mãn phương trình của mặt phẳng. Khái quát, Một Điểm thuộc một Hình khi chỉ khi tọa độ của Điểm thỏa mãn phương trình của Hình)

Ví dụ 61: Trong không gian $N(0;8;0)\in(Q_2)$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(Q_1)//(Q_2)$.

A. $I(0;5;0)$. **B.** MN. **C.** (P). **D.** $(P):3x-y+4z+5=0$.

Lời giải

+ Thay toạ độ điểm m,n vào phương trình mặt phẳng $(P_m):mx+2y+nz+1=0$ ta được $(Q_m):x-my+nz+2=0$ nên $(\alpha):4x-y-6z+3=0$.

+ Thay toạ độ điểm $m+n$ vào phương trình mặt phẳng $m+n=0$ ta được $m+n=2$ nên $m+n=1$.

+ Thay toạ độ điểm $m+n=3$ vào phương trình mặt phẳng $(P_m):mx+2y+nz+1=0$ ta được $\overrightarrow{n_1}(m;2;n)$ nên $(Q_m):x-my+nz+2=0$.

+ Thay toạ độ điểm $\overrightarrow{n_2}(1;-m;n)$ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha):4x-y-6z+3=0$ ta được $\overrightarrow{n_\alpha}(4;-1;-6)$ nên (P_m).

3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG.

Cách 1: Xác định 2 yếu tố cơ bản của mặt phẳng là Điểm đi qua và vectơ pháp tuyến.

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ điểm $M(x_o;y_o;z_o)$ và tọa độ vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ của mặt phẳng

Bước 3. Thay vào phương trình $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, Thu gọn về phương trình tổng quát

Dạng	Điều kiện xác định mặt phẳng (α) (giả thiết cho)	Đi qua điểm	Vectơ pháp tuyến
1	Qua M và song song $(\beta):Ax+By+Cz+D=0$	M	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}=(A;B;C)$
2	Qua M và vuông góc đường thẳng AB	M	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}$
	Qua M và vuông góc đường thẳng (d)	M	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{a_d}$
3	Là mặt phẳng trung trực đoạn AB	M là trung điểm AB	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}$
4	Qua 3 điểm A, B, C	A (hay B, hay C)	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$
5	Qua A, B và song song CD	A (hay B)	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]$
	Qua A, B và song song (d)	A (hay B)	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{a_d}\right]$
	Chứa (d) và song song AB	Lấy M ∈ (d)	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{AB}\right]$
	Chứa (d) và song song (d’)	Lấy M ∈ (d)	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{a_{d'}}\right]$
6	Qua 2 điểm M, N và vuông góc mặt phẳng(β)	M (hay N)	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
	Chứa (d) và vuông góc mặt phẳng (β)	Lấy M ∈ (d)	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
7	Qua điểm M và vuông góc 2 mặt phẳng (β), (γ)	M	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{n_\beta},\overrightarrow{n_\gamma}\right]$
8	Qua điểm M và song song 2 đường thẳng (d), (d’)	M	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{a_{d'}}\right]$
9	Qua điểm M, vuông góc mp(β) và song song đường thẳng (d)	M	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
10	Chứa (d) và đi qua $M\in(d)$	M hay Lấy N ∈(d)	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{a_d}\right]$

Cách 2: Xác định hệ số

Bước 1. Gọi mặt phẳng đã cho có phương trình dạng: $Ax+By+Cz+D=0$

Bước 2. Từ giả thiết, xác định 4 hệ số *A, B, C, D* (kiểm tra điều kiện, nếu có)

Bước 3. Thay vào phương trình $Ax+By+Cz+D=0$

Đặc biệt:

Nếu mặt phẳng không qua gốc tọa độ O thì phương trình mặt phẳng được biến đổi về dạng $ax+by+cz=1$ (4).

Khi mặt phẳng được xác định bởi 3 yếu tố thì ta lập được hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn a, b, c. Giải hệ phương trình tìm a, b, c rồi thay vào phương trình (4) và thu gọn và phương trình dạng tổng quát.

Ví dụ 62: Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt phẳng (β) qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$

Lời giải

Cách 1.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-2;1)$

Do mặt phẳng (β) song song mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) nhận $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Mà mặt phẳng (β) qua điểm $A(-1;1;2)$

Vậy phương trình mặt phẳng (β) là $2(x+1)-2(y-1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z+2=0$

Cách 2.

Do mặt phẳng (β) song song mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) có phương trình dạng $2x-2y+z+m=0$, với $m \neq -1$.

Mà (β) đi qua điểm $A(-1;1;2)$ nên $-2-2+2+m=0 \Leftrightarrow m=2$ (nhận)

Vậy phương trình mặt phẳng (β) là $2x-2y+z+2=0$.

Ví dụ 63: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC), với $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1;-2); \overrightarrow{AC}=(2;-1;-3)$

Do mặt phẳng (ABC) chứa AB, AC nên mặt phẳng (ABC) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right]=(-1;-5;1)$.

Mà mặt phẳng (ABC) qua $A(-1;0;3)$

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $-(x+1)-5(y-0)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow x+5y-z+4=0$

Cách 2.

Giả sử mặt phẳng (ABC) có phương trình dạng $ax+by+cz=1$ (*) (giả sử mặt phẳng không qua O)

Do mặt phẳng (ABC) qua A, B, C nên thay tọa độ 3 điểm A, B, C vào phương trình (*) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -a+0b+3c=1 \\ 2a-b+c=1 \\ a-b+0c=1 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c)=\left(-\dfrac{1}{4};-\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right)$

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}y+\dfrac{1}{4}z=1 \Leftrightarrow x+5y-z+4=0$

Ví dụ 64: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Cách 1.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Do mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{n_P}$ là cặp vectơ chỉ phương của mp(Q). Suy ra, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Mặt phẳng (Q) đi qua $A(2;4;1)$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Cách 2.

Giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình dạng $ax+by+cz=1$ (giả sử mặt phẳng không qua O)

Ta có:

Mặt phẳng (Q) qua điểm $A(2;4;1)$ nên $2a+4b+c=1$ (1)

Mặt phẳng (Q) qua điểm $B(-1;1;3)$ nên $-a+b+3c=1$ (2)

Mặt phẳng (Q) vuông góc mặt phẳng (P) nên $a.1+b(-3)+c.2=0$ (3)

Giải hệ phương trình (1), (2), (3), ta được: $a=0,\ b=\dfrac{2}{11},\ c=\dfrac{3}{11}$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $0.x+\dfrac{2}{11}y+\dfrac{3}{11}z=1 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$

Chú ý

Khi giải cách 2 mà hệ phương trình không giải được (khi đó mặt phẳng đi qua gốc O) thì ta phải giải bằng cách 1.

4. TÍNH KHOẢNG CÁCH

Ví dụ 65: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-1=0$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-1;2;0)$ đến mặt phẳng (P).

Lời giải

Ta có: $d(M,(P))=\dfrac{|2.(-1)-2.2+0-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{5}{3}$.

Ví dụ 66: Trong không gian $Oxyz$, tính cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): 2x+4y+4z-5=0$

Lời giải

Cách 1.

Lấy $A(2;1;3)\in(P)$. Do (P) song song với (Q) nên khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (P), (Q) là

$$d((P),(Q))=d(A,(Q))=\frac{|2.2+4.1+4.3-5|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=\frac{5}{3}$$

Cách 2.

Ta có $(P): x+2y+2z-10=0 \Leftrightarrow 2x+4y+4z-20=0$ (Đồng nhất hệ số của x, y, z trong 2 phương trình)

Do mp(P) song song với mp(Q) nên khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (P), (Q) là

$$d((P),(Q))=\frac{|-20-(-5)|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=\frac{5}{3}$$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

• Vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của đường thẳng d.

Nhận xét

(1) Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k.\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d. (Nói cách khác, một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương và chúng cùng phương nhau)

(2) Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của nó.

(3) Nếu đường thẳng d vuông góc với giá 2 vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ thì $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là vectơ chỉ phương của d.

2. Phương trình của đường thẳng

Đường thẳng d đi qua $M(x_o; y_o; z_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, có:

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \quad (1) \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$

Phương trình chính tắc: $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}, (a_1.a_2.a_3 \neq 0)$ (2)

Chú ý

Phương trình các trục tọa độ: $Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Nhận xét

(1) Cho đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$. Với mỗi giá trị của tham số t duy nhất xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

(2) Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}, (a_1.a_2.a_3 \neq 0)$. Với mỗi giá trị duy nhất của các tỉ lệ thức ta xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

3. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng.

Cho hai đường thẳng $(d): \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

và $(d'): \begin{cases} x = x'_o + a'_1.t' \\ y = y'_o + a'_2.t' \\ z = z'_o + a'_3.t' \end{cases}$ đi qua điểm $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (a'_1; a'_2; a'_3)$

Xét hệ phương trình tương giao giữa (d) và (d’): $(I): \begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1.t' & (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2.t' & (2) \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3.t' & (3) \end{cases}$.

Khi đó :

Vị trí tương đối	***Điều kiện***		
d và d' song song	$\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương (hay $(a_1; a_2; a_3) = k(a'_1; a'_2; a'_3)$)	***Hay:*** $\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương	***Hay:*** $\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương

	và Hệ phương trình (I) vô nghiệm	**và** $M\in(d)\Rightarrow M\notin(d')$	**và** $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a},\ \vec{a}'$
d và *d'* trùng nhau	Hệ phương trình (I) có vô số nghiệm	***Hay:*** $\vec{a},\ \vec{a}'$ cùng phương **và** $M\in(d)\Rightarrow M\notin(d')$	***Hay:*** $\vec{a},\ \vec{a}',\ \overrightarrow{MM'}$ cùng phương
d và *d'* cắt nhau	Hệ phương trình (I) có đúng 1 nghiệm $(t;t')=(t_0;t'_0)$		***Hay:*** $\vec{a},\ \vec{a}'$ không cùng phương **và** $\left[\vec{a},\vec{a}'\right].\overrightarrow{MM'}=0$
d và *d'* chéo nhau	$\vec{a},\ \vec{a}'$ không cùng phương (hay $(a_1;a_2;a_3)\neq k(a'_1;a'_2;a'_3),\forall k\in\mathbb{R}$) **và** Hệ phương trình (I) vô nghiệm		***Hay:*** $\vec{a},\ \vec{a}'$ không cùng phương **và** $\left[\vec{a},\vec{a}'\right].\overrightarrow{MM'}\neq 0$

4. Góc.

Cho hai đường thẳng d, d' có lần lượt vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{a}'=(a'_1;a'_2;a'_3)$ và hai mặt phẳng $(\alpha),(\alpha')$ có lần lượt vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$, $\vec{n}'=(A';B';C')$. Khi đó:

$$\cos(d,d')=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a}'\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}'\right|}=\frac{\left|a_1a'_1+a_2a'_2+a_3a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

$$\sin(d,(\alpha))=\frac{\left|\vec{a}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|a_1A+a_2B+a_3C\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos((\alpha),(\alpha'))=\frac{\left|\vec{n}.\vec{n}'\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n}'\right|}=\frac{\left|A.A'+B.B'+C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. XÁC ĐỊNH VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

(1) Nếu đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=x_o+a_1t\\ y=y_o+a_2t,(t\in\mathbb{R})\\ z=z_o+a_3t\end{cases}$ thì d có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ (tọa độ vectơ chỉ phương là các hệ số của tham số t)

(2) Nếu đường thẳng d có phương trình chính tắc $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$, $(a_1.a_2.a_3\neq 0)$ thì d có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ (tọa độ vectơ chỉ phương là các số ở mẫu)

(3) Trục tọa độ Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Trục tọa độ Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Trục tọa độ Oz có vectơ chỉ phương là .$\vec{k}=(0;0;1)$

Ví dụ 67: Trong không gian $Oxyz$, xác định một vectơ chỉ phương của đường thẳng dưới đây:

a) $d_1:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$,b) $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$,c) $d_3:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

Lời giải

a) Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_1}=(-1;2;1)$.

b) Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_2}=(2;1;2)$.

c) Phương trình đường thẳng d_3 chưa đúng cấu trúc nên ta viết lại

$d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}\Leftrightarrow d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$

Vậy đường thẳng d_3 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_3}=(2;2;-1)$.

2. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG.

(1) Cho đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_o+a_3t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. Với mỗi giá trị của tham số t duy nhất xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

(2) Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$, $(a_1.a_2.a_3\neq 0)$. Với mỗi giá trị duy nhất của các tỉ lệ thức ta xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

Ví dụ 68: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ hai điểm thuộc mỗi đường thẳng dưới đây:

a) $d_1:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$, **b)** $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$,

Lời giải

a) Cho $t=0$, ta tính được $x=2-0=2;\ y=1+2.0=1;\ z=3+0=3$.

Vậy $A(2;1;3)\in d_1$ (tọa độ điểm A là các hệ số tự do trong các phương trình)

Cho $t=1$, ta tính được $x=2-1=1;\ y=1+2.1=3;\ z=3+1=4$. Vậy $A(1;3;4)\in d_1$

b) Cho $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}=0$, ta tính được $x=1+2.0=1;\ y=2+1.0=2;\ z=-1+2.0=-1$.

Vậy $C(1;2;-1)\in d_2$ (tọa độ điểm C là số đối của các hệ số tự do ở các tử thức trong phương trình)

Cho $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}=1$, ta tính được $x=1+2.1=3;\ y=2+1.1=3;\ z=-1+2.1=1$.

Vậy $D(3;3;1)\in d_2$

3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp: Xác định yếu tố: Điểm đi qua và vectơ chỉ phương (như bảng dưới đây)

B1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

B2. Xác định tọa độ vectơ chỉ phương và tọa độ một điểm của đường thẳng

B3. Thay vào phương trình tham số hay phưng trình chính tắc

Dạng	***Điều kiện xác định đường thẳng d*** *(giả thiết cho)*	***Đi qua điểm***	***Vectơ chỉ phương***
1	*Qua A, B*	*A hay B*	$\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{AB}$
2	*Qua A và song song đường thẳng Δ*	*A*	$\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{a_\Delta}$
3	*Qua A và vuông góc mặt phẳng* (α)	*A*	$\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{n_\alpha}$

Dạng	Điều kiện xác định đường thẳng d (giả thiết cho)	Đi qua điểm	Vectơ chỉ phương
4	Qua A và vuông góc 2 đường thẳng d_1, d_2	A	$\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{a_{d_1}},\overrightarrow{a_{d_2}}\right]$
5	Qua A, song song (α) và (β) (hay song song MP này và chứa trong MP kia)	A	$\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
6	Là giao tuyến của (α) và (β)	$I\in(\alpha)\cap(\beta)$	$\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
7	Qua A, vuông góc đường thẳng Δ và song song (hay chứa trong) mặt phẳng (α)	A	$\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{a_\Delta},\overrightarrow{n_\alpha}\right]$

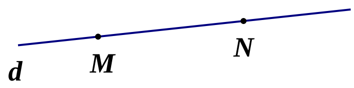
Ví dụ 69: Trong không gian *Oxyz*, viết phương trình của đường thẳng d

a) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$

b) Đi qua điểm $A(2;-1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-z+5=0$

Lời giải

a) Do đường thẳng d đi qua M, N nên $\overrightarrow{MN}$ có giá là đường thẳng d, suy ra đường thẳng d nhận $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$ làm vectơ chỉ phương.



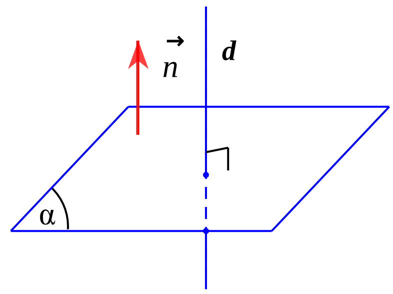
Đường thẳng d qua M nên có phương trình tham số là $\begin{cases}x=2-t\\y=3t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Hay đường thẳng d qua N nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$.

Chú ý

Đường thẳng qua 2 điểm M, N nên có thể chọn điểm tọa độ điểm M hay N để thế vào phương trình.

b) Do đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;0;-1)$ của mặt phẳng (α) có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d, suy ra đường thẳng d nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương.



Mà đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1;0)$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=2+2t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$

Chú ý

Do vectơ chỉ phương có thành phần tọa độ bằng 0 nên đường thẳng không viết được dạng phương trình chính tắc.

4. XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Cách 1.

Cho hai đường thẳng (d) đi qua điểm M, có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và (d') đi qua điểm M', có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a'}$

Vị trí tương đối	Điều kiện
d và d' song song	$\vec{a}$, $\overrightarrow{a'}$ cùng phương **và** $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a}$, $\overrightarrow{a'}$
d và d' trùng nhau	$\vec{a}$, $\overrightarrow{a'}$, $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương
d và d' cắt nhau	$\vec{a}$, $\overrightarrow{a'}$ không cùng phương **và** $\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right].\overrightarrow{MM'}=0$
d và d' chéo nhau	$\vec{a}$, $\overrightarrow{a'}$ không cùng phương **và** $\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\neq 0$

Cách 2.

Trường hợp 1: Hai đường thẳng cho bởi phương trình tham số

Cho hai đường thẳng $(d):\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

và $(d'):\begin{cases} x = x'_o + a'_1.t' \\ y = y'_o + a'_2.t' \\ z = z'_o + a'_3.t' \end{cases}$ đi qua điểm $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (a'_1;a'_2;a'_3)$

Phương pháp:

B1: Lập Hệ phương trình tương giao giữa (*d*) và (*d'*): $(I):\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1.t' \quad (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2.t' \quad (2) \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3.t' \quad (3) \end{cases}$.

B2: Dựa vào nghiệm Hệ phương trình (I), ta kết luận vị trí tương đối:

Vị trí tương đối	***Điều kiện***	
d và *d'* song song	$\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương (hay $(a_1;a_2;a_3) = k(a'_1;a'_2;a'_3)$) **và** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	***Hay:*** $\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương **và** $M \in (d) \Rightarrow M \notin (d')$
d và *d'* trùng nhau	Hệ phương trình (I) có vô số nghiệm	***Hay:*** $\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương **và** $M \in (d) \Rightarrow M \notin (d')$
d và *d'* cắt nhau	Hệ phương trình (I) có đúng 1 nghiệm $(t;t') = (t_0;t'_0)$	
d và *d'* chéo nhau	$\vec{a}, \vec{a'}$ không cùng phương (hay $(a_1;a_2;a_3) \neq k(a'_1;a'_2;a'_3), \forall k \in \mathbb{R}$) **và** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	

Cách giải Hệ bậc nhất 2 ẩn gồm 3 phương trình: $\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1.t' \quad (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2.t' \quad (2) \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3.t' \quad (3) \end{cases}$ (I) (ẩn t, t')

Giải Hệ phương trình gồm 2 phương trình (thường chọn (1) và (2)) $\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1.t' \quad (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2.t' \quad (2) \end{cases}$ (II)

① Nếu Hệ phương trình (II) vô nghiệm thì Hệ (*I*) vô nghiệm;

② Nếu Hệ phương trình (II) có 1 nghiệm $(t;t') = (t_0;t'_0)$ thì thế nghiệm này vào phương trình (3):

☺ Nếu thỏa phương trình (3) thì Hệ phương trình (*I*) có 1 nghiệm $(t;t') = (t_0;t'_0)$;

☹ Nếu không thỏa phương trình (3) thì Hệ phương trình (*I*) vô nghiệm;

③ Nếu Hệ phương trình (II) vô số nghiệm thì Giải Hệ gồm phương trình (2) và (3) (hay gồm phương trình (1) và (3)): Khi đó, nghiệm của Hệ phương trình này cũng là nghiệm của Hệ phương trình (*I*)

Trường hợp 2: Một phương trình tham số và một phương trình chính tắc.

Trường hợp 3: Hai phương trình chính tắc.

Phương pháp: Hai trường hợp này giải phức tạp nên đưa về trường hợp 1 để giải

Ví dụ 70: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=3+4t'\\z=5-2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$

b) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=5+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$

c) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và $d':\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$

Lời giải

a)Dùng cách 1.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;3)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2;-1)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;3;5)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a'}=(2;4;-2)$

$\overrightarrow{MM'}=(1;3;2)$

Ta có: $\vec{a}=\dfrac{1}{2}\vec{a'}$ hay $\vec{a},\ \vec{a'}$ cùng phương và $\overrightarrow{MM'}\neq k.\vec{a},\ \forall k$ hay $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a},\ \vec{a'}$

Vậy hai đường thẳng *d* và *d'* song song

b)Dùng cách 2.

Ta có: d và d' lần lượt nhận $\vec{a}=(2;3;1)$ và $\vec{a}'=(3;2;2)$ là các vectơ chỉ phương.

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

d' qua $M(1;-2;-1)$; có VTCP $\vec{a}'=(3;2;2)$ nên có phương trình là: $d':\begin{cases}x=1+3t'\\y=-2+2t'\\z=-1+2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}1+2t=1+3t' & (1)\\-1+3t=-2+2t' & (2)\\5+t=-1+2t' & (3)\end{cases}$

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases}2t-3t'=0\\3t-2t'=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{3}{5}\\t'=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$

Thay $t=-\dfrac{3}{5},\ t'=-\dfrac{2}{5}$ vào phương trình (3), ta được: $5+\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-1+2\left(-\dfrac{2}{5}\right)$ (Sai)

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

c)Ta có: d đi qua $M(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;2)$;

d' đi qua $M'(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(5;1;-2)$.

Cách 1.

Ta có: $\overrightarrow{MM'}=(1;1;-2)$

Ta thấy $\vec{a},\ \vec{a'}$ không cùng phương ***và*** tính được $\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}=0$

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Chú ý

Cách này không tính được tọa độ giao điểm của hai đường thẳng nên những bài toán có yêu cầu tính tọa độ giao điểm thì ta phải dùng cách 2.

Cách 2.

Phương trình tham số của d và d' lần lượt là $d:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1+5t'\\y=2+t'\\z=-2-2t'\end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}t=1+5t'\\1-t=2+t'\\2t=-2-2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-5t'=1\\-t-t'=1\\2t+2t'=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\t'=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ (Hệ có nghiệm duy nhất)

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm $I\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ (thay $t=-\dfrac{2}{3}$ vào phương trình đường thẳng d hay thay $t'=-\dfrac{1}{3}$ và phương trình đường thẳng d')

5. TÍNH GÓC.

Phương pháp: Dùng công thức ở mục 4.
Hay có thể Tính góc bằng máy tính cầm tay (MTCT).

Vào môi trường vector trên MTCT, tính góc giữa các cặp vectơ pháp tuyến của mặt phẳng hay vectơ chỉ phương của đường thẳng.

(1)Góc giữa hai đường thẳng d, d'

Nếu $0°\le\left(\vec{a},\vec{a'}\right)\le 90°$ thì $\left(d,d'\right)=\left(\vec{a},\vec{a'}\right)$;

Nếu $90°<\left(\vec{a},\vec{a'}\right)\le 180°$ thì $\left(d,d'\right)=180°-\left(\vec{a},\vec{a'}\right)$;

(2) Góc giữa hai mặt phẳng $\left((\alpha),(\alpha')\right)$

Nếu $0°\le\left(\vec{n},\vec{n'}\right)\le 90°$ thì $\left((\alpha),(\alpha')\right)=\left(\vec{n},\vec{n'}\right)$;

Nếu $90°<\left(\vec{n},\vec{n'}\right)\le 180°$ thì $\left((\alpha),(\alpha')\right)=180°-\left(\vec{n},\vec{n'}\right)$;

(3) Góc giữa đường thẳng d ***và mặt phẳng*** (α)

Nếu $0°\le\left(\vec{a},\vec{n}\right)\le 90°$ thì $\left(d,(\alpha)\right)=90°-\left(\vec{a},\vec{n}\right)$;

Nếu $90°<\left(\vec{a},\vec{n}\right)\le 180°$ thì $\left(d,(\alpha)\right)=90°-\left(180°-\left(\vec{a},\vec{n}\right)\right)=\left(\vec{a},\vec{n}\right)-90°$

Ví dụ 71: Trong không gian $Oxyz$, tính các góc:

a)Giữa hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=5-2t\\z=14-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-4t'\\y=2+t'\\z=-1+5t'\end{cases}$.

b)Giữa đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$.

c)Giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+z+10=0$ và $(Q):-x+y+2z+13=0$.

Lời giải

a)Đường thẳng d_1 có một VTCP $\vec{u}_1=(1;-2;-3)$.

Đường thẳng d_2 có một VTCP $\vec{u}_2=(-4;1;5)$.

Ta có: $\cos\left(d_1,d_2\right)=\dfrac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}=\dfrac{\left|1.(-4)+(-2).1+(-3).5\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}.\sqrt{(-4)^2+1^2+5^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\left(d_1,d_2\right)=30°$

Dùng MTCT.

Tính góc giữa 2 vectơ chỉ phương, ta được: $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)=150^\circ$

Vậy $\left(d_1,d_2\right)=180^\circ-\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

b)Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n}=(2;1;1)$.

Ta có: $\sin\left(\Delta,(P)\right)=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{|1.2+2.1+(-1).1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $\left(\Delta,(P)\right)=30^\circ$

Dùng MTCT.

Tính góc giữa 2 vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng, ta được: $\left(\vec{u},\vec{n}\right)=60^\circ$

Vậy $\left(\Delta,(P)\right)=90^\circ-\left(\vec{u},\vec{n}\right)=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

c)Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_1=(1;2;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n}_2=(-1;1;2)$.

Ta có: $\cos\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\dfrac{|1.(-1)+2.1+1.2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $\left((P),(Q)\right)=60^\circ$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Khái niệm mặt cầu

Định nghĩa

Tập hợp các điểm trong không gian cách đều điểm I cố định một khoảng không đổi R gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. Kí hiệu là $S(I,R)$.

Đoạn thẳng nối hai điểm trên mặt cầu và đi qua tâm gọi là đường kính của mặt cầu.

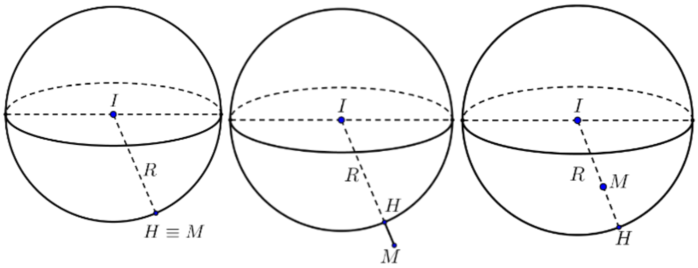
Chú ý

Cho mặt cầu $S(I,R)$

(1) Nếu $IM = R$ thì điểm M nằm trên mặt cầu

(2) Nếu $IM > R$ thì điểm M nằm ngoài mặt cầu

(3) Nếu $IM < R$ thì điểm M nằm trong mặt cầu



2. Phương trình mặt cầu

(1)Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ***(1)***

(2) Phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ ***(2)*** với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ TÂM VÀ BÁN KÍNH CỦA MẶT CẦU CHO BỞI PHƯƠNG TRÌNH.

Ví dụ 72: Trong không gian $Oxyz$, trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu và xác định tọa độ tâm, bán kính.

a) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ **b)** $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0.$

c) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$ **d)** $x^2+y^2+z^2+2x-2y+5=0$

Lời giải

a) Phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ đúng dạng (1) và có $a=1,\ b=-2,\ c=0,\ R^2=9$

Vậy phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=3$.

b) Phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0.$ đúng dạng (2) và có $a=1,\ b=-2,\ c=3,\ d=-2$ *(lấy hệ số của $x,\ y,\ z$ lần lượt chia cho -2 ta được $a,\ b,\ c$ và d là hệ số tự do)*

Kiểm tra điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d=1^2+(-2)^2+3^2-(-2)=16>0$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-(-2)}=4$.

c) Phương trình $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$ không đúng dạng (1) và (2).

Vậy phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

d) Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-2y+5=0$ đúng dạng (2) và có $a=-1,\ b=1,\ c=0,\ d=5$

Kiểm tra điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d=(-1)^2+1^2+0^2-5=-3<0$ (không thỏa điều kiện)

Vậy phương trình đã cho là không phải phương trình của mặt cầu.

2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU.

Cách 1: Xác định yếu tố: Tâm và bán kính, (như bảng dưới đây)

B1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

B2. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu

B3. Thay vào PT (1).

Dạng	Điều kiện xác định mặt cầu (giả thiết cho)	Tâm	Bán kính
1	Mặt cầu (S) tâm I đi qua A	I	$R = IA$
2	Mặt cầu (S) đường kính AB	I là trung điểm AB	$R = \frac{AB}{2}$
3	Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc mặt phẳng(α)	I	$R = d(I,(\alpha))$
4	Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc đường thẳng Δ	I	$R = d(I,\Delta)$
5	Mặt cầu (S) tâm I và cắt mp(α) theo đường tròn có bán kính r	I	$R = \sqrt{r^2+d^2}$ với $d = d(I,(\alpha))$

Cách 2 : Xác định hệ số (Áp dụng cho truòng hợp xác định tâm và bán kính gặp khó khăn)

B1. Gọi mặt cầu đã cho có PT dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, (2)

B2. Từ giả thiết lập hệ 4 PT ẩn *a, b, c, d* → Giải tìm a,b,c,d

B3. Thay vào PT (2)

Dạng 6: Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD (hay đi qua 4 điểm A, B, C, D)

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2)

$\Leftrightarrow 2ax+2by+2cz-d = x^2+y^2+z^2$ (2’)

+ $A,\ B,\ C,\ D\in(S)$ $\Rightarrow$ Tọa độ 3 điểm *A, B, C, D* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ *A, B, C, D* vào PT(2), Ta được hệ 4 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Giải hệ tìm a,b,c,d

Dạng 7: Mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm I ∈ (α)

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a;b;c)$

+ A, *B, C* ∈ *(S)* ⇒ Tọa độ 3 điểm *A, B, C* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ 3 điểm *A, B, C* vào PT(2), Ta được 3 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Tâm $I(a;b;c)\in(\alpha)\Rightarrow$ *a, b, c* thỏa mãn phương trình mặt phẳng(α) → Thay *a, b, c* vào phương trình mặt phẳng(α), ta được thêm 1 PT 4 ẩn a,b,c,d

+ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a,b,c,d

Dạng 8: Mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B và tâm I ∈ (d)

Cách 1: *Đường thẳng (d) cho bởi phương trình tham số*

+ $I\in(d)\Rightarrow I(x_0+a_1t;y_0+a_2t;z_0+a_3t)$

+ $A,\ B\in(S)\Rightarrow AI^2=BI^2$ → Ta được phương trình ẩn t → Giải tìm t → Thay t, tìm tọa độ điểm I

Cách 2: *Đường thẳng (d) cho bởi phương trình chính tắc:*

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a;b;c)$

+ $A,\ B\in(S)\Rightarrow$ tọa độ điểm *A, B* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ *A, B* vào PT(2), Ta được 2 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Tâm $I(a,b,c)\in(d)\Rightarrow$ *a, b, c* thỏa mãn phương trình đường thẳng (*d*) → Thay *a, b, c* vào phương trình đường thẳng (*d*), ta được thêm 2 PT 3 ẩn *a, b, c*

+ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a,b,c,d

Ví dụ 73: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

b) Có đường kính AB với $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$.

c) Có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).

d) Đi qua bốn điểm $M(2;2;2), N(4;0;2), P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$

Lời giải

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$ nên có bán kính là $R=IA=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$ Vậy phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

b) Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm $I(2;1;-1)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB và bán kính là $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$.

c) Do mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc (Oxy) nên có bán kính $R=d(I;(Oxy))=\sqrt{z_I^2}=\sqrt{(1)^2}=1$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$.

d) Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$

$$\Leftrightarrow 2ax+2by+2cz-d=x^2+y^2+z^2 \; (*)$$

Vì $M,N,P,Q\in(S)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}4a+4b+4c-d=2^2+2^2+2^2\\8a+0b+4c-d=4^2+0^2+2^2\\8a+4b+0c-d=4^2+2^2+0^2\\8a+4b+4c-d=4^2+2^2+2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\\c=1\\d=8\end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+8=0$

Chú ý

Với dạng toán lập phương trình mặt cầu qua 4 điểm thì ta có thể giải trực tiếp bằng MTCT:
Nhập hệ số của Hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn theo quy tắc như sau:
3 hệ số đầu lần lượt là các thành phần tọa độ của các điểm ***nhân 2***
Hệ số thứ tư luôn bằng -1
Hệ số thứ năm (hệ số tự do ở vế phải) là ***tổng bình phương*** của các thành phần tọa độ của các điểm.

PHẦN☞ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

CHƯƠNG ☞ CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

BÀI 1. KHOẢNG BIẾN THIÊN KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Khoảng biến thiên

Khoảng biến thiên, kí hiệu R, của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

Chú ý:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Bảng 1

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	…	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

Ví dụ 74: Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $65 - 40 = 25(\text{ cm})$.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

□Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

□Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của sổ liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

2. Khoảng tứ phân vị

Bảng 1

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	…	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

Tứ phân vị thứ i, kí hiệu là Q_v, với $i = 1,2,3$ của mẫu số liệu ghép nhóm (Bảng 1) được xác định như sau:

$$Q_i = u_m + \frac{\frac{i.n}{4} - C}{n_m}(u_{m+1} - u_m)$$

Trong đó:

□ $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ là cỡ mẫu;

□ $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i;

□ n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i;

□ $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$ (Tổng tần số các nhóm trước nhóm chứa tứ phân vị ***gọi là tần số tích lũy)***.

Chú ý

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở Bảng 1, kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

□Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).

□Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.

□Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.

□Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

QUY TẮC TÌM CÁC TỨ PHÂN VỊ VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	…	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

Bước 1: Xác định cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

Bước 2: Xác định các nhóm chứa các tứ phân vị

Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

- Trung vị của mẫu, kí hiệu là M_e, là giá trị ở chính giữa dãy $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Cụ thể:

+ Nếu n lẻ thì trung vị mẫu là $M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$ (Số liệu đứng chính giữa)

+ Nếu n chẵn thì trung vị mẫu là $M_e = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (Trung bình cộng của 2 số liệu ở giữa)

- Tứ phân vị của một mẫu ngẫu nhiên gồm 3 giá trị, đó là tư phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba (lần lượt kí hiệu là Q_1, Q_2, Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau. Cụ thể:

+ Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2, chinh là trung vị của mẫu.

+ Giá trị tứ phân vị thứ nhất, Q_1, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

+ Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Bước 3: Xác định các đại lượng, yếu tố và thay vào công thức tính tứ phân vị

□ $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i;

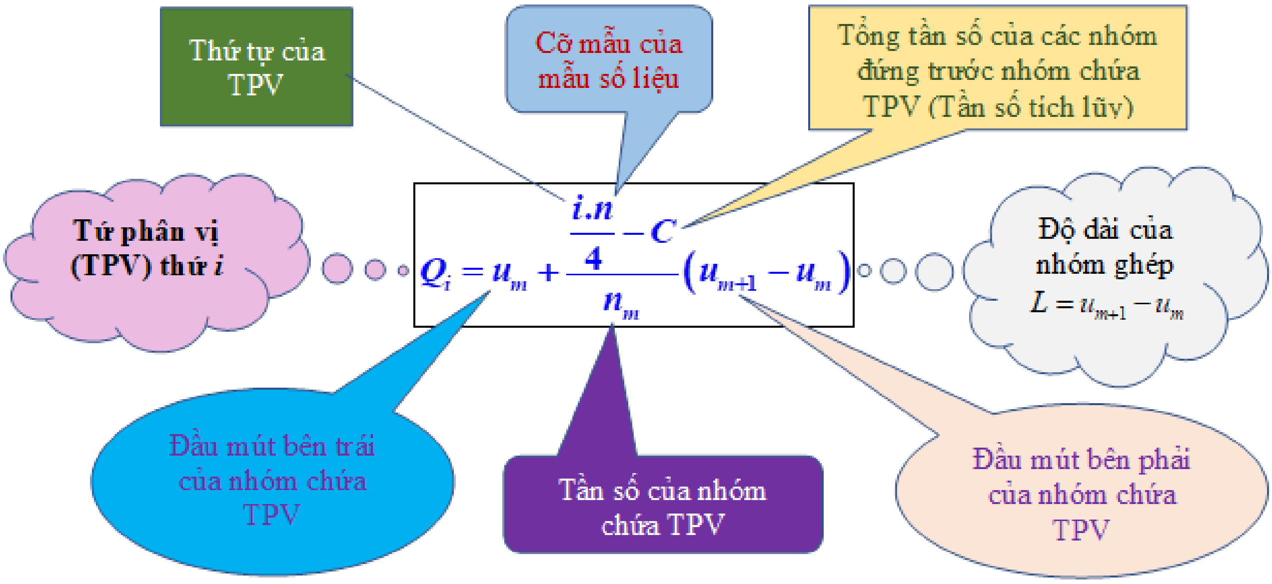
□ n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i;

□ $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$ (Tổng tần số các nhóm trước nhóm chứa tứ phân vị ***gọi là tần số tích lũy)***.

$$Q_i = u_m + \frac{\frac{i.n}{4} - C}{n_m}\left(u_{m+1} - u_m\right)$$

CÁCH GHI NHỚ VÀ ÁP DỤNG CÔNG THỨC TÍNH TỨ PHÂN VỊ

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	…	$[u_{m-1};u_m)$	$[u_m;u_{m+1})$	…	$[u_k;u_{k+1})$	Cỡ mẫu
Tần số	n_1	n_2	…	n_{m-1}	n_m	…	n_k	n
	$C=n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}$				Nhóm chứa tứ phân vị			



QUY TẮC TÌM GIÁ TRỊ NGOẠI LỆ

Bước 1: Xác định các tứ phân vị và tính giá trị khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Bước 2: Tính $Q_1 - 1,5\Delta_Q$ và $Q_3 + 1,5\Delta_Q$.

Bước 3: Kết luận: các giá trị x (trong mẫu số liệu) nằm ngoài đoạn $\left[Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q; Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q\right]$ là ***giá trị ngoại lệ***

Vùng chứa giá trị ngoại lệ

x_1	***Giá trị ngoại lệ***	$Q_1 - 1,5\Delta_Q$		$Q_3 + 1,5\Delta_Q$	***Giá trị ngoại lệ***	x_n

Ví dụ 75: Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

Thời gian (phút)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)	[30; 33)
Số lượt	22	38	27	8	4	1

a) Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết hơn 29 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?

Lời giải

a) Cỡ mẫu $n = 100$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian 100 lần đi xe buýt của ông Thắng.

Ta có: $x_1,\ldots,x_{22} \in [15;18); x_{23},\ldots,x_{60} \in [18;21); x_{61},\ldots,x_{87} \in [21;24); x_{88},\ldots,x_{95} \in [24;27)$;

$x_{96},\ldots,x_{99} \in [27;30); x_{100} \in [30;33)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25}+x_{26}) \in [18;21)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 18 + \frac{\frac{100}{4} - 22}{38} \cdot (21 - 18) = \frac{693}{38}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76}) \in [21; 24)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 21 + \frac{\frac{3 \cdot 100}{4} - (22 + 38)}{27} \cdot (24 - 21) = \frac{68}{3}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = \frac{68}{3} - \frac{693}{38} = \frac{505}{114}.$$

b) Trong lần duy nhất ông Thắng đi hết hơn 29 phút, thời gian đi của ông thuộc nhóm [30; 33). Vì $Q_3 + 1,5\Delta_Q = \frac{6683}{228} < 30$ nên thời gian của lần ông Thắng đi hết hơn 29 phút là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm.

BÀI 2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Phương sai và độ lệch chuẩn

Ở lớp 11, ta đã biết giá trị đại diện của nhóm $[a;b)$ là $c=\frac{1}{2}(a+b)$.

Tương tự như cách tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được xác định thông qua giá trị đại diện và tần số của mỗi nhóm.

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	...	$[u_k;u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2, được tính bởi công thức:

$$S^2=\frac{1}{n}\left[n_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+n_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2\right]$$

Trong đó:

$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ là cỡ mẫu

$\overline{x}=\frac{1}{n}\left(n_1c_1+n_2c_2+\ldots+n_kc_k\right)$ là số trung bình

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S, là căn bậc hai số học của phương sai.

Chú ý

(1) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2=\frac{1}{n}\left(n_1c_1^2+n_2c_2^2+\ldots+n_kc_k^2\right)-\overline{x}^2$$

(2) Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\hat{s}^2=\frac{1}{n-1}\left[n_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+n_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2\right].$$

2. Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

(1) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai của mẫu số liệu gốc. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cũng là giá trị xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.

(2) Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Ví dụ 76: Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau:

111,6	134,9	130,3	134,2	140,9	109,3	154,4	156,3	116,1	96,7
105,2	80,8	80,8	110	109	139	145	161	126	114

a) Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

b) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[80;98)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 18. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

c) Hãy tính sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.

(Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn.)

Lời giải

a) Cỡ mẫu là $n=20$.

Số trung bình của mẫu số liệu trên là

$\bar{x}_1 = \dfrac{111,6+134,9+\ldots+114}{20} = 122,755.$

Phương sai của mẫu số liệu trên là

$S_1^2 = \dfrac{1}{20}\left(111,6^2+134,9^2+\ldots+114^2\right)-122,755^2 \approx 515,453.$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là

$S_1 \approx \sqrt{515,453} \approx 22,704.$

b) Ta có bảng sau:

Số giờ nắng	[80; 98)	[98; 116)	[116; 134)	[134; 152)	[152; 170)
Giá trị đại diện	89	107	125	143	161
Số năm	3	6	3	5	3

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$\bar{x}_2 = \dfrac{3.89+6.107+3.125+5.143+3.161}{20} = 124,1.$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$S_2^2 = \dfrac{1}{20}\left(3.89^2+6.107^2+3.125^2+5.143^2+3.161^2\right)-124,1^2 = 566,19.$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$S_2 = \sqrt{566,19} \approx 23,795.$

c) Sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc là

$\dfrac{|S_2 - S_1|}{S_1} = \dfrac{|23,795-22,704|}{22,704}\cdot 100\% \approx 4,805\%.$

CHƯƠNG ☞ XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI 1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

1. Định nghĩa xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B. Kí hiệu $P\left(A|B\right)$.

3. Công thức tính xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B trong đó $P\left(B\right)>0$. Khi đó: $P\left(A|B\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$

Chú ý

(1) ***Công thức nhân xác suất***:

Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right).P\left(B|A\right)=P\left(B\right).P\left(A|B\right)$.

(2) Cho A và B là hai biến cố với $P\left(B\right)>0$. Khi đó, ta có: $P\left(A|B\right)=\dfrac{n\left(A\cap B\right)}{n\left(B\right)}$

Trong đó: $n\left(A\cap B\right)$ là số các trường hợp thuận lợi của $\left(A\cap B\right)$;

$n\left(B\right)$ là số các trường hợp thuận lợi của B.

(3) Nếu A và B là hai biến cố bất kì, với $P\left(B\right)>0$ thì: $P\left(\overline{A}|B\right)=1-P\left(A|B\right)$

(4)) Cho A và B là hai biến cố với $0<P\left(A\right)<1$; $0<P\left(B\right)<1$.

Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P\left(A\right)=P\left(A|B\right)=P\left(A|\overline{B}\right)$ và $P\left(B\right)=P\left(B|A\right)=P\left(B|\overline{A}\right)$

(5) Giao của hai biến cố A và B còn được kí hiệu AB

(6) Những bài toán xảy ra xác suất điều kiện thường đi kèm với việc sử dụng quy tắc nhân xác suất, khi gặp bài toán này ta cần lưu ý đến sự độc lập của biến cố để vận dụng công thức đúng.

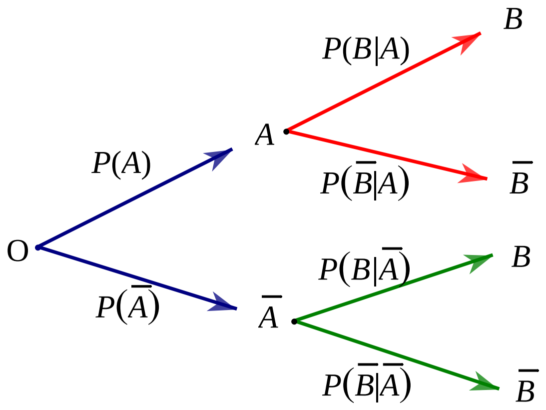
4. Sơ đồ hình cây

Nhận xét

(1) Xác suất xảy ra của mỗi kết quả bằng tích các xác suất trên các nhánh của cây đi đến kết quả đó.

Chẳng hạn: $P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right).P\left(\overline{B}|A\right)$

(2) $P\left(B\right)=P\left(AB\right)+P\left(\overline{A}B\right)$



Ví dụ 77: Một trường học có 70% học sinh thường xuyên chơi thể thao và có 62% học sinh nam thường xuyên chơi thể thao. Trong số học sinh thường xuyên chơi thể thao, tính xác suất để học sinh đó là nam giới.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Học sinh thường xuyên chơi thể thao" và B là biến cố "Học sinh là nam giới"

Suy ra, AB là biến cố "Học sinh nam thường xuyên chơi thể thao"

Ta có: $P\left(A\right)=70\%=0,7$; $P\left(AB\right)=62\%=0,62$

Vậy trong số học sinh thường xuyên chơi thể thao, xác suất để học sinh đó là nam giới là

$$P\left(B\,|\,A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,62}{0,7}=\frac{9}{10}$$

Ví dụ 78: Cho hai biến cố A và B có $P(A)=0,3$; $P(B)=0,6$ và $P(A|B)=0,4$. Tính $P(\overline{A}B)$, $P(\overline{A}|B)$.

Lời giải

Theo công thức nhân xác xuất, ta có $P(AB)=P(B).P(A|B)=0,6.0,4=0,24$.

Vì $\overline{A}B$ và AB là hai biến cố xung khắc và $\overline{A}B\cup AB=B$ nên theo tính chất của xác suất ta có $P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB)\Rightarrow P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0,6-0,24=0,36$.

Theo công thức xác suất có điều kiện, ta có $P(\overline{A}|B)=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\dfrac{0,36}{0,6}=0,6$

Ví dụ 79: Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai.

Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

A: "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu xanh và viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ"

B: "Hai viên bi lấy ra cùng màu".

Lời giải

Gọi X_1: "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu xanh", X_2: "Viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu xanh"

D_1: "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu đỏ", D_2: "Viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ"

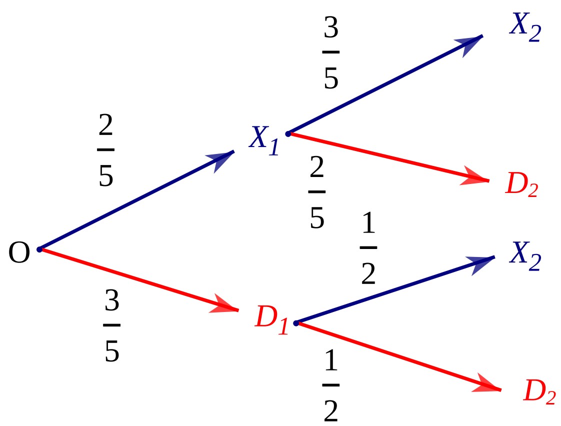
Ta có: $P(X_1)=\dfrac{2}{5}$, $P(D_1)=\dfrac{3}{5}$

$P(X_2|X_1)=\dfrac{3}{5}$, $P(D_2|X_1)=\dfrac{2}{5}$

$P(X_2|D_1)=\dfrac{1}{2}$, $P(D_2|D_1)=\dfrac{1}{2}$

Vậy $P(A)=P(X_1D_2)=P(X_1).P(D_2|X_1)=\dfrac{2}{5}.\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{25}$

$P(B)=P(X_1X_2)+P(D_1D_2)=\dfrac{2}{5}.\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{27}{50}$



BÀI 2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0<P(B)<1$, ta có:

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})$$

gọi là ***công thức xác suất toàn phần***

Chú ý: Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với mọi biến cố B bất kì

2. Công thức Bayes

Cho hai biến cố A và B với $P(A)>0, P(B)>0$, ta có:

$$P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$$

Chú ý

(1) Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với mọi biến cố B bất kì

(2) Cho hai biến cố A và B với $P(A)>0, P(B)>0$, do $P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})$

Nên công thức Bayes còn có dạng: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})}$

(3) Các công thức cần nhớ

» $P(A)+P(\overline{A})=1$

» $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$

» $P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(A)$

» $P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(B)$

(4) Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm ***nhiều giai đoạn*** có sự ***liên quan nhân quả*** trong quá trình xảy ra.

CÁC KIẾN THỨC CẦN NẮM CỦA CHƯƠNG

(1) ***Công thức xác suất có điều kiện:*** $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ hay viết lại $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ $(P(B)>0)$

(2) Từ (1) suy ra: $P(AB)=P(A).P(B|A)=P(B).P(A|B)$

(3) Do hai biến cố $A\overline{B}$, AB đối nhau nên $P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)$

(4) Từ (2), (3) suy ra ***Công thức xác suất toàn phần***: $P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})$

(5) Từ (2) suy ra ***Công thức Bayes***: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$, $(P(A)>0)$

(6) Từ (4), (5) suy ra dạng khác của ***Công thức Bayes***: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})}$

Ví dụ 80: Cho hai biến cố A và B.

a) Với $P(A)=0{,}1$; $P(B|A)=0{,}3$; $P(B|\overline{A})=0{,}6$. Tính $P(B)$.

b) $P(B)=0{,}2$; $P(A|B)=0{,}5$; $P(A|\overline{B})=0{,}4$. Tính $P(B|A)$

Lời giải

a) Ta có $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}1=0{,}9$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0,1.0,3+0,9.0,6=0,57$.

b) Ta có $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,2=0,8$.

Áp dụng công thức Bayes:

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{0,2.0,5}{0,2.0,5+0,8.0,4}=\frac{5}{21}\approx 0,238.$$

Ví dụ 81: Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 53%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X lần lượt là 21% và 17%. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Tính xác suất học sinh đó có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X.

Lời giải

Gọi A: "Học sinh được chọn là nữ", $\Rightarrow \overline{A}$: "Học sinh được chọn là nam";

B: "Học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X".

Theo giả thiết ta có $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,53=0,47$; $P(B|A)=0,21$; $P(B|\overline{A})=0,17$

Theo công thức xác suất từng phần, ta có xác suất học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X là

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0,53.0,21+0,47.0,17=0,1912$.

Ví dụ 82: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh X nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%.

(a) Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?

(b) Tính xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi.

Lời giải

(a) Gọi A: "Người nghiện thuốc lá" $\Rightarrow \overline{A}$: "Người không nghiện thuốc lá"

và B: "Người bị bệnh phổi"

Để người mà ta gặp bị bệnh phổi thì người đó nghiện thuốc lá hoặc không nghiện thuốc lá

Ta cần tính $P(B)$, với $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})$

Ta có: $P(A)=0,2\Rightarrow P(\overline{A})=0,8$; $P(B|A)=0,7$; $P(B|\overline{A})=0,15$

Vậy $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,2.0,7+0,8.0,15=0,26$

Do đó, tỉ lệ người mắc bệnh phổi của tỉnh X là 26%

(b)Xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi là $P(A|B)$

Theo công thức Bayes, ta có $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,2.0,7}{0,26}=\dfrac{7}{13}$

Như vậy trong số người bị bệnh phổi của tỉnh X, có khoảng $\dfrac{7}{13}$ số người nghiện thuốc lá.

PHỤ LỤC ☞ CHƯƠNG TRÌNH TOÁN LỚP 10 VÀ 11

PHẦN ☞ ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

I. *ĐẠI SỐ TỔ HỢP*

1. Quy tắc đếm

a) Qui tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động: Hành động thứ nhất có n cách thực hiện, hành động thứ hai có m cách thực hiện (không trùng với bất cứ cách nào của cảu hành động thứ nhất). Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n+m$ cách.

b) Qui tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp: Hành động thứ nhất có n cách thực hiện, với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất có m cách thực hiện hành động thứ hai. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n.m$ cách.

2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

Loại	***Định nghĩa***	***Công thức tính số lượng***	***Dấu hiệu nhận biết***
Hoán vị	Mỗi vị trí sắp xếp thứ tự của n phần tử $(n \in \mathbb{N}^*)$ gọi là một hoán vị của n phần tử.	$P_n = n.(n-1).(n-2).....2.1 = n!$	Lấy hết ***n*** phần tử để ***sắp xếp*** thứ tự
Chỉnh hợp	Mỗi vị trí sắp xếp thứ tự k phần tử được lấy trong n phần tử $(n \geq k)$ gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.	$A_n^k = n(n-1).....(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	Lấy ***k*** phần tử trong ***n*** phần tử để ***sắp xếp*** thứ tự
Tổ hợp	Mỗi tập hợp k phần tử được lấy trong n phần tử $(n \geq k)$ gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	Lấy ***k*** phần tử trong ***n*** phần tử và ***không sắp xếp*** thứ tự

Công thức tổ hợp mở rộng

Loại	***Công việc thực hiện***	***Công thức đếm***
Hoán vị vòng quanh	Sắp xếp n phần tử theo một vòng tròn	$(n-1)!$
Chỉnh tổ hợp	Chọn k phần tử trong n phần tử và sắp xếp vào m vị trí $(k \leq n,\ k \leq m)$	$C_n^k.A_m^k$

Công thức đặc biệt

$0! = 1$	Nếu $k = n$ thì $A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n! = P_n$.
$C_n^0 = C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$
$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (0 \leq k < n)$
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n \quad (0 \leq k \leq n)$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$

3. Nhị thức Newton

a) Công thức nhị thức Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, (n \in \mathbb{N}^*)$$

b) *Tính chất của nhị thức Newton*

Số các số hạng của công thức là $n+1$

Số mũ của *a* giảm dần từ *n* đến 0, số mũ của *b* tăng từ 0 đến *n*; đồng thời tổng các số mũ của *a* và *b* trong mỗi hạng tử đều bằng *n*

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ có dạng $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k \quad (k=0,1,...,n)$

Các hệ số của nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau: $C_n^k=C_n^{n-k};0\le k\le n$

CÁC DẠNG BÀI TOÁN ĐẾM

Quy tắc: *Hành động nào có điều kiện mạnh nhất thì thực hiện đếm trước nhất,...*

Dạng 1. Đếm số lượng số tự nhiên

B1: Gọi số tự nhiên có dạng: $\overline{a_1a_2...a_n}$ và a_i thuộc tập chứa các chữ số theo đề.

B2: Chọn chữ số thỏa điều kiện bài toán đặt vào các hàng số theo thứ tự ưu tiên: ***Hàng nào có điều kiện "mạnh" nhất thì thực hiện trước nhất.*** *(Chú ý phân ra nhiều trường hợp nếu bị trùng điều kiện)*

B3: Dùng Quy tắc nhân để tính kết quả từng trường hợp và Dùng Quy tắc cộng để tính Kết quả cả bài.

Tính chất chia hết	***Dấu hiệu chia hết***
Số lẻ	Chữ số tận cùng là chữ số lẻ
Số chẵn (Số chia hết cho 2)	Chữ số tận cùng là chữ số chẵn
Chia hết cho 3	Tổng các chữ số chia hết cho 3
Chia hết cho 4	Số gồm 2 chữ số cuối là số chia hết cho 4
Chia hết cho 5	Chữ số tận cùng là 0 hoặc 5
Chia hết cho 6	Chia hết cho 2 và 3
Chia hết cho 7	Nhân đôi chữ số cuối cùng rồi lấy số gồm các chữ số còn lại trừ cho phép nhân đó nếu kết quả chia hết cho 7 thì số đã cho sẽ chia hết cho 7
Chia hết cho 8	Số gồm 3 chữ số cuối là số chia hết cho 8
Chia hết cho 9	Tổng các chữ số chia hết cho 9
Chia hết cho 10	Chữ số tận cùng là 0
Chia hết cho 11	Tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.
Chia hết cho 25	Hai chữ số tận cùng là 00, 25, 50 hoặc 75.

Dạng 2. Đếm số cách sắp xếp

① Sắp xếp xen kẽ 2 nhóm *A, B*:

TH1. Số phần tử 2 nhóm bằng nhau: $n(A)=n(B)=m \rightarrow$ Số cách sắp xếp là $2.m!.m!$.

TH2. Số phần tử 2 nhóm hơn kém 1 đơn vị: $n(A)=m,\ n(B)=m+1 \rightarrow$ Số cách sắp xếp là $m!.(m+1)!$

② Sắp xếp theo nhóm *A, B, C*: cho $n(A)=a,\ n(B)=b,\ n(C)=c$

TH1. Chỉ có các phần tử nhóm *A* kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.(b+c+1)!$

TH2. Các phần tử 2 nhóm *A, B* kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.b!.(c+2)!$

TH3. Các phần tử 3 nhóm *A, B, C* kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.b!.c!.3!$

☺ Tương tự cho sắp xếp n nhóm.

③ Sắp xếp nhóm *A* có n phần tử sao cho có k phần tử $a_1,\ a_2,...,a_k$ không kề nhau $\left(k\le\frac{n+1}{2}\right)$:

B1. Xem số vị trí cần sắp xếp là $2(n-k)+1$ → Sắp xếp $n-k$ phần tử $a_{k+1},\ a_{k+2},...,a_n$ vào các vị trí chẵn → Có $(n-k)!$ cách

B2. Sắp xếp k phần tử $a_1,\ a_2,...,a_k$ vào $n-k+1$ vị trí còn lại → Có A_{n-k+1}^k cách

Vậy Số cách sắp xếp là $(n-k)!.A_{n-k+1}^k$

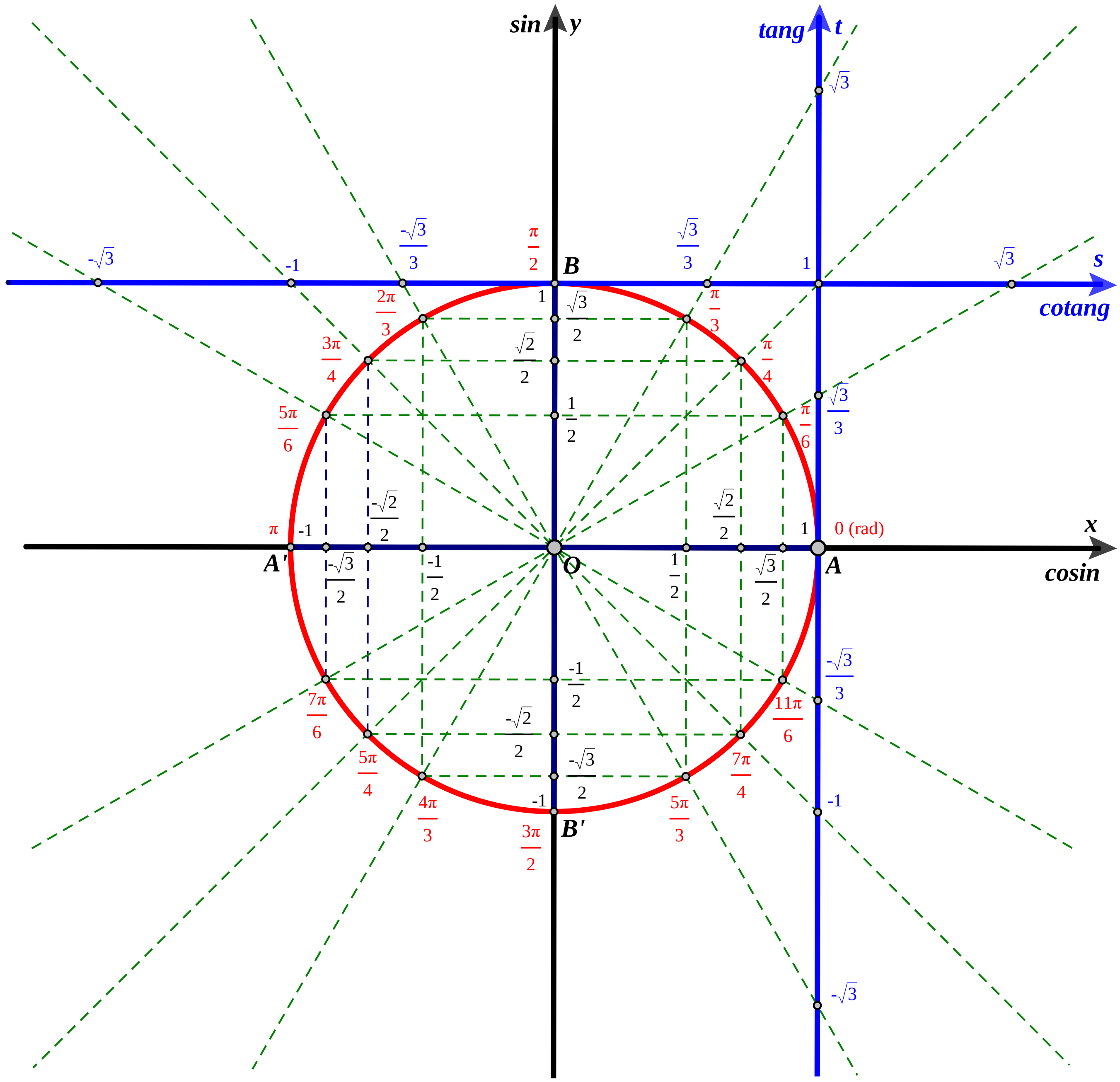
Dạng 3. Đếm số cách chọn

① Chọn không sắp xếp:

□Chọn *k* phần tử loại *I* từ các nhóm *A, B, C,...* → Phân nhiều Trường hợp, chọn mỗi nhóm 1 số lượng phần tử loại *I*, sao cho tổng số lượng phần tử loại *I* ở mỗi trường hợp phải bằng *k* phần tử.

② Chọn có sắp xếp *(Chỉnh tổ hợp):* Chọn k phần tử trong n phần tử và sắp xếp vào m vị trí $\left(k \le n,\ k \le m\right)$ có: $C_n^k.A_m^k$ cách

II. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



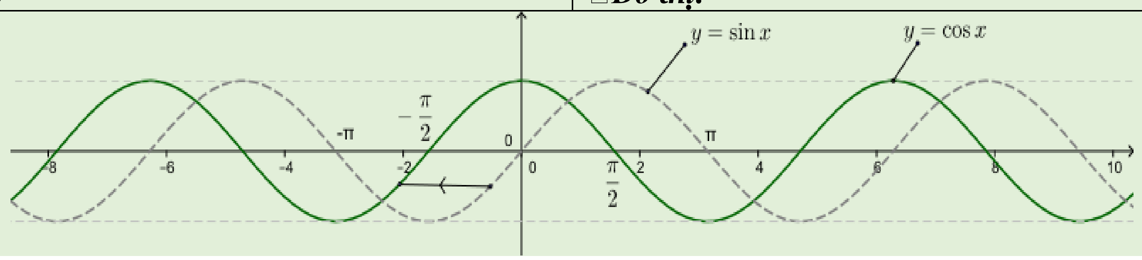
4. Công thức lượng giác

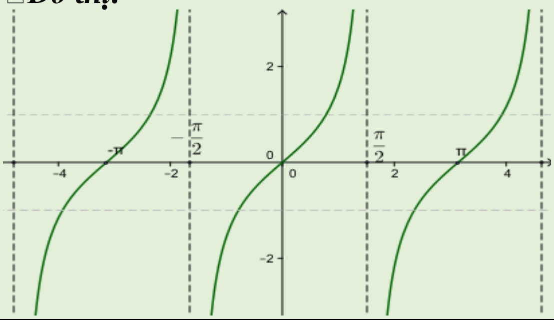
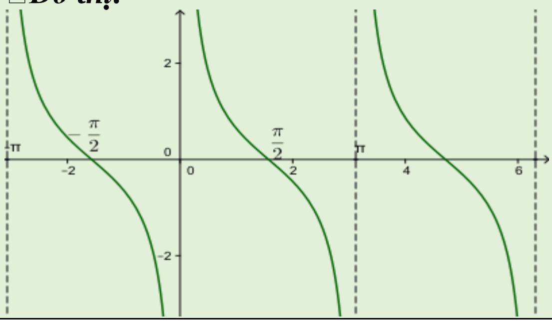
Hệ thức cơ bản	*Cos đối*
$\sin^2 a + \cos^2 a = 1;$ $\tan a.\cot a = 1$ $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a};$ $1 + \cot^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 a}$	$\sin\left(-\alpha\right) = -\sin\alpha$ $\tan\left(-\alpha\right) = -\tan\alpha$ $\cos\left(-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cot\left(-\alpha\right) = -\cot\alpha$

Sin bù $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	***Chéo phụ*** $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha,\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$
Tang, Cotang hơn kém π $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$ $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$ $\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$ $\cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$	***Công thức hạ bậc*** $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ $\tan^2 a=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$
Công thức cộng $\sin(a\pm b)=\sin a.\cos b\pm\cos a.\sin b$ $\cos(a\pm b)=\cos a.\cos b\mp\sin a.\sin b$ $\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a.\tan b}$	***Công thức nhân đôi*** $\sin 2a=2\sin a.\cos a$ $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $=2\cos^2 a-1$ $=1-2\sin^2 a$ $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
Công thức biến đổi tích thành tổng $\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ $\sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$ $\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$	***Công thức biến đổi tổng thành tích*** $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$ $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$

5. Hàm số lượng giác

1. $y=\sin x$	**2.** $y=\cos x$
□***TXĐ:*** $D=\mathbb{R}$. ***TGT:*** $T=[-1;1]$ □***Tính chẵn lẻ:*** Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ □***Tính tuần hoàn:*** Tuần hoàn với chu kì 2π □***Sự biến thiên:*** Đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; Nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ □***Đồ thị:***	□***TXĐ:*** $D=\mathbb{R}$. ***TGT:*** $T=[-1;1]$ □***Tính chẵn chẵn:*** Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua trục tung. □***Tính tuần hoàn:*** Tuần hoàn với chu kì 2π □***Sự biến thiên:*** Nghịch biến trên $(0;\pi)$; Đồng biến trên $(\pi;2\pi)$ □***Đồ thị:***



3. $y=\tan x$	**4.** $y=\cot x$
□***TXĐ:*** $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$. ***TGT:*** $T=\mathbb{R}$ □***Tính chẵn lẻ:*** Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ □***Tính tuần hoàn:*** Tuần hoàn với chu kì π □***Sự biến thiên:*** Luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ □***Đồ thị:*** 	□***TXĐ:*** $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$. ***TGT:*** $T=\mathbb{R}$ □***Tính chẵn lẻ:*** Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ □***Tính tuần hoàn:*** Tuần hoàn với chu kì π □***Sự biến thiên:*** Luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định $(0;\pi)$; $(\pi;2\pi)$ □***Đồ thị:*** 

6. Phương trình lượng giác cơ bản

Dạng $f(u)=m$	**Dạng** $f(u)=f(v)$
$\sin u=m,\ (-1\le m\le 1)$ $\Leftrightarrow \sin u=\sin\alpha,\ \left(\alpha=\sin^{-1}(m)\right)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\alpha+k2\pi \\ u=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$	$\sin u=\sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v+k2\pi \\ u=\pi-v+k2\pi \end{array}\right.$
$\cos u=m,\ (-1\le m\le 1)$ $\Leftrightarrow \cos u=\cos\alpha,\ \left(\alpha=\cos^{-1}(m)\right)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\alpha+k2\pi \\ u=-\alpha+k2\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$	$\cos u=\cos v \Leftrightarrow u=\pm v+k2\pi$
$\tan u=m$ $\Leftrightarrow \tan u=\tan\alpha,\ \left(\alpha=\tan^{-1}(m)\right)$ $\Leftrightarrow u=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	$\tan u=\tan v \Leftrightarrow u=v+k\pi$
$\cot u=m$ $\Leftrightarrow \cot u=\cot\alpha,\ \left(\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)\right)$ $\Leftrightarrow u=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	$\cot u=\cot v \Leftrightarrow u=v+k\pi$

Trường hợp đặc biệt: Đối với phương trình $\sin u=m$, $\cos u=m$

□Nếu $m=\pm 1$ thì chỉ cần lấy 1 trong 2 công thức nghiệm.

□Nếu $m=0$ thì chỉ cần lấy 1 trong 2 công thức nghiệm và thay $k2\pi$ thành $k\pi$

Cụ thể:

$\sin u=1 \Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k2\pi$	$\sin u=-1 \Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$	$\sin u=0 \Leftrightarrow u=k\pi$
$\cos u=1 \Leftrightarrow u=k2\pi$	$\cos u=-1 \Leftrightarrow u=\pi+k2\pi$	$\cos u=0 \Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k\pi$

III. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

	Cấp số cộng	**Cấp số nhân**
Định nghĩa	Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+d$, $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	Dãy số (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n\cdot q$, $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$
Số hạng tổng quát	$u_n=u_1+(n-1)d$, $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	$u_n=u_1.q^{n-1}$, $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$
Tính chất	$u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$, $\left(k\geq 2\,,\,k\in\mathbb{N}^*\right)$	$u_k^2=u_{k-1}.u_{k+1}$, $\left(k\geq 2\,,\,k\in\mathbb{N}^*\right)$
Tổng n số hạng đầu tiên $S_n=u_1+u_2+...+u_n$	$S_n=\dfrac{n(u_1+u_n)}{2}$ $S_n=\dfrac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]$	Khi $q=1$: $S_n=nu_1$ Khi $q\neq 1$: $S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$
Công sai, công bội	$d=u_{n+1}-u_n$; $d=\dfrac{u_k-u_m}{k-m}$	$q=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; $q^{k-m}=\dfrac{u_k}{u_m}$

IV. GIỚI HẠN, HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	**Giới hạn vô cực**
1. Giới hạn đặc biệt: • $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$;• $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$ • $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ $(\lvert q\rvert<1)$; • $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$ ***2. Định lí:*** Cho $\lim u_n=a,\ \lim v_n=b$. Ta có: • $\lim\left(u_n\pm v_n\right)=a\pm b$ • $\lim\left(u_n.v_n\right)=a.b$ • $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{a}{b}$ (nếu $b\neq 0$) • $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ • $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ $(u_n,\,a\geq 0)$ ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\dfrac{u_1}{1-q}$ $\left(\lvert q\rvert<1\right)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** • $\lim n^k=+\infty$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$ • $\lim\sqrt{n}=+\infty$ • $\lim q^n=+\infty$ $(q>1)$ ***2. Định lí:*** *(Quy tắc về giới hạn vô cực)* $\dfrac{u_n{}^{\nearrow a}}{v_n{}_{\searrow\infty}}\to 0$; $\dfrac{u_n{}^{\nearrow a\neq 0}}{v_n{}_{\searrow 0}}\to\infty$; $[\underset{\downarrow\,\infty}{u_n}.\underset{\downarrow\,a\neq 0}{v_n}]\to\infty$ *(Dấu của giới hạn vô cực được xác định theo quy tắc nhân dấu)*

2. Giới hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn	**Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực**
1. Giới hạn đặc biệt: • $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$;• $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$ *(C là hằng số)* ***2. Định lí:*** Cho $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=M$. Ta có: • $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$; • $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$ • $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$; • $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ *(nếu $M\neq 0$)*	***1. Giới hạn đặc biệt:*** • $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$; • $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn}\\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ}\end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}C=C$; • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$ ***2. Định lí:*** *(Quy tắc về giới hạn vô cực)*

• $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}\ \left(f(x)\ge 0\right)$ • $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=\lvert L\rvert$ **3. Giới hạn một bên:** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$	$\dfrac{f(x)^{\nearrow L}}{g(x)_{\searrow\infty}}\to 0$; $\dfrac{f(x)^{\nearrow L\neq 0}}{g(x)_{\searrow 0}}\to\infty$; $[\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{f(x)}}.\underset{L\neq 0}{\underset{\downarrow}{g(x)}}]\to\infty$ $(x\to x_0$ hay $x\to\infty)$ *(Dấu của giới hạn vô cực được xác định theo quy tắc nhân dấu)*

3. Hàm số liên tục

Hàm số liên tục tại một điểm

$y=f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$y=f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

Hàm số liên tục trên một khoảng , đoạn

Hàm số liên tục trên một khoảng khi hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên một đoạn $[a;b]$ nếu $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

.Tính chất

• Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
• Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
• Tổng hiệu, hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.

V. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

1. Phép tính lũy thừa

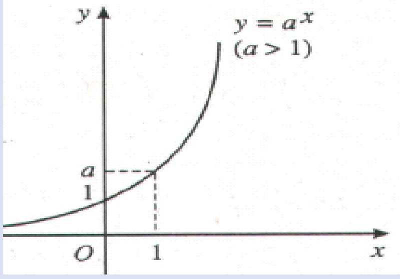
• $a^n=a.a.....a$ (tích của n thừa số a) • $a^0=1\ ,(a\neq 0)$ • $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n},(a\neq 0)$	• $a^{m+n}=a^m.a^n$ • $a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}$ • $(a.b)^n=a^n.b^n$ • $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ • $(a^m)^n=(a^n)^m=a^{m.n}$	• $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ • $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

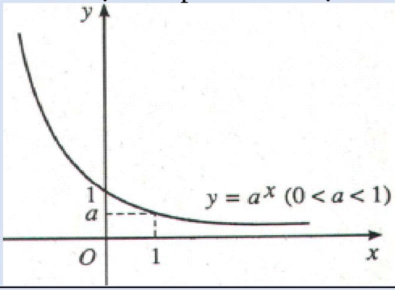
2. Phép tính lôgarit

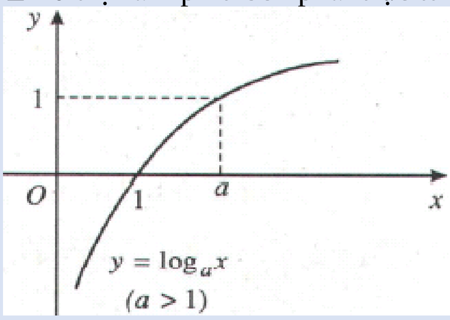
• $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^\alpha=b$ $(a,b>0;a\neq 1)$ • $\log_a 1=0$ • $\log_a a=1$ • $\log_a\left(a^\alpha\right)=\alpha$ • $a^{\log_a b}=b$	• $\log_a(b_1.b_2)=\log_a b_1+\log_a b_2$ • $\log_a\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)=\log_a b_1-\log_a b_2$ • $\log_a\left(b^\alpha\right)=\alpha.\log_a b$ • $\log_{a^\alpha} b=\dfrac{1}{\alpha}\log_a b$	• $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ • $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ • $\log_c a.\log_a b=\log_c b$ • $\log_{a^\alpha}\left(b^\beta\right)=\dfrac{\beta}{\alpha}\log_a b$

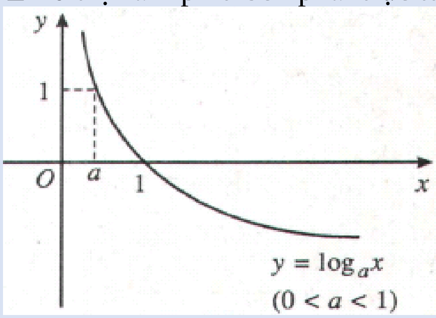
3. Hàm số mũ và hàm số lôgarít

1. Hàm số mũ $y=a^x\ (0<a\neq 1)$	
$a>1$ □TXĐ: $D=\mathbb{R}$. TGT: $T=(0;+\infty)$. □Hàm số luôn đồng biến □Tiệm cận ngang là trục Ox	$0<a<1$ □TXĐ: $D=\mathbb{R}$. TGT: $T=(0;+\infty)$. □Hàm số luôn nghịch biến □Tiệm cận ngang là trục Ox

<table>
<tr>
<td>□Đồ thị nằm phía trên trục hoành


</td>
<td>□Đồ thị nằm phía trên trục hoành


</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">2. Hàm số logarit $y = \log_a x$, $(0 < a \neq 1)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$a > 1$
□TXĐ: $D = (0; +\infty)$. TGT: $T = \mathbb{R}$.
□Hàm số luôn đồng biến
□Tiệm cận đứng là trục Oy
□Đồ thị nằm phía bên phải trục tung


</td>
<td>$0 < a < 1$
□TXĐ: $D = (0; +\infty)$. TGT: $T = \mathbb{R}$
□Hàm số luôn nghịch biến
□Tiệm cận đứng là trục Oy
□Đồ thị nằm phía bên phải trục tung


</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Chú ý : Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ (hai hàm ngược nhau) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$</td>
</tr>
</table>

4. Phương trình, bất phương trình mũ, lôgarit

Mũ	Logarit
Dạng $a^u = b$, $(a > 0, a \neq 1)$ □ $b \le 0$: Phương trình vô nghiệm □ $b > 0$: $a^u = b \Leftrightarrow u = \log_a b$ **Chú ý:** $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$	**Dạng** $\log_a u = b, (a > 0, a \neq 1)$ □Điều kiện: $u > 0$ □ $\log_a u = b \Leftrightarrow u = a^b$ **Chú ý:** $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$ (Điều kiện: $u > 0; v > 0$)
Dạng $a^u > b$, $(a > 0, a \neq 1)$ □ $b \le 0$: Bất phương trình có nghiệm với mọi u thỏa điều kiện xác định. □ $b > 0$: $a^u > b \Leftrightarrow u > \log_a b$, khi $a > 1$ $a^u > b \Leftrightarrow u < \log_a b$, khi $0 < a < 1$ **Chú ý:** Tương tự cho các bất phương trình: $a^u < 0$; $a^u \le 0$; $a^u \ge 0$ ***Tổng quát*** $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$, khi $a > 1$ $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$, khi $0 < a < 1$	**Dạng** $\log_a u > b, (a > 0, a \neq 1)$ □Điều kiện: $u > 0$ □ $\log_a u > b \Leftrightarrow u > a^b$, khi $a > 1$ $\log_a u > b \Leftrightarrow u < a^b$, khi $0 < a < 1$ **Chú ý:** Tương tự cho các bất phương trình: $\log_a u < b$; $\log_a u \ge b$; $\log_a u \le b$ ***Tổng quát*** $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v$, khi $a > 1$ $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u < v$, khi $0 < a < 1$ (Điều kiện: $u > 0; v > 0$)

5. Ứng dụng hàm mũ – lôgarit vào bài toán thực tế

Bài toán	Công thức	Diễn giải
1.Tính tiền gửi lãi kép: *Gửi một lần và rút một lần*	$T_n = T_0\left(1+r\right)^n$	T_0 : số tiền ban đầu gửi; r: lãi suất/kì; n: số kì gửi; T_n : số tiền sau n kì gửi.
2.Tính tiền gửi tiết kiệm lãi kép: *Mỗi kì gửi một lần số tiền cố định và chỉ rút một lần*	$T_n = T_0.\dfrac{1+r}{r}\left[\left(1+r\right)^n - 1\right]$	T_0 : số tiền gửi mỗi kì; r: lãi suất/kì; n: số kì gửi; T_n : số tiền sau n kì gửi.
3.Tính tiền vay trả góp lãi kép: *Vay một lần và trả góp cố định mỗi kì*	$t = T_0.\dfrac{r\left(1+r\right)^n}{\left(1+r\right)^n - 1}$	t: số tiền trả mỗi kì; T_0 : số tiền vay ban đầu; r: lãi suất/kì; n: số kì phải trả
4.Tính tiền rút định kì: *Gửi một lần và rút dần mỗi kì số tiền cố định*	$T_n = T_0.\left(1+r\right)^n + \dfrac{M}{r}\left[1-\left(1+r\right)^n\right]$	T_0 : số tiền gửi ban đầu; r: lãi suất/kì; n: số kì gửi; T_n : số tiền còn lại sau n kì; M: số tiền rút mỗi kì.
5.Tính số dân tăng, giảm:	$S_n = S_0.e^{n.r}$	S_0 : số dân ban đầu; r: tỉ lệ biến động dân số/kì; n: số kì; S_n : số dân sau n kì.
6.Tính lượng phóng xạ bán rã:	$m_t = m_0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$	m_0 :khối lượng chất phóng xạ ban đầu; t: thời gian bán rã; T: chu kì bán rã; m_t : khối lượng tại thời điểm t.
7.Tính cường độ động đất:	$M = \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$	M: cường độ động đất; A: biên độ rung tối đa; A_0 : biên độ chuẩn (hằng số định trước).
8.Công thức liên hệ 2 trận động đất có cùng biên độ chuẩn:	$\dfrac{A_1}{A_2} = 10^{M_1 - M_2}$	A_1, M_1 và A_2, M_2 : lần lượt là biên độ rung tối đa, cường độ của trận động đất thứ nhất và thứ hai.

VI. ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm

2. Tiếp tuyến

Định lý

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x)$ tại tiếp điểm $M\left(x_0;\, y_0\right)$ có dạng:

$$\boxed{y - y_0 = k.\left(x - x_0\right)}\ (*)$$

Trong đó:

x_0 : Hoành độ tiếp điểm;

$y_0 = y\left(x_0\right)$: Tung độ tiếp điểm;

$k = f'\left(x_0\right)$: Hệ số góc của tiếp tuyến.

Quy tắc lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$

B1. Tìm đạo hàm $y' = f'(x)$

B2. Dựa vào giả thiết, tính $x_0, y_0, f'(x_0)$.

B3. Thay vào phương trình (*), thu gọn, ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm (Chú ý: So điều kiện, loại phương trình nếu có)

Chú ý

□Đường thẳng $(d): y = ax + b$ → Hệ số góc $k_d = a$;

□Đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$. → Hệ số góc $k_d = \frac{-a}{b}$.

□ $d \parallel d' \Rightarrow k_d = k_{d'}$;• $d \perp d' \Leftrightarrow k_d.k_{d'} = -1$

Các dạng phương trình tiếp tuyến

Giả thiết	***Theo GT, Ta có:***	***Các đại lượng cần tính***
Biết hoành độ tiếp điểm	x_0	Tính: $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$
Biết tung độ tiếp điểm	y_0	Từ: $y_0 = y(x_0)$ → Tính được x_0 và $k = f'(x_0)$
Biết hệ số góc của tiếp tuyến	k	Từ: $k = f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0 = y(x_0)$
Biết tiếp tuyến song song đường thẳng (d)	$k = k_d$	Từ: $k = f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0 = y(x_0)$ (***Chú ý*** loại phương trình tiếp tuyến trùng phương trình đường thẳng *d*)
Biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng (d)	$k.k_d = -1 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{k_d}$	Từ: $k = f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0 = y(x_0)$
Biết tiếp tuyến qua $A(x_A; y_A)$	$y_A - y(x_0) = y'(x_0).(x_A - x_0)$	Giải tìm x_0 → Tính $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$
Tiếp tuyến tại giao điểm của $(C): y = f(x)$ ***và*** $(d): y = ax + b$	$f(x_0) = ax_0 + b$	Giải tìm x_0 → Tính $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$
Tiếp tuyến tại giao điểm của (C) ***và*** Ox	$y_0 = 0$	Từ: $y_0 = y(x_0)$ → Tính được x_0 và $k = f'(x_0)$
Tiếp tuyến tại giao điểm của (C) ***và*** Oy	$x_0 = 0$	Tính: $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$

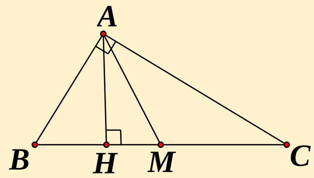
PHẦN ☞ HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

VII. HÌNH HỌC PHẲNG

1. Hệ thức lượng trong tam giác

1)Tam giác vuông: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và trung tuyến AM . Ta có:

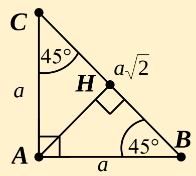
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pi-ta-go) • $AH.BC = AB.AC$
- $AC^2 = CH.BC$ • $AB^2 = BH.BC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ • $AH = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$
- $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2 + AC^2}$ • $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{AC^2}{AB^2 + AC^2}$ • $AM = \dfrac{BC}{2}$



- ***Diện tích:*** $S = \dfrac{1}{2}.AB.AC$ (bằng nửa tích độ dài 2 cạnh góc vuông)
- ***Tỉ số lượng giác:*** $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$ (sin = đối/huyền), $\cos B = \dfrac{AB}{BC}$ (cos = kề/huyền), $\tan B = \dfrac{AC}{AB}$ (tan = đối/kề)

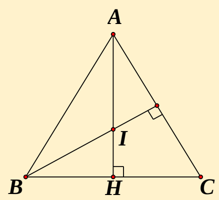
2)Tam giác vuông cân: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có đường cao AH . Ta có:

- $AB = AC = a$ • $BC = a\sqrt{2}$ • $AH = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ • Diện tích: $S = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{BC^2}{4}$

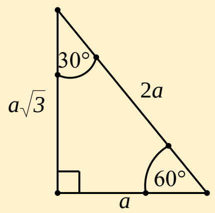


3) Tam giác đều: Cho tam giác ABC đều cạnh a, có tâm I và đường cao AH. Ta có:

- $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ • $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
- $IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ • Diện tích: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

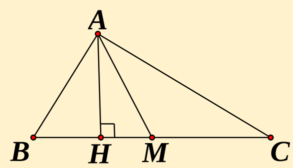


4)Nửa tam giác đều:



5) Tam giác thường: Cho tam giác ABC độ dài cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$, đường cao $AH = h_a$, trung tuyến $AM = m_a$, phân giác AD, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R, bán kính đường tròn nội tiếp là r. Ta có:

- ***Định lí côsin:*** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ • ***Định lí sin:*** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
- $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ • $m_a^{\ 2} = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ • $R = \dfrac{bc}{2h_a}$ • $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$



- ***Diện tích:***

$S = \dfrac{1}{2}.a.h_a$ $S = \dfrac{1}{2}bc.\sin A$ $S = \dfrac{abc}{4R}$ $S = p.r$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$)

2. Hệ thức lượng trong tứ giác

1)Hình thang: Diện tích hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD : $S = \dfrac{1}{2}(AB + CD).h$ (với h là chiều cao và h bằng khoảng cách giữa AB và CD)

2)Hình thang vuông: Diện tích hình thang $ABCD$ vuông tại A,D: $S=\frac{1}{2}(AB+CD).AD$
3)Hình bình hành: Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S=\frac{1}{2}(AB+CD).h$ (với h là chiều cao và h bằng khoảng cách giữa AB và CD)
4)Hình thoi: Diện tích hình thoi $ABCD$: $S=\frac{1}{2}AC.BD$ (bằng nửa tích độ dài 2 đường chéo) $S=\frac{1}{2}AB.\sin A$ (bằng nửa tích độ dài một cạnh với sin một góc)
5)Hình chữ nhật: Diện tích hình chữ nhật $ABCD: S=AB.BC$ (bằng tích chiều dài và chiều rộng)
6)Hình vuông: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O • $AC=BD=a\sqrt{2}$ • $OA=OB=OC=OD=a\frac{\sqrt{2}}{2}$ • Diện tích: $S=a^2$

3. Hệ thức lượng trong đường tròn

• Diện tích hình tròn bán kính R: $S=\pi.R^2$ • Chu vi đường tròn bán kính R: $C=2\pi.R$

4. Các tâm của tam giác

- Trọng tâm tam giác là giao điểm 3 đường trung tuyến
- Trực tâm tam giác là giao điểm 3 đường cao
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm 3 đường trung trực
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điiểm 3 đường phân giác

VIII. *PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG*

1. Tọa độ

Cho $\vec{u}=(x;y),\vec{v}=(x';y')$

$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$	$\vec{u}\pm\vec{v}=(x\pm x';y\pm y')$	$k\vec{u}=(kx;ky)$	$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$
$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$	$\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{v}\rvert}$	

Cho $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
M là trung điểm của AB: $x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$.	G là trọng tâm tam giác ABC: $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$; $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$
G là trọng tâm tứ giác $ABCD$: $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}$	M chia AB theo tỉ số k: $x_M=\frac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\frac{y_A-ky_B}{1-k}$

2. Phương trình đường thẳng

a) Phương trình

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và có 1 VTPT $\vec{n}=(A;B)$ hay có 1 VTCP $\vec{a}=(a;b)$, có:

Phương trình tổng quát: $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0 \Leftrightarrow Ax+By+C=0$ (với $C=-Ax_0-By_0$)

Phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}, \left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$,$(a.b\neq 0)$

Chú ý

Đường thẳng qua $M\left(x_0;y_0\right)$ có hệ số góc k có phương trình dạng $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$

Đường thẳng qua 2 điểm A, B có phương trình dạng $\dfrac{x-x_B}{x_A-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_A-y_B}$

b) ***Khoảng cách***

Khoảng cách từ một điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ đến một đường thẳng Δ: $Ax+By+C=0$ là

$$d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|Ax_M+By_M+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

3. Phương trình đường tròn

Đường tròn có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính R, có phương trình:

Dạng 1: $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$.

Dạng 2: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với điều kiện $a^2+b^2-c>0$ và $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

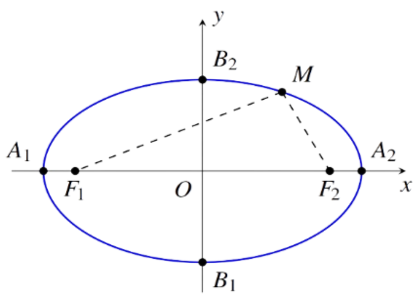
BA ĐƯỜNG CONIC

4. Elip

a) ***Định nghĩa***

Cho hai điểm phân biệt F_1 và F_2. Đặt $F_1F_2=2c>0$.

Tập hợp tất cả điểm M thỏa $MF_1+MF_2=2a$, với $a>c>0$ là một elip.



b) ***Phương trình Elip***

Trong mặt phẳng Oxy, cho $F_1\left(-c;0\right)$, $F_2\left(c;0\right)$ (*hai tiêu điểm thuộc trục hoành*).

Với $b^2=a^2-c^2$, ta có phương trình elip có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

c) ***Các yếu tố của elip***

Trục lớn $A_1A_2=2a$; Trục bé $B_1B_2=2b$;

Tiêu cự $F_1F_2=2c$ và $a^2=b^2+c^2$.

Tọa độ đỉnh $A_1\left(-a;0\right), A_2\left(a;0\right), B_1\left(0;-b\right), B_2\left(0;b\right)$.

Tiêu điểm $F_1\left(-c;0\right)$, $F_2\left(c;0\right)$.

5. Hypebol

a) ***Định nghĩa***

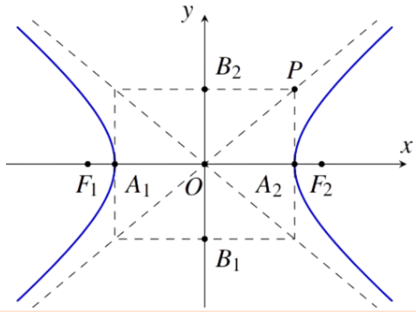
Cho hai điểm phân biệt F_1 và F_2. Đặt $F_1F_2=2c>0$.

Tập hợp tất cả điểm M thỏa $\left|MF_1-MF_2\right|=2a$, với $0<a<c$ là một hypebol.

b) ***Phương trình Hypebol:***

Trong mặt phẳng Oxy, cho $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ (*hai tiêu điểm thuộc trục hoành*).

Với $b^2 = a^2 - c^2$, ta có phương trình elip có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.



c) ***Các yếu tố của elip***

Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là **trục thực**, đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là **trục ảo** của hypebol.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$ và $a^2 + b^2 = c^2$.

Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$.

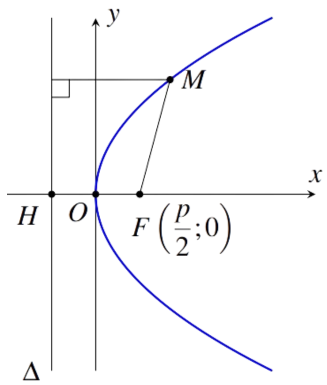
Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Giao điểm O của hai trục là **tâm đối xứng** của hypebol

6. Parabol

a) ***Định nghĩa***

Cho một điểm F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F.
Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ là một đường parabol.
Điểm F gọi là **tiêu điểm** và Δ gọi là **đường chuẩn** của parabol (P).



b) ***Phương trình Parabol:***

Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ.
Gọi khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là $p = HF$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy, với O là trung điểm HF (*như hình vẽ*) thì $F\left(\dfrac{P}{2};0\right)$ và $\Delta: x = -\dfrac{p}{2}$.

Khi đó, phương trình (P) là: $y^2 = 2px$, với $p > 0$.

c) ***Hình dạng parabol và các yếu tố***

O là đỉnh; Ox gọi là **trục đối xứng** của parabol (P).

p gọi là **tham số tiêu** của parabol (P).

Tiêu điểm $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x = -\dfrac{p}{2}$.

IX. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG KHÔNG GIAN

1. Chứng minh quan hệ song song

1. Chứng minh hai đường thẳng song song

Sử dụng kết quả hình học phẳng để chứng minh

a)Hình thang: Hai cạnh đáy song song

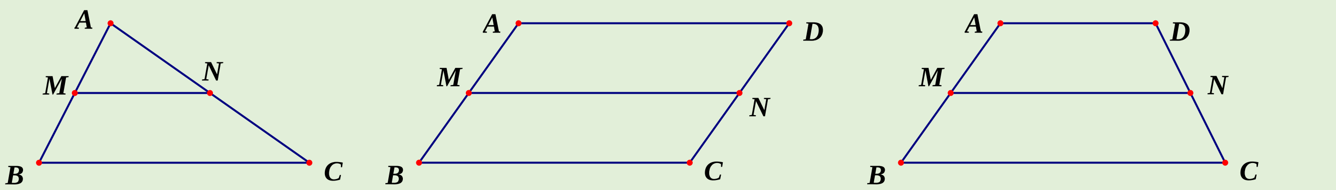
b)*Các dạng hình bình hành* *(hình bình hành thường, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông):* Hai cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

c)Đường trung bình:

□*Đường trung bình của tam giác:* Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh, song song và bằng nửa cạnh còn lại.

□*Đường trung bình hình bình hành:* Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối, song song và bằng hai cạnh còn lại.

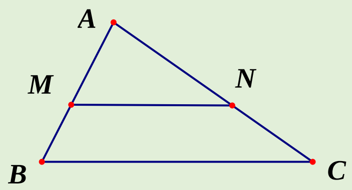
Đường trung bình hình thang: Đoạn thẳng nối hai cạnh bên, song song và bằng trung bình cộng hai cạnh đáy.



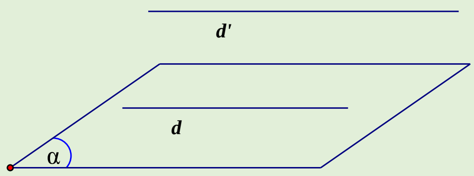
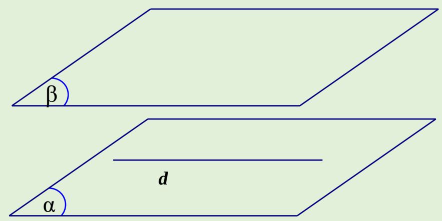
d)Định lý Thalès trong tam giác

Một đường thẳng chắn hai cạnh của tam giác theo các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại và ngược lại

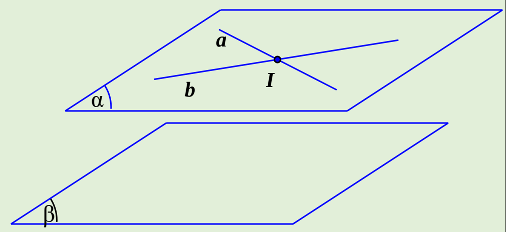
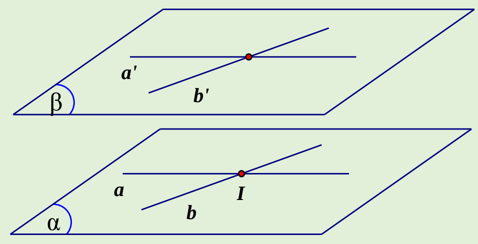
$$\boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Leftrightarrow MN \parallel BC}$$



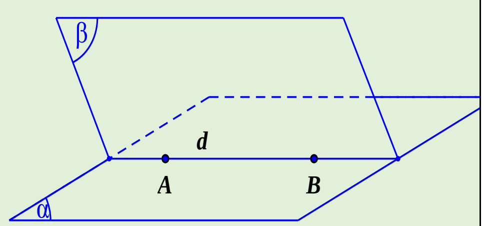
2. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng

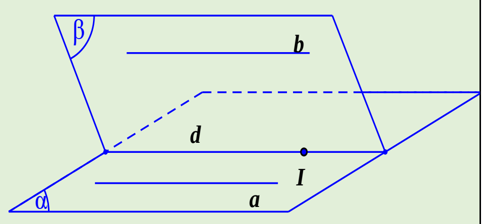
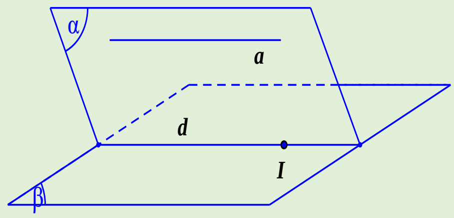
Cách 1	***ĐL:*** *Nếu đường thẳng d không chứa trong mặt phẳng (α) và song song với đường thẳng d' chứa trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d song song với mặt phẳng (α).*	$\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\alpha)$	
Cách 2	***ĐL:*** *Nếu 2 mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.*	$\begin{cases} d \subset (\alpha) \\ (\alpha) \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\beta)$	

3. Chứng minh 2 mặt phẳng song song

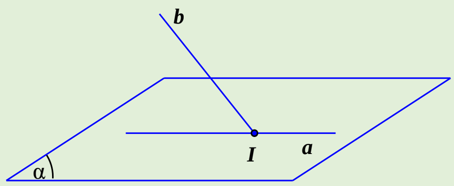
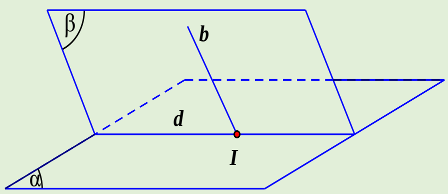
Cách 1	***ĐL:*** *Nếu mặt phẳng này có chứa 2 đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng song song nhau.*	$\begin{cases} (\alpha) \supset a, b \\ a \cap b = I \\ a, b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$	
Cách 2	***HQ:*** *Nếu mặt phẳng này có chứa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song 2 đường thẳng chứa trong mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng song song nhau.*	$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \\ a \parallel a',\ b \parallel b' \\ a', b' \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$	

7. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng.

Cách 1	*Tìm 2 điểm chung phân biệt của 2 mặt phẳng → Giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 điểm chung đó*	$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \\ A \neq B \end{cases} \Rightarrow AB = (\alpha) \cap (\beta)$	

Cách 2	*Tìm 1 điểm chung của 2 mặt phẳng và chứng tỏ trong 2 mặt phẳng lần lượt có chứa 2 đường thẳng song song nhau → Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song 2 đường thẳng đó.*	$\begin{cases} I\in(\alpha)\cap(\beta) \\ a\subset(\alpha),\ b\subset(\beta) \\ a\parallel b \end{cases}$ $\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=Ix\ (Ix\parallel a\parallel b)$	
Cách 3	*Tìm 1 điểm chung của 2 mặt phẳng và chứng tỏ trong mặt phẳng này có chứa 1 đường thẳng song song với mặt phẳng kia → Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song đường thẳng đó.*	$\begin{cases} I\in(\alpha)\cap(\beta) \\ a\subset(\alpha) \\ a\parallel(\beta) \end{cases}$ $\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=Ix\ (Ix\parallel a)$	

8. Tìm giao điểm của đương thẳng và mặt phẳng.

TH1	*Nếu trong (α) có chứa sẵn đường thẳng a cắt b tại I thì I là giao điểm của b và (α).*	$\begin{cases} (\alpha)\supset a \\ a\cap b=I \end{cases}$ $\Rightarrow b\cap(\alpha)=I$	
TH2	*Nếu trong (α) **không** chứa sẵn đường thẳng a cắt b như TH1 thì ta thực hiện như sau:* ***B1:*** *Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa b sao cho giao tuyến của (α) và (β) dễ tìm.* ***B2:*** *Tìm giao tuyến d của (α) và (β).* ***B3:*** *Trong (β), tìm giao điểm I của d và b → I là giao điểm của b và (α).*	$\begin{cases} (\beta)\supset b \\ (\alpha)\cap(\beta)=d \\ d\cap b=I \end{cases}$ $\Rightarrow b\cap(\alpha)=I$	

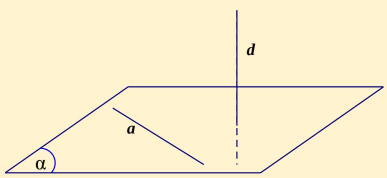
9. Tìm thiết diện của hình chóp, lăng trụ được cắt bởi một mặt phẳng

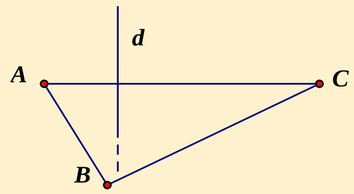
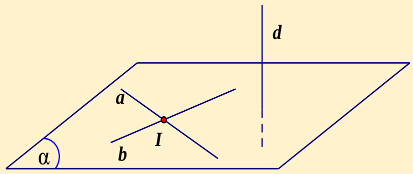
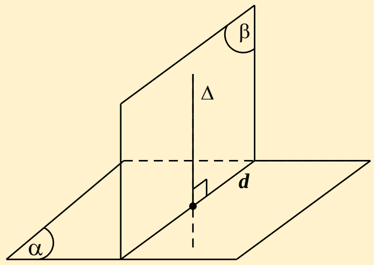
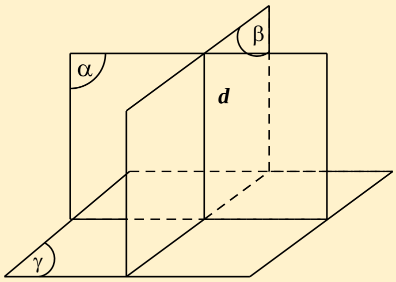
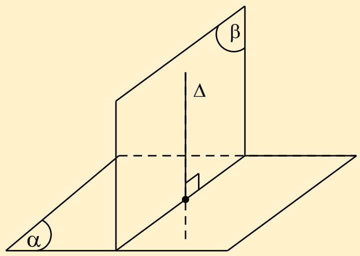
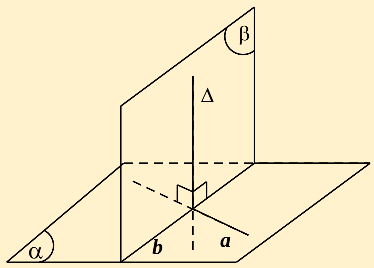
Cách 1: Tìm tất cả các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp, lăng trụ → Thiết diện là đa giác tạo bởi các đoạn giao tuyến đó.

Cách 2: Tìm tất cả các giao điểm của (α) với các cạnh (nếu có) của hình chóp, lăng trụ → Thiết diện là đa giác tạo bởi các giao điểm đó.

X. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

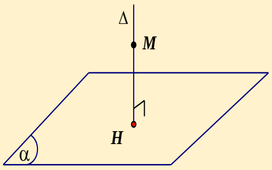
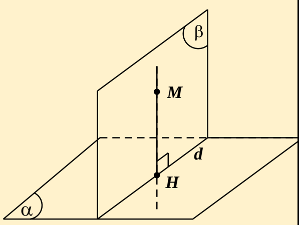
1. Chứng minh quan hệ vuông góc.

1. Chứng minh 2 đường thẳng vuông góc			
Cách 1	***ĐL:*** *Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì đường thẳng đó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng ấy.* *→Để chứng minh 2 đường thẳng vuông góc, ta chứng minh: đường thẳng này*	$\begin{cases} d\perp(\alpha) \\ a\subset(\alpha) \end{cases}$ $\Rightarrow d\perp a$	

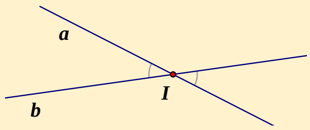
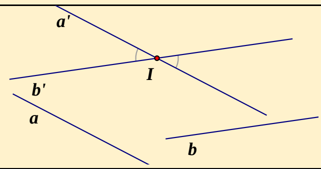
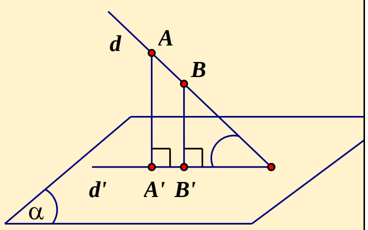
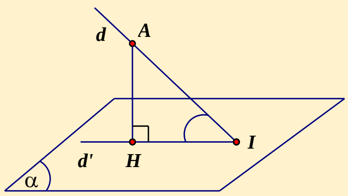
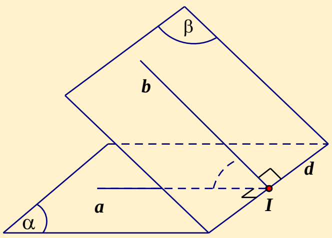
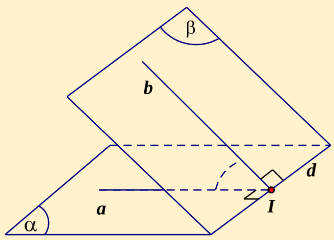
	vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.		
Cách 2	***HQ:*** *Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì đường thẳng đó vuông góc với cạnh còn lại của tam giác ấy.*	$\begin{cases} d \perp AB \\ d \perp AC \end{cases}$ $\Rightarrow d \perp BC$	
2. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng			
Cách 1	***ĐL:*** *Nếu một đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong mặt phẳng thì đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng ấy.*	$\begin{cases} d \perp a;\ d \perp b \\ a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \end{cases}$ $\Rightarrow d \perp (\alpha)$	
Cách 2	***HQ1:*** *Nếu 2 mặt phẳng vuông góc nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến 2 mặt phẳng sẽ vuông góc mặt phẳng kia.*	$\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ \Delta \subset (\beta) \\ \Delta \perp d \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$	
Cách 3	***HQ2:*** *2 mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của 2 mặt phẳng đó (nếu có) sẽ vuông góc mặt phẳng thứ 3 đó.*	$\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \end{cases}$ $\Rightarrow d \perp (\gamma)$	
3. Chứng minh 2 mặt phẳng vuông góc			
Cách 1	***ĐN:*** *Hai mặt phẳng vuông góc khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.* → *Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta chứng minh: mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.*	$\begin{cases} \Delta \subset (\beta) \\ \Delta \perp (\alpha) \end{cases}$ $\Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$	
Cách 2	***ĐL:*** *Nếu mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng vuông góc nhau.*	$\begin{cases} (\beta) \supset \Delta \\ \Delta \perp a,\ \Delta \perp b \\ a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \end{cases}$ $\Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$	

2. Tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng

• ***Định nghĩa:*** H là hình chiếu của M lên $(\alpha) \Leftrightarrow MH \perp (\alpha)$ tại H.

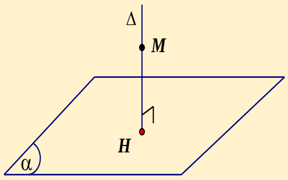
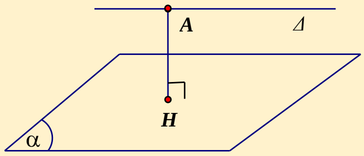
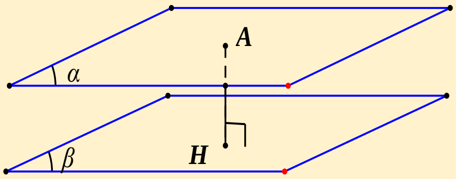
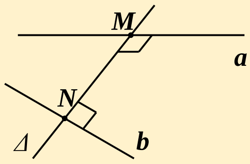
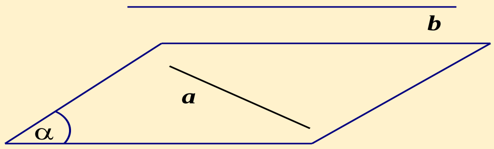
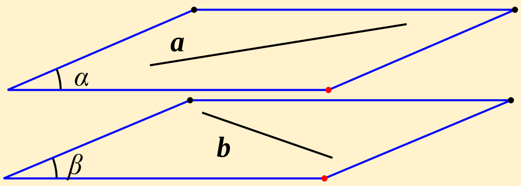
TH1: Có đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc mặt phẳng (α) tại H → H là hình chiếu của M lên (α) 	***TH2:*** Chưa có sẵn đường thẳng Δ như TH1. • Tìm mặt phẳng (β) qua M và $(\beta)\perp(\alpha)$ • Tìm $d=(\alpha)\cap(\beta)$ • Vẽ $MH\perp d$ tại H $\Rightarrow MH\perp(\alpha)$ tại H $\Rightarrow H$ là hình chiếu của M lên (α) 

3. Góc

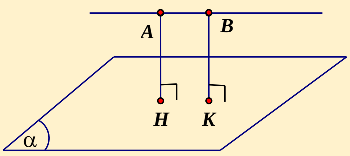
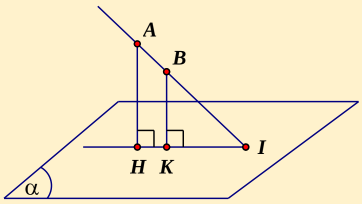
1. Góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau		
ĐN: Góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau là góc có số đo nhỏ nhất (góc nhọn) trong 4 góc tạo thành.		
2. Góc giữa 2 đường thẳng bất kì		
ĐN: Góc giữa 2 đường thẳng bất kì là góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với 2 đường thẳng đó.	$\begin{cases} a \parallel a' \\ b \parallel b' \end{cases} \Rightarrow (a;b)=(a';b')$	
3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng		
ĐN: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng với hình chiếu của nó trên mặt phẳng. $(d,(\alpha))=(d,d')$ Với d' là hình chiếu của d lên (α)	Lấy $A,\ B\in d$ Tìm $A',\ B'$ lần lượt là hình chiếu của $A,\ B$ lên (α) → d' (hay $A'B'$) là hình chiếu của d lên (α) → $(d,(\alpha))=(d,d')$	
	Đặc biệt: Nếu d cắt (α) tại I thì: $\begin{cases} AI\cap(\alpha)=I \\ AH\perp(\alpha) \text{ taïi } H \end{cases}$ $\Rightarrow (AI,(\alpha))=AIH$	
4. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện		
ĐN: Góc nhị diện (hay nhị diện) là hình tạo bởi hai nửa mặt phẳng và giao tuyến của hai nửa mặt phẳng đó.  Góc nhị diện $[\alpha,d,\beta]$	***ĐN:*** Góc phẳng nhị diện của một góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của nhị diện ***Cách xác định góc phẳng nhị diện:*** $\begin{cases} (\alpha)\cap(\beta)=d \\ a\subset(\alpha);b\subset(\beta) \\ a\perp d;\quad b\perp d \\ a\cap b=I \end{cases}$ $\Rightarrow [\alpha,d,\beta]=aIb$	

Hai nửa mặt phẳng α, β là hai mặt của nhị diện; d là cạnh của nhị diện		

4. Khoảng cách

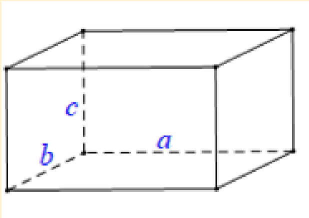
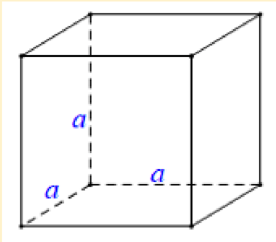
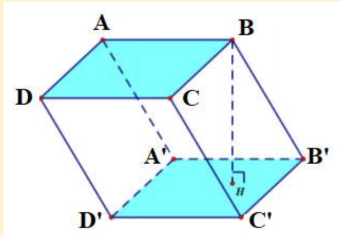
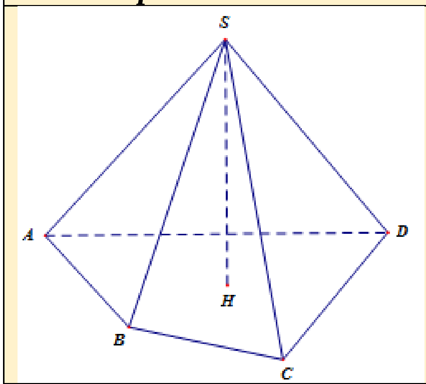
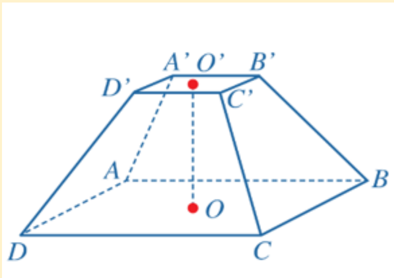
1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng		
ĐN: Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó lên mặt phẳng.	Tìm H là hình chiếu của A lên (α). Khi đó: $d(A,(\alpha)) = AH$	
2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song		
ĐN: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.	Lấy $A \in \Delta$. Khi đó: $d(\Delta,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$	
3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song		
ĐN: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.	Lấy $A \in (\alpha)$. Khi đó: $d((\alpha),(\beta)) = d(A,(\beta))$	
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau		
ĐN: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng đó.	Tìm đường thẳng Δ cùng vuông góc a tại M và vuông góc với b tại N. Khi đó: $\begin{cases} \Delta \perp a \text{ taïi } M \\ \Delta \perp b \text{ taïi } N \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = MN$	
Cách khác: ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*** là khoảng cách giữa đường thẳng này với mặt phẳng song song chứa đường thẳng còn lại.	$\begin{cases} (\alpha) \supset a \\ (\alpha) // b \end{cases}$ $\Rightarrow d(a,b) = d(b,(\alpha))$	
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song lần lượt chứa 2 đường thẳng đó.	$\begin{cases} (\alpha) \supset a, (\beta) \supset b \\ (\alpha) // (\beta) \end{cases}$ $\Rightarrow d(a,b) = d((\alpha),(\beta))$	

•ĐẶC BIỆT: Quy tắc dời điểm khi tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng:

$AB \parallel (\alpha) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(\alpha)) = \mathrm{d}(B,(\alpha))$	$AB \cap (\alpha) = I \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(A,(\alpha))}{\mathrm{d}(B,(\alpha))} = \dfrac{AI}{BI}$

5. Thể tích khối đa diện

Khối hộp chữ nhật	***Khối lập phương***	***Khối lăng trụ***
		
$V = a.b.c$	$V = a^3$	$V = S.h$
Bằng tích 3 kích thước	Bằng lập phương cạnh	Bằng diện tích đáy nhân chiều cao
Khối chóp	***Khối chóp cụt***	
		
$V = \dfrac{1}{3}S.h$	$V = \dfrac{1}{3}\left(S + \sqrt{S.S'} + S'\right).h$	
Bằng một phần ba diện tích đáy nhân chiều cao		

Quy tắc tính thể tích khối đa diện:

•**B1:** Xác định các yếu tố: đường cao, đáy → Lập công thức thể tích (khai triển)

•**B2:** Xác định các đại lượng không gian (nếu có): các loại góc không gian, các loại khoảng cách,…

•**B3:** Tính số đo của các yếu tố (có trong công thức thể tích ở B1)

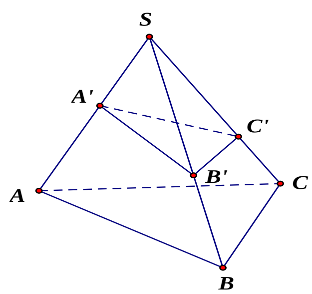
•**B4:**Thay vào công thức thể tích ở B1→ Kết quả.

6. Ứng dụng thể tích

1. Công thức tỉ số thể tích: Cho hình chóp *S.ABC* và *A', B', C'* lần lượt thuộc cạnh bên *SA*, *SB*, *SC*. Khi đó:

$$\boxed{\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}}$$

(*Chú ý: Chỉ áp dụng cho hình chóp tam giác)



2. Khoảng cách từ 1 đỉnh đến mặt đối diện của một hình tứ diện (hình chóp tam giác):

$$\boxed{V_{A.BCD} = \dfrac{1}{3}.S_{BCD}.d\left(A,(BCD)\right) \Rightarrow d\left(A,(BCD)\right) = \dfrac{3.V_{A.BCD}}{S_{BCD}}}$$

7. Các dạng hình chóp thường gặp

1. Hình chóp có một cạnh bên vuông góc đáy (hay hai mặt bên vuông góc với đáy)

Dạng 1: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và cạnh bên SA vuông góc mặt đáy. H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD.

□Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì đường thẳng đó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng.

□Nếu một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng thì mặt phẳng đó vuông góc với mọi mặt phẳng chứa đường thẳng.

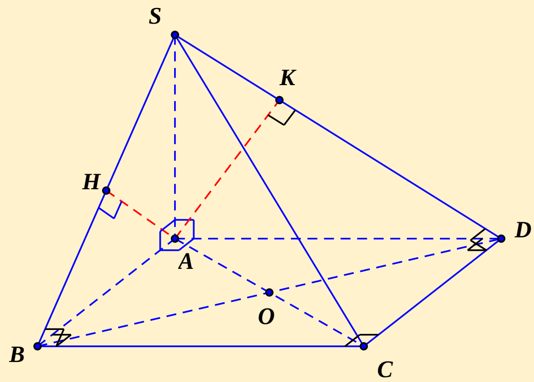
□ $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AB, BC, CD, DA, AC, BD,...\\(ABCD)\perp(SAB),(SAC),(SAD),...\end{cases}$

□ $BC\perp(SAB)$, $AD\perp(SAB)$;

□ $AB\perp(SAD)$, $DC\perp(SAD)$;

□ $AH\perp(SBC)$; $AK\perp(SCD)$

□Nếu đáy là hình vuông thì $BD\perp(SAC)$



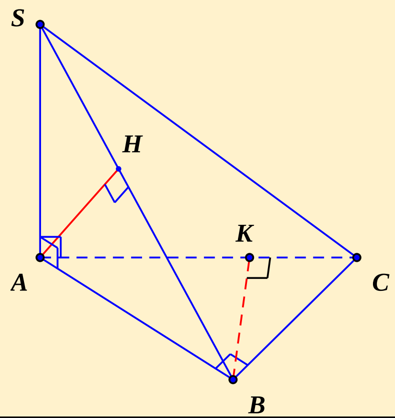
Dạng 2: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc mặt đáy. H là hình chiếu của A lên SB và K là hình chiếu của B lên AC.

□ $SA\perp(ABC)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AB, BC, AC,...\\(ABC)\perp(SAB),(SAC),...\end{cases}$

□ $BC\perp(SAB)$;

□ $AH\perp(SBC)$;

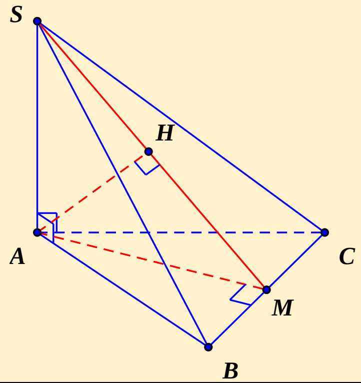
□ $BK\perp(SACD)$



Dạng 3: Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều và cạnh bên SA vuông góc mặt đáy. M là trung điểm BC, H lần lượt là hình chiếu của A lên SM

□ $BC\perp(SAM)$;

□ $AH\perp(SBC)$;



1.Hình chóp đều:

(Là hình chóp có đáy là đa giác đều và hình chiếu của đỉnh lên đáy (chân đường cao) trùng tâm đáy)

Tính chất (chung):

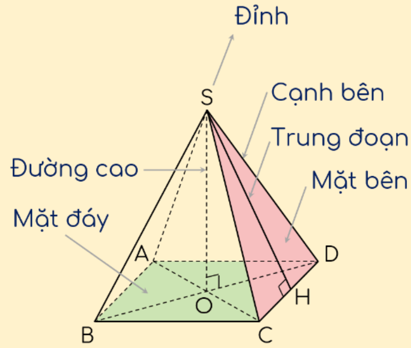
-Các cạnh bên bằng nhau, cạnh đáy bằng nhau

-Các mặt bên là những tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau

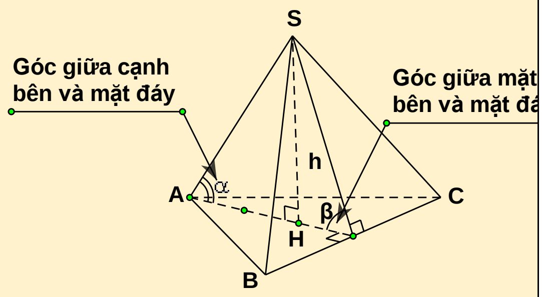
-Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là tâm đáy)

-Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau,

-Góc giữa các mặt bên và mặt đáy bằng nhau.



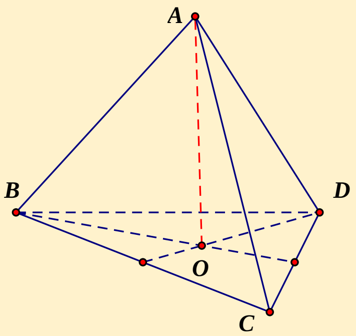
Dạng 1: Hình chóp tam giác đều:
Tính chất (riêng):
Mặt đáy là tam giác đều
Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là giao điểm 2 đường trung tuyến của tam giác đáy)
Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $SAH = SBH = SCH = \alpha$.
Góc giữa mặt bên và mặt đáy là: $SIH = \beta$ (với I là trung điểm cạnh đáy)



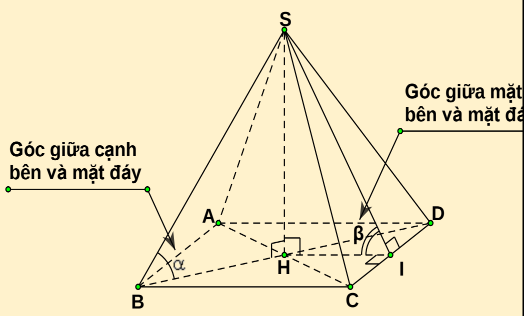
Cách vẽ hình chóp tam giác đều S.ABC (hoặc tứ diện đều):
Vẽ đáy ABC → Dựng trọng tâm H (Là giao điểm 2 đường trung tuyến) → Vẽ SH vuông góc (ABC) → Vẽ các cạnh bên

Dạng 2: Hình tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy (hình chóp tam giác có tất cả các cạnh bằng nhau.
Cho khối tứ diện đều cạnh a, chiều cao h và d là khoảng cách giữa hai cạnh đối diện. Ta có:

$h = a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ $d = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



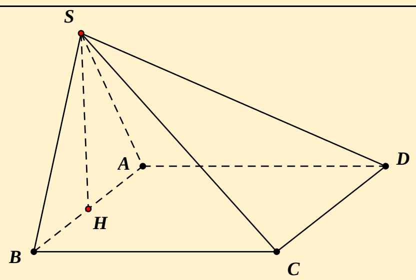
Dạng 3: Hình chóp tứ giác đều
Tính chất (riêng):
Mặt đáy là hình vuông
Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là giao điểm 2 đường chéo của đáy hình vuông)
Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $SAH = SBH = SCH = SDH = \alpha$.
Góc giữa mặt bên và mặt đáy là: $SIH = \beta$ (với I là trung điểm cạnh đáy)



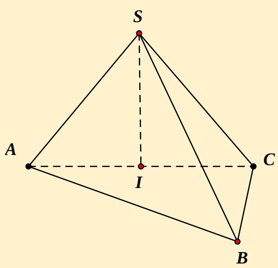
Cách vẽ hình chóp tứ giác đều S.ABCD:
Vẽ đáy hình bình hành ABCD → Vẽ H là giao điểm của hai đường chéo AC & BD → Vẽ SH vuông góc (ABCD) → Vẽ các cạnh bên

3. Hình chóp có một mặt bên vuông góc đáy

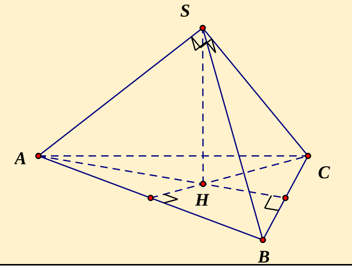
→ Đường cao hình chóp là đường cao của mặt bên đó (hạ từ đỉnh hình chóp).
Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) vuông góc mặt đáy $(ABCD)$ → Đường cao SH của tam giác SAB là đường cao hình chóp $S.ABCD$



5. Hình chóp có tất cả cạnh bên bằng nhau:
→ Đường cao hình chóp là đoạn thẳng hạ từ đỉnh hình chóp đến tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy.
Ví dụ: Hình chóp $S.ABC$ các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau và đáy ABC là tam giác vuông tại B →Đường cao hình chóp là SI, với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (I là trung điểm AC)

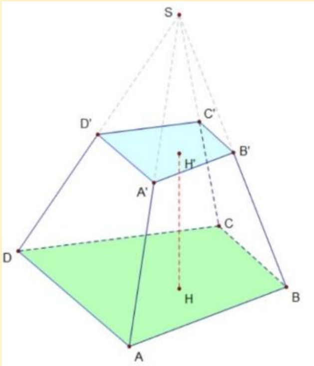


6. Tứ diện vuông: (Tứ diện có 3 mặt là 3 tam giác vuông tại cùng một đỉnh hay có 3 cạnh đôi một vuông góc)
→ Chân đường cao ứng với đỉnh vuông là trực tâm mặt đối diện với đỉnh vuông.
Ví dụ: Hình chóp *S.ABC* có mặt bên *SAB*, *SBC*, *SCA* là tam giác vuông tại *S* →Đường cao *SH*, (với *H* là trực tâm tam giác *ABC*)

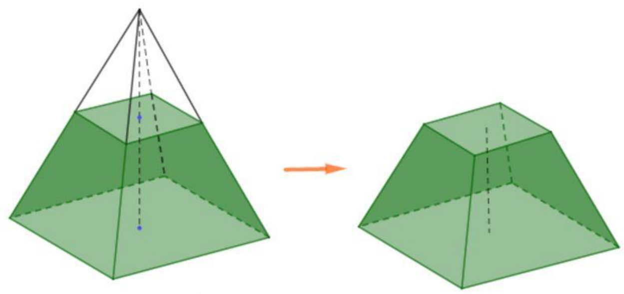


8. Hình chóp cụt

Tính chất: ***Hình chóp cụt có***
+ Các cạnh bên đồng quy;
+ Các mặt bên là hình thang;
+ Hai mặt đáy song song và đồng dạng nhau;
+ Đường cao là đoạn thẳng nối từ một điểm thuộc đáy này đến hình chiếu của nó lên đáy kia;



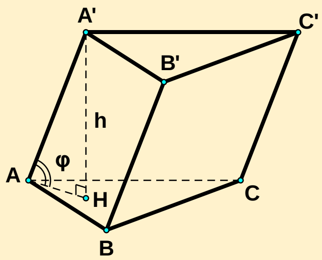
Hình chóp cụt đều:
+ Các cạnh bên đồng quy;
+ Các mặt bên là hình thang cân;
+ Hai mặt đáy là hai đa giác đều, song song và đồng dạng nhau;
+ Đường cao là đoạn thẳng nối từ một điểm thuộc đáy này đến hình chiếu của nó lên đáy kia;
+ Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau;
+ Góc phẳng nhị diện tạo bởi các mặt bên và mặt đáy bằng nhau.



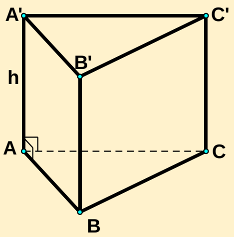
Hình chóp đều Hình chóp cụt đều

9. Các dạng hình lăng trụ thường gặp

Tính chất: ***Hình Lăng trụ có:***
+ Các cạnh bên song song và bằng nhau;
+ Các mặt bên là hình bình hành;
+ Hai mặt đáy song song và bằng nhau;
+ Đường cao là đoạn thẳng nối từ một điểm thuộc đáy này đến hình chiếu của nó lên đáy kia;
+ Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau;

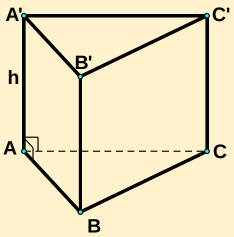


Lăng trụ đứng: là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy



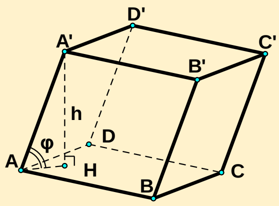
Đường cao là các cạnh bên *A'A*, *B'B*, *C'C*

Lăng trụ đều: là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều

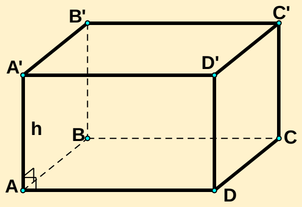
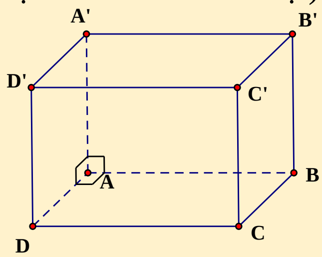
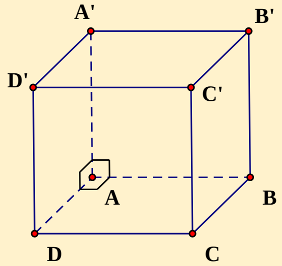


Đường cao là các cạnh bên *A'A*, *B'B*, *C'C*

Hình hộp: là lăng trụ có đáy là hình bình hành



Đường cao: *A'H* (với *H* là hình chiếu của *A'* lên (*ABC*)

Hình hộp đứng: là hình hộp có các cạnh bên vuông góc đáy (đáy là hình bình hành)  Đường cao: $A'A,\ B'B,\ C'C,\ D'D$	***Hình hộp chữ nhật:*** là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật (có 6 mặt đều là hình chữ nhật)  Đường chéo: $AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}$	***Hình lập phương:*** là hình hộp có 6 mặt đều là hình vuông  Đường chéo: $AC' = AB.\sqrt{3}$

PHẦN ☞ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

XI. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. Số trung bình

- Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Số trung bình (hay số trung bình cộng) của mẫu số liệu này, ki hiệu là $\overline{x}$, được tính bởi công thức $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

- Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Khi đó, công thức tính số trung binh trở thành $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n}$, trong đó $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Ta gọi n là cỡ mẫu.

Chú ý

Ki hiệu $f_k = \dfrac{n_k}{n}$ là tần số tương đối (hay còn gọi là tần suất) của x_k trong mẫu số liệu thì số trung binh còn có thể biểu diễn là $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$.

Ý nghĩa của số trung bình

Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đo xu thế trung tâm của mẫu đó.

2. Trung vị và tứ phân vị

Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

Trung vị của mẫu, ki hiệu là M_e, là giá trị ở chính giữa dãy $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Cụ thể:

+ Nếu $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$ thi trung vị mẫu là $M_e = x_{k+1}$.

+ Nếu $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ thì trung vị mẫu là $M_e = \dfrac{1}{2}\left(x_k + x_{k+1}\right)$.

Ý nghĩa của trung vị

Trung vị được dủng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Trung vị là giá trị nằm ở chinh giữa của mẫu số liệu theo nghĩa: luôn có it nhất 50% số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng trung vị và it nhất 50% số liệu trong mẫu nhỏ hơn hoặc bằng trung vị. Khi trong mẫu xuất hiện thêm một giá trị rất lớn hoặc rất nhỏ thi số trung binh sẽ bị thay đồi đáng kể nhưng trung vị thì it thay đổi.

- Tứ phân vị của một mẫu ngẫu nhiên gồm 3 giá trị, đó là tư phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba (lần lượt ki hiệu là Q_1, Q_2, Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau. Cụ thể:

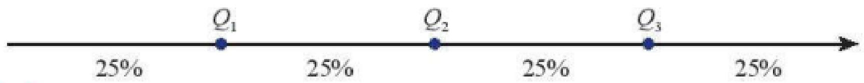
+ Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2, chinh là trung vị của mẫu.

+ Giá trị tứ phân vị thứ nhất, Q_1, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

+ Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Ý nghĩa của tứ phân vị

Các điểm tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần chứa khoảng 25% tổng số số liệu đã thu thập được. Tứ phân vị thứ nhất Q_1 còn được gọi là tứ phân vị dưới và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía dưới. Tứ phân vị thứ ba Q_3 còn được gọi là tứ phân vị trên và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía trên.



3. Mốt

- Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là mốt của mẫu số liệu, ki hiệu là M_o.

Ý nghĩa của mốt

Mốt đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu. liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.

XII. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n$

Khoảng biến thiên của một mẫu số liệu, kí hiệu là R, là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó, tức là: $R = x_n - x_1$

Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu giữa Q_3 và Q_1, tức là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$

Ví dụ 1

Hãy tính khoảng biền thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu: 10; 20; 3; 1; 3; 4; 7 ; 4; 9

Giải

Xét mẫu số liệu đã sắp xếp là: 1; 3; 3; 4; 4; 7; 9; 10; 20.

□Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là: R = 20 - 1 = 19.

□Cỡ mẫu là n = 9 là số lẻ nên giá trị tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = 4$.

□Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của mẫu: 1; 3; 3; 4. Do đó $Q_1 = 3$.

□Tứ phân vị thứ ba là trung vị của mẫu: 7; 9; 10; 20. Do đó $Q_3 = 9,5$.

□Khoảng tứ phân vị của mẫu là: $\Delta_Q = 9,5 - 3 = 6,5$ ..

Ý nghĩa của khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu.

Khoảng tứ phân vị đặc trung cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu.

Khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu.

Giá trị ngoại lệ

Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các *giá trị ngoại lệ* trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị của mẫu.

Cụ thề, phần tử x trong mẫu là giá trị ngoại lệ nếu $x < Q_1 - 1,5.\Delta_Q$ hoặc $x > Q_3 + 1,5.\Delta_Q$

Trong Ví dụ 1, $Q_3 + 1,5.\Delta_Q = 9,5 + 1,5.6,5 = 19,25$ và $Q_1 - 1,5.\Delta_Q = 3 - 1,5.6,5 = -6,75$

Nên mẫu có một giá trị ngoại lệ là 20.

Sự xuất hiện của các giá trị ngoại lệ làm cho số trung bình và phạm vi của mẫu thay đổi lớn. Do đó, khi mẫu có giá trị ngoại lệ, người ta thường sử dụng trung vị và khoảng tứ phân vị đo mức độ tập trung và mức độ phân tán của đa số các phần tử trong mẫu số liệu.

2. Phương sai và độ lệch chuẩn

Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1; x_2; ...; x_n$

□**Phương sai** của mẫu số liệu này, kí hiệu là S^2, được tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2\right]$$

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

□Căn bậc hai của phương sai được gọi là ***độ lệch chuẩn***, kí hiệu là S.

Chú ý: Có thể biến đổi công thức tính phương sai ở trên thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) - \overline{x}^2.$$

Trong thống kê, người ta cũng quan tâm đến phương sai hiệu chỉnh, kí hiệu là $\hat{s}^2$, được tính bởi công thức:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2\right]$$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

Phương sai là trung bình cộng của các bình phương độ lệch từ mỗi giá trị của mẫu số liệu đến số trung bình.

Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn cùng lớn thì các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số:

Giá trị	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Khi đó, công thức tính phương sai trở thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(x_k - \overline{x}\right)^2\right]$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

Có thể biến đổi công thức tính phương sai trên thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(n_1.x_1^2 + n_2.x_2^2 + \ldots + n_k.x_k^2\right) - \overline{x}^2.$$

XIII. *CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM*

3. Số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

a) Số liệu ghép nhóm

Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\ldots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Chú ý

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j;u_{j+1})$ với $1\le j\le k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.

- Cỡ mẫu $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$.

- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm ***giá trị đại diện*** cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1;u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1+u_2)$.

- Hiệu $u_{j+1}-u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j;u_{j+1})$.

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

- Sử dụng từ $k=5$ đến $k=20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R<k.L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1;u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k;u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

b) Số trung bình

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	Nhóm 1	Nhóm 2	....	Nhóm k
Giá trị đại diện	c_1	c_2	$\ldots$	c_k
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính như sau:

$$\boxed{\overline{x}=\frac{n_1c_1+n_2c_2+\ldots+n_kc_k}{n}}$$

trong đó $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$.

Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc.
Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

c) Mốt

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\ldots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m;u_{m+1})$, khi đó **mốt của mẫu số liệu ghép nhóm**, kí hiệu là M_o, được xác định bởi công thức

$$\boxed{M_o=u_m+\frac{n_m-n_{m-1}}{(n_m-n_{m-1})+(n_m-n_{m+1})}\cdot(u_{m+1}-u_m).}$$

Chú ý: Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $n_{m-1}=0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1}=0$.

Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

- Mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_o xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_o thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.

- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa mốt và nhiều mốt.

4. Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

a) Trung vị

Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m;u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C=n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}$.

Khi đó: $$\boxed{M_e=u_m+\frac{\frac{n}{2}-C}{n_m}\cdot(u_{m+1}-u_m).}$$

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

b) Tứ phân vị

Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2, cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m;u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất;
- $C=n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}$.

Khi đó: $$\boxed{Q_1=u_m+\frac{\frac{n}{4}-C}{n_m}\cdot(u_{m+1}-u_m)}$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_j;u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C=n_1+n_2+\ldots+n_{j-1}$.

Khi đó: $$\boxed{Q_3=u_j+\frac{\frac{3n}{4}-C}{n_j}\cdot(u_{j+1}-u_j).}$$

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau. Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

XIV. XÁC SUẤT

1. Không gian mẫu

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là không gian mẫu. Kí hiệu: Ω

2. Biến cố

Biến cố là tập con của không gian mẫu

Biến cố không thể xảy ra gọi clà biến cố không. Kí hiệu là $\varnothing$

Không gian mẫu là biến cố luôn xảy ra gọi là biến cố chắc chắn.

3. Xác suất của biến cố

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất:

$$\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Trong đó: $n(A)=|\Omega_A|$ là số phần tử (hay kết quả thuận lợi) của biến cố A;

$n(\Omega)=|\Omega|$ là số phần tử của không gian mẫu (hay tất cả kết quả có thể xảy ra của phép thử).

b) Tính chất

- $P(\varnothing)=0$;• $P(\Omega)=1$;• $0\le P(A)\le 1$• $P(\overline{A})=1-P(A)$

QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Bước 1. Mô tả không gian mẫu Ω (Nếu được). Kiểm tra tính hữu hạn của Ω, tính đồng khả năng của các kết quả. Đếm số kết quả có thể xảy ra của phép thử: Tính $n(\Omega)$

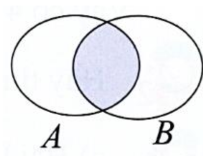
Bước 2. Xác định biến cố A và Đếm số kết quả có thể xảy ra của biến cố A: Tính $n(A)$

Bước 3. Tính xác suất của biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

4. Biến cố giao và quy tắc nhân xác suất

a) Biến cố giao

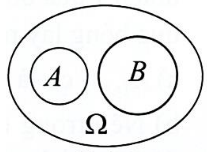
Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu AB hoặc $A\cap B$ được gọi là biến cố giao của A và B.



Chú ý: Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B. Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

b) Hai biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra.



c) Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

d) Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Để tính xác suất của giao các biến cố độc lập, ta sử dụng quy tắc nhân xác suất sau:

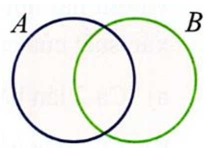
Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB)=P(A)P(B)$.

Chú ý: Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB)\ne P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

5. Biến cố hợp và quy tắc cộng xác suất

a) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A\cup B$, được gọi là biến cố hợp của A và B.



Chú ý: Biến cố $A\cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Tập hợp mô tả biến cố $A\cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B.

b) Quy tắc cộng xác suất

Cho hai biến cố xung khắc A và B. Khi đó $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Cho hai biến cố A và B. Khi đó $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$