



TOÁN 12

Biên soạn theo chương trình GDPT 2018
Dùng chung cho 4 bộ sách

CHƯƠNG 1: HÀM SỐ

Trong chương này, chúng ta ứng dụng đạo hàm để khảo sát một số tính chất quan trọng của hàm số (như tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất) và tìm các đường tiệm cận, từ đó vẽ đồ thị hàm số hoặc giải quyết những vấn đề thực tiễn liên quan.

NĂM HỌC
2024 - 2025

THS. LA HỒ TUẤN DUY

ĐT: 0817 68.22.68

CÔNG THỨC ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

1. Các phép tính toán học

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

2. Phép toán lũy thừa và căn

$$x^m . x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{m.n}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n . y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

3. Hằng đẳng thức đáng nhớ

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

4. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

Biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$)

- $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm
- $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$ (hoặc $x = -\frac{b'}{a}$)
- $\Delta > 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (hoặc $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$)

Định lý vi-ét

Tổng: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

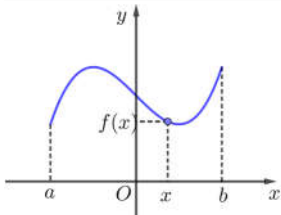
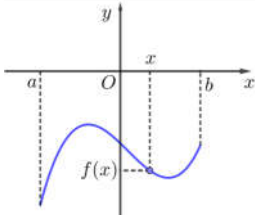
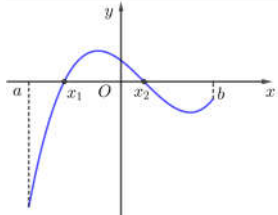
Tích: $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

5. Phương trình chứa căn

• $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

• $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

6. Dấu của hàm số dựa vào đồ thị

$f(x) > 0, \forall x \in (a; b)$	$f(x) < 0, \forall x \in (a; b)$	$f(x_1) = f(x_2) = 0$
		

7. Công thức lượng giác

Hệ thức cơ bản	Công thức cộng
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x \cdot \cot x = 1$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$ $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
Công thức nhân đôi	Công thức hạ bậc
$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $= 2 \cos^2 x - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 x$ $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

8. Phương trình lượng giác cơ bản

- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

9. Quy tắc đạo hàm

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(u.v)' = u'.v + v'.u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$$

10. Công thức đạo hàm

ĐẠO HÀM CƠ BẢN	ĐẠO HÀM HÀM HỢP
$(k)' = 0$ (k là hằng số)	
$(x)' = 1$	
$(kx)' = k$	$(ku)' = k.u'$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

ĐẠO HÀM LƯỢNG GIÁC	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
ĐẠO HÀM ĐẶC BIỆT	
$ x ' = \frac{x}{ x }$	$ u ' = \frac{u \cdot u'}{ u }$
$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	
$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{(dx^2+ex+f)^2}$	

Công thức đạo hàm hàm hợp: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

CHUẨN KIẾN THỨC

I. Các phương trình cơ bản

1. Phương trình bậc hai $Ax^2 + Bx + C = 0$

Biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$ hoặc $\Delta' = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC$.

- $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm.
- $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x_0 = -\frac{B}{2A}$.
- $\Delta > 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$.

2. Phương trình chứa căn

- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.
- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$.

II. Xét dấu biểu thức

Xét dấu biểu thức $y = f(x).g(x); y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Bước 1: Giải $f(x) = 0; g(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_1, x_2, x_3, \dots$

Bước 2: Sắp xếp các nghiệm từ nhỏ đến lớn và lập bảng xét dấu theo quy tắc:

- Xác định dấu tại một ô trong bảng (thường là ô ngoài cùng bên phải)
- Qua nghiệm **đơn đổi dấu**.
- Qua nghiệm **kép không đổi dấu**.

Ví dụ 1: Lập bảng xét dấu của các biểu thức sau:

a. $y = 2x^2 - 3x + 1$

b. $y = (-x^2 + 4x)(3 - 2x)$

[illegible]

Ví dụ 2: Lập bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$, biết:

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

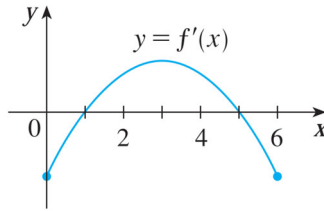
b. $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 3$

c. $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

d. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$

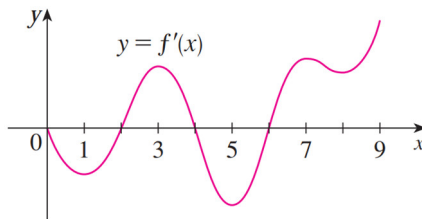
This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;6]$, đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình vẽ sau



Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$, đồ thị $f'(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ được cho bởi hình vẽ sau



Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

III. Tính giới hạn hàm số

1. Các giới hạn cơ bản

Giới hạn tại x_0	Giới hạn tại vô cực	Giới hạn vô cực
$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$

Lưu ý:

- Quy tắc tính giới hạn tại $\pm\infty \longrightarrow$ Đặt x^n làm nhân tử chung (n là số mũ lớn nhất)

$$2. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x) = +\infty$$

$$3. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a < 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x) = -\infty$$

$$4. \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Ví dụ 1: Tính giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 3x + 1)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^2 - 2)$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{2x+1}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

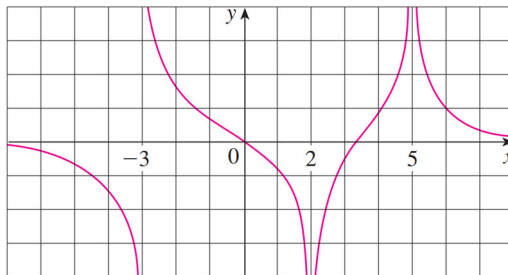
Ví dụ 2: Tính giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{2-x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x-1}$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Dựa vào đồ thị, tính các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (nếu có).

c. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ (nếu có).

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. Bấm giới hạn bằng MTCT

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}$.

Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Hướng dẫn

Nhập vào máy tính hàm $f(x)$

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}$$

- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Ấn phím **CALC** , nhập $x = 10^9$:

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}$$

3000000008

Độc kết quả: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Ấn phím **CALC** , nhập $x = 10^9$:

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}$$

-2999999992

Độc kết quả: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Ấn phím **CALC** , nhập $x = 2 + 10^{-9}$:

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}$$

1.500000001 $\times 10^9$

Độc kết quả: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

- Tính $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Ấn phím **CALC** , nhập $x = 2 - 10^{-9}$:

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}$$

-1.499999999 $\times 10^9$

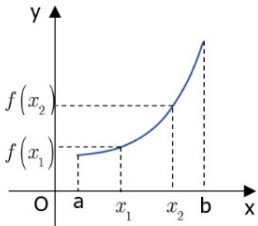
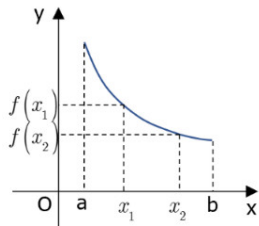
Độc kết quả: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

CHƯƠNG I: HÀM SỐ

Bài 1: TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. Tính đơn điệu của hàm số

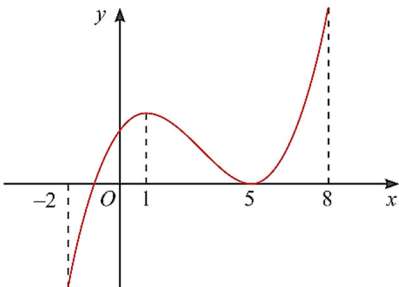
Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Xét hàm số $f(x)$ xác định trên K và $x_1, x_2 \in K$

	ĐỒNG BIẾN (Tăng)	NGHỊCH BIẾN (Giảm)
Định nghĩa	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
Minh họa		
Tính chất	Đồ thị đi lên từ trái sang phải.	Đồ thị đi xuống từ trái sang phải.
Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là đơn điệu trên K.		

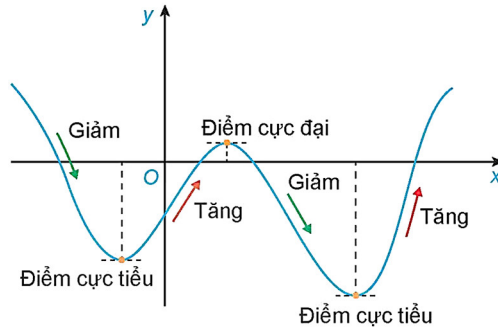
Lưu ý:

+ Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ là tìm tất cả các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



II. Cực trị của hàm số



Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên tập hợp D , khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b) \subset D$.

	ĐIỂM CỰC ĐẠI (Đỉnh)	ĐIỂM CỰC TIỂU (Đáy)
Định nghĩa	$f(x_0) > f(x), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$	$f(x_0) < f(x), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$
Minh họa		
Tính chất	x_0 là điểm cực đại của hàm số. Kí hiệu x_{CD} $f(x_0)$ là giá trị cực đại (hay cực đại) của hàm số. Kí hiệu y_{CD} $M(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.	x_0 là điểm cực tiểu của hàm số. Kí hiệu x_{CT} $f(x_0)$ là giá trị cực tiểu (hay cực tiểu) của hàm số. Kí hiệu y_{CT} $M(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Lưu ý:

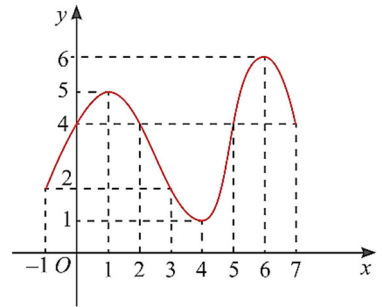
+ Các **điểm cực đại**, **điểm cực tiểu** gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số.

+ Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**) của hàm số.

+ Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0

+ Một hàm số có thể đạt cực trị tại nhiều điểm, cũng có thể không có cực trị.

Ví dụ 2: Tìm các điểm cực trị và giá trị cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho bởi hình sau.



III. Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu của hàm số

ĐỊNH LÝ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

+ Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên K.

+ Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên K.

Bảng biến thiên

Đồng biến		
x	a	b
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Nghịch biến		
x	a	b
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

Lưu ý:

+ Định lý trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số điểm hữu hạn trong khoảng K.

+ Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì $f(x)$ là **hàm hằng** trên K.

Các bước xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$

[illegible]

Ví dụ 3: Xét tính đơn điệu của các hàm số sau

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b. $f(x) = -x^3 + 3x^2$

c. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a slight shadow on the right side, suggesting it's resting on a surface.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng

- a. Hàm số $f(x) = \sin x - 3x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b. Hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

IV. Liên hệ giữa đạo hàm và cực trị của hàm số

ĐỊNH LÝ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ hoặc $(a;b) \setminus \{x_0\}$.

+ Nếu $f'(x)$ *đổi dấu từ âm sang dương* khi qua x_0 thì hàm số $f(x)$ **đạt cực tiểu** tại điểm x_0 .

+ Nếu $f'(x)$ *đổi dấu từ dương sang âm* khi qua x_0 thì hàm số $f(x)$ **đạt cực đại** tại điểm x_0 .

Bảng biến thiên

Cực tiểu

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

Cực đại

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

Lưu ý:

+ Nếu hàm số có đạo hàm và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

+ Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng f' không đổi dấu khi qua x_0 thì hàm số không có cực trị tại x_0 .

+ Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì hàm số không có cực trị trên K .

Các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Ví dụ 5: Tìm cực trị của các hàm số sau

a. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$

b. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

c. $y = \frac{x+1}{x-1}$

d. $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$

[illegible]

V. Luyện tập**Vấn đề 1: Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số $f(x)$.****Các bước để xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số $y = f(x)$:**

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số.

Bài 1: Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau

a. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

b. $y = -x^4 + 4x^2 - 1$

c. $y = \frac{2x-1}{x+2}$

d. $y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$

Bài 2: Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau

a. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

b. $y = \sqrt{4x - 2x^2}$

c. $y = 3^{x-2x^2}$

d. $y = x \ln x$

e. $y = (x+1)e^x$

Bài 3: Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau

a. $y = \cos 3x$ với $x \in (0; \pi)$

b. $y = x - \sin 2x$ với $x \in (0; 2\pi)$

Vấn đề 2: Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số $f(x)$ khi cho $f'(x)$

Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ khi biết $f'(x)$:

1. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
2. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
3. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số.

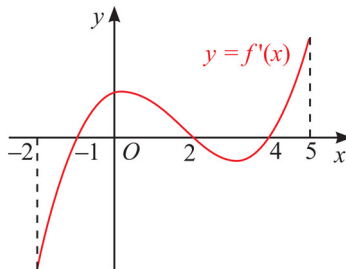
Bài 1: Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$, biết đạo hàm $f'(x)$ như sau:

a. $f'(x) = x(x-2)^3$

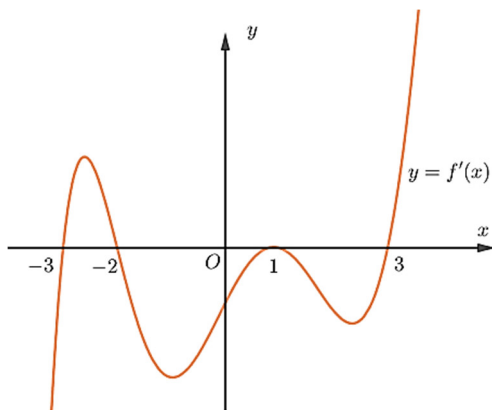
b. $f'(x) = x^2(4-x^2)$

c. $f'(x) = (1-x)^2(x^2+5x+4)$

Bài 2: Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$, biết đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như sau:

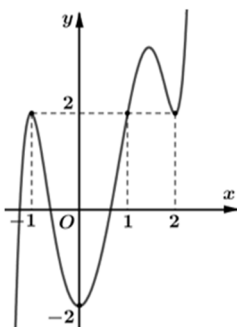


Bài 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ như sau:



Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Bài 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ như sau:



Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - 2x$.

Vấn đề 3: Tính đơn điệu và cực trị của hàm số hợp $y = f[u(x)]$

Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số hợp $y = f[u(x)]$ khi biết $f'(x)$:

1. Dựa vào giả thiết, xác định $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ \dots \end{cases}$.

2. Tính $y' = [f(u)]' = u' \cdot f'(u)$ (công thức đạo hàm hàm hợp)

3. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ u = b \\ \dots \end{cases}$. Giải tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots$

4. Lập bảng biến thiên và kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số $y = f[u(x)]$.

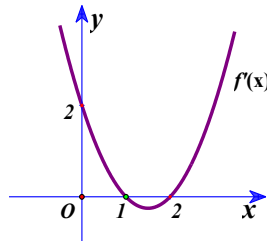
Bài 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số $y = f(2x + 1)$.

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số $y = f(3 - 2x)$.

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.



Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - x^2)$.

Vấn đề 4: Bài toán thực tế

Bài 1: Thể tích V của 1kg nước (tính bằng cm^3) ở nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}\text{C}$) khi T thay đổi từ 0°C đến 30°C được cho xấp xỉ bởi công thức:

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000769T^3.$$

Tìm nhiệt độ $T_0 \in (0; 30)$ để kể từ nhiệt độ T_0 trở lên thì thể tích V tăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 2: Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức:

$$f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44 \text{ (tỉ USD)}$$

với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

Nhận định “kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017” là đúng hay sai? Giải thích?

Bài 3: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Bài 4: Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày sẽ giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên.

Vấn đề 5: Một số bài toán chứa tham số m

1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) **đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$**

Phương pháp

Bài 1: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 2: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 3: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Bài 4: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = (3m^2 - 12)x^3 + 3(m - 2)x^2 - x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Phương pháp

Bài 1: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ đồng biến trên các khoảng xác định.

Bài 2: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên các khoảng xác định.

Bài 3: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{mx - 4}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bài 4: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.

3. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) **đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm** x_0

Phương pháp

Bài 1: Tìm giá trị của m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 + (m^2 - 12)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Bài 2: Tìm giá trị của m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2m+4)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 1 \text{ đạt cực đại tại } x = 2.$$

Bài 3: Biết điểm $M(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$. Tính giá trị $f(3)$.

4. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) **có hoặc không có cực trị.**

Phương pháp



Bài 1: Tìm giá trị của m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x$ có 2 điểm cực trị.

Bài 2: Tìm giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2018$ không có cực trị.

Bài 3: Tìm các giá trị nguyên của m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m^2 - 3m - 3)x + 2024 \text{ có 2 điểm cực trị.}$$

VI. Trắc nghiệm

ĐỀ SỐ 01

A. Trắc nghiệm nhiều phương án

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3		0		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 3)$
C. $(-1; 0)$. D. $(-1; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			2		$-\infty$

Cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. 2.
C. -2. D. -3.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

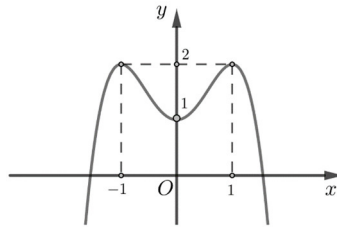
A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-1; 0)$.

Câu 6: Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

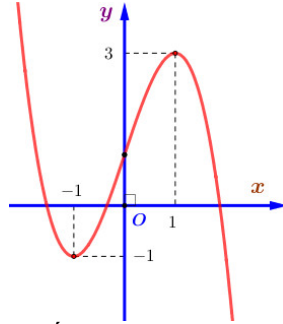
A. $(-\infty; 0)$.

B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

- A. $(1;3)$. B. $(3;1)$.
C. $(-1;-1)$. D. $(1;-1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$	0	$+$	0

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 0. B. 1.
C. 3. D. 2.

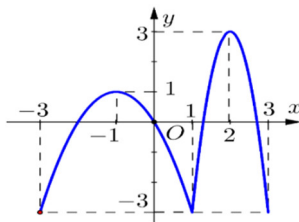
Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Câu 10: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



B. 5.

D. 3.

B. $A(0; -1)$.

D. $A(2;3)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. $N(1; -10)$

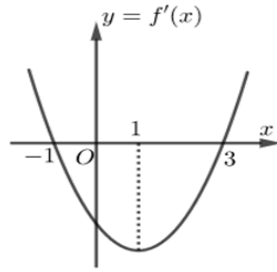
D. $Q(-1;10)$

B. $y = \frac{2x-2}{x+1}$

D. $y = -x^3 + x + 1$

B. $y = x + 1$.

D. $y = 1 - x$.



- A. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.

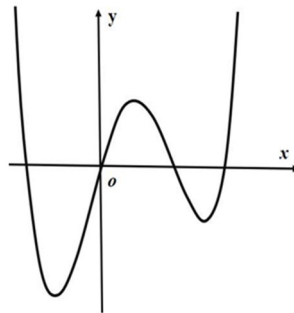
Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 1.

Câu 19: Cho điểm $I(-2; 2)$ và A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Tính diện tích S của tam giác IAB .

- A. $S = 10$.
- B. $S = \sqrt{10}$.
- C. $S = \sqrt{20}$.
- D. $S = 20$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

- A. 3.
- B. 4.
- C. 2.
- D. 1.

B. Trắc nghiệm Đúng – Sai: Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn Đúng hoặc Sai

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	142		8		38	14

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(8; 38)$.
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- Cực đại của hàm số bằng 38.
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1; 8)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$							
			-1		2		2	
					$-\infty$			$-\infty$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 1) \setminus \{0\}$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- Điểm cực tiểu của hàm số là -2 .
- Cực đại của hàm số là 1.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 4$.

- Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = -3x^2 + 3$.
- Hàm số có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 1$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-6; -2)$.
- Tích hai cực trị của hàm số bằng 12.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x \ln x$.

- Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = \ln x + 1, \forall x > 0$.

- c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{e}$.
- d) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng $-\frac{1}{e}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = 4x^3 - 4x$.
- b) Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- d) Tam giác tạo bởi 3 điểm cực trị của đồ thị (C) có diện tích bằng 1.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + mx^2 + (m^2 - 12)x + 2$ với m là tham số.

- a) Đạo hàm của $f(x)$ là $f'(x) = -3x^2 + 2mx + m^2 - 12, \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = 5$.
- c) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
- d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \in (-3; 3)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x-m}$ với $m \neq 0$.

- a) Đạo hàm của $f(x)$ là $f'(x) = \frac{-2m}{(x-m)^2}, \forall x \neq m$.
- b) Hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- c) Hàm số $f(x)$ không có cực trị.
- d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \leq -2$.

Câu 8: Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t) = \frac{25t + 10}{t + 5}, t \geq 0$$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

- a) Dân số của thị trấn năm 2005 là 13,5 nghìn người.
- b) Năm 2020, dân số của thị trấn tăng gần 200 người so với năm 2019.
- c) Dân số của thị trấn tăng đều qua các năm kể từ năm 2000.
- d) Dân số của thị trấn không bao giờ vượt quá 25 nghìn người.



Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = -x^2 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = f(2-x)$.

- $g'(x) = f'(2-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $g'(x) = 0$ tại các điểm $x=1$ và $x=2$.
- Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
- Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

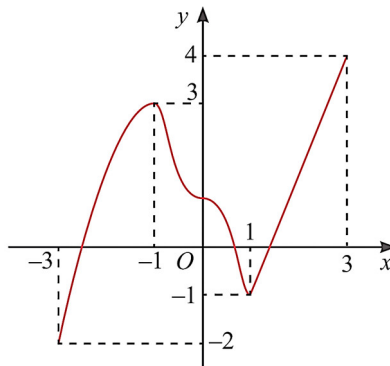
x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Xét hàm số $g(x) = f(x^2)$.

- $g'(x) = 2x.f'(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $g'(x) = 0$ tại các điểm $x=0$, $x=\pm 1$ và $x=\pm 2$.
- Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0;2)$.
- Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

C. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số đạt cực đại tại $x=a$ và cực tiểu tại $x=b$. Giá trị của $a+b$ là:

.....

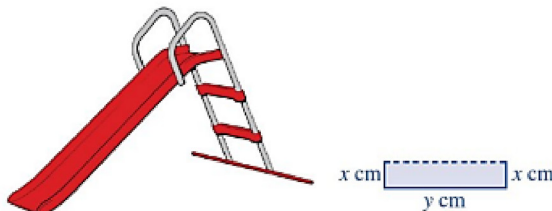
Câu 2: Hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Giá trị của $b-a$ là:

Câu 3: Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $M(2; -2)$ và đi qua điểm $N(3; 2)$. Giá trị của $f(-1)$ là:

Câu 4: Hàm số $f(x) = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 1$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài bằng 2. Tổng các giá trị của m là:

Câu 5: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tổng tất cả các phân tử của S là:

Câu 6: Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại bề rộng 80cm, mặt cắt được mô tả như hình vẽ (x là chiều cao và y là chiều rộng của mặt cắt).



Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em. Khi cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì giá trị của x là:

ĐỀ SỐ 02

A. Trắc nghiệm nhiều phương án

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			3		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

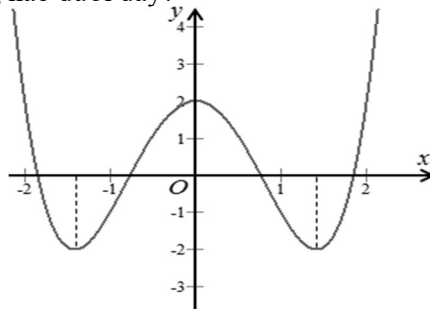
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

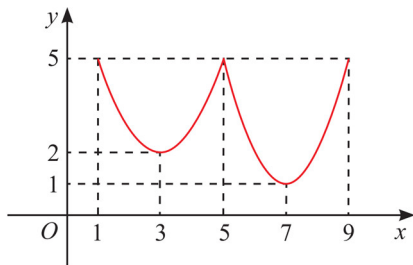
- A. $(-1; 1)$. B. $(0; 1)$.
C. $(4; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$.
C. $(1; 2)$. D. $(0; 1)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[1; 9]$, có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số là

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 5.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	$-\infty$	

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = 3$. B. $x = -1$.
C. $x = 2$. D. $x = -3$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_2\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_0	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$-\infty$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có hai điểm cực đại, một điểm cực tiểu.
B. Hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.
C. Hàm số có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.
D. Hàm số có một điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

Câu 8: Tìm giá trị cực đại $y_{C\&}$ của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{C\&} = -1$

B. $y_{C\&} = 4$

C. $y_{C\&} = 1$

D. $y_{C\&} = 0$

Câu 9: Cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$ là:

A. $\frac{3}{4}$.

B. $-\frac{1}{12}$.

C. $-\frac{3}{4}$.

D. -2 .

Câu 10: Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1

B. 3

C. 0

D. 2

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0		$-$		0		$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 12: Hàm số $y = \frac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; +\infty)$

B. $(0; +\infty)$

C. $(-\infty; 0)$

D. $(-1; 1)$

Câu 13: Điểm cực tiểu của hàm số $y = e^{x^2-2x}$ là

A. $\frac{1}{e}$

B. 1

C. $-e$

D. $-\frac{1}{e}$

Câu 14: Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

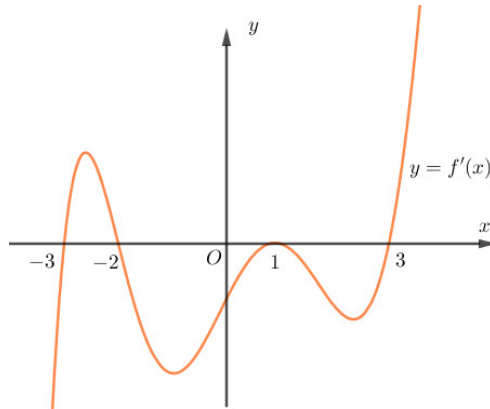
A. $y = \frac{2x-3}{x+2}$.

B. $y = x^4$.

C. $y = -x^3 + x$.

D. $y = |x+2|$.

- Câu 15:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(1; 3)$. B. $(-1; 0)$.
C. $(0; 1)$. D. $(-2; 0)$.
- Câu 16:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là
A. 4. B. 3.
C. 1. D. 2.
- Câu 17:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm
 $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 3 B. 5
C. 2 D. 4
- Câu 18:** Gọi A, B lần lượt là hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số
 $y = -x^3 + 3x + 4$, khi đó độ dài đoạn thẳng AB là
A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $3\sqrt{5}$.
C. $\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.
- Câu 19:** Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 1$.
Diện tích $\triangle ABC$ bằng
A. $\frac{1}{2}$. B. 1.
C. 2. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 20:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ đã cho là

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

B. Trắc nghiệm Đúng – Sai

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và $y = g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- a) Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
b) Hàm số $y = \ln f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
c) Hàm số $y = f(x) - g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
d) Hàm số $y = f(x).g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
c) Điểm cực tiểu của hàm số là $M(2; 4)$.

d) Hàm số đạt cực đại bằng -4 tại $x = -2$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

a) Hàm số có đạo hàm là $f'(x) = \frac{-3}{(1-x)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 2$.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ có đồ thị (C) . Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C) .

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

c) Đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2\sqrt{5}$.

d) Diện tích tam giác OAB bằng 4.

Câu 6: Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $y\%$.

a) Hàm số $y = \frac{100(x+200)}{x+30}$.

b) Đạo hàm của hàm số y luôn nhận giá trị âm trên khoảng $(0; +\infty)$.

c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ dung dịch muối càng tăng.

d) Nồng độ dung dịch muối không thể vượt quá 90%.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = e^{mx}$ với m là tham số khác 0.

a) Hàm số có đạo hàm $f'(x) = e^{mx}, \forall x \in \mathbb{R}$.



- b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m .
- c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $m < 0$.
- d) Hàm số $g(x) = xf(x)$ luôn có một điểm cực trị với mọi m .

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 2x - 2$ với m là tham số.

- a) Đạo hàm của $f(x)$ là $f'(x) = (m^2 - m)x^2 + 4mx + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $f(x)$ không có cực trị khi và chỉ khi $m \in (-1; 0)$
- c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-1 < m < 0$.
- d) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $m = -2$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx - 4}{x - m}$ với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$
- b) Đạo hàm của $f(x)$ là $f'(x) = \frac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}, \forall x \neq m$.
- c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng xác định khi $-2 \leq m \leq 2$
- d) Có 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm

$$f'(x) = x^2(2 - x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Xét hàm số } g(x) = f(x^2 - 2x + m).$$

- a) $f'(x) = 0$ tại các điểm $x = 0$ và $x = 2$.
- b) $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + m), \forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Hàm số $g(x)$ có ít nhất 1 điểm cực trị với mọi giá trị của m .
- d) Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 3$.

C. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Hàm số $f(x) = \ln(x^2 - x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; a)$ và đồng biến trên khoảng $(b; +\infty)$. Giá trị của $a + b$ là:

.....

Câu 2: Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$ đạt cực trị tại hai điểm A, B . Độ dài đoạn AB là:

.....

Câu 3: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$. Trong khoảng thời gian nào thì vận tốc của chất điểm tăng?

.....

Câu 4: Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$$

$$(v \text{ được tính bằng feet / s, } 1 \text{ feet} = 0,3048m).$$

Hỏi gia tốc của con tàu sẽ tăng trong khoảng thời gian bao lâu tính từ thời điểm cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

.....

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) = (x-1)(3-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(2x^2 + x + m)$ có 5 điểm cực trị?

.....

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có cực đại là 7.

.....

ĐÁP ÁN
ĐỀ SỐ 1

A. Trắc nghiệm nhiều phương án

1.C	2.B	3.D	4.C	5.A	6.C	7.C	8.B	9.B	10.A
11.D	12.B	13.D	14.B	15.B	16.B	17.B	18.D	19.A	20.B

ĐỀ SỐ 2

A. Trắc nghiệm nhiều phương án

1.B	2.B	3.D	4.C	5.B	6.B	7.A	8.B	9.B	10.C
11.C	12.B	13.A	14.A	15.C	16.D	17.C	18.D	19.C	20.B

Bài 2: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập D .

Định nghĩa	Minh họa
$M = \max_D f(x) \text{ nếu } \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$	
$m = \min_D f(x) \text{ nếu } \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$	

Lưu ý:

+ GTLN M của hàm số $f(x)$ đạt được tại *điểm cao nhất* của đồ thị hàm số;

GTNN m của hàm số $f(x)$ đạt được tại *điểm thấp nhất* của đồ thị hàm số;

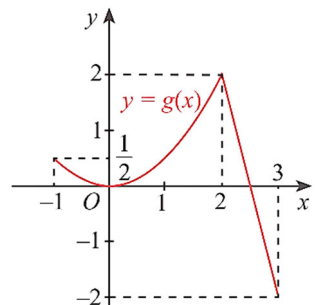
GTLN – GTNN của hàm số phải đạt được tại một điểm thuộc tập D .

+ Để tìm GTLN – GTNN của hàm số $f(x)$ trên tập D , ta lập BBT của $f(x)$ trên D và dựa vào BBT để kết luận.

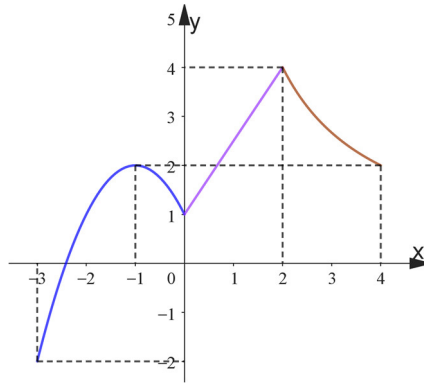
Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn

$[-1; 3]$, có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định

$\max_{[-1;3]} f(x)$, $\min_{[-1;3]} f(x)$ (nếu có).



Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-3; 4)$, có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định $\max_{(-3;4)} f(x)$, $\min_{(-3;4)} f(x)$ (nếu có).



Ví dụ 3: Tìm GTLN – GTNN (nếu có) của các hàm số sau

a. $f(x) = x^3 - 12x + 1$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

b. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

c. $f(x) = e^{x^2 - 2x}$ trên $\mathbb{R}$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

II. Tìm GTLN – GTNN của hàm số trên đoạn $[a; b]$

Với hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì luôn có GTLN và GTNN trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, GTLN và GTNN của hàm số đạt được tại điểm cực trị hoặc tại $x = a; x = b$.

Các bước tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

[illegible]

Ví dụ 4: Tìm GTLN – GTNN của các hàm số sau

a. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$

b. $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;3]$

c. $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Ví dụ 5: Tìm GTLN – GTNN của các hàm số sau

a. $f(x) = e^{x^3 - 3x + 3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

b. $f(x) = \ln(x^2 + x + 2)$ trên đoạn $[1; 3]$.

c. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

III. Tìm GTLN – GTNN của hàm số bằng máy tính CASIO 580VNX

Ví dụ: Tổng GTLN – GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

- A. 4 B. 5 C. 3 D. $\frac{9}{2}$

Hướng dẫn sử dụng MTCT:

Bước 1: Cài đặt chế độ table một hàm $f(x)$: **SHIFT** **MENU** **▼** **▼** **1** → Chọn **1**

1: f(x)
2: f(x), g(x)

Bước 2: Vào bảng tính (table) **MENU** **8**, nhập hàm số $f(x)$ và nhấn **=**

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Bước 3: Nhập giá trị bắt đầu, giá trị kết thúc và bước tính

Table Range
Start: -1
End : 1
Step : 0.05

Lưu ý: $\text{step} = \frac{\text{end} - \text{start}}{40}$

Bước 4: Đọc GTLN – GTNN từ bảng

	x	f(x)
1	-1	4
2	-0.95	3.9926
3	-0.9	3.971
4	-0.85	3.9358

	x	f(x)
38	0.85	0.0641
39	0.9	0.029
40	0.95	7.3e-05
41	1	0

$\max_{[-1;1]} f(x) = 4$ tại $x = -1$; $\min_{[-1;1]} f(x) = 0$ tại $x = 1$.

Ví dụ 6: Tìm tích GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

IV. Luyện tập

Vấn đề 1: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x)$ bằng cách lập BBT.

Bài 1: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

a. $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; 3)$.

b. $y = x - \frac{3}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 3]$.

c. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

d. $y = \sqrt{x^2 + 4}$.

Bài 2: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

a. $y = e^{2x-x^2}$.

b. $y = \ln(4 - x^2)$.

c. $y = \frac{\ln x}{x}$.

Vấn đề 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

Các bước để tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$:

1. Tính $f'(x)$ và xác định các điểm $x_1; x_2; \dots$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

2. Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(b)$.

3. Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2.

Khi đó:

$$M = \max_{[a;b]} f(x), \quad m = \min_{[a;b]} f(x).$$

Bài 1: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

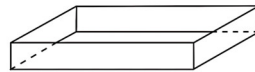
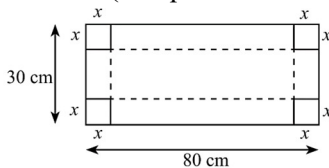
- $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$
- $y = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[3; 4]$
- $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.
- $y = x\sqrt{16-x^2}$.

Bài 2: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

- $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$
- $y = xe^{-2x^2}$ trên đoạn $[0; 1]$
- $y = x \ln x - 3x + 2$ trên đoạn $[1; 3]$.

Vấn đề 3: Bài toán thực tế

Bài 1: Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Bài 2: Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m. Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

Bài 3: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình nước có dạng hình trụ với dung tích 1 lít. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1200 đồng/cm², trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 750 đồng

$/cm^2$. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Nhắc lại: Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh$ với r là bán kính đáy và h là chiều cao của hình trụ.

Bài 4: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$$V = k(R - r)r^2 \text{ với } 0 \leq r < R,$$

trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Vấn đề 4: Bài toán có tham số m

1. Tìm tham số m khi biết GTLN (hoặc GTNN) của hàm số

Bài 1: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{m^2x + 1}{x - 1}$ (m là tham số thực) có GTNN trên đoạn $[2; 3]$ bằng 4.

Bài 2: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 8}$ (m là tham số thực) có GTLN trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $\frac{1}{10}$.

Bài 3: Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ (m là tham số thực) có GTNN trên đoạn $[0; 1]$ bằng 5.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x + 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn

$$\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{16}{3}. \text{ Tìm } m?$$

2. Tìm tham số m để hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên một khoảng cho trước.

Phương pháp cô lập tham số m

Bài 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

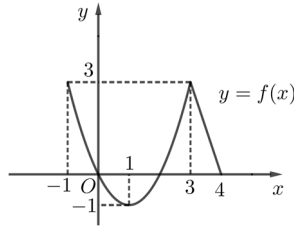
Bài 2: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Bài 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m - 6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

V. Trắc nghiệm

A. Trắc nghiệm nhiều phương án

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 4]$.

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 3.

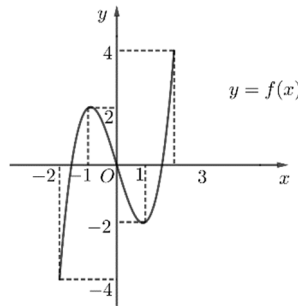
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

- A. 3. B. 0. C. -1 . D. -2 .

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Đặt $M = \max_{[-2; 2]} f(x)$, $m = \min_{[-2; 2]} f(x)$. Khi đó $M + m$ bằng



- A. 0. B. 8. C. 2. D. 4.

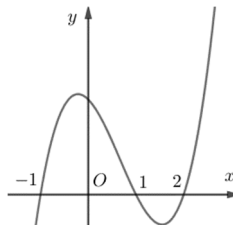
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	
y	$+\infty$				2				$+\infty$

<

- A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ bằng 0.
 B. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ bằng 2.
 C. Hàm số có ba điểm cực trị.
 D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. $f(1)$. B. $f(-1)$. C. $f(2)$. D. $f(0)$.

- Câu 6:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[-2; 1]$
A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.
- Câu 7:** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:
A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.
- Câu 8:** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính giá trị $M - m$
A. $M - m = -\frac{9}{4}$. B. $M - m = 3$.
C. $M - m = \frac{9}{4}$. D. $M - m = \frac{1}{4}$.
- Câu 9:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$
A. $\frac{1}{e}$. B. $-\frac{1}{e}$. C. e D. $-e$.
- Câu 10:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.
A. $\min_{[2; 4]} y = -3$ B. $\min_{[2; 4]} y = \frac{19}{3}$ C. $\min_{[2; 4]} y = 6$ D. $\min_{[2; 4]} y = -2$
- Câu 11:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^{x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng
A. e . B. 1. C. $\frac{1}{e}$. D. 0.
- Câu 12:** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Khi đó $M - m$ bằng
A. 9. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 13:** Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$
A. $T = [1; 9]$. B. $T = [2\sqrt{2}; 4]$.
C. $T = (1; 9)$. D. $T = [0; 2\sqrt{2}]$.

Câu 14: Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min_{(0; +\infty)} y = \frac{33}{5}$

B. $\min_{(0; +\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$

C. $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

D. $\min_{(0; +\infty)} y = 7$

Câu 15: Hàm số $y = x^2 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ tại

$x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$?

A. 7.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 16: Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$.

A. -20.

B. -8.

C. -9.

D. 0.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $M = m + \frac{3}{2}$. B. $M = \frac{3}{2}m$. C. $M = m + 1$. D. $M = m + \frac{2}{3}$.

Câu 19: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$ là

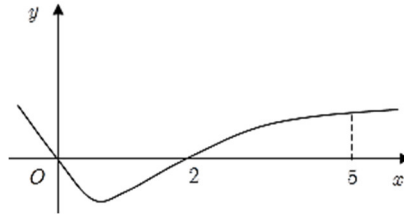
A. $\frac{9}{8}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. 2.

D. 1.

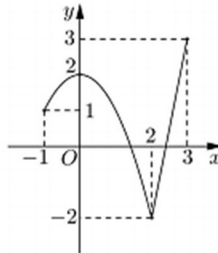
Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



A. $f(2), f(0)$. B. $f(0), f(5)$. C. $f(1), f(5)$. D. $f(2), f(5)$.

B. Trắc nghiệm Đúng – Sai: Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn Đúng hoặc Sai

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau



- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ bằng -2 .

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	142	8	38	14

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(8; 38)$.
- b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-1; +\infty)$ bằng 38.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ bằng 142.
- d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau

x	-5		1		7
y'		-	0	+	
y	6				9

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên nửa khoảng $[-5; 7]$ bằng 2.
- Giá trị lớn nhất của hàm số trên nửa khoảng $[-5; 7]$ bằng 6.
- Giá trị lớn nhất của hàm số trên nửa khoảng $[-5; 7]$ bằng 9.
- Hàm số không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $[-5; 7]$.

Câu 4: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

- $y' = -3x^2 + 6x$.
- $y' = 0$ tại $x = 0$ và $x = 2$.
- $\max_{[-1; 3]} y = 5$.
- $\min_{[-1; 3]} y = 0$.

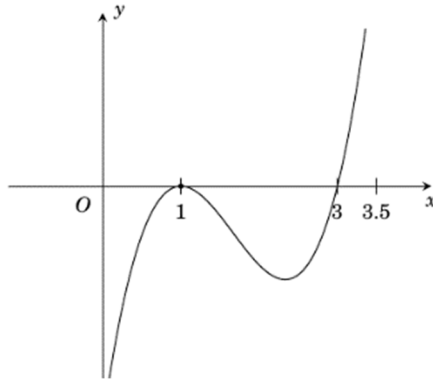
Câu 5: Cho hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$.

- Tập xác định của hàm số là $D = [-3; 3]$.
- $y' = \frac{-2x}{\sqrt{9 - x^2}}$.
- $\max_D y = 3$.
- Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên D .

Câu 6: Cho hàm số $y = (x^2 - 2)e^{2x}$.

- $y' = (2x^2 + 2x - 4)e^{2x}$.
- $y' = 0$ tại $x = -1$ và $x = 2$.
- $\max_{[-2; 1]} y = \frac{2}{e^4}$.
- $\min_{[-2; 1]} y = -e$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0; 3]$, đồ thị $f'(x)$ được cho bởi hình sau



- a) $f'(x) = 0$ tại $x = 1$ và $x = 3$.
- b) $\max_{[0;3]} y = y(1)$.
- c) $\min_{[0;3]} y = y(3)$.
- d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$.

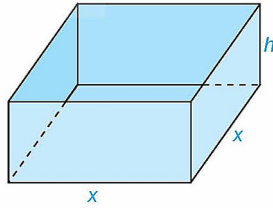
Câu 8: Nồng độ C của một loại thuốc trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$.

- a) $C'(t) = \frac{81 - 6t^3}{(t^3 + 27)^2}$
- b) Sau khi tiêm 1 giờ, nồng độ của thuốc trong máu là $C = \frac{3}{28}$.
- c) Sau khi tiêm khoảng 2 giờ 23 phút, nồng độ thuốc trong máu là lớn nhất.
- d) Nồng độ của thuốc trong máu luôn tăng sau khi tiêm.

Câu 9: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh).

- a) $N'(t) = -3t^2 + 24t$.
- b) Số người bị nhiễm bệnh sau 1 tuần là 11 người.
- c) Số người bị nhiễm bệnh tối đa là 25600 người.
- d) Virus lây lan nhanh nhất ở tuần thứ 6.

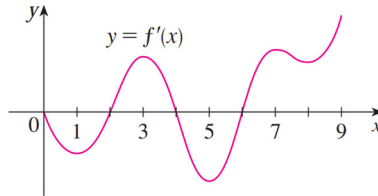
Câu 10: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông cạnh bằng x cm, chiều cao bằng h cm và diện tích bề mặt bằng 108cm^2 như hình vẽ. Gọi V là thể tích của chiếc hộp.



- Diện tích đáy của chiếc hộp là x^2 (cm^2).
- Diện tích tất cả các mặt của chiếc hộp là $2x^2 + 4xh$ (cm^2).
- Thể tích của chiếc hộp là $V = -\frac{1}{4}x^3 + 27x$ (cm^3).
- Thể tích chiếc hộp lớn nhất khi $x = 6\text{cm}$, $h = 3\text{cm}$.

C. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$, đồ thị $f'(x)$ được cho bởi hình vẽ sau:

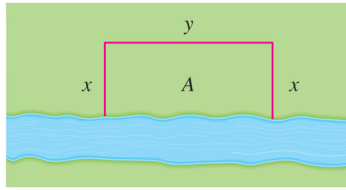


Biết $f(2) + f(4) = f(3) + f(6)$ và $\min_{(0; +\infty)} f(x) = f(x_0)$. Giá trị x_0 là:

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2x - x^2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng:

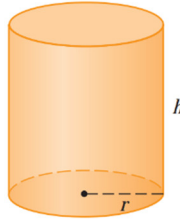
Câu 3: Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$ bằng:

Câu 4: Bác Dũng có 2400m hàng rào và muốn rào lại một thửa ruộng hình chữ nhật giáp một con sông thẳng. Bác Dũng không cần hàng rào dọc bờ sông. Thửa ruộng có diện tích lớn nhất là:



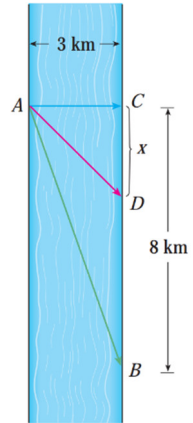
.....

Câu 5: Một cái lon hình trụ được chế tạo để chứa 1 lít dầu nhớt. Tìm chiều cao của cái lon sao cho chi phí kim loại dùng để sản xuất lon là nhỏ nhất. (kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần trăm)



.....

Câu 6: Một người đàn ông muốn đi từ điểm A bên bờ một con sông thẳng đến điểm B xuôi dòng ở phía đối diện (xem hình vẽ). Anh ta có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C và sau đó chạy đến B , hoặc anh ta có thể chèo thẳng đến B , hoặc anh ta có thể chèo đến một điểm nào đó D giữa C và B rồi chạy đến B . Cho biết $AC = 3\text{km}$, $BC = 8\text{km}$, vận tốc chèo thuyền là 6km/h và vận tốc chạy trên bờ là 8km/h . Đoạn CD bằng bao nhiêu để người này đến B nhanh nhất? (Giả sử rằng tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền và kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



.....

Câu 7: Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là:

.....

Câu 8: Tìm tổng các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

.....

Câu 9: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ thỏa mãn

$\min_{[2;4]} y = 3$ là:

.....

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = (a+3)x^4 - 2ax^2 + 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\min_{[0;3]} f(x)$ bằng:

.....

BẢNG ĐÁP ÁN

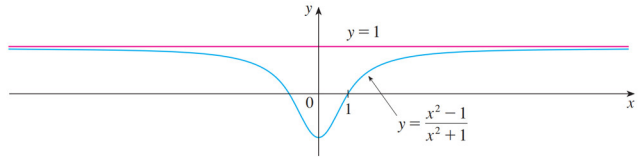
1.D	2.C	3.A	4.B	5.A	6.C	7.C	8.C	9.B	10.C
11.B	12.D	13.B	14.C	15.D	16.D	17.B	18.C	19.A	20.D

Bài 3: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. Đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng

Ví dụ 1: Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Bảng giá trị và hình vẽ sau cho biết giá trị của $f(x)$ (chính xác đến 6 chữ số thập phân) và đồ thị của hàm số $f(x)$.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998



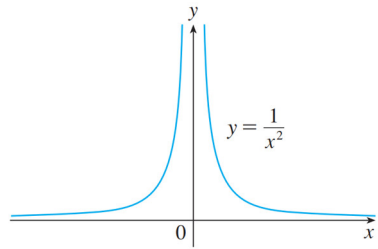
Nhận xét: khi giá trị của x càng lớn thì giá trị của $f(x)$ càng gần với 1. Điều này được giải thích thông qua giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$.

Như vậy khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì đồ thị $f(x)$ “**tiến gần**” đường thẳng $y = 1$.

Ta nói đường thẳng $y = 1$ là đường **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $f(x)$.

Ví dụ 2: Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Bảng giá trị và hình vẽ sau cho biết giá trị của $f(x)$ (chính xác đến 6 chữ số thập phân) và đồ thị của hàm số $f(x)$.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000



Nhận xét: khi giá trị của x càng gần với 0 thì giá trị của $f(x)$ càng lớn. Điều này được giải thích thông qua giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Như vậy khi $x \rightarrow 0^+$ và $x \rightarrow 0^-$ thì đồ thị $f(x)$ “**tiến gần**” đường thẳng $x = 0$.

Ta nói đường thẳng $x = 0$ là đường **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $f(x)$.

Định nghĩa 1:

Đường thẳng $y = L$ là **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

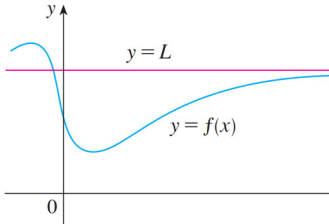
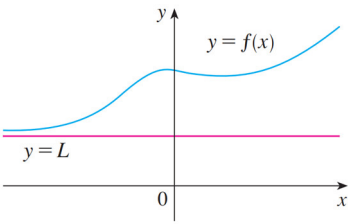
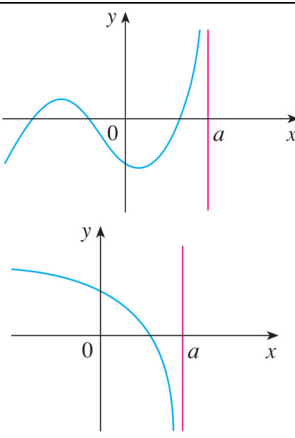
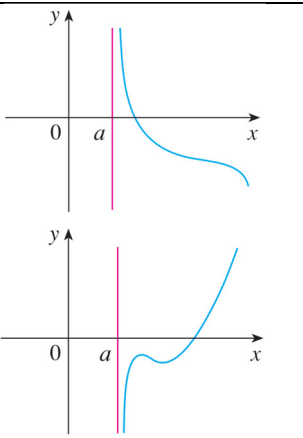
Định nghĩa 2:

Đường thẳng $x = a$ là **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa ít nhất một trong các điều kiện sau:

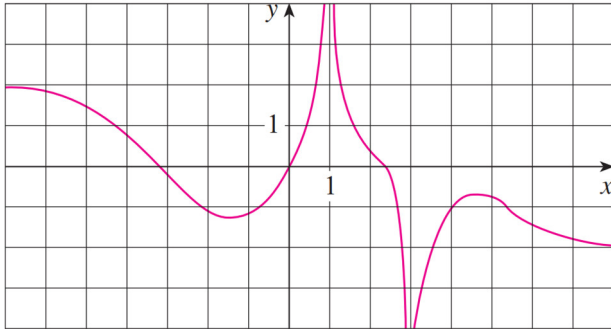
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \text{ (+}\infty \text{ hoặc -}\infty \text{)};$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \text{ (+}\infty \text{ hoặc -}\infty \text{)}.$$

Minh họa

Tiệm cận ngang		
Tiệm cận đứng		

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Chỉ ra các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$ 0 $+$	
y	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -4 -2

Chỉ ra các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.

Ví dụ 3: Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau.

a. $f(x) = \frac{1}{x}$

b. $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

c. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Chú ý: Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn có:

- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$

- Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$

⚠ Học sinh cần lưu ý cách dùng MTCT để tìm nhanh tiệm cận ngang, tiệm cận đứng.

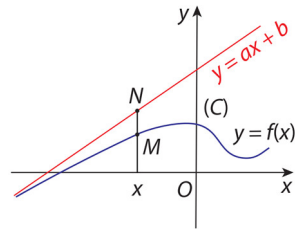
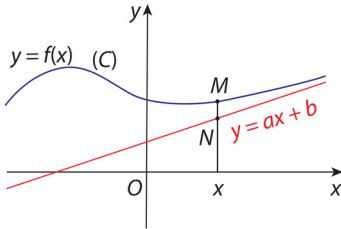
II. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa 3

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Minh họa



Chú ý:

1. Xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] \end{cases}$$

2. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ được viết dưới dạng $y = px + q + \frac{r}{mx + n}$, có:

• Tiệm cận đứng: $x = -\frac{n}{m}$

• Tiệm cận xiên: $y = px + q$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng đường thẳng $y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x^2}$.

Ví dụ 5: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

$$\text{b. } f(x) = \frac{2x^2 - x + 2}{3 - x}$$

c. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1} - 1$

[illegible]

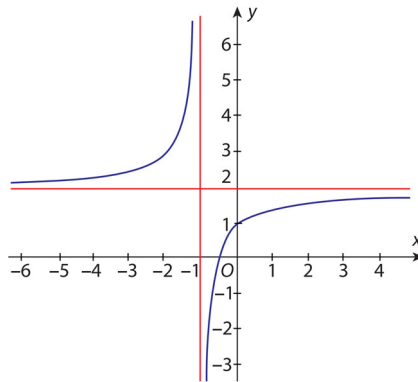
! Học sinh cần lưu ý cách dùng MTCT để tìm nhanh tiệm cận xiên



III. Luyện tập

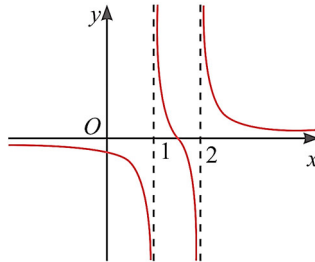
Vấn đề 1: Tìm tiệm cận khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số.

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Chỉ ra các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{5x^2-15x+10}$ có đồ thị như hình vẽ sau



Chỉ ra các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.

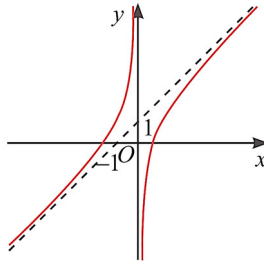
Bài 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$-$		$+$	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	0

Arrows indicate limits: from $+\infty$ at $x = -2$ to $-\infty$ at $x = 0$, and from $+\infty$ at $x = 0$ to 0 at $x = +\infty$.

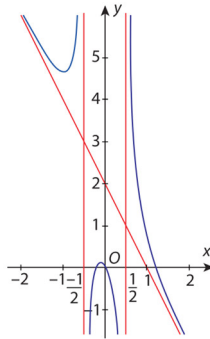
Chỉ ra các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.

Bài 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Chỉ ra các đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Bài 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Chỉ ra các đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Vấn đề 2: Tìm tiệm cận khi biết hàm số.

Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng

1. Tìm tập xác định của hàm số, chỉ ra các “điểm biên” của tập xác định
2. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ để suy ra tiệm cận ngang.
3. Tính $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ để suy ra tiệm cận đứng (a là “điểm biên” của tập xác định).

Tìm tiệm cận xiên

1. Tìm $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ hoặc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
2. Tìm $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$

Lưu ý $y = px + q + \frac{r}{mx + n}$ thì tiệm cận xiên là $y = px + q$.

Bài 1: Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{3x-2}{1-x}$

d. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

b. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-9}$

e. $f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

c. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

Bài 2: Tìm tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau

a. $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$

c. $f(x) = 3x+1 - \frac{2}{x^2}$

b. $f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x-3}$

d. $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$

e. $f(x) = \frac{\sqrt{16x^4+1}}{2x-1}$

Vấn đề 3: Bài toán thực tế.

Bài 1: Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2+1}, \text{ với } y \text{ được tính theo } mg/l \text{ và } t \text{ được tính theo giờ, } t \geq 0.$$

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

Bài 2: Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $M(x) = \frac{T(x)}{x}$.

a) Xem $M(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này.

b) Nêu nhận xét về chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A khi x đủ lớn.

Vấn đề 4: Bài toán có tham số m.

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2mx + 4}{x + 1}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng?

Bài 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x^2 - 8x + m}$ có 2 đường tiệm cận đứng?

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x}$ có hai tiệm cận ngang?

Bài 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{(m^2 - 1)x^2 + 2mx + 1}{x}$ có tiệm cận xiên?

IV. Trắc nghiệm

A. Trắc nghiệm nhiều phương án

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-			-	0	+
y		2		$+\infty$		-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

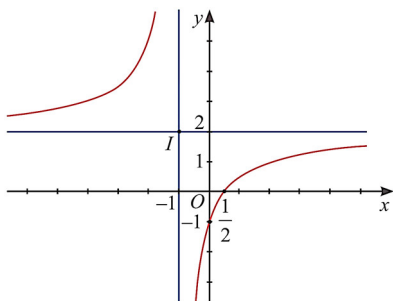
- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'			+			
y				$+\infty$	1	0

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$ là



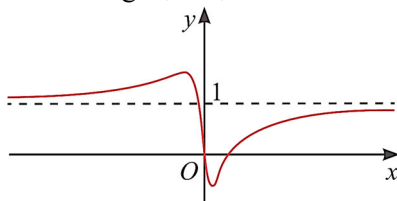
A. $x = -1; y = 2$.

B. $x = 2; y = -1$.

C. $x = \frac{1}{2}; y = 2$.

D. $x = -1; y = \frac{1}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



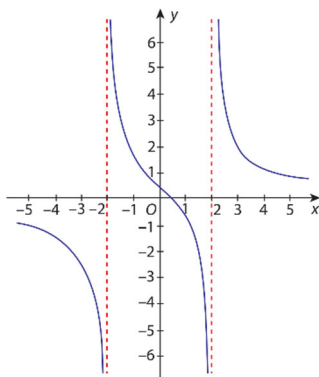
A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



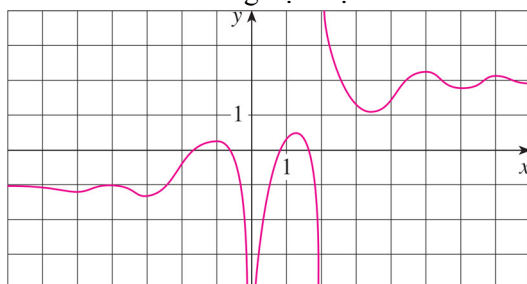
A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

Câu 7: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y = \frac{1}{4}$.

B. $y = 4$.

C. $y = 1$.

D. $y = -1$.

Câu 8: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ là

A. $x = -3$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 3$.

Câu 9: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

Câu 11: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

Câu 12: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

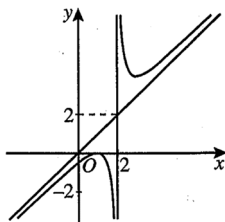
A. 4.

B. 3.

C. 1.

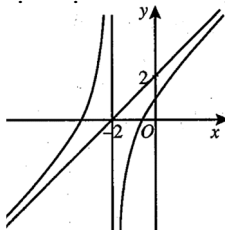
D. 2.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Phương trình đường tiệm cận xiên đồ thị của hàm số là?



- A. $y = x$. B. $y = -x$. C. $y = x + 2$. D. $y = 2x$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên đồ thị của hàm số là?



- A. $x = -2; y = x + 2$. B. $x = -2; y = x - 2$.
C. $x = 2; y = x + 2$. D. $x = 2; y = x - 2$.

Câu 15: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ là:

- A. $y = x$. B. $y = x + 1$. C. $y = x - 1$. D. $y = -x$.

Câu 16: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x - 1 + \frac{3}{x+1}$ là:

- A. $y = 2x$. B. $y = x + 1$. C. $y = 2x - 1$. D. $y = 1 - 2x$.

Câu 17: Đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$ là:

- A. $x = -1$ và $y = x$. B. $x = -1$ và $y = x + 1$.
C. $x = 1$ và $y = x$. D. $x = 1$ và $y = x + 1$.

Câu 18: Tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x - 1}$ là:

- A. $A(1;2)$. B. $B(-1;5)$. C. $C(1;8)$. D. $D(1;9)$.

Câu 19: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2\sqrt{x^2 - 9}$ khi x dần tới $+\infty$ là:

- A. $y = 2x$. B. $y = x$. C. $y = 2x + 1$. D. $y = 2x - 1$

Câu 20: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4}$ là:

- A. $y = -\frac{1}{2}x$ và $y = \frac{1}{2}x$.
 B. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
 C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
 D. $y = -\frac{1}{2}x$.

B. Trắc nghiệm Đúng – Sai: Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn Đúng hoặc Sai

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y	2		$+\infty$		2
			$-\infty$		

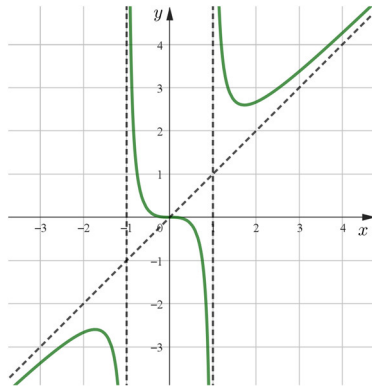
- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.
 c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
 d) Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng; đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

- Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Đồ thị hàm số $f(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = -1$.
- Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận xiên.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



- Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.
- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x = 1$; $x = -1$.
- Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận xiên là đường thẳng $x + y = 0$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+2}{1-2x}$.

- Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$.

c) Đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$.

d) Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x - 1}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

b) Đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.

c) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

d) Đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1} - 2$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = ax + b$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

b) Đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.

c) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

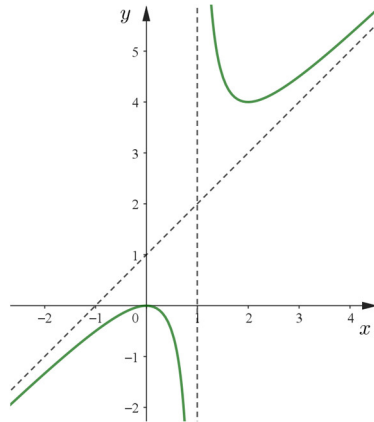
d) Đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

C. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$ có m đường tiệm cận đứng và n đường tiệm cận ngang. Tính $m + n$?

.....

Câu 2: Hàm số $f(x) = ax + b + \frac{1}{x + c}$ có đồ thị như hình vẽ sau



Xác định $a + b + c$?

Câu 3: Tổng chi phí để sản xuất ra x sản phẩm của một xí nghiệp được tính theo công thức $T(x) = 20x + 100000$ (nghìn đồng). Gọi chi phí trung bình để sản xuất ra một sản phẩm là $C(x)$. Biết rằng khi x càng lớn thì chi phí trung bình để tạo ra một sản phẩm sẽ giảm, nhưng không giảm quá m nghìn đồng. Tìm m ?

Câu 4: Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút. Gọi $f(t)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị gam/lít). Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị $f(t)$. Xác định m ?

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-1}{2x^2 + 6x - m - 3}$$
 có hai đường tiệm cận đứng?

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ với $x_0 < 0$ thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất. Khi đó $x_0 + y_0$ bằng?

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.A	4.B	5.A	6.C	7.B	8.D	9.C	10.C
11.B	12.B	13.A	14.A	15.A	16.C	17.B	18.D	19.A	20.B

Bài 4: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

I. Sơ đồ khảo sát hàm số

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm số:

+ Tìm các giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực, suy ra các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

+ Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm: tính đạo hàm, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số, điền kết quả vào bảng.

Bước 3: Vẽ đồ thị hàm số

+ Lập bảng giá trị

+ Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).

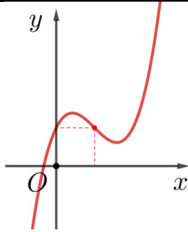
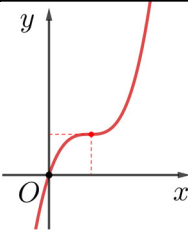
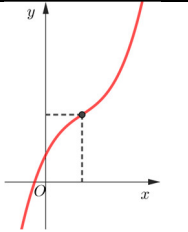
+ Biểu diễn các điểm đặc biệt của đồ thị và vẽ đồ thị.

+ Nhận xét về tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

II. Dạng đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Ghi nhớ:

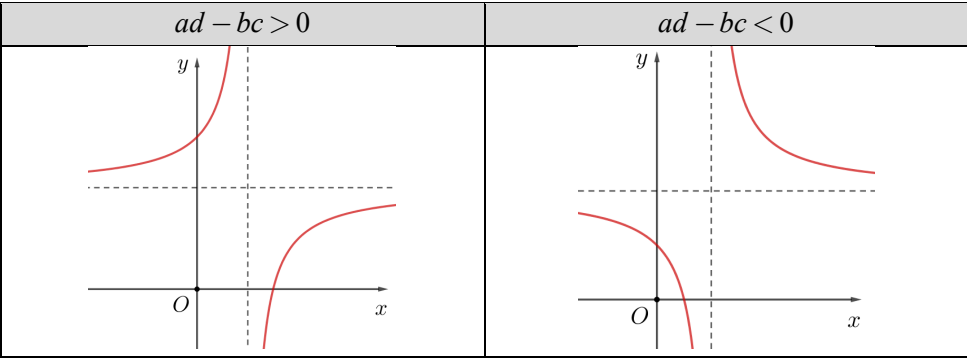
- Hàm số bậc ba: không có cực trị hoặc có 2 điểm cực trị.
- Khi $x \rightarrow +\infty$, nếu đồ thị đi lên $\Rightarrow$ hệ số $a > 0$, đi xuống $\Rightarrow$ hệ số $a < 0$
- Điểm $I(x_0; y_0)$ là **tâm đối xứng** của đồ thị hàm số, với x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

	$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt	$y' = 0$ có nghiệm kép	$y' = 0$ vô nghiệm
$a > 0$			

III. Dạng đồ thị của hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$)

Ghi nhớ:

- Hàm nhất biến không có cực trị
- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$
- Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$
- Giao điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận là **tâm đối xứng** của đồ thị hàm số.



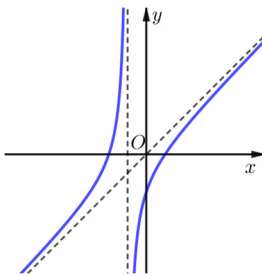
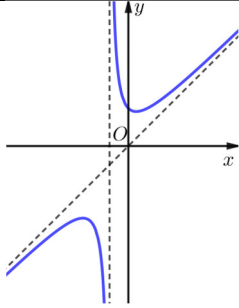
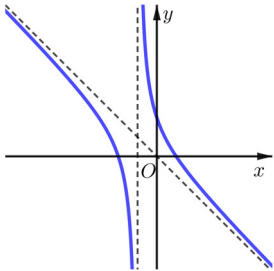
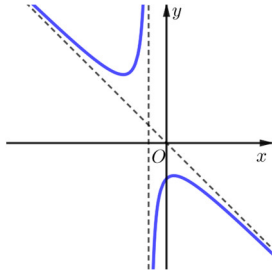
Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

[illegible]

IV. Dạng đồ thị của hàm số hữu tỉ bậc 2 trên bậc 1 $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

Ghi nhớ:

- Hàm số bậc 2 trên bậc 1: không có cực trị hoặc có 2 điểm cực trị.
- Hàm số được viết dưới dạng $y = px + q + \frac{r}{mx + n}$
- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{n}{m}$
- Tiệm cận xiên: $y = px + q$
- Giao điểm I của hai đường tiệm cận là **tâm đối xứng** của đồ thị hàm số.

	$y' = 0$ vô nghiệm	$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
a, m cùng dấu		
a, m trái dấu		

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- Dựa vào đồ thị (C) , tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = 4$.

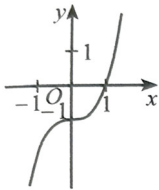
IV. Luyện tập

Vấn đề 1: Nhận dạng đồ thị hàm số

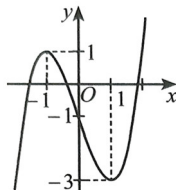
1.1 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

- Khi $x \rightarrow +\infty$, nếu đồ thị đi lên $\Rightarrow$ hệ số $a > 0$, đi xuống $\Rightarrow$ hệ số $a < 0$.
- Khi $x = 0; y = d \Rightarrow$ giao điểm với trục tung là điểm $A(0; d)$
- Hàm số hoặc không có cực trị hoặc có 2 điểm cực trị.
- Điểm cực trị của hàm số là nghiệm của phương trình $y' = 0$
- Hoành độ **tâm đối xứng** của đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

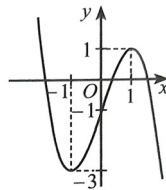
Bài 1: Hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau đây?



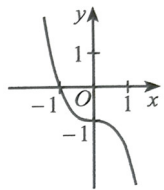
A



B



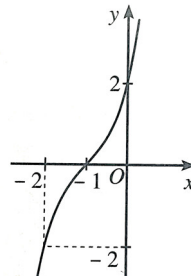
C



D

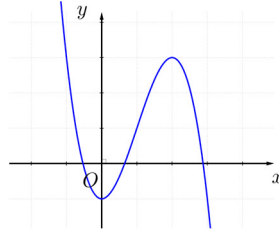
Bài 2: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A. $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.
- B. $f(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 2$.
- C. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.
- D. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.



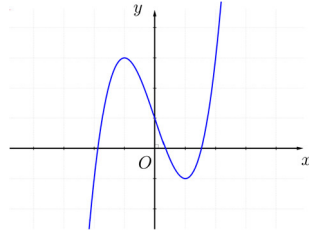
Bài 3: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

- A. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.



Bài 4: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

- A. $y = x^3 - 3x + 1$.
- B. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.



Bài 5: Ghép hàm số và đồ thị tương ứng

A

$$y = -x^3 + 3x + 1$$

B

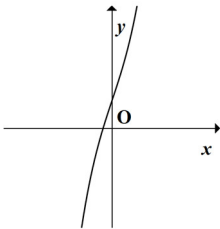
$$y = x^3 - 3x + 1$$

C

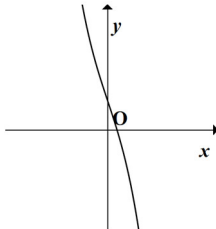
$$y = -x^3 - 3x + 1$$

D

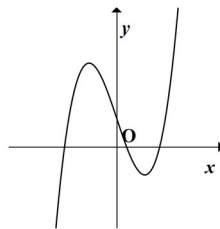
$$y = x^3 + 3x + 1$$



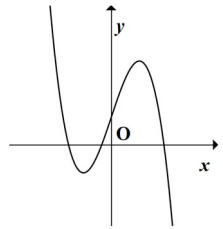
Hình 1



Hình 2

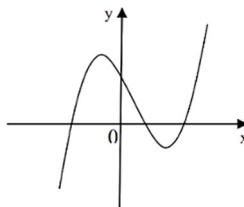


Hình 3



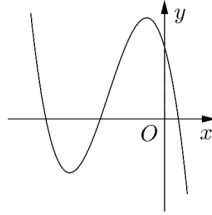
Hình 4

Bài 6: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Xác định dấu của các hệ số a, b, c, d .

Bài 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ

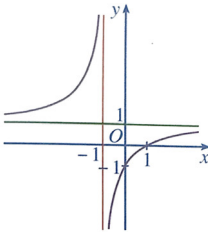


Xác định dấu của các hệ số a, b, c, d .

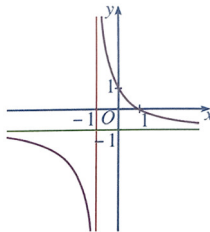
1.2 Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$)

- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$.
- Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$.
- Khi $x = 0; y = \frac{b}{d} \Rightarrow$ giao điểm với trục tung là điểm $A\left(0; \frac{b}{d}\right)$.
- Khi $y = 0; y = -\frac{b}{a} \Rightarrow$ giao điểm với trục hoành là điểm $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.
- Giao điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận là **tâm đối xứng** của đồ thị hàm số.

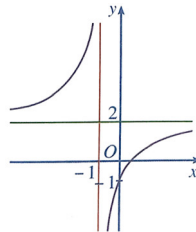
Bài 1: Hàm số $y = \frac{1-x}{x+1}$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau đây?



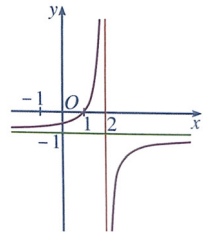
A



B



C



D

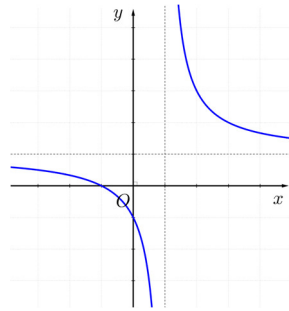
Bài 2: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+1}{1-x}$.



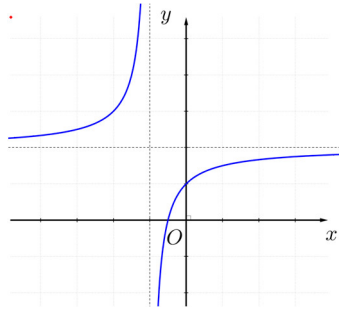
Bài 3: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.



Bài 4: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

A. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

B. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

C. $y = \frac{x-3}{x+2}$.

D. $y = \frac{-x+3}{x+2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

Arrows indicate the function values approach $-\infty$ as x approaches 2 from the left, and $+\infty$ as x approaches 2 from the right.

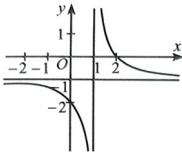
Bài 5: Ghép hàm số và đồ thị tương ứng

A. $y = \frac{2x}{x+1}$

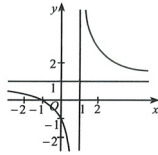
B. $y = \frac{2-x}{x-1}$

C. $y = \frac{2x+2}{1-x}$

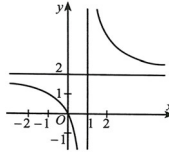
D. $y = \frac{x+1}{x-1}$



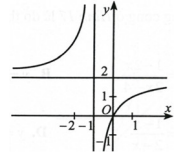
Hình 1



Hình 2

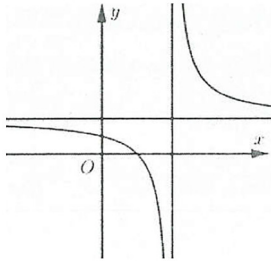


Hình 3



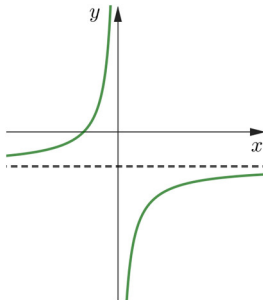
Hình 4

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ



Xác định dấu của các hệ số b, c, d biết $a < 0$.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$, có đồ thị là đường cong trong hình sau.



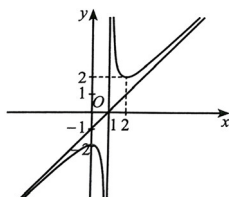
Xác định dấu của các hệ số b, c, d ?

1.3 Hàm số hữu tỉ bậc 2 trên bậc 1 $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0; m \neq 0$)

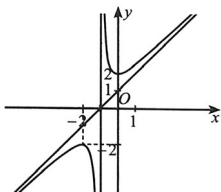
- Hàm số hoặc không có cực trị hoặc có 2 điểm cực trị.
- Hàm số được viết dưới dạng $y = px + q + \frac{r}{mx+n}$

- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{n}{m}$
- Tiệm cận xiên: $y = px + q$
- Giao điểm I của hai đường tiệm cận là **tâm đối xứng** của đồ thị hàm số.

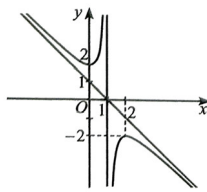
Bài 1: Hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau đây?



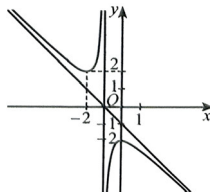
A



B



C



D

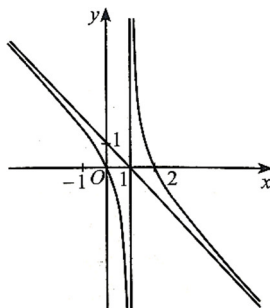
Bài 2: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

B. $y = \frac{x^2 + 2x}{-x + 1}$.

C. $y = \frac{-x^2 + 2x}{2x - 2}$.

D. $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$.



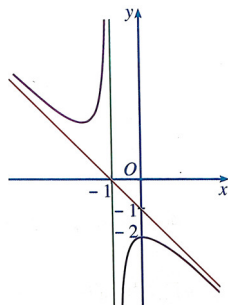
Bài 3: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$.

B. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

C. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

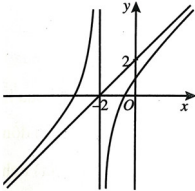
D. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$.



Bài 4: Ghép hàm số và đồ thị tương ứng

A.

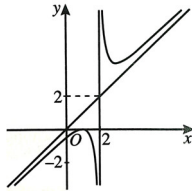
$$y = x + \frac{1}{x-2}$$



Hình 1

B.

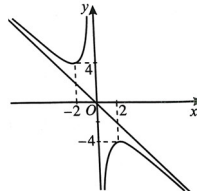
$$y = x + 2 - \frac{2}{x+2}$$



Hình 2

C.

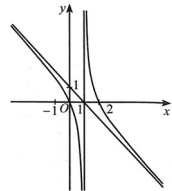
$$y = -x + 1 + \frac{1}{x-1}$$



Hình 3

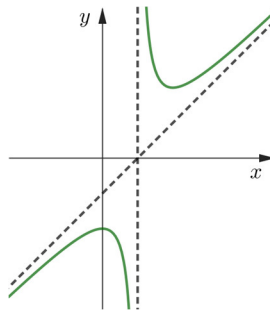
D.

$$y = -x - \frac{4}{x}$$



Hình 4

Bài 6: Cho hàm số $y = ax + b + \frac{1}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ

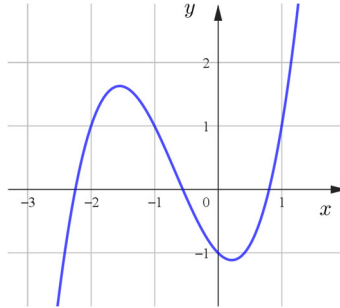


Xác định dấu của các hệ số a, b, c .

Vấn đề 2: Tìm nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị

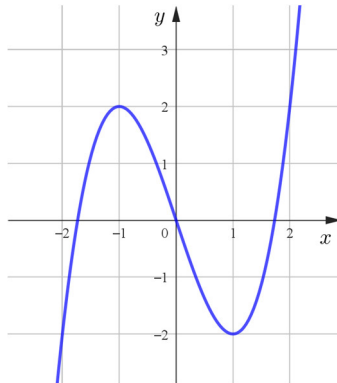
- Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = m$ (đường thẳng d cùng phương với trục Ox)
- Hoành độ của các giao điểm là nghiệm của phương trình $f(x) = m$.

Bài 1: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



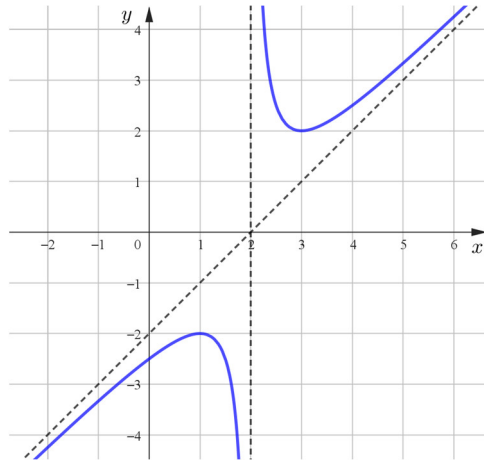
- Gọi x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình $f(x) = 1$. Tính tổng $x_1 + x_2 + x_3$.
- Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x) = m$.
- * Tìm số nghiệm của phương trình $f[f(x)] = 1$.

Bài 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



- Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x) = m$.
- Tìm số nghiệm của phương trình $[f(x)]^2 - 4f(x) + 3 = 0$.
- * Tìm số nghiệm của phương trình $f[f(x)] - f(x) = 0$.

Bài 3: Cho hàm số hữu tỉ $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau

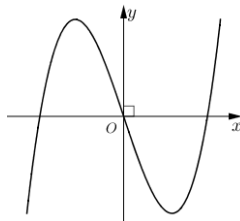


- Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x) = m$.
- Tìm số nghiệm của phương trình $[f(x)]^2 - f(x) - 6 = 0$.
- * Tìm số nghiệm của phương trình $f[f(x)] = 3$.

V. Trắc nghiệm

A. Trắc nghiệm nhiều phương án

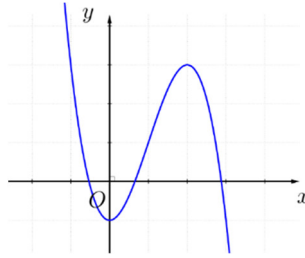
Câu 1: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- | | |
|-----------------------|------------------------|
| A. $y = x^3 - 3x$. | B. $y = -x^3 + 3x$. |
| C. $y = x^4 - 2x^2$. | D. $y = -x^4 + 2x^2$. |

Câu 2: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?





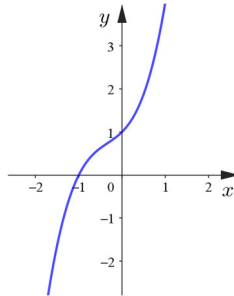
A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Câu 3: Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

B. $y = x^3 + 1$.

C. $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$.

D. $y = -x^3 + 1$.

Câu 4: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$			

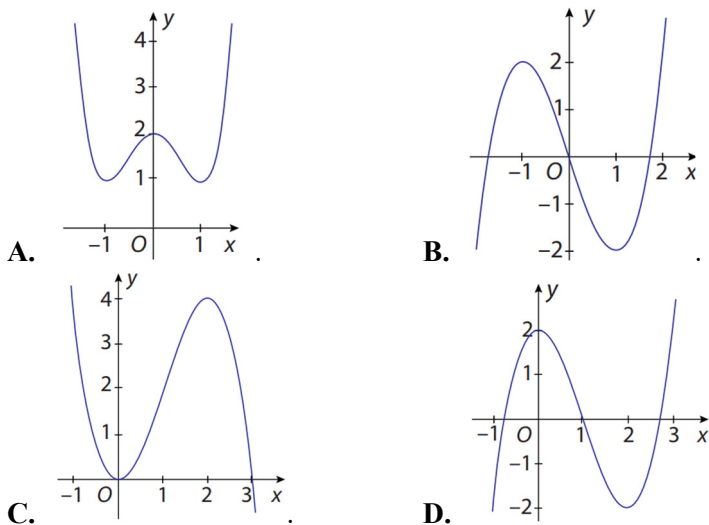
A. $y = -x^3 + 3x$.

B. $y = x^3 - 3x$.

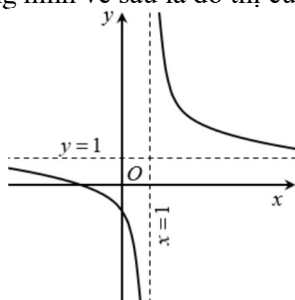
C. $y = -x^3 + 3x + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 5: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau đây?

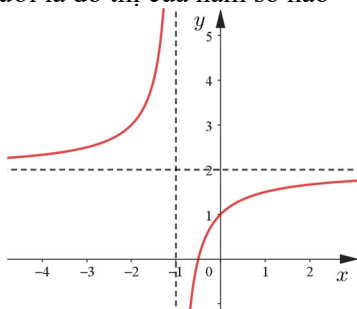


Câu 6: Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$ B. $y = \frac{x+1}{x-1}$ C. $y = \frac{x+1}{1-x}$ D. $y = \frac{x}{1-x}$

Câu 7: Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào



A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$. C. $y = \frac{2x-3}{x+1}$. D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi hàm số đã cho là hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		-	-
y	1	$+\infty$	1

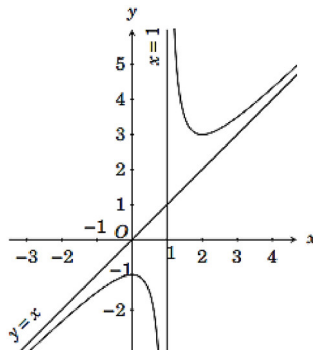
A. $y = \frac{x-3}{x-2}$. B. $y = \frac{x+3}{x-2}$. C. $y = \frac{x-3}{x+2}$. D. $y = \frac{-x+3}{x+2}$.

Câu 9: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	-9	-4	1	$+\infty$
y'		+	0	-	
y			-20		

A. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$. B. $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$.
 C. $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$. D. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

Câu 10: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



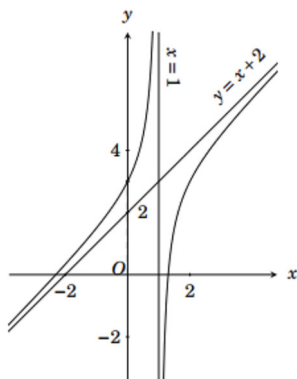
A. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

B. $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.

C. $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$.

D. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

Câu 11: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



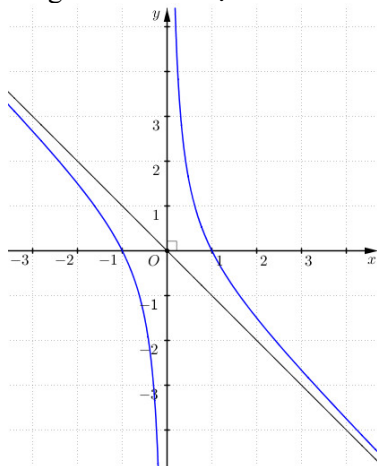
A. $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

B. $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$.

C. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-x + 1}$.

D. $y = \frac{x^2 + 3}{-x + 1}$.

Câu 12: Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



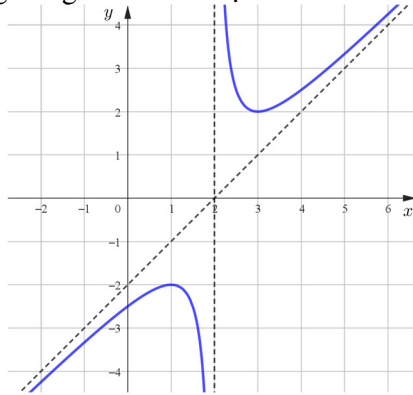
A. $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$.

B. $y = \frac{-2x + 1}{2x + 2}$.

C. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

D. $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 13: Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



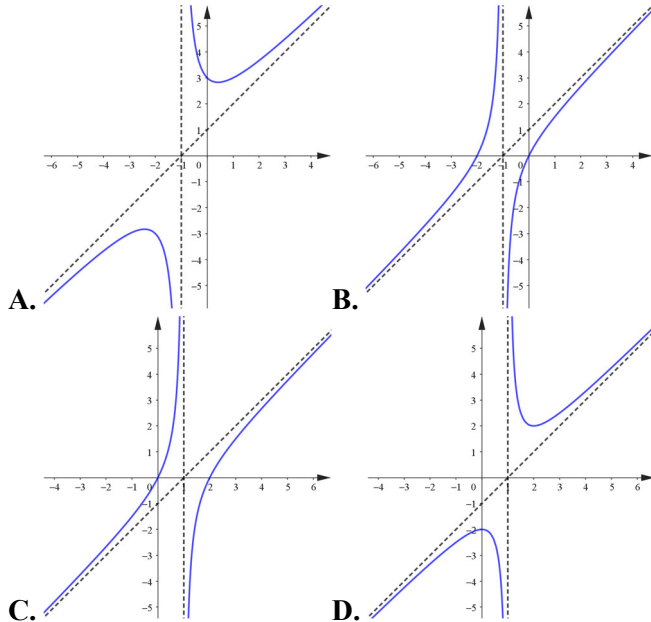
A. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

B. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

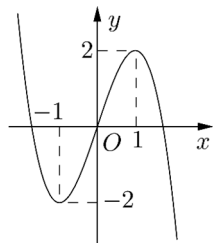
C. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

D. $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$.

Câu 14: Hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$ có đồ thị là hình nào dưới đây?

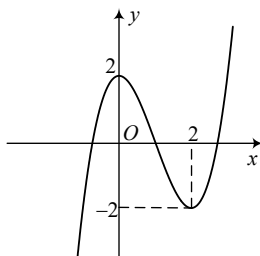


Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



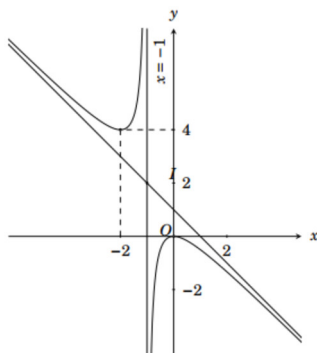
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 16: Cho hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ sau. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



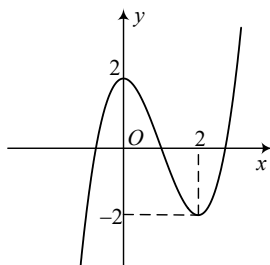
- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x) - 4 = 0$ là



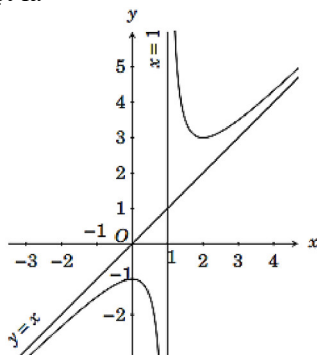
- A. 2 B. 4 C. 1 D. 3

Câu 18: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt là



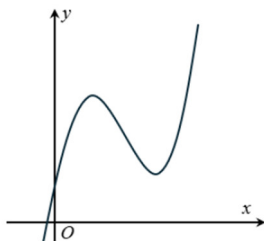
- A. 2 B. 5 C. 4 D. 3

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Số giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt là



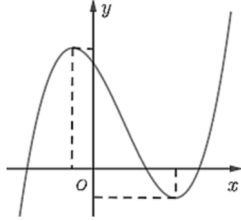
- A. 21 B. 18 C. 17 D. 16

Câu 20: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Số giá trị dương trong các hệ số a, b, c, d là



- A. 2 B. 4 C. 1 D. 3

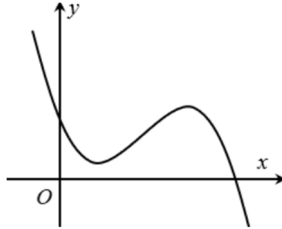
Câu 21: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

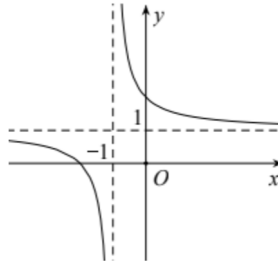
- A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. B. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$. D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 22: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu số âm?



- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

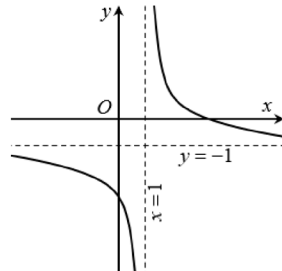
Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

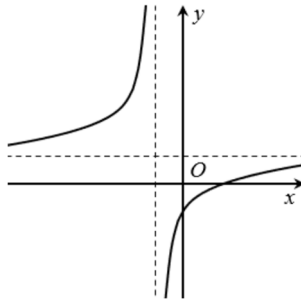
- A. $0 < b < a$. B. $0 < a < b$.
 C. $b < 0 < a$. D. $a < b < 0$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



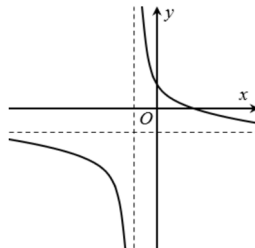
- A. $b < 0 < a$. B. $0 < b < a$. C. $b < a < 0$. D. $0 < a < b$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới. Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?



- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau:

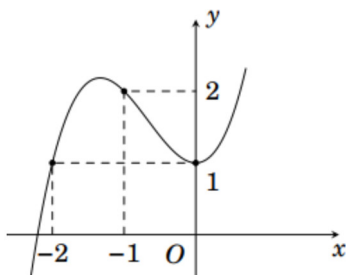


Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$. B. $ab > 0, bc < 0, cd > 0$.
C. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$. D. $ab < 0, bc > 0, cd > 0$.

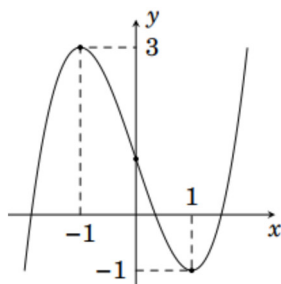
B. Trắc nghiệm Đúng – Sai: Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn Đúng hoặc Sai

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



- a) Hệ số $a > 0$.
- b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(1; 0)$.
- c) Phương trình $2f(x) + 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
- d) $2a + 3b + c = 9$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



- a) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
- b) Điểm $I(1; 0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
- c) Có 3 giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.
- d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3; 18)$.

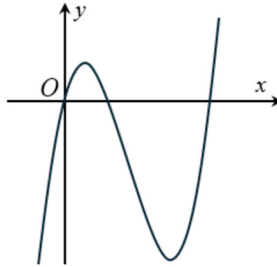
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			4		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 0

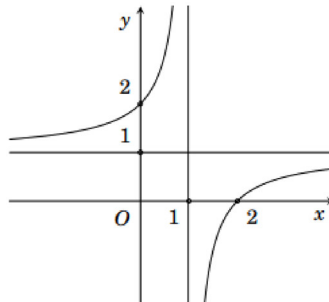
- a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4
b) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm
c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-4; 20)$.
d) Phương trình $f'[f(x)] = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên.



- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
b) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.
c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.
d) Trong các hệ số a, b, c, d có đúng hai hệ số dương.

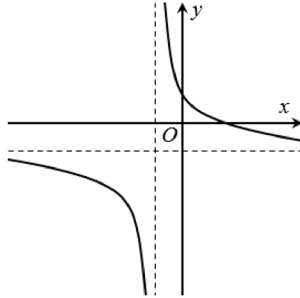
Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



- a) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.
c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $M(0; 2)$

d) $a - 3b - 2c = -3$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau:



- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- Đường tiệm cận đứng là trục đối xứng của đồ thị hàm số.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.
- $a.c < 0$ và $b.d > 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

$\swarrow$ $-\infty$ $\searrow$

- Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.
- Điểm $I\left(\frac{1}{2}; 3\right)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
- Nếu $a = 1$ thì $b < -3$.

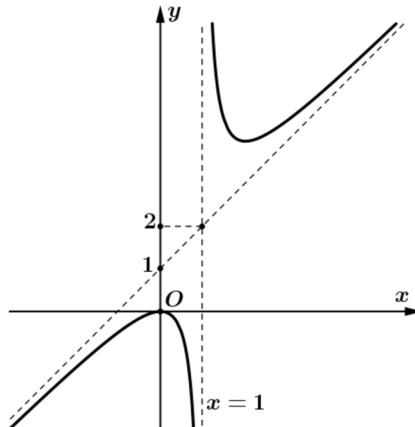
Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ có đồ thị (C).

- Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.
- $x_{CB} = -1$; $x_{CT} = -3$.
- Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = 3$ tại 2 điểm phân biệt.
- Đồ thị (C) nhận điểm $I(0; -2)$ làm tâm đối xứng

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x}$ có đồ thị là (C).

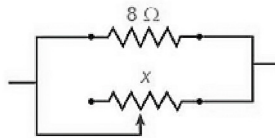
- Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là trục tung và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x$.
- Đồ thị (C) nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(1;1)$ là đường thẳng $\Delta: y = -2x + 3$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$ có đồ thị (C) như hình vẽ sau:



- Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng và đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C) .
- Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị (C) là $(2;4)$.
- Đồ thị (C) đi qua điểm $M(-4;-3)$.
- Phương trình $f[f(x)] = 1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 11: Trong Vật lí, Khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



Giả sử một điện trở $R_1 = 8(\Omega)$ được mắc song song với một biến trở $R_2 = x(\Omega)$ như hình bên thì điện trở tương đương $R = R(x)$ là hàm số của x với $x > 0$.

- Khi $R_2 = 4\Omega$ thì điện trở tương đương của mạch điện là $R = 12\Omega$.

b) Điện trở tương đương của mạch điện là $R(x) = \frac{8x}{x+8}$.

c) Khi x tăng thì điện trở tương đương của mạch điện cũng tăng.

d) Điện trở tương đương lớn nhất của mạch điện là 8Ω .

Câu 12: Trong Hóa học, dung dịch gồm chất tan và dung môi. Nồng độ dung dịch là đại lượng cho biết lượng chất tan có trong một lượng dung dịch nhất định. Bình A chứa 30ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100mg / ml . Bình B chứa dung dịch KOH với nồng độ 8mg / ml .

a) Khi trộn 10ml dung dịch KOH từ bình B vào bình A thì nồng độ dung dịch KOH trong bình A là 108 mg / ml .

b) Khi trộn x (ml) dung dịch KOH từ bình B vào bình A thì nồng độ dung dịch KOH trong bình A là $C(x) = \frac{8x + 3000}{x + 30}$ (mg / ml) .

c) Càng trộn nhiều dung dịch KOH từ bình B vào bình A thì nồng độ dung dịch KOH trong bình A càng tăng.

d) Khi trộn dung dịch KOH từ bình B vào bình A, nồng độ dung dịch KOH trong bình A nhỏ nhất là 8mg / ml .

C. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ nhận điểm $I(a;b)$ làm tâm đối xứng. Ta có $a + b$ bằng:

.....

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		2		-2	$+\infty$

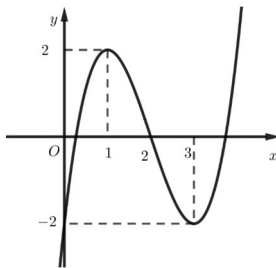
Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $M(4; y_M)$. Tính y_M ?

.....

Câu 3: Số giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = m$ có 3 điểm chung là:

.....

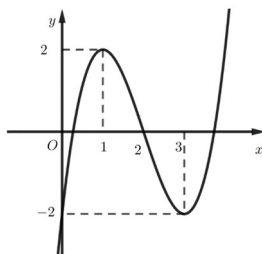
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm của phương trình $f^2(x) - f(x) = 0$ là:

.....

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm của phương trình $f'[f(x)] = 0$ là:

.....

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có tâm đối xứng là điểm $I(2; -1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\frac{3}{2}$. Khi đó, $a+b+c$ bằng:

.....

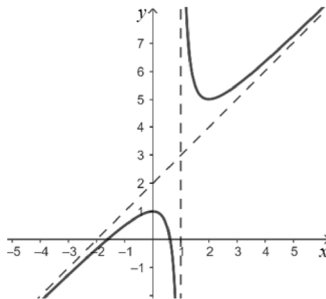
Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-4}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$			$+\infty$		1
	1			$-\infty$	

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

.....

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a > 0, m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ sau:



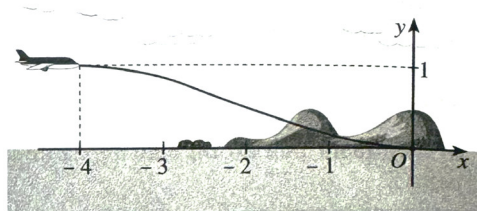
Hỏi trong các số b, c, m, n có tất cả bao nhiêu số dương?

.....

Câu 9: Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 10}{x + 2}$ là bao nhiêu?

.....

Câu 10: Một máy bay loại nhỏ bắt đầu hạ cánh, đường bay của nó khi gắn với hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng như hình vẽ. Biết đường bay của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba; vị trí bắt đầu hạ cánh có tọa độ $(-4;1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số và máy bay tiếp đất tại vị trí gốc tọa độ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Cho biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là dặm. Hỏi khi ở độ cao 0,5 dặm, máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang bao nhiêu dặm? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



.....

Bài 5: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

I. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$.

Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là **hàm vị trí** của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì:

$v = s'(t)$ là **vận tốc tức thời** của vật.

$a = v'(t)$ là **gia tốc tức thời** của vật.

- Nếu $C = C(t)$ là **nồng độ** của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là **tốc độ phản ứng** tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là **số lượng cá thể** trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị **tốc độ tăng trưởng** tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là **hàm chi phí**, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì $C'(x)$ là tốc độ thay đổi tức thời của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là **chi phí biên** (chi phí biên xấp xỉ với chi phí để sản xuất 1 đơn vị hàng hóa tiếp theo).

Ví dụ 1: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

II. Một số bài toán tối ưu đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x .
Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

Ví dụ 1: Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000,$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

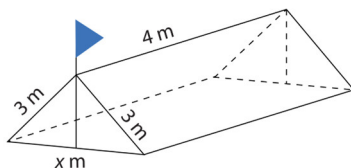
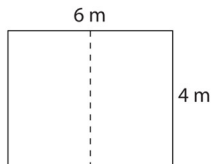
a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi

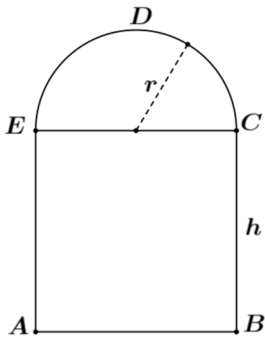
xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

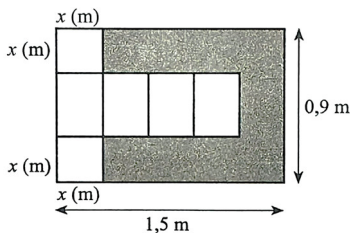
Ví dụ 4: Trong đợt chào mừng kỉ niệm ngày 26 tháng 3, trường X có tổ chức cho các lớp bày các gian hàng tại sân trường. Để có thể che nắng, chứa đồ đạc trong quá trình tham gia hoạt động, một lớp đã nghĩ ra ý tưởng như sau: Dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều rộng là 4m và chiều dài là 6m, bằng cách gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều dài của tấm bạt, hai mép chiều rộng còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau $x(m)$ (hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

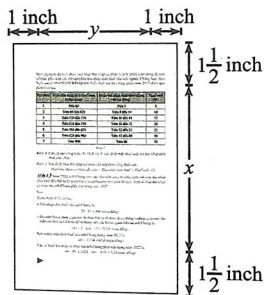
Ví dụ 5: Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích khung cửa sổ tạo thành đạt giá trị lớn nhất.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

bởi công thức nào? Tìm x để hình hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

1 inch 1 inch

[illegible]