

PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA TN THPT 2025 MÔN TOÁN

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Giáo viên cần file word miễn phí
Liên hệ Zalo: 079.24.13579**

DẠNG 1: KHẢO SÁT HÀM SỐ**1. KIẾN THỨC CẦN NHỚ***(Học sinh xem bài giảng)***2. BÀI TẬP MẪU****Câu 1: (ĐỀ MINH HỌA BỘ GIÁO DỤC 2025)**Cho hàm số $f(x) = 2\cos x + x$.

a) $f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2\sin x + 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

(a) $f(0) = 2\cos 0 + 0 = 2$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Đúng.

(b) Đạo hàm của $f(x) = 2\cos x + x$ là $f'(x) = -2\sin x + 1$. Sai.

(c) $f'(x) = -2\sin x + 1$ khi đó $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} + 1 = 0$, suy ra $x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm của phương trình

$f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Đúng.

(d) $f(x) = 2\cos x + x$, $f'(x) = -2\sin x + 1$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$,

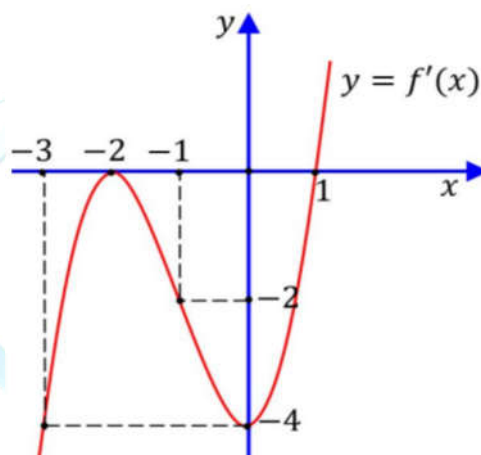
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$. Do đó, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. Đúng.

3. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 1 - 2\sin 2x$

- a) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -1 , khi đó $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $g(x) = f(x) + \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- c) Tập xác định hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- d) Phương trình $f''(x) = 4$ chỉ một họ nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- c) $f'(2) = 4$.
- d) Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$.

- a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$.
- d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $d: 4x - y - 3 = 0$ tại 2 điểm phân biệt.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x+1}$ có đồ thị là (C) .

- a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{1}{2}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$.
- c) (C) có đường tiệm cận xiên là $y = 2x + 1$.
- d) (C) có tâm đối xứng $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$, có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- b) Hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) có phương trình là $\Delta: y = 2x + 1$.
- d) Đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) khi $m = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.
- b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng $4\sqrt{5}$.
- c) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) đi qua điểm $M(2; -2)$.
- d) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 3$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị là (C) .

- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 1)$.
- b) Hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$.
- d) Trục đối xứng của đồ thị có phương trình là $y = (\sqrt{2} + 1)x + 2 - \sqrt{2}$.

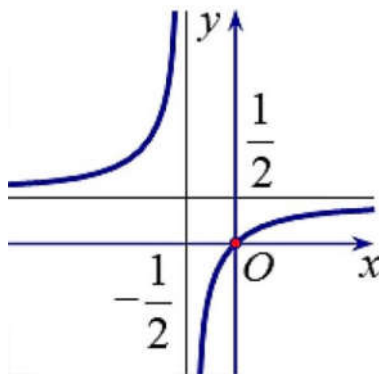
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x + 3}$.

- a) Hàm số có đạo hàm $y' = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x + 3)^2}$.
- b) Hàm số nghịch biến trên $(-4; -3)$.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.
- d) Có 2022 giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2024; 2025]$ để hàm số: $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = 2\sin x - \sqrt{2}x$.

- a) $f(0) = 0; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.
- b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2\cos x + \sqrt{2}$.
- c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{4}$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là $-2 + \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + 1}$ ($c \neq 0, a - bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ sau:



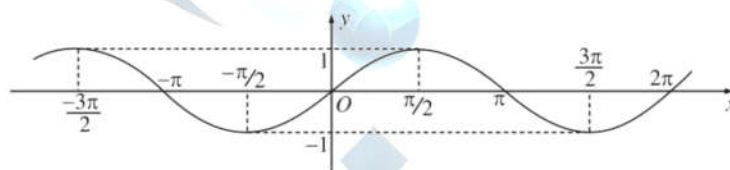
- a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = -\frac{1}{2}$ và tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$ và $(\frac{1}{2}; +\infty)$.
- c) $a > 0; b < 0; c > 0$
- d) $T = a + 2b + c = 3$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{4} & \text{khi } x < 1 \\ m+2 & \text{khi } x = 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-x^2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{4}$.
- b) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{4}$.
- d) Với mọi số thực m thì hàm số đã cho liên tục trên tập xác định.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \sin x$.

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- b) Hàm số $f(x) = \sin x$ có đồ thị như hình sau:



- c) Hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ là hàm số chẵn.
- d) Hàm số $h(x) = \frac{1}{2f(x)-m}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \leq -2 \vee m \geq 2$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = 6x + \sin x \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(0) = 2$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua gốc tọa độ.

- a) $f(x) = 3x^2 + \cos x + 1$.
- b) $F(x) = x^3 - \sin x + 3x$.
- c) Đồ thị hàm số $y = F(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.

d) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có $\min f(x) = 2$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào sau đây là đúng hay sai ?

- a) (C) có tiệm cận đứng $x = 2$ và tiệm cận ngang $y = 3$
- b) (C) có tâm đối xứng $(2;3)$.
- c) Có tất cả 12 đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên.
- d) Gọi A và B là hai điểm nằm trên hai nhánh của (C) . Đoạn AB ngắn nhất bằng $4\sqrt{5}$

----Hết----



DẠNG 2: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN MỨC VẬN DỤNG**1. KIẾN THỨC CẦN NHỚ***(Học sinh xem bài giảng)***2. BÀI TẬP MẪU****Câu 1: (ĐỀ MINH HỌA BỘ GIÁO DỤC 2025)**

Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m.

b) Giá trị của b là 10.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) kể từ khi tăng

tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^t v(t) dt$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Hướng dẫn giải

a) Tốc độ ban đầu của ô tô là 36 km/h = 10 m/s.

Quãng đường ô tô đi được trong 2 giây đầu tiên là: $S_1 = 10 \cdot 2 = 20$ (m).

Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là: $S_2 = 200 - 20 = 180$ m. **Đúng.**

b) Ta có $v(t) = at + b$. (cần phải nói rõ đơn vị m/s)

Thời điểm bắt đầu tăng tốc ta có $t = 0$, $v = 10 \Rightarrow v(0) = b = 10$. **Đúng.**

c) Do $v(t) > 0$ với $0 \leq t \leq 24$, đó đó quãng đường $S(t)$ mà ô tô đi được trong thời gian t giây

($0 \leq t \leq 24$) kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức: $S(t) = \int_0^t v(t) dt$. Còn công thức

$S(t) = \int_0^{24} v(t) dt$ là quãng đường ô tô đi được trong 24 giây. **Sai.**

d) Ta có $v(t) = at + 10$.

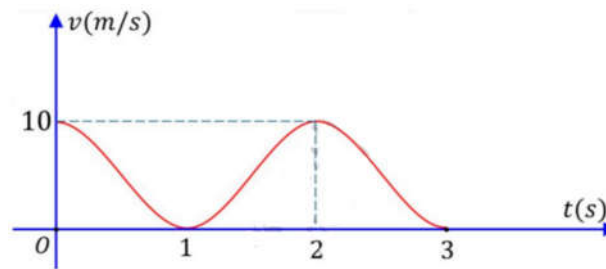
Biết xe nhập làn sau 12 giây kể từ lúc tăng tốc, nên

$$180 = \int_0^{12} (at + 10) dt = a \int_0^{12} t dt + \int_0^{12} 10 dt \Leftrightarrow 72a + 120 = 180 \Rightarrow v(t) = \frac{5}{6}t + 10 \text{ (m/s)}$$

Tốc độ của ô tô sau 24 giây là: $v(24) = 24 \cdot \frac{5}{6} + 10 = 30$ (m/s) = 108 (km/h) > 100 (km/h). **Sai.**

3. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 2: Một chất điểm chuyển động trong 3 giây với vận tốc $v(t) = a \cos(\pi t) + b$ (mét/giây); trong đó, t (s) là biến thời gian; a, b là các hằng số. Đồ thị hàm vận tốc đó là một đường hình sin như hình sau:



- Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây là 10 m/s .
- Giá trị của a là 5 .
- Giá trị của b là 10 .
- Tổng quãng đường vật đi được sau 3 giây là $16,5 \text{ m}$.

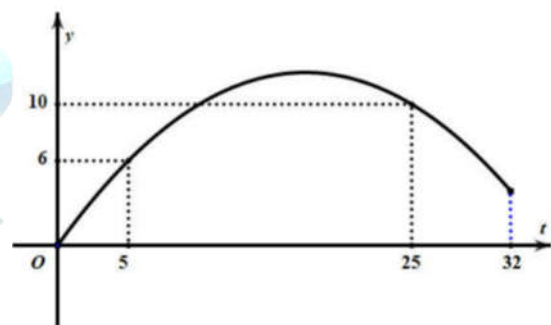
Câu 3: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Biết sau khi B xuất phát 15 giây thì đuổi kịp A .

- Vận tốc của chất điểm B được tính theo công thức $v_B(t) = at$ (với mốc thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động).
- Quãng đường mà chất điểm A đi được trong 25 giây là $\frac{375}{2} \text{ m}$.
- Quãng đường $S_B(t)$ mà chất điểm B đi được trong thời gian t giây ($t > 0$) kể từ khi xuất phát được tính theo công thức $S_B(t) = \int_0^t v(t) dt$.
- Vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp chất điểm A là 25 (m/s).

Câu 4: Hai vận động viên A và B tham dự một cuộc thi chạy bộ trên một đường thẳng, xuất phát cùng một thời điểm, cùng vạch xuất phát và chạy cùng chiều với nhau với hai vận tốc là v_A và v_B . Trong khoảng thời gian 32 giây chạy đầu tiên ta có

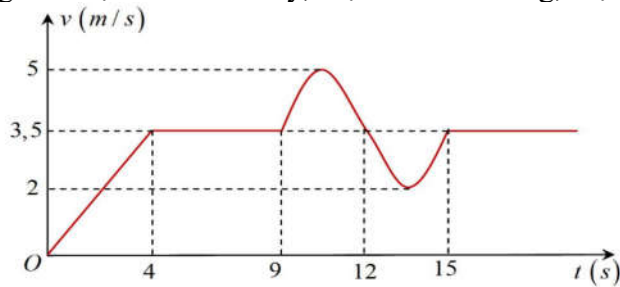
$$v_A = \frac{1}{450}t^3 - \frac{47}{450}t^2 + \frac{64}{45}t \text{ (m/s)}; v_B = at^2 + bt \text{ (m/s)}$$

(gia tính bằng giây). Hàm số $y = at^2 + bt$ có đồ thị là một phần của parabol như hình vẽ bên.



- Tốc độ chạy lớn nhất của vận động viên A trong khoảng 20 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát là 6 m/s .
- Sau 30 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát, hai vận động viên cách nhau một khoảng bằng 120 m .
- $a = \frac{-1}{5}$
- Quãng đường vận động viên B chạy được trong 30 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát là 250 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 5: Cho một vật bắt đầu chuyển động thẳng trên trục Ox với đồ thị vận tốc theo thời gian như hình vẽ. Biết từ giây thứ 9 đến giây thứ 15 đồ thị vận tốc là đường hình sin có phương trình là $v(t) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ (m/s). Trong bài toán vận tốc tính theo m/s, quãng đường tính theo mét, thời gian tính theo giây. Hỏi trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?



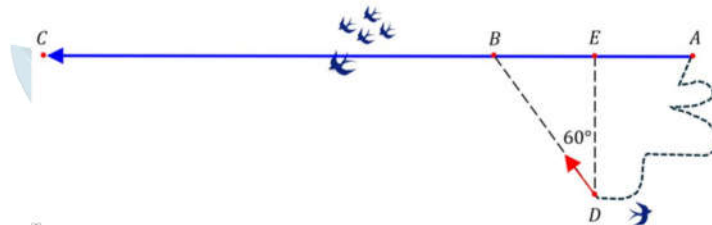
a) Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên là 7 m.

b) Biểu thức vận tốc của vật là
$$v(t) = \begin{cases} 0,875t & \text{nếu } 0 \leq t < 4 \\ 3,5 & \text{nếu } 4 \leq t < 9 \vee t \geq 15 \\ 3,5 + 1,5\sin\frac{\pi}{3}t & \text{nếu } 9 \leq t \leq 15 \end{cases}.$$

c) Quãng đường vật đi được trong 15 giây đầu tiên bằng 45,5 m.

d) Nếu tính theo mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) thì quãng đường vật đi được trong 11 giây đầu tiên bằng 33,6 m.

Câu 6: Một đàn chim đang bay theo phương ngang, khi đến vị trí A thì bỗng nghe tiếng súng nổ của một gã thợ săn gần đó. Một con chim hoảng loạn đã rời khỏi đàn, bay chao đảo xuống phía dưới. Bầy chim còn lại thì sợ hãi, từ vị trí B , chúng bay nhanh về phía trước với vận tốc được tăng thêm 0,5 m sau mỗi giây. Riêng con chim rời khỏi đàn phải mất vài giây để lấy lại bình tĩnh, từ vị trí D nó bay về vị trí B theo phương hợp với phương thẳng đứng một góc 60° , vận tốc 43,2 km/h và sau 6 giây nó đến được B .



a) Quãng đường BD bằng 68 m.

b) Khi bay với vận tốc 43,2 km/h theo phương thẳng đứng thì mất 4 giây sau, con chim lạc đàn sẽ đạt được độ cao của đàn chim đang bay

c) Sau 10 giây, bầy chim (thiếu 1 con) bay được đến với $BC = 155$ m, vận tốc của bầy chim tại B là 13 m/s.

d) Nếu con chim lạc đàn bay từ B với vận tốc $v = t + 12$ thì sau 41,5 giây nó sẽ bắt kịp đàn chim (lấy B làm mốc thì đàn chim bay trước con chim này khoảng 11 giây); kết quả được làm tròn đến hàng phần chục.

Câu 7: Như chúng ta đã biết, thỏ đã thua rùa trong cuộc đua kinh điển được cả thế giới biết đến. Kể từ hôm đó thỏ ôm trong lòng một mối hận lớn, nó ngày đêm tập luyện để chờ dịp báo thù. Hôm ấy thỏ có dịp test tốc độ của mình bằng một cuộc đua với cáo. Chặng đua dài 5 km, sau khi nhận hiệu lệnh xuất phát, thỏ lao về phía trước với vận tốc 36 km/h; khoảng 5 phút sau thì nó dừng lại vì gặp một người bạn. Nói về cáo, kể từ khi xuất phát nó đã chạy với vận tốc đều đặn, cho đến hết phút thứ sáu thì nó mới tăng tốc với vận tốc



$v(t) = t + 8$ (mét/giây), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc và nó giữ nguyên tốc độ này trong 12 giây liên tiếp, sau đó thì lại chuyển động thẳng đều.

- a) Sau 5 phút kể từ khi xuất phát, thỏ cách đích đến một đoạn 2 km.
- b) Sau 6 phút đầu thì cáo chạy được quãng đường 2800 m.
- c) Kể từ khi tăng tốc thì đến giây thứ 9, cáo bắt kịp vị trí thỏ đang đứng.
- d) Sau khi gặp bạn thỏ thỏ cái 3 phút nói chuyện 3 phút, thỏ trở lại đường đua và chạy với vận tốc được tăng thêm 1,5 m sau mỗi giây và thỏ đã về đích trước cáo.

Câu 8: Một quần thể vi khuẩn A có số lượng cá thể là $P(t)$ sau t phút quan sát được phát hiện thay đổi với tốc độ là: $P'(t) = ae^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$ (vi khuẩn/phút) ($a \in \mathbb{R}$). Biết rằng lúc bắt đầu quan sát, quần thể có 200000 vi khuẩn và đạt tốc độ tăng trưởng là 350 vi khuẩn/phút.

- a) Giá trị của $a = 200$.
- b) $P(t) = 2000e^{0,1t} - 5000e^{-0,03t} + 200000$
- c) Sau 12 phút số lượng vi khuẩn trong quần thể là 206152 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- d) Sau 12 phút, một quần thể vi khuẩn B có tốc độ tăng trưởng là: $G'(t) = 500e^{0,2t}$ (vi khuẩn/phút) t tính từ thời điểm bắt đầu cạnh tranh nguồn thức ăn trực tiếp với quần thể A . Một cá thể tại quần thể B triệt tiêu một cá thể tại quần thể A . Sau 5 phút cạnh tranh, hai quần thể bị triệt tiêu hoàn toàn. Số lượng vi khuẩn của quần thể B ở thời điểm bắt đầu cạnh tranh là 191967 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 9: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2, 0 \leq x \leq 100$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất (Theo R.Larson, *Brief Calculus: An Applied Approach*, 8th edition, Cengage Learning, 2009)

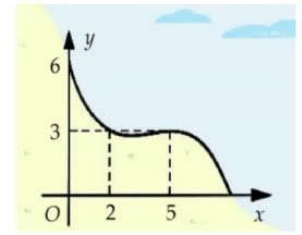
- a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.
- b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng 8,56% tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.
- c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100} \left[x - (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2 \right] dx.$$
- d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Câu 10: Trò chơi trượt cỏ của một khu vui chơi giải trí có đường trượt như hình a, đường trượt của nó khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình b. Biết đường trượt của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba; vị trí bắt đầu trượt có hoành độ là 0, điểm cực đại của đồ thị hàm số có tọa độ là $(5;3)$ và người chơi dừng lại tại vị trí nằm trên trục Ox . Đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét. Biết rằng độ dài đường cong có phương trình $y = f(x)$ từ điểm $A(a; f(a))$ tới điểm $B(b; f(b))$ với $a < b$ được tính bởi công thức $T = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Các kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.



Hình a



Hình b

- Hàm số mô phỏng đường trượt là $f(x) = -\frac{3}{50}x^3 + \frac{18}{25}x^2 - \frac{25}{10}x + 6$.
- Người chơi trượt đúng theo quỹ đạo đó sẽ trượt một quãng đường dài 23,04 mét.
- Nếu tốc độ trung bình trên cả đường trượt của người chơi là 3 m/s thì cần 7,68 giây để người đó đến điểm dừng lại.
- Một người chơi mất đúng 6 giây để đến điểm dừng lại, tốc độ trung bình trên cả đường trượt của người chơi đó là 4 m/s .

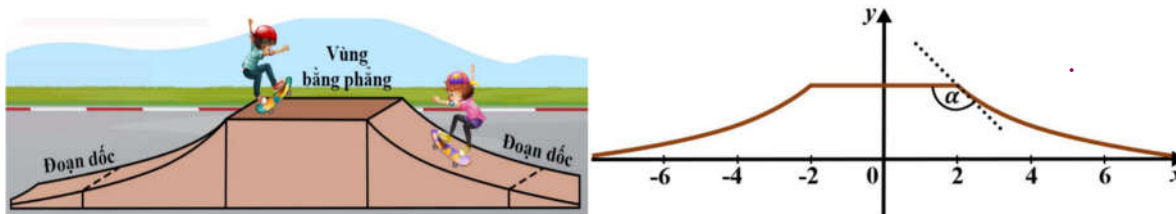
Câu 11: Ở nhiệt độ 37°C , một phản ứng hóa học từ chất đầu A , chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05 \text{ mol L}^{-1}$. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Khi đó, ta có

- $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$.
- $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.
- $y(30) - y(15) = -6 \cdot 10^{-4}$.
- Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây bằng 0,05.

Câu 12: Trên một cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cái cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 m , còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 m và 2 m . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.

- Con bò được cột vào sợi dây 3 mét có thể ăn được phần cỏ có diện tích nhiều hơn con còn lại là $5\pi \text{ (m}^2\text{)}$
- Phần diện tích cỏ mà hai con bò có thể ăn chung là $6,12 \text{ (m}^2\text{)}$.
- Nếu tăng chiều dài sợi dây cột mỗi con bò đều thêm 1 mét thì diện tích phần cỏ ăn chung tăng thêm 42,21% so với diện tích phần cỏ ăn chung lúc đầu.
- Nếu chiều dài sợi dây cột con bò dài 2 mét, được tăng thêm 2 mét nữa, đồng thời khoảng cách giữa 2 cọc tăng thêm 1 mét thì diện tích phần cỏ ăn chung của 2 con bò tăng thành $6,64 \text{ m}^2$ so với tổng diện tích cỏ mà 2 con bò có thể ăn được lúc đầu.

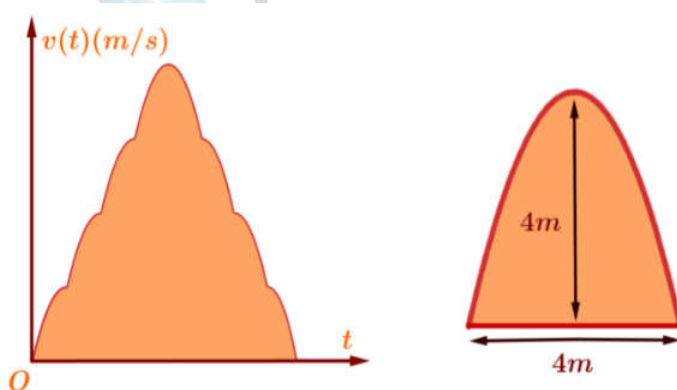
Câu 13: Hình vẽ bên dưới minh họa một phần khu vực thiết kế dành cho các hoạt động trượt ván, patin. Đường lên của khu vực này dẫn đến một bề mặt nằm ngang (gọi là vùng bằng phẳng), tiếp theo là đoạn dốc xuống, hai đường đối xứng nhau hai bên. Mặt trước và mặt sau của chướng ngại vật vuông góc với mặt đất ngang. Để mô tả mặt bên phía trước một cách toán học, ta xét mặt phẳng Oxy với trục Ox là phần bên dưới, trục Oy là trục đối xứng của bề mặt đang xét.



Vùng bằng phẳng trải dài trong mô hình từ $-2 \leq x \leq 2$. Đường cong mặt cắt ngang của đoạn dốc xuống trong khoảng $2 \leq x \leq 8$ được mô tả bởi đồ thị của hàm số $f(x) = 2 - \ln(x-1)$. Trong hệ tọa độ này, một đơn vị chiều dài tương ứng với một mét trong thực tế.

- Chiều cao của vùng bằng phẳng là 2 m.
- Trên khoảng $(2; 8)$ có một điểm x_0 mà tại đó, tốc độ thay đổi tức thời của hàm $f(x)$ bằng tốc độ thay đổi trung bình của hàm $f(x)$ trên khoảng này. Khi đó $x_0 = 4,3$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
- Trên mô hình, hãy giá trị của góc α được xác định bởi mặt phẳng nằm ngang của vùng bằng phẳng và đoạn đường dốc xuống tại cạnh chuyển tiếp (tiếp tuyến tại điểm $x = 2$). Góc α có giá trị bằng 45° .
- Mặt bên phía trước của chướng ngại vật được sử dụng một phần làm khu vực quảng cáo (xem Hình 1). Trong mô hình, khu vực này bao gồm hai phần diện tích, cụ thể là diện tích giữa đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành trong đoạn $[2; 6]$ và một phần đối xứng với nó trong góc phần tư thứ II. Diện tích của khu vực quảng cáo là $7,91 \text{ m}^2$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 14: Một xe máy di chuyển trên đoạn đường đồi núi có đồ thị vận tốc theo thời gian được cấu tạo bởi các phần một nửa của công parabol với chiều cao và độ dài đáy bằng 4 m như hình vẽ.



- Diện tích của chiếc công parabol là $\frac{16}{3}$.
- Nếu đặt hệ trục tọa độ như hình trên thì phương trình parabol cao nhất tạo nên đỉnh của hình vẽ là $y = (x-6)^2 + 16$.
- Gia tốc của xe máy không đổi trong quá trình chuyển động.
- Tính tổng quãng đường xe máy đi được từ lúc xuất phát đến khi dừng lại có giá trị lớn hơn 120 m^2 .

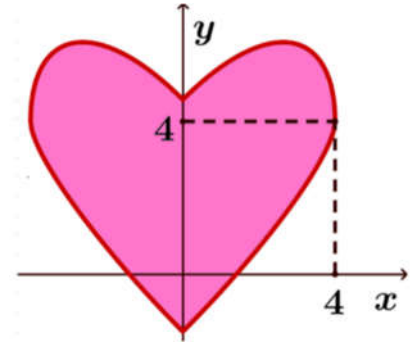
Câu 15: Một mô hình trái tim được tạo nên bởi hai phần đồ thị của các hàm số $f(x) = |x| - \frac{3}{8}\sqrt{16 - ax^2}$ và

$g(x) = |x| + \frac{8}{7}\sqrt{16 - bx^2}$. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có

một điểm chung là $A(4; 4)$ như hình vẽ.

Xét tính đúng sai của một số mệnh đề sau:

- a) a và b có giá trị khác nhau.
- b) Tập giá trị của $g(x)$ luôn nhỏ hơn 4.
- c) Hàm số $f(x)$ có tập giá trị luôn lớn hơn 4.
- d) Diện tích hình trái tim có giá trị lớn hơn 12π .



---Hết---

DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ MẶT CẦU (Đ-S)

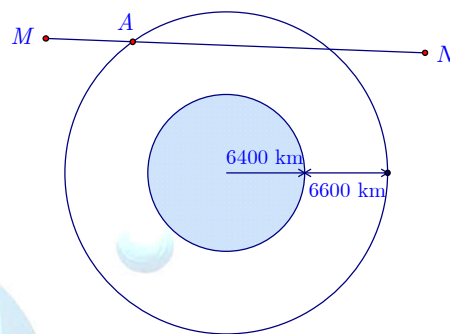
1. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

(Học sinh xem bài giảng)

2. BÀI TẬP MẪU

Câu 1: (ĐỀ MINH HỌA BỘ GIÁO DỤC 2025)

Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



- a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$
- b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$
- c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị ki-lô-mét).
- d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Hướng dẫn giải

- a) Vector chỉ phương của đường thẳng MN là $\overrightarrow{MN} = (-12; -32; 16) = -4(3; 8; -4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng MN là:
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Đúng.}$$

b) Để tìm vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi, ta cần tìm điểm giao của đường thẳng MN với mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=6,4+6,6=13$

Phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 13^2$.

Thay $x=6+3t$, $y=20+8t$ và $z=-4t$ vào phương trình mặt cầu, ta được:

$$(6+3t)^2 + (20+8t)^2 + (-4t)^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow 89t^2 + 356t + 267 = 0$$

Giải phương trình, ta tìm được $t = -3$ hoặc $t = -1$.

Thay $t = -3$ và $t = -1$ vào phương trình tham số của đường thẳng MN , ta được hai giao điểm của MN và mặt cầu là $(-3; -4; 12)$ và $(3; 12; 4)$. Nhận thấy từ M đến N , hoành độ có xu hướng giảm dần, nên điểm $A(3; 12; 4)$. **Sai.**

c) Ta có $B(-3; -4; 12)$

Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng là AB

$$AB = \sqrt{(-3-3)^2 + (-4-12)^2 + (12-4)^2} = 2\sqrt{89}, \text{ tương đương với } \approx 18900\text{km} . \text{ **Đúng.}**$$

d) Thời gian thiên thạch di chuyển từ M đến N là:

$$MN = \sqrt{(6+6)^2 + (-12-20)^2 + (16-0)^2} = 4\sqrt{89} = 2AB$$

Do đó $t = \frac{MN}{AB} . 3 \approx 6$ (phút). **Đúng**

3. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 2: Một tháp kiểm soát không lưu ở sân bay cao 109 m đặt một đài kiểm soát không lưu ở độ cao 105 m. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 450 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox là hướng Tây, trục Oy là hướng Nam và trục Oz là trục thẳng đứng (Hình vẽ), đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét. Một máy bay đang ở vị trí A cách mặt đất 8 km, cách 268 km về phía Đông, 185 km về phía Nam so với tháp kiểm soát không lưu và đang chuyển động theo đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (82; 76; 0)$ hướng về đài kiểm soát không lưu.

a) Vị trí A có tọa độ là $(268; -185; -8)$.

b) Đài kiểm soát không lưu có phát hiện được máy bay tại vị trí A .

c) Phương trình tham số của đường thẳng d là
$$\begin{cases} x = -268 + 82t \\ y = 185 + 76t \\ z = 8 \end{cases}, (t \text{ là tham số}).$$

d) Khoảng cách gần nhất giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu là 217,96 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 3: Hệ thống phòng không "Vòm sắt" là một trong những hệ thống đánh chặn tên lửa từ xa rất nổi tiếng của Israel. Để "Vòm sắt" hoạt động được chính xác người ta trang bị một Radar có khả năng phát hiện tên lửa với bán kính 417 km. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét, một hệ thống "Vòm sắt" đang ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và một quả tên lửa đang ở vị



trí $A(688;185;-8)$ được phóng lên và bay theo một quỹ đạo là đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-91; -75; 0)$.

- Phương trình mặt cầu thể hiện vùng phủ sóng của Radar là $x^2 + y^2 + z^2 = 417$.
- Radar phát hiện quả tên lửa ngay tại vị trí được phóng lên.
- Nếu hệ thống "Vòm sắt" gặp trục trặc không thể bắn hạ tên lửa thì khoảng cách gần nhất từ hệ thống "Vòm sắt" đến quả tên lửa xấp xỉ 300 km (sai số không quá 10 km).
- Nếu hệ thống gặp trục trặc không bắn hạ được tên lửa, biết từ khi tên lửa phóng đến khi Radar phát hiện là 3 phút, thời gian tên lửa xuất hiện trên Radar là 5 phút.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, một con chim bồ câu xuất phát từ

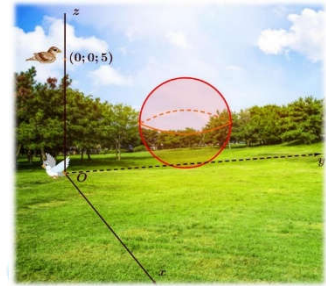
$O(0;0;0)$ di chuyển với vectơ vận tốc $\vec{v}_1 = (1; 2; 2)$. Cùng lúc đó, một

con chim én cũng bắt đầu di chuyển từ $A(0;0;5)$ với vectơ vận tốc

$\vec{v}_2 = (0; 3; 4)$. Tồn tại một vùng không gian nguy hiểm, nơi mà người ta

thường xuyên săn bắn chim có dạng mặt cầu

$$(S_1): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 16.$$



Biết rằng mỗi đơn vị trên các trục tọa độ trong không gian tương đương 1 m và đơn vị đo thời gian là giây.

- Tốc độ di chuyển của chim bồ câu là 3 (m/s) .
- Chim én có đi vào vùng không gian nguy hiểm trong quá trình bay.
- Thời gian mà bồ câu di chuyển trong vùng không gian nguy hiểm nhỏ hơn 5 giây.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng quỹ đạo của hai con chim bằng $\frac{2}{3} \text{ m}$.

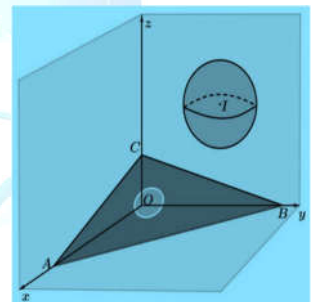
Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ với hệ trục tọa độ được đặt như hình vẽ bên.

Một mặt phẳng (P) cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm

$A(4;0;0), B(0;6;0), C(0;0;2)$, khoét một cái lỗ hình tròn bán kính $R=1$

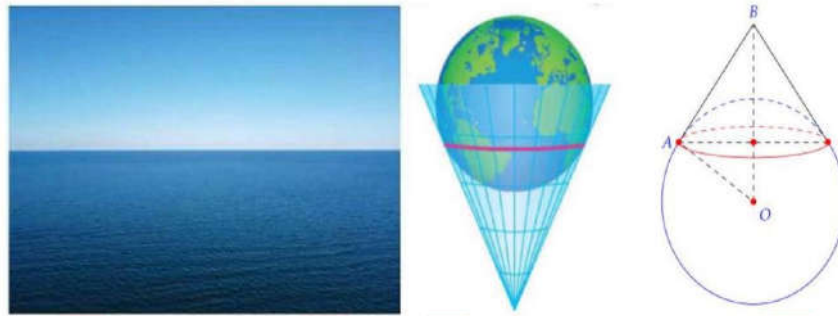
trên mặt phẳng (P) như hình vẽ. Đặt một mặt cầu bán kính $R=2$ có tâm I

vào cái lỗ sao cho nó lún vào cái lỗ và đứng im tại đó. Khi đó, các khẳng định sau đúng hay sai. Biết rằng mỗi đơn vị trên các trục tọa độ trong không gian tương đương 1 m.



- Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{2} = 1$.
- Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (6; 4; 3)$.
- Khoảng cách từ I sau khi lún vào và đứng im tới mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{3}$.
- Nếu tâm lỗ có tọa độ $\left(2; 2; \frac{1}{3}\right)$ thì điểm I có tọa độ bằng $(a; b; c)$ thỏa mãn $a + b + c > 8,8$.

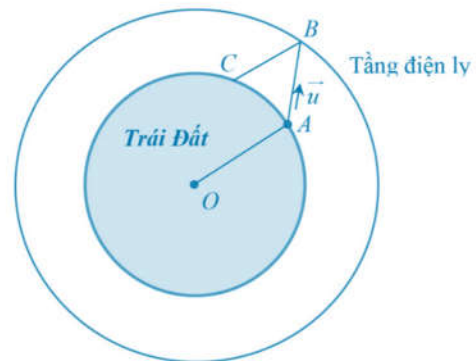
Câu 6: Nếu đứng trước biển và nhìn ra xa, người ta sẽ thấy một đường giao giữa mặt biển và bầu trời, đó là đường chân trời đối với người quan sát. Ta có thể hình dung rằng nếu người quan sát ở tại đỉnh của một chiếc nón và trái đất được "thả" vào trong chiếc nón ấy thì đường chân trời là đường "chạm" giữa trái đất và chiếc nón.



Trong không gian $Oxyz$, giả sử bề mặt trái đất (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và người quan sát ở vị trí $B(1;1;-1)$; A là một vị trí bất kì trên đường chân trời đối với người quan sát ở vị trí B .

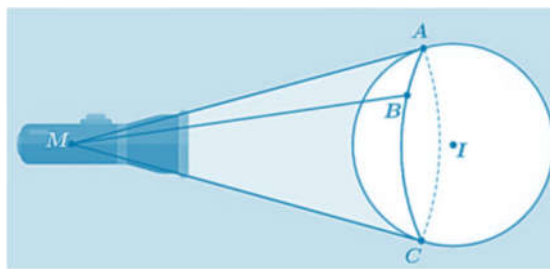
- Khoảng cách từ vị trí B đến tâm của trái đất là $\sqrt{3}$.
- Khoảng cách hai điểm A, B là $\sqrt{2}$.
- Phương trình mặt cầu đường kính OB là: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.
- Điểm A luôn thuộc mặt phẳng cố định $x + y - z - 1 = 0$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, coi Trái Đất là một hình cầu có tâm là gốc tọa độ và có bán kính bằng 16, đơn vị dài trên mỗi trục tọa độ là 400 km. Coi tầng điện ly luôn cách bề mặt Trái Đất 400 km, tức là tầng điện ly là một mặt cầu có tâm là gốc tọa độ O . Từ một đài phát A đặt tại điểm $A(16;0;0)$ có phát một sóng điện từ với tần số 10 MHz lên trên cao (với tốc độ không đổi bằng $3 \cdot 10^8$ m/s) hướng theo vector $\vec{u} = (1;2;0)$, sóng điện từ này gặp tầng điện ly tại điểm B , tại B nó bị phản xạ và truyền trở lại gặp bề mặt Trái Đất tại điểm C . Biết rằng tính chất phản xạ cho ta kết quả là: bốn điểm O, A, B, C đồng phẳng và có $\widehat{ABO} = \widehat{OBC}$, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$.



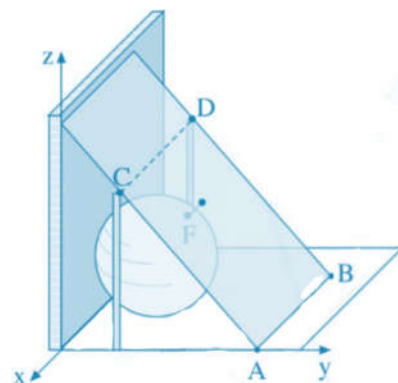
- Trong không gian $Oxyz$, tầng điện ly là mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính bằng 17.
- Phương trình tham số của đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = 16 + t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$
- Nếu tọa độ điểm B là $(a;b;c)$ thì $(a + 2b + c)^2 = 256$.
- Tính theo đơn vị km (làm tròn đến hàng đơn vị) thì ta có: $AC = 1361$ km.

Câu 8: Nguồn sáng phát ra từ một cây đèn pin khi chiếu vào một quả cầu phản quang sẽ cho ta hình ảnh của một mặt cầu tiếp xúc với các đường sinh của một hình nón (xem hình vẽ). Giả sử nguồn sáng phát ra từ điểm M , trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho sẵn với đơn vị trên mỗi trục là mét, các tiếp tuyến MA, MB, MC thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ, \widehat{BMC} = 90^\circ, \widehat{CMA} = 120^\circ$. Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$.



- Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.
- Nếu đặt $MA = MB = MC = x > 0$ thì $AB = x, BC = x\sqrt{3}, AC = x\sqrt{2}$.
- Tam giác ABC cân.
- Độ dài bé nhất của OM là $2,26m$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

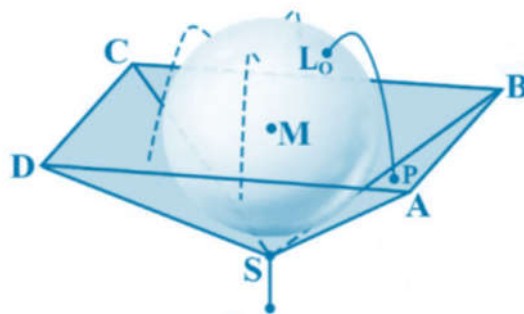
Câu 9: Một bình chứa khí hình cầu K (đường kính 10 m) chạm trực tiếp vào một bức tường thẳng đứng tại điểm $T(-6; 0; 5)$. Một tấm chắn được cố định xuống đất tại các điểm $A(0; 16; 25; 0), B(-12; 16; 25; 0)$ và tại các điểm $C(0; 5; 15), D(-12; 5; 15)$ được đỡ bằng các thanh chống thẳng đứng.



- Phương trình của hình cầu K trong hệ tọa độ là $(x+6)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 25$.
- Phương trình tấm chắn E là $3x + 4z = 60$.
- Một điểm M bất kì nằm trên bề mặt của bình chứa K . Khoảng cách ngắn nhất từ M đến tấm chắn E là 3 m.
- Để tối ưu chi phí, nên thay tấm chắn E bằng tấm H có cùng chiều rộng với tấm chắn E (cùng bằng $AB = 12$), nhưng chiều dài giảm đi để có thể tiếp xúc với quả bóng. Khi đó các thanh chống đều phải rút ngắn đi 3 m.

Câu 10: Cho các điểm $A(6; 0; 4), B(0; 6; 4), C(-6; 0; 4)$ và D tạo thành các đỉnh của hình vuông $ABCD$.

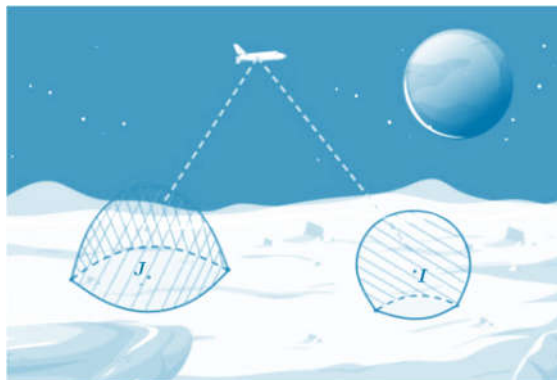
Cho hình chóp $S.ABCD$ với đỉnh $S(0; 0; 1)$. Biết A, B và S cùng nằm trên mặt phẳng (F) . Một chiếc đài phun nước được đặt trên một cột. Phần đài phun nước gồm một quả cầu đá cẩm thạch đặt bên trong một bể chứa. Quả cầu đá cẩm thạch tiếp xúc với bốn cạnh bên trong của bể chứa tại bốn điểm. Trong mô hình, bể chứa được biểu diễn bởi hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, quả cầu đá cẩm thạch được biểu diễn bởi một hình cầu tâm $M(0; 0; 4)$ và bán kính bằng R . Mặt phẳng Oxy biểu diễn mặt đất, mỗi đơn vị độ dài trong hệ tọa độ tương ứng với 1 dm trong thực tế. Biết rằng trên bề mặt quả cầu cẩm thạch có 4 vị trí lắp đặt các vòi phun nước. Một trong số các vị trí này được xác định bằng điểm $L_0(1; 1; 6)$ như trong mô hình. Nước từ vòi phun được mô hình hóa bằng các điểm $L_t(t+1; t+1; 6, 2-5(t-0, 2)^2)$, trong đó t là một số thực dương.



- Mặt phẳng (F) có phương trình là $x + y - 2z - 2 = 0$.

- b) Điểm cao nhất của dòng nước từ vòi phun so với mặt đất cao 6,2dm .
 c) Điểm cao nhất của dòng nước cao hơn điểm cao nhất của đài phun nước.
 d) Điểm $P(a;b;c)$ nằm trong tam giác SAB mô tả vị trí mà dòng nước tiếp xúc với bề chứa bên trong mô hình thì $a+b+c=6$.

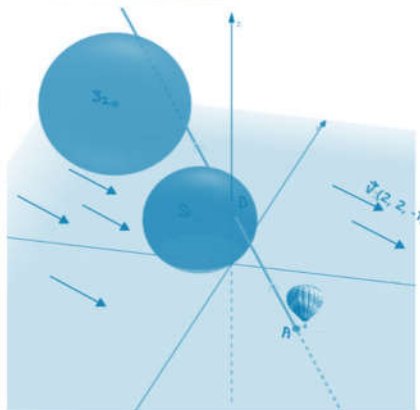
Câu 11: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ đặt tại hòa tinh với mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, người ta lắp đặt hai lồng kính an toàn (nơi cung cấp khí Oxy , nước giúp con người sinh hoạt và thực vật có thể được trồng và phát triển), lồng kính có bề mặt dạng các mặt cầu tâm $I(-4;-5;0)$ và $J(6;8;3)$, biết rằng bán kính đường tròn an toàn trên mặt đất tạo bởi lồng kính J có bán kính bằng 4. Bán kính mặt cầu I có giá trị bằng 4 km. Một tàu vũ trụ đang ở tọa độ $(1;0;10)$ di chuyển với tốc độ cố định và lượng năng lượng



tiêu hao theo quãng đường được mô tả bởi hàm số $J(s) = \frac{1}{12}s^2$ (J). Các khẳng định sau đúng hay sai? Biết rằng mỗi đơn vị trên các trục tọa độ tương ứng 1 km).

- a) Bán kính mặt cầu tâm J có giá trị bằng 4 km.
 b) Biết rằng năng lượng nhỏ nhất mà con tàu bỏ ra để đi đến vùng an toàn I là $\frac{175-50\sqrt{6}}{12}$ (J).
 c) Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm nằm trên rìa vùng an toàn có giá trị lớn hơn 20 km.
 d) Để tiết kiệm được năng lượng tối đa thì máy bay cần bay về lồng kính J .

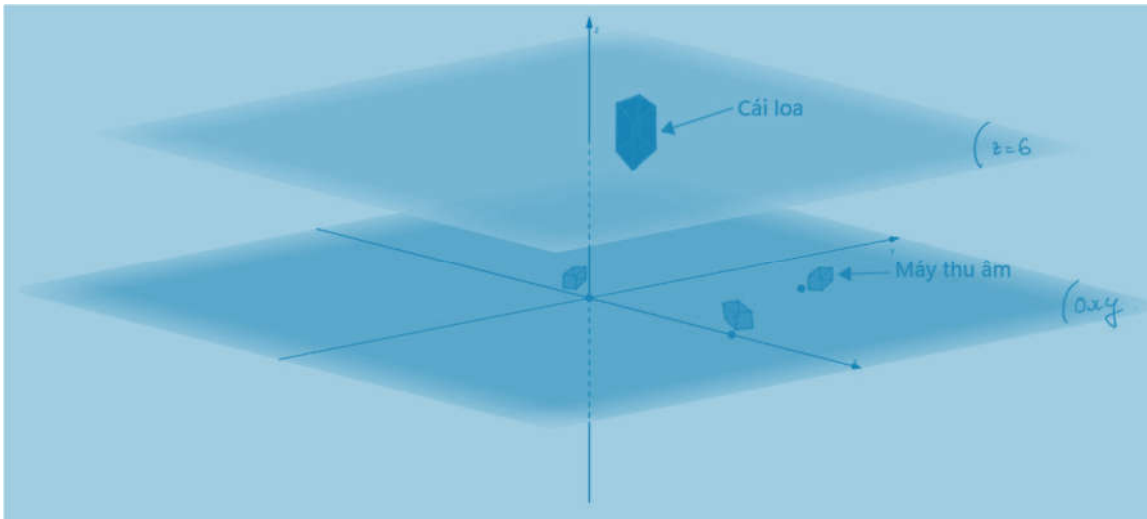
Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, một khinh khí cầu cần bay thẳng theo hướng từ điểm $A(5;6;0)$ đến điểm $B(0,0,3)$ vượt qua hai vùng không gian an toàn có dạng các mặt cầu, $(S_1):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ và $(S_2):(x+6)^2+(y+8)^2+(z-6)^2=16$, với tốc độ v , biết rằng trong các vùng không gian an toàn thì khinh khí cầu không bị ảnh hưởng bởi các cơn gió trong không gian có vector $\vec{v}=(2;2;-1)$. Biết năng lượng của khinh khí cầu để di chuyển với tốc độ v là $E(v) = v^2 - 40v + 800$ (J). Các khẳng định sau đúng hay sai? (mỗi đơn vị trên các trục tọa độ tương ứng 1 m) .



- a) Độ dài AB có giá trị bằng $\sqrt{70}$.
 b) Khi di chuyển ngoài vùng an toàn, nếu như khinh khí cầu bay lệch theo hướng $\vec{v}=(4;4;-2)$ thì sẽ di chuyển được theo quỹ đạo mong muốn.
 c) Tổng quãng đường mà khinh khí cầu bay khi đi từ điểm A đến khi thoát ra khỏi vùng không gian an toàn (S_2) có giá trị lớn hơn 10 m.
 d) Khi di chuyển ngoài vùng không gian an toàn, để năng lượng bỏ ra đạt nhỏ nhất và vẫn bay theo hướng mong muốn thì máy bay cần bay lệch theo vector vận tốc $\vec{v}(a,b,c)$, giá trị của $a < -12$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, trong một ngôi nhà, ba cái máy thu âm được đặt tại các vị trí $O(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $C(2;2\sqrt{3};0)$. Một cái loa được đặt trên mặt phẳng trần nhà $(P): z=6$. Biết cường độ âm I tại một điểm trong không gian được tính theo công thức $I = \frac{P}{4\pi R^2}$, và mức cường độ âm L tại điểm đó được

tính theo công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) (\text{db})$, (P : công suất cố định của loa, R là khoảng cách từ điểm tới loa, I_0 là một hằng số cố định). Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?



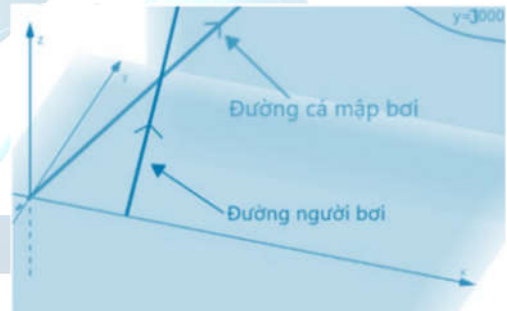
- Nếu ban đầu cái loa được đặt tại vị trí $(0;0;6)$, sau đó di chuyển cái loa lên điểm $E(0,0,12)$ thì cường độ âm của máy thu âm tại O tăng 4 lần.
- Để cường độ âm tại B và C bằng nhau thì cần đặt loa trên một đường thẳng cố định
- Để mức cường độ âm tại các máy thu âm B và C thỏa mãn $L_B - L_C = 20(\text{db})$ thì cần đặt loa trên một đường tròn.
- Tồn tại duy nhất một điểm đặt loa để cường độ âm thu được tại ba máy A, B, C bằng nhau.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$. Từ gốc tọa độ, một con cá

mập di chuyển dọc theo đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = m \\ y = 2m (m > 0) \\ z = 2m \end{cases}$ với

tốc độ $9(m/s)$ theo chiều như hình vẽ và con cá mập này có thể đánh hơi thấy mùi con người trong bán kính 20 m, một thanh niên bơi dưới nước từ tọa độ $A(5;0;0)$ dọc theo đường thẳng

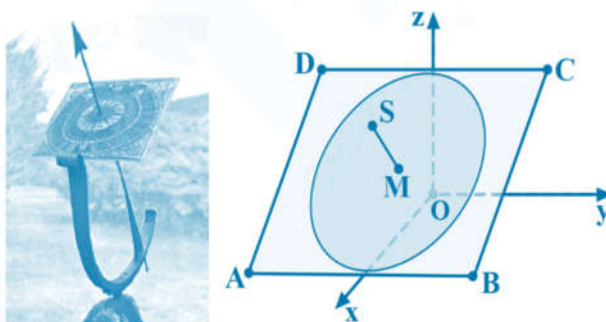
$d_2 : \begin{cases} x = 5 \\ y = 3k (k > 0) \\ z = 4k \end{cases}$ với vận tốc $5(m/s)$ hướng về mặt phẳng bảo vệ $y = 3000$ (Con người sẽ an toàn khi



đi qua mặt phẳng bảo vệ này vì được hỗ trợ từ các tàu khác).

- Quãng đường mà thanh niên này bơi được sau 10 giây bằng 50 m
- Tọa độ của con cá mập sau ba giây là $E(9;9;18)$.
- Thời gian để thanh niên bơi về được mặt phẳng bảo vệ bằng khoảng 16,6 phút.
- Trong quá trình bơi về mặt phẳng bảo vệ thì thanh niên này có bị con cá mập phát hiện.

Câu 15: Hình bên mô tả một chiếc đồng hồ mặt trời với một mặt đáy hình chữ nhật nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang, trên đó có một mặt đồng hồ hình tròn. Trên mặt đáy này có gắn một chiếc cọc, bóng của cọc khi chiếu sáng sẽ chỉ giờ trên mặt đồng hồ. Chiếc đồng hồ mặt trời như vậy được mô hình hóa trong một hệ tọa độ $Oxyz$ như hình 2. Ở đây, hình chữ nhật $ABCD$ với $A(5; -4; 0)$ và $B(5; 4; 0)$ mô tả mặt đáy của đồng hồ mặt trời. Điểm gắn gậy trên mặt đáy trong mô hình được biểu diễn bởi tâm $M(2; 5; 0; 2)$ của hình chữ nhật $ABCD$. Một đơn vị độ dài trong hệ tọa độ tương ứng 10 cm trong thực tế. Mặt phẳng ngang trong mô hình được biểu diễn bởi mặt phẳng (Oxy) .



- Mặt phẳng (E) chứa hình chữ nhật $ABCD$ có vector pháp tuyến là $(4; 0; 5)$.
- Mặt đáy của đồng hồ nghiêng một góc α so với mặt phẳng ngang. Để đồng hồ hiển thị thời gian chính xác tại vĩ độ ϕ , ta phải có $\alpha + \phi = 90^\circ$. Vậy chiếc đồng hồ này được thiết kế tại nơi có vĩ độ nhỏ hơn 51° .
- Trong mô hình, cọc đồng hồ được biểu diễn bởi đoạn thẳng MS với $S(4, 5; 0; 4, 5)$. Ánh sáng mặt trời chiếu vào đồng hồ mặt trời tại thời điểm t_0 nhất định trong một ngày hè được mô hình hóa bằng các đường thẳng song song có vector chỉ phương $\vec{u} = (6; 6; -13)$ thì bóng của đỉnh cọc nằm trong hình chữ nhật $ABCD$.
- Lúc 6 giờ, bóng của cọc đồng hồ đi qua trung điểm cạnh BC . Lúc 12 giờ, bóng đi qua trung điểm cạnh AB và lúc 18 giờ, bóng đi qua trung điểm cạnh AD thì thời điểm t_0 mà ta đang xét ở câu (c) xảy ra trước 12 giờ.

----Hết----

DẠNG 4: XÁC SUẤT (Đ-S)

1. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

(Học sinh xem bài giảng)

2. BÀI TẬP MẪU

Câu 1: (ĐỀ MINH HỌA BỘ GIÁO DỤC 2025)

Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời “sẽ mua”; có 95 người trả lời “không mua”. Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời “sẽ mua” và “không mua” lần lượt là 70% và 30%.

Gọi A là biến cố “Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm”.

Gọi B là biến cố “Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm”.

- Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\bar{B}) = \frac{19}{40}$.
- Xác suất có điều kiện $P(A|B) = 0,3$.
- Xác suất $P(A) = 0,51$.
- Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời “sẽ mua” khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Phỏng vấn \ Thực tế	Người mua thật	Người không mua thật
Người trả lời sẽ mua (105)	$0,7 \times 105 = 73,5$	$105 - 73,5 = 31,5$
Người trả lời sẽ không mua (95)	$0,3 \times 95 = 28,5$	$95 - 28,5 = 66,5$

- a) Số người trả lời "sẽ mua" là 105 nên $n(B) = 105$. Do đó

$$P(B) = \frac{105}{200} = \frac{21}{40} \text{ và } P(\bar{B}) = 1 - \frac{21}{40} = \frac{19}{40}. \text{ Đúng.}$$

- b) Ta có: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$.

$A \cap B$ là tập hợp các người trả lời sẽ mua và mua thật, do đó $n(A \cap B) = 73,5$

$$\text{Do đó, } P(A|B) = \frac{73,5}{105} = 0,7. \text{ Sai.}$$

- c) A là tập hợp các người mua thật, $n(A) = 73,5 + 28,5 = 102$, do đó $P(A) = \frac{102}{200} = 0,51$. Đúng.

- d) Tổng số người thực sự mua sản phẩm là 102. Số người trả lời sẽ mua sản phẩm và thực sự mua là 73,5 người. Tỉ lệ người thực sự mua sản phẩm đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn và người thực sự mua sản phẩm nói chung là $\frac{73,5}{102} \approx 72\%$. Sai.

3. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 2: Trong một phép thử với không gian mẫu là Ω , cho hai biến cố A, B . Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

- a) $P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$
- b) $P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B)$
- c) Nếu $P(A) + P(B) = 1$ thì $B = \bar{A}$.
- d) $P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$.

Câu 3: Hai công nhân cần phải hoàn thành số sản phẩm nhất định. Công nhân thứ nhất phải làm 45% số sản phẩm, công nhân thứ hai phải làm 55% số sản phẩm. Khả năng xảy ra sai sót của công nhân thứ nhất là 3% và của công nhân thứ hai là 1%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm mà hai công nhân hoàn thành.

Gọi A là biến cố "Sản phẩm được chọn là của công nhân thứ nhất".

Gọi B là biến cố "Sản phẩm được chọn bị lỗi".

- a) $P(A) = 0,5$
- b) $P(B) = 0,02$.
- c) Xác suất có điều kiện $P(B|A) = 0,03$.
- d) Biết sản phẩm chọn được bị lỗi, xác suất sản phẩm được chọn là của công nhân thứ nhất bằng $\frac{27}{38}$.

Câu 4: Một két nước ngọt đựng 24 chai nước có khối lượng và hình thức bề ngoài như nhau, trong đó có 16 chai loại I và 8 chai loại II. Bác Tùng lần lượt lấy ra ngẫu nhiên hai chai (lấy không hoàn lại). Xét các biến cố: A : "Lần thứ nhất lấy ra chai nước loại I"; B : "Lần thứ hai lấy ra chai nước loại I".

- a) $P(B|A) = \frac{16}{23}$.
- b) $P(B|\bar{A}) = \frac{15}{23}$.
- c) $P(\bar{B}|A) = \frac{8}{23}$.
- d) $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{7}{23}$.

Câu 5: Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai.

Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu xanh";

B là biến cố "Viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ";

C là biến cố: "Hai viên bi lấy ra khác màu".

- a) $P(A) = 0,4; P(\bar{A}) = 0,6$.
- b) $P(B|A) = 0,6$.
- c) $P(B|\bar{A}) = 0,4$.
- d) $P(C) = 0,48$.

Câu 6: Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Lí, Hoá). Biết rằng nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Gọi các biến cố A : "Một học sinh chọn tổ hợp A00"; B : "Một học sinh đỗ đại học".

- a) $P(A) = 0,8$ và $P(B|A) = 0,4$.

- b) $P(AB) = 0,48$ và $P(\overline{AB}) = 0,14$.
- c) $P(B) = 0,6$.
- d) $P(A|B) = 0,77$.

Câu 7: Hộp I đựng 3 bi xanh, 5 bi đỏ và 3 bi vàng. Hộp II đựng 5 bi xanh, 3 bi đỏ và 4 bi vàng. Từ hộp I lấy ngẫu nhiên một viên bi bỏ vào hộp II, sau đó từ hộp II lấy ngẫu nhiên ra hai viên bi.

Gọi A là biến cố "Viên bi lấy từ hộp I bỏ vào hộp II là bi đỏ".

Gọi B là biến cố "2 viên bi lấy ra lần 2 là viên bi đỏ".

- a) Xác suất $P(A) = \frac{6}{11}, P(\overline{A}) = \frac{5}{11}$.
- b) Xác suất có điều kiện $P(B|\overline{A}) = \frac{1}{26}$.
- c) Xác suất $P(B) = \frac{8}{143}$.
- d) Xác suất để 2 viên bi lấy ra lần 2 đều không phải là viên bi đỏ là $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{135}{143}$.

Câu 8: Một con tàu được lắp đặt 3 động cơ E_1, E_2, E_3 . Ba động cơ hoạt động độc lập nhau với xác suất lần lượt là $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}$. Để con tàu hoạt động thì ít nhất 2 trong 3 động cơ phải hoạt động.

Gọi X là biến cố: "Con tàu hoạt động".

Gọi X_i là biến cố: "Động cơ E_i hoạt động" (với $i = 1, 2, 3$).

- a) $P(X) = 0,25$.
- b) Nếu Y là biến cố: "Có đúng 2 động cơ đang hoạt động" thì $P(Y|X) = \frac{7}{8}$.
- c) $P(X|X_1) = \frac{7}{64}$.
- d) $P(X_1|X) = \frac{7}{8}$.

Câu 9: Nobita và Shizuka chuẩn bị đi tham quan hòn đảo Honshu trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật tuần này. Ở hòn đảo Honshu này, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa. Nếu một ngày có nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày có mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy tuần này là 0,7. Gọi các biến cố A : "Ngày thứ Bảy tuần này trời nắng"; B : "Ngày Chủ nhật tuần này trời mưa".

- a) $P(A) = 0,7$
- b) $P(\overline{B}|A) = 0,77$
- c) Xác suất ngày Chủ nhật tuần này trời nắng là 80%.
- d) Doraemon có thể đến được tương lai nhưng chỉ đến hòn đảo vào ngày Chủ nhật. Doraemon báo cho Nobita biết rằng ngày Chủ nhật tuần này trời mưa, khi đó xác suất ngày thứ Bảy trời nắng là 62% (làm tròn kết quả đến phần trăm).

Câu 10: Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt.

Gọi A là biến cố: "Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy"

và B là biến cố: "Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy"

- a) Xác suất để thứ Ba, ông An đi làm bằng xe buýt là 0,7.
- b) Xác suất để thứ Tư ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy là 0,3
- c) Xác suất để thứ Tư ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba ông An đi làm bằng xe buýt 0,4

d) Giá trị biểu thức $P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$ bằng 0,36.

Câu 11: Có hai chuồng thỏ, chuồng thứ nhất có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng thứ hai có 7 con thỏ đen và 3 con thỏ trắng. Trước tiên, từ chuồng thứ hai lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ rồi cho vào chuồng thứ nhất. Sau đó, từ chuồng thứ nhất lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ.

Xét A : "Con thỏ được lấy ra từ chuồng thứ hai để cho vào chuồng thứ nhất là con thỏ trắng" và B : "Con thỏ được lấy ra từ chuồng thứ nhất là con thỏ trắng".

a) Xác suất để A xảy ra bằng $\frac{3}{10}$.

b) Khi A xảy ra, xác suất để B xảy ra bằng $\frac{11}{16}$.

c) $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{3}{34}$.

d) Xác suất để con thỏ được lấy ra từ chuồng thứ nhất là thỏ trắng gần bằng 0,584 (kết quả gần đúng được làm tròn đến hàng phần nghìn).

Câu 12: Trong một cửa hàng có 20 chiếc áo hoodie và 5 chiếc áo sweater. Một người mua hàng chọn lần lượt theo thứ tự một cách ngẫu nhiên hai chiếc áo để mua. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Xác suất để lần thứ nhất chọn được một chiếc áo sweater bằng $\frac{1}{5}$.

b) Xác suất để lần thứ hai chọn được một chiếc hoodie, biết rằng lần thứ nhất người này chọn được một chiếc áo sweater bằng $\frac{5}{6}$.

c) Xác suất để cả hai lần đều lấy được áo hoodie bằng $\frac{5}{12}$.

d) Xác suất để ít nhất một lần lấy được áo sweater bằng $\frac{8}{9}$.

Câu 13: Có 10 câu hỏi trong đề cương ôn tập thi cuối kỳ của bạn A , gồm 2 câu khó, 3 câu trung bình và 5 câu dễ, biết xác suất để học sinh này làm được câu khó là 0,3, xác suất làm được câu trung bình là 0,8 và làm được câu dễ là 0,95. Chọn ngẫu nhiên ra một câu hỏi từ một câu hỏi để bạn A làm, các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Xác suất bạn A phải làm một câu mức độ khó bằng 0,3.

b) Xác suất bạn A làm đúng được một câu mức độ trung bình bằng 0,24.

c) Xác suất để bạn A làm đúng câu hỏi được chọn, biết rằng đó là câu hỏi khó bằng 0,7.

d) Xác suất bạn A đúng câu hỏi được chọn bằng 0,4.

Câu 14: Có ba hộp quà, hộp I có 3 quả táo và 2 quả cam, hộp II có 3 quả cam và 4 quả táo, hộp III có 4 quả cam và 2 quả táo. Chọn ngẫu nhiên một hộp rồi lấy ngẫu nhiên 3 trái cây trong hộp đó. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Xác suất chọn được hộp I bằng $\frac{1}{3}$.

b) Xác suất để trong ba trái cây được chọn có 2 quả cam, biết hộp được chọn là hộp I là $\frac{3}{10}$.

c) Xác suất để chọn được hai quả cam và một quả táo lớn hơn 0,5

d) Xác suất để hộp được chọn là hộp I , biết rằng kết quả cuối cùng lấy ra được 2 quả cam và một quả táo bằng xấp xỉ 0,32.

Câu 15: Bạn Nam được yêu cầu sút hai quả penalty liên tiếp, biết rằng xác suất sút vào quả đầu tiên của Nam là x . Biết rằng nếu Nam sút không vào thì xác suất sút vào của cậu ta ở quả thứ hai giảm một nửa, còn nếu nam sút vào thì cậu ta sẽ tự tin và xác suất sút vào tăng thêm 0,1. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau. (Các kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

a) Nếu xác suất sút vào của Nam là 0,6 thì xác suất Nam sút vào cả hai quả bằng 0,42.

b) Nếu xác suất sút vào của Nam là 0,5 thì xác suất Nam sút vào ít nhất 1 quả bằng 0,75.

c) Khi xác suất sút vào cả hai quả đều trượt của nam là 0,3 thì xác suất sút vào quả đầu tiên lớn hơn 2,4.

d) Khi xác suất để sút vào ít nhất một quả là 0,7 thì xác suất Nam sút vào quả đầu tiên lớn hơn 0,6.

Câu 16: Ba bạn học sinh A, B, C cùng một thời điểm gieo ba con súc sắc đồng chất một cách ngẫu nhiên.

a) Xác suất để A và B cùng tung ra một số bằng $\frac{1}{8}$.

b) Xác suất để ba bạn cùng tung ra một số chấm giống nhau bằng $\frac{1}{36}$.

c) Xác suất để trong ba chấm tung ra được có ít nhất hai số giống nhau bằng $\frac{1}{9}$.

d) Xác suất để tổng số chấm ba bạn tung ra được 7 bằng $\frac{5}{72}$.

Câu 17: Chọn ngẫu nhiên một trong hai bạn Nam hoặc Phong lên bảng làm một bài toán. Xác suất để Nam làm được bài là 0,6, xác suất để Phong làm được bài là 0,8. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Xác suất Phong được chọn lên bảng làm bài là 0,4.

b) Xác suất Nam làm được bài là 0,5.

c) Xác suất để người được chọn làm được bài là 0,7.

d) Xác suất để người được chọn lên bảng là Nam biết rằng cuối cùng bài toán không được giải là 0,2.

Câu 18: Hai hộp bi với hộp I chứa 3 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ, hộp II chứa 2 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên một trong hai hộp bi rồi lấy ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp đó. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Xác suất lấy được viên bi vàng lớn hơn 0,5.

b) Xác suất để lấy được viên bi đỏ nhỏ hơn 0,5.

c) Xác suất để lấy được viên bi xanh biết rằng hộp được chọn là hộp I lớn hơn 0,5.

d) Xác suất để hộp được chọn là hộp II biết rằng viên bi được lấy ra có màu đỏ nhỏ hơn 0,5.

Câu 19: Cho hai hộp bi, hộp bi thứ nhất có 3 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ, hộp bi thứ hai có 4 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp I bỏ sang II rồi sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi thuộc hộp II . Xét tính đúng sai của một số mệnh đề sau:

a) Xác suất để lấy được viên bi xanh từ hộp I bằng $\frac{3}{7}$.

b) Xác suất để cả hai lần đều lấy được bi đỏ là $\frac{2}{7}$.

c) Xác suất để lấy được viên bi xanh ít nhất một lần là $\frac{5}{7}$.

d) Xác suất để viên bi lấy ra từ hộp II có màu đỏ là $\frac{3}{5}$.

Câu 20: Cho hai hộp bi, hộp I gồm 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng. Hộp II gồm 2 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp I bỏ vào hộp II , rồi sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II . Xét tính đúng sai của một số mệnh đề sau:

a) Xác suất để lấy được viên bi xanh từ hộp I là $\frac{3}{10}$.

b) Xác suất để lấy được viên bi đỏ từ hộp II biết rằng viên bi bỏ sang từ hộp I có màu xanh là $\frac{4}{11}$.

c) Xác suất để lấy ra được viên bi vàng từ hộp II lớn hơn 0,5.

d) Xác suất để viên bi bỏ sang từ hộp I có màu vàng biết rằng viên bi.

Câu 21: Tại một nhà máy người ta làm lần lượt hai thí nghiệm trên cùng một cỗ máy. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công ở thí nghiệm hai bằng 0,3, nếu thí nghiệm thứ nhất thất bại thì xác suất thành công ở thí nghiệm thứ hai bằng 0,1. Xét tính đúng sai của một số mệnh đề sau:

a) Nếu xác suất để cả hai thí nghiệm đều thành công là 0,3 thì xác suất thành công ở thí nghiệm thứ nhất bằng 0,1.

- b) Nếu xác suất có ít nhất một thí nghiệm thành công là 0,55 thì xác suất thành công ở thí nghiệm thứ nhất bằng 0,5.
- c) Nếu xác suất thành công ở thí nghiệm thứ nhất bằng 0,5 thì xác suất để thí nghiệm thứ nhất thất bại biết rằng thí nghiệm thứ hai thành công có giá trị lớn hơn 0,2.
- d) Nếu xác suất để thí nghiệm thứ nhất thành công biết rằng thí nghiệm thứ hai thất bại bằng $\frac{7}{16}$ thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ nhất bằng 0,5.

Câu 22: Cho hai hộp bi, hộp *I* gồm 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ, hộp *II* gồm 3 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp *I* bỏ sang hộp *I* rồi lấy ngẫu nhiên một viên bi thuộc hộp *II*. Xét tính đúng sai của một số mệnh đề sau:

- a) Xác suất để lấy được viên bi đỏ từ hộp *I* lớn hơn 0,5.
- b) Xác suất để cả hai lần lấy đều lấy được viên bi đỏ nhỏ hơn 0,5.
- c) Xác suất để viên bi lấy ra từ hộp *II* có màu đỏ nhỏ hơn 0,5.
- d) Xác suất để viên bi lấy ra từ hộp *I* có màu xanh biết rằng viên bi lấy ra từ hộp *II* có màu đỏ có giá trị lớn hơn 0,5.

Câu 23: Bảng sau đây tóm tắt kết quả phân tích quá trình tự phân hủy (sự phá hủy tế bào sau khi tế bào chết do hoạt động của các enzyme của chính tế bào) và sự thối rữa (sự phân hủy chất hữu cơ, đặc biệt là protein, bởi vi sinh vật dẫn đến tạo ra mùi hôi thối) của các con bọ cánh cứng chết.

	Tự phân hủy cao	Tự phân hủy thấp
Thối rữa cao	14	59
Thối rữa thấp	18	19

Chọn ngẫu nhiên một con bọ cánh cứng trong các mẫu phân tích trên.

- a) Xác suất để mẫu chọn ra có quá trình tự phân hủy cao là $\frac{7}{50}$.
- b) Xác suất để mẫu chọn ra có quá trình tự phân hủy cao và độ thối rữa thấp là $\frac{9}{50}$.
- c) Nếu quá trình tự phân hủy của một mẫu được chọn ra là cao thì xác suất để độ thối rữa thấp là $\frac{9}{16}$.
- d) Nếu độ thối rữa của một mẫu chọn ra là cao thì xác suất để quá trình tự phân hủy cao bằng $\frac{14}{73}$.

Câu 24: Có hai gia đình hẹn nhau đi uống cà phê, mỗi gia đình có hai vợ chồng và hai đứa con (một gái, một trai). Khi vào quán thì nhân viên bố trí họ vào một cái bàn với hai hàng ghế đối diện nhau, mỗi hàng ghế có 4 chỗ dành cho một gia đình.

- a) Nếu họ cùng ngồi vào ghế một cách không suy tính gì thì xác suất để hai người chồng ngồi đối diện nhau bằng $\frac{1}{3}$.
- b) Nếu họ cùng ngồi vào ghế một cách không suy tính gì thì xác suất để hai người chồng ngồi đối diện nhau, hai người vợ ngồi đối diện nhau, hai đứa con gái ngồi đối diện nhau, hai đứa con trai ngồi đối diện nhau bằng $\frac{1}{24}$.
- c) Nếu họ cùng ngồi vào ghế một cách không suy tính gì thì xác suất để hai người chồng ngồi đối diện nhau bằng $\frac{1}{4}$ biết rằng hai đứa con trai chạy ra hồ để xem cá koi.

- d) Khi họ (cả 8 người) cùng ngồi vào ghế mà không suy tính gì, xác suất để hai người chồng ngồi đối diện nhau bằng $\frac{1}{4}$ biết rằng hai người vợ không ngồi đối diện nhau.

Câu 25: Một chiếc hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số.

- Số viên bi màu đỏ có đánh số là 30.
- Số viên bi màu vàng không đánh số là 18.
- Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số là $\frac{3}{5}$.
- Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra không có đánh số là $\frac{7}{16}$.

Câu 26: Một thứ nhất có 4 bi đỏ, 4 bi vàng; hộp thứ hai có 5 bi đỏ, 3 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên hai bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai rồi lấy ngẫu nhiên ba viên bi từ hộp thứ hai.

- Xác suất để lấy được 2 bi đỏ từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai bằng $\frac{3}{14}$.
- Xác suất để lấy được 3 bi đỏ từ hộp thứ hai nếu trước đó đã lấy hai bi vàng từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp hai bằng $\frac{1}{12}$.
- Xác suất để lấy được 3 bi đủ 2 màu từ hộp hai và số bi đỏ nhiều hơn bi vàng bằng $\frac{37}{80}$.
- Xác suất để lấy từ hộp thứ hai 3 viên bi mà có đúng hai viên bi đã chuyển từ hộp thứ nhất sang biết rằng 3 viên bi đó cùng màu đỏ là $\frac{4}{59}$.

Câu 27: Tổ I có 8 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Tổ II có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 6 học sinh từ 30 học sinh của hai tổ.

- Xác suất để chọn được toàn bộ 6 học sinh đều là nam hoặc đều là nữ là nhỏ hơn 5%.
- Xác suất để chọn được chính xác 3 học sinh từ tổ I và 3 học sinh từ tổ II thuộc khoảng $(0,34; 0,35)$.
- Nếu biết rằng đã chọn được toàn bộ 6 học sinh đều là nam hoặc đều là nữ, thì xác suất để chọn được 3 học sinh từ tổ I và 3 học sinh từ tổ II bằng $\frac{116}{5915}$.
- Xác suất để chọn được 6 học sinh trong đó có đúng 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ là $\frac{1}{3}$.

Câu 28: Một nhà máy có ba phân xưởng I, II, III cùng sản xuất một loại sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm tương ứng là 1%; 0,5%; 0,2%. Các phân xưởng này lần lượt sản xuất 35%; 45%; 20% số sản phẩm của nhà máy. Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

- Xác suất để sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm là 0,615%.
- Biết rằng sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm, thì xác suất sản phẩm đó đến từ phân xưởng I cao hơn xác suất đến từ phân xưởng III.
- Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm của phân xưởng II là cao nhất.
- Xác suất để sản phẩm không phải là phế phẩm của nhà máy lớn hơn 99%.

Câu 29: Trong một cuộc trưng cầu dân ý ở một khu vực, đối với các hộ gia đình sống ở một vùng ngoại ô (mỗi hộ gia đình có một cặp vợ chồng và các con), xác suất để người chồng sẽ đi bỏ phiếu là 0,2, xác suất để người vợ sẽ đi bỏ phiếu là 0,35 và xác suất để cả hai vợ chồng sẽ đi bỏ phiếu là 0,11.

- Xác suất để có ít nhất một trong hai vợ chồng sẽ đi bỏ phiếu là 0,44.
- Xác suất để người chồng sẽ đi bỏ phiếu, biết rằng người vợ đã đi bỏ phiếu là 0,31 (làm tròn kết quả tới hàng phần trăm).

- c) Giả sử khảo sát 13 hộ gia đình, khi đó có đúng 2 hộ gia đình mà cả vợ và chồng đều tham gia bỏ phiếu là 0,26 (làm tròn kết quả tới hàng phần trăm).
- d) Bên cạnh đó, người ta cũng nhận thấy rằng nếu cả hai vợ chồng đều tham gia bỏ phiếu thì xác suất ít nhất một người con của họ cũng tham gia bỏ phiếu là 0,99. Ngược lại, nếu chỉ vợ hoặc chỉ chồng hoặc cả hai không tham gia bỏ phiếu thì xác suất không có người con nào của họ tham gia bỏ phiếu là 0,79. Xác suất để chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình thì có ít nhất một người con tham gia bỏ phiếu là 0,29 (làm tròn kết quả tới hàng phần trăm).

Câu 30: Một nhà đầu tư có kế hoạch xây dựng một trạm điện gió tại thành phố Hà Nội, bao gồm hai huyện là huyện Mỹ Đức và huyện Ứng Hòa. Để tìm hiểu cách dân cư đánh giá dự án này, hội đồng thành phố đã tổ chức một cuộc khảo sát trong số các cử tri hợp lệ. Tại Mỹ Đức, có 1722

cư dân được tham gia khảo sát, trong khi ở Ứng Hòa, con số này là 258. Theo kết quả khảo sát: Có 1089 người tham gia khảo sát ủng hộ trạm điện gió, trong đó có 27 người từ Ứng Hòa. Các cư dân còn lại bày tỏ sự phản đối dự án này.

- a) Có 38,3% cử tri ở Mỹ Đức phản đối dự án này (sai số 0,1%).
- b) Chọn ngẫu nhiên một người được khảo sát, gọi p_1 là xác suất người này ủng hộ trạm điện gió và đến từ Mỹ Đức, p_2 là xác suất người này đến từ Mỹ Đức, biết người này ủng hộ trạm điện gió. Khi đó $p_1 < p_2$.
- c) Chọn ngẫu nhiên 1 người và thấy rằng người này ủng hộ trạm điện gió. Khả năng người này đến từ Ứng Hòa cao hơn.
- d) Chọn ngẫu nhiên một người được khảo sát thấy rằng người này phản đối trạm điện gió. Xác suất người này là cử tri đến từ Ứng Hòa là 0,25 (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 31: Trong sự kiện Giải All-Star bóng rổ, một thử thách ném 3 điểm được tổ chức với sự tham gia của ba cầu thủ nổi tiếng: LeBron James, Stephen Curry và Anthony Davis. Mỗi cầu thủ sẽ có cơ hội thực hiện 1 cú ném 3 điểm. Xác suất để mỗi cầu thủ ném thành công vào rổ một cú 3 điểm được cho như sau:

LeBron James có xác suất ném thành công là 0,7.

Stephen Curry, được mệnh danh là "vua ném 3 điểm", có xác suất ném thành công là 0,9.

Anthony Davis, mặc dù không phải là chuyên gia ném 3 điểm, nên có xác suất ném thành công là 0,4.

- a) Xác suất để chỉ một người ném trúng là 0,216.
- b) Xác suất để chỉ có 2 người ném trúng là 0,514.
- c) Xác suất để ít nhất một người ném trúng là 0,982.
- d) Biết có 2 người ném trúng, xác suất để LeBron James ném trúng là 0,406.

Câu 32: Gout là một dạng viêm khớp gây đau khớp và sưng khớp. Bệnh xuất hiện khi tràm lượng acid uric ở trong máu tăng cao và tạo nên các tinh thể sắc nhọn tích tụ lại ở những khớp xương gây nên tình trạng sưng đỏ và đau dữ dội. Một nhóm nghiên cứu tiến hành khảo sát thói quen dinh dưỡng của 80000 phụ nữ từ 22 tuổi trở lên và nhận thấy những người uống từ 2 cốc nước cam trở lên mỗi ngày sẽ tăng nguy cơ mắc bệnh gout, do đường hoa quả (fructose) cao trong nước cam sẽ khiến axit uric lắng đọng ở khớp, gây ra sưng và đau khớp. Kết quả khảo sát của nhóm nghiên cứu được trình bày trong bảng dữ liệu thống kê 2×2 sau đây:

	Bị bệnh gout	Không bị bệnh gout
Người uống từ 2 cốc nước cam trở lên mỗi ngày	19721 người	20128 người
Người không uống hoặc uống dưới 2 cốc nước cam mỗi ngày	8279 người	31872 người

- a) Đối với phụ nữ từ 22 tuổi trở lên, việc uống từ 2 cốc nước cam trở lên mỗi ngày và việc mắc bệnh gout có liên quan với nhau.
- b) Chọn ngẫu nhiên một người trong số 80000 người được khảo sát, xác suất để người được chọn mắc bệnh gout trong trường hợp người đó uống từ 2 cốc nước cam trở lên mỗi ngày là 0,5 (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
- c) Chọn ngẫu nhiên một người trong số 80000 người được khảo sát, xác suất để người được chọn mắc bệnh gout trong trường hợp người đó không uống hoặc uống dưới 2 cốc nước cam mỗi ngày là 0,5 (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

- d) Với phụ nữ từ 22 tuổi trở nên, thói quen uống từ 2 cốc nước cam trở lên mỗi ngày làm tăng nguy cơ mắc bệnh gout lên gấp khoảng 2,4 lần (sai số không quá 0,1).

Câu 33: Một nhà máy có 4 dây chuyền cùng sản xuất một loại sản phẩm. Bảng số liệu sau thống kê kết quả kiểm tra nhà máy đó, bao gồm tỷ lệ sản phẩm của nhà máy được sản xuất bởi các dây chuyền và tỷ lệ chính phẩm (đạt) cho từng loại dây chuyền:

Tỷ lệ sản phẩm được sản xuất bởi các dây chuyền	Dây chuyền	Tỷ lệ chính phẩm của từng dây chuyền
34%	D1	82%
30%	D2	81%
29%	D3	84%
7%	D4	92%

- a) Chọn ngẫu nhiên 11 sản phẩm được sản xuất ở dây chuyền D1. Khi ấy xác suất để có đúng 3 phế phẩm trong 11 sản phẩm được chọn là 1 số bé hơn 0,14487.
b) Chọn ngẫu nhiên 11 sản phẩm được sản xuất ở dây chuyền D1. Số phế phẩm trung bình là 1,98.
c) Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm, xác suất để sản phẩm này là chính phẩm là 0,8298.
d) Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm. Nếu kết quả kiểm tra cho thấy đây là một phế phẩm (không đạt) thì xác suất để sản phẩm này được sản xuất ở D1 lớn hơn 0,42.

Câu 34: Một công ty được phẩm giới thiệu một công cụ kiểm tra sớm bệnh Y. Họ thử nghiệm sản phẩm trên 7500 người, trong đó có 1250 người đã bị nhiễm bệnh Y và có 6250 người không bị nhiễm bệnh Y. Khi thử bằng công cụ của công ty, trong 1250 người đã bị nhiễm bệnh Y có 78,64% số người cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Trong 6250 người không bị nhiễm bệnh Y có 6,496% số người cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính.

- a) Số người nhiễm bệnh và cho kết quả dương tính nhỏ hơn 1000 người.
b) Số người không nhiễm bệnh nhưng vẫn cho kết quả dương tính lớn hơn 500 người.
c) Chọn ngẫu nhiên một trong số những người thử nghiệm. Xác suất để người được chọn bị nhiễm bệnh Y biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm dương tính là 0,70 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
d) Chọn ngẫu nhiên một trong số những người thử nghiệm. Xác suất để người được chọn không bị nhiễm bệnh Y biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm âm tính là 0,95 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 35: Có ba xạ thủ cùng bắn vào một mục tiêu, mỗi người bắn một viên đạn với tỉ lệ trung tương ứng là 0,6; 0,7; 0,8. Biết rằng nếu trúng một viên đạn thì xác suất mục tiêu bị tiêu diệt là 0,5; nếu trúng hai viên đạn thì xác suất mục tiêu bị tiêu diệt là 0,8; còn nếu trúng ba viên đạn thì chắc chắn mục tiêu bị tiêu diệt.

- a) Xác suất mục tiêu không trúng viên đạn nào là 5%.
b) Xác suất mục tiêu bị tiêu diệt là 0,7916.
c) Giả sử mục tiêu bị tiêu diệt, xác suất để nó bị trúng hai viên đạn lớn hơn 50%.
d) Xác suất để mục tiêu bị tiêu diệt khi trúng đúng một viên đạn bằng $\frac{1}{2}$ xác suất để mục tiêu bị tiêu diệt khi trúng đúng hai viên đạn.

Câu 36: Một nhà máy có hai phân xưởng X và Y. Phân xưởng X sản xuất 47% và phân xưởng Y sản xuất 53% số sản phẩm của cả nhà máy. Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của phân xưởng X, Y lần lượt là 0,8% và 0,5%. Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

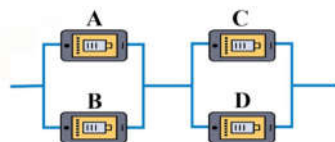
- a) Xác suất để sản phẩm được kiểm tra là sản phẩm lỗi lớn hơn 0,7%.
b) Nếu biết sản phẩm kiểm tra là sản phẩm lỗi, thì xác suất sản phẩm lỗi này do phân xưởng X sản xuất cao hơn phân xưởng Y sản xuất.
c) Xác suất để chọn ngẫu nhiên một sản phẩm không bị lỗi từ nhà máy lớn hơn 99%.
d) Nếu sản phẩm được kiểm tra là sản phẩm không lỗi thì xác suất sản phẩm đó đến từ phân xưởng Y là 50%.

Câu 37: Sản phẩm X bán ra thị trường do một nhà máy gồm 3 phân xưởng I, II và III sản xuất, trong đó phân xưởng I chiếm 30%, phân xưởng II chiếm 45%, phân xưởng III chiếm 25% số lượng sản phẩm

trong toàn nhà máy. Tỷ lệ sản phẩm loại A do 3 phân xưởng I, II và III sản xuất lần lượt là: 70%, 50% và 90%.

- Tỷ lệ sản phẩm loại A do nhà máy sản xuất là 66%.
- Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm X ở thị trường thì thấy rằng đó là sản phẩm loại A . Xác suất để sản phẩm đó do nhà máy II sản xuất là 0,34 (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm).
- Cần mua ngẫu nhiên tối thiểu 9 sản phẩm X ở thị trường để xác suất gặp phải ít nhất một sản phẩm không phải loại A là trên 98%.
- Một người đã mua 15 sản phẩm X . Xác suất để có không quá 3 sản phẩm đạt loại A nhỏ hơn 0,04%.

Câu 38: Một hệ thống gồm 4 thiết bị A, B, C và D như trong hình. Mạch hoạt động khi có một dòng điện chạy qua các thiết bị từ trái sang phải.



Xác suất để các thiết bị A, B, C, D hoạt động lần lượt là 0,9; 0,95; 0,95 và 0,95. Giả sử rằng các thiết bị hoạt động độc lập

- Xác suất để thiết bị A hoạt động nhưng thiết bị B không hoạt động là 0,045.
- Xác suất có đúng 1 thiết bị trong 2 thiết bị A và B hoạt động là 0,15.
- Xác suất để dòng điện chạy qua mạch (mạch hoạt động) là 0,993 (kết quả làm tròn tới hàng phần nghìn).
- Biết rằng mạch đang hoạt động, xác suất để thiết bị A hoạt động là $\frac{180}{199}$.

Câu 39: Một công ty tổ chức chương trình bốc thăm trúng thưởng cuối năm cho 50 nhân viên. Trong hộp có 50 vé, mỗi nhân viên sẽ bốc một vé. Có 2 vé trúng thưởng xe máy, 5 vé trúng thưởng điện thoại và 10 vé trúng thưởng voucher mua sắm. Mỗi nhân viên lần lượt lên bốc 1 vé.

- Xác suất để nhân viên đầu tiên bốc được vé trúng thưởng là 0,34.
- Biết nhân viên đầu tiên bốc được vé trúng thưởng, xác suất để đó là vé trúng thưởng điện thoại là 0,1.
- Biết nhân viên đầu tiên bốc được vé trúng thưởng, xác suất để nhân viên thứ hai bốc được vé trúng thưởng là 0,32.
- Biết nhân viên đầu tiên bốc được vé trúng xe máy và nhân viên thứ hai cũng bốc được 1 vé trúng thưởng. Xác suất để nhân viên thứ ba bốc được vé trúng xe máy là $\frac{5}{256}$.

Câu 40: Một hộp chứa ba đồng xu. Hai trong số các đồng xu đó có đủ mặt ngửa và sấp; đồng xu thứ ba có hai mặt là mặt ngửa, vì vậy khi tung, luôn xuất hiện mặt ngửa. Một trong các đồng xu này được chọn ngẫu nhiên và tung ba lần.

- Nếu đồng xu có hai mặt ngửa được chọn thì xác suất để thu được ba mặt ngửa bằng 1.
- Xác suất thu được ba mặt ngửa bằng $\frac{5}{12}$.
- Biết rằng kết quả thu được là ba mặt ngửa, xác suất đồng xu có hai mặt ngửa được chọn bằng $\frac{3}{5}$.
- Từ dữ kiện câu c), đồng xu được chọn sẽ có lần tung thứ tư, khi đó xác suất mặt ngửa xuất hiện bằng $\frac{9}{10}$.

---Hết---

