

Mục lục

A	GIẢI TÍCH	3
Chương 1	KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	5
Vấn đề 1	SỰ ĐỒNG BIẾN ↗-NGỊCH BIẾN ↘	6
Dạng 1	Xét tính đơn điệu (↗ ↘) của hàm số	7
Dạng 2	Tìm tham số để hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định.	9
Dạng 3	Tìm tham số để hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$	10
Dạng 4	Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên $\mathcal{K}$	11
Dạng 5	Dùng tính đơn điệu chứng minh bất đẳng thức $\gtrless$	15
Vấn đề 2	CỰC TRỊ	24
Dạng 1	Tìm cực trị hàm số: cực đại $\wedge$ -cực tiểu $\vee$	25
Dạng 2	Tìm tham số m để hàm bậc ba có cực trị $\nexists$	27
Dạng 3	Tìm tham số m để hàm trùng phương có một hoặc ba cực trị	30
Dạng 4	Tìm tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm	32
Vấn đề 3	GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT	38
Dạng 1	Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a; b]$	39
Dạng 2	Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng $(a; b)$	40
Dạng 3	Các bài toán vận dụng cao, toán thực tế $\min, \max$	41
Vấn đề 4	TIỆM CẬN	45
Vấn đề 5	KHẢO SÁT VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	46
Dạng 1	Các dạng đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	47
Dạng 2	Các dạng đồ thị của hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$	48
Dạng 3	Hàm phân thức $\frac{ax+b}{cx+d}$	49
Vấn đề 6	PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN	54
Dạng 1	Cho điểm $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$	54
Dạng 2	Cho hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(x_0)$	55
Dạng 3	Cho điểm tiếp tuyến đi qua	56
Vấn đề 7	TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ	61
Dạng 1	Tìm giao điểm của 2 đồ thị $y = f(x), y = g(x)$	61
Dạng 2	Biện luận số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị	62
Dạng 3	$(C) : y = \frac{ax+b}{cx+d}$ cắt (d) tại 2 điểm phân biệt	63
Dạng 4	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt (d) tại 3 điểm phân biệt.	64
Dạng 5	$(C) : y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành lập thành một cấp số cộng	65
Dạng 6	Tìm m để hàm trùng phương cắt (d) tại bốn điểm phân biệt	66
Vấn đề 8	ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG	67
Vấn đề 9	ĐIỂM CÓ TỌA ĐỘ NGUYÊN CỦA ĐỒ THỊ	68
Vấn đề 10	ĐỒ THỊ HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI	70
Dạng 1	Trị tuyệt đối toàn phần $y = f(x) $ (C')	70
Dạng 2	Trị tuyệt đối của riêng $x: y = f(x)$ (C')	71

Dạng 3	Trị tuyệt đối cực bộ $y = u(x) \cdot v(x)$ (C')	72
Vấn đề 11	TÍNH CHẤT ĐỒ THỊ HÀM $F'(X)$	73
Dạng 1	Tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị $y = f'(x)$	73
Dạng 2	Cực trị của hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị $y = f'(x)$	74
ÔN TẬP CHƯƠNG I		80
Chương 2 LŨY THỪA, MŨ & LÔGARIT		83
Vấn đề 1	LŨY THỪA	84
Vấn đề 2	LÔGARIT	86
Vấn đề 3	HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT	89
Vấn đề 4	PHƯƠNG TRÌNH MŨ	97
Vấn đề 5	PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT	98
Vấn đề 6	BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ	100
Vấn đề 7	BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT	102
Vấn đề 8	HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT	107
Dạng 1		107
Vấn đề 9	BÀI TOÁN THỰC TẾ	108
Dạng 1	Lãi đơn	108
Dạng 2	Lãi kép	108
Dạng 3	Tiền gửi hàng tháng	108
Dạng 4	Vay vốn trả góp	109
Chương 3 NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG		111
Chương 4 SỐ PHỨC		113
B HÌNH HỌC		115
Chương 5 KHỐI ĐA DIỆN		117
Vấn đề 1	KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU	118
Dạng 1	Khối đa diện lồi	118
Dạng 2	Năm khối đa diện đều	119
Vấn đề 2	KHỐI CHÓP	121
Dạng 1	Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy	121
Dạng 2	Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy	124
Dạng 3	Hình chóp đa giác đều, hình chóp đều	126
Vấn đề 3	KHỐI LĂNG TRỤ	131
Dạng 1	Lăng trụ đứng, lăng trụ xiên	131
Chương 6 NÓN, TRỤ & CẦU		137
Vấn đề 1	MẶT CẦU	137
Vấn đề 1	MẶT CẦU- KHỐI CẦU	138
Dạng 1	Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp	140
Dạng 2	Tính diện tích, thể tích mặt cầu	141
Vấn đề 2	MẶT NÓN	143
Vấn đề 3	MẶT TRỤ	147
Chương 7 TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN		151

PHẦN A

GIẢI TÍCH

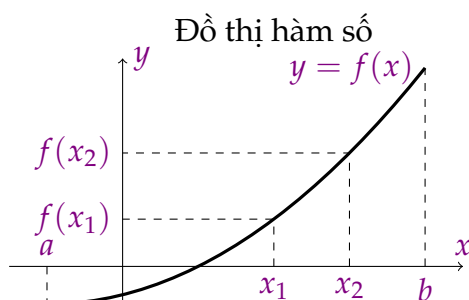
VẤN ĐỀ 1

SỰ ĐỒNG BIẾN-NGỊCH BIẾN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa 1.

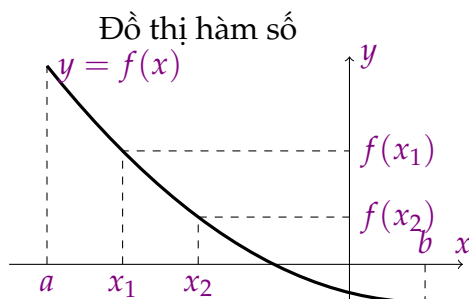
- 1 Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên khoảng $(a; b)$
 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2$ ta có: $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a; b)$
 (Đẳng thức (tức là dấu "=") chỉ xảy ra tại 1 số hữu hạn điểm trên $(a; b)$)
 + Khi đó, đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ có hình dạng đi lên từ trái sang phải.



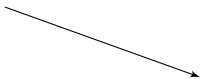
Bảng biến thiên

x	a	b
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

- 2 Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a; b)$
 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2$ ta có: $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in (a; b)$.
 (Đẳng thức chỉ xảy ra tại 1 số hữu hạn điểm trên $(a; b)$)
 + Khi đó: đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ có hình dạng đi xuống từ trái sang phải.



Bảng biến thiên

x	a	b
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

Định lí 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm hằng trên $(a; b)$.

Lưu ý

Định lí có thể mở rộng cho $f'(x) \geq 0, f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$ nếu dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm hoặc vô hạn điểm rời rạc.

DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU (↗ ↘) CỦA HÀM SỐ**PHƯƠNG PHÁP****Các bước xét tính đơn điệu của hàm số**

- 1 Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số.
- 2 Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm nghiệm (nếu có) của phương trình $f'(x) = 0$ và tìm các giá trị mà tại đó $f'(x)$ không xác định.
- 3 Lập bảng biến thiên của hàm số từ đó kết luận các khoảng đơn điệu.
 - a Biểu diễn tập xác định, loại bỏ rõ những phần không thuộc tập xác định.
 - b Biểu diễn rõ các điểm (các khoảng) mà $y' = 0$ và y' không xác định.
 - c Biểu diễn dấu $+$ hay $-$ của y' vào các khoảng còn lại.
 - d Biểu diễn sự tăng giảm của y dựa trên dấu của y' .

VÍ DỤ

✎ **Ví dụ 1.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

✎ **Ví dụ 2.** Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

✎ **Ví dụ 3.** Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

✎ **Ví dụ 4.** Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1 Tìm các khoảng đơn điệu của mỗi hàm số sau đây:

a) $y = -x^3 + 3x + 2$.

b) $y = x^3 + 6x^2 + 4$.

c) $y = x^3 + x^2 + 5x - 7$.

d) $y = -x^3 + 2x^2 - 10x + 1$.

e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

f) $y = -x^4 + 4x^2 + 3$.

g) $y = x^4 + x^2 + 3$.

h) $y = -2x^4 - 4x^2 + 3$.

i) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

j) $y = \frac{3-2x}{x+4}$.

k) $y = \frac{3x+4}{2-x}$.

Bài 2 Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

b) $y = \sqrt{2x + x^2}$.

c) $y = \sqrt{3x - x^2}$.

d) $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau

a) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 2$

b) $y = 2x^2 - 3x + 1$

c) $y = x^2(x^2 - 4)$

d) $y = \frac{3x+4}{x-2}$

e) $y = \frac{x^2 - x + 2}{2 - x}$

f) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

g) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

h) $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$

i) $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$

j) $y = \sin 2x - x, \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

k) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$

l) $y = \frac{x+1}{3\sqrt{x}}$

DẠNG 2: TÌM THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($ad - bc \neq 0$) LUÔN ĐỒNG BIẾN (HOẶC NGỊCH BIẾN) TRÊN TỪNG KHOẢNG XÁC ĐỊNH.

PHƯƠNG PHÁP

1 Bước 1. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

2 Bước 2. Đạo hàm $y' = \frac{ac - bd}{(cx + d)^2}$.

3 Bước 3.

- Để hàm số ĐB trên từng khoảng xác định của nó thì $y' > 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ad - bc > 0, \forall x \in \mathcal{D}$.
- Để hàm số NB trên từng khoảng xác định của nó thì $y' < 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ad - bc < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

⚠Chú ý rằng điều kiện trên không có dấu "=".

VÍ DỤ

✍ Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

✍ Ví dụ 2. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx - m^2 + 3m}{x+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 3 Tìm m để

a) Hàm số $y = \frac{mx-1}{x-1}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó.

b) Hàm số $y = \frac{m^2x - 2m + 3}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

c) Hàm số $y = \frac{mx+7m-8}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

d) Hàm số $y = \frac{1}{1-mx}$ giảm trên từng khoảng xác định của nó.

e) Hàm số $y = \frac{mx-m+2}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

f) Hàm số $y = \frac{mx-m^2-1}{x+2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

g) Hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

DẠNG 3: TÌM THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ LUÔN ĐỒNG BIẾN (HOẶC LUÔN NGHỊCH BIẾN) TRÊN $\mathbb{R}$.

PHƯƠNG PHÁP

1 Bước 1. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2 Bước 2. Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

3 Bước 3.

- Để hàm số luôn đồng biến thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$.
- Để hàm số luôn đồng biến thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

🔔Chú ý nếu a có chứa tham số thì ta xét hai trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$.

VÍ DỤ

✍ **Ví dụ 1.** Tìm m để hàm số $y = -x^3 - (m+1)x^2 + (m+1)x + m$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

✍ **Ví dụ 2.** Tìm m để hàm số $y = (m^2 - 1)\frac{x^3}{3} + (m+1)x^2 + 3mx + 5$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 4 Tìm m để

- Hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 - 4)x + 9$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = mx^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \frac{m+2}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m-8)x + m^2 - 1$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + (2m-2)x + 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (4-3m)x - m^2 + 1$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \frac{m-1}{3}x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \frac{m^2-1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 3x - 5$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \frac{1-m}{3}x^3 + 2(m-2)x^2 + 2(2-m)x + 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

DẠNG 4: TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỀU TRÊN $\mathcal{H}$ **PHƯƠNG PHÁP**

1 Hàm số hữu tỉ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên một khoảng $(\alpha; \beta)$.

Bước 1: Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Bước 3:

- Để hàm số đồng biến trên $(\alpha; \beta)$ thì $\begin{cases} -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta), & \forall x \in (\alpha; \beta) \\ ad-bc > 0 \end{cases}$
- Để hàm số nghịch biến trên $(\alpha; \beta)$ thì $\begin{cases} -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta), & \forall x \in (\alpha; \beta) \\ ad-bc < 0 \end{cases}$

2 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Cách 1 Dùng bảng biến thiên biện luận theo m .

- Hàm số luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên (a, b) thì $y' \geq 0$ hay $(y' \leq 0), \forall x \in (a, b)$ (*)
- Biến đổi (*) về dạng $g(x) \leq h(m), \forall x \in (a, b)$.
- Lập BBT cho $g(x)$ trên khoảng (a, b) rồi dựa vào BBT kết luận.

Cách 2 So sánh nghiệm với α như sau:

Bước 1: Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Bước 2: Lấy đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

Trường hợp 1: Phương trình vô nghiệm hoặc nghiệm kép.

- Để hàm số luôn đồng biến thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$
- Để hàm số luôn nghịch biến thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

Trường hợp 2: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Cần chú ý việc so sánh 2 nghiệm với 1 số α :

- $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$
- $x_1 < x_2 \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \\ \frac{S}{2} < \alpha. \end{cases}$
- $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha. \end{cases}$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(1;5)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Đạo hàm $y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m \notin (1;5) \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty) \\ m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup [5; +\infty).$$

□

 **Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m-1)x^2 + (m-3)x - 4$. Tìm m sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = x^2 + 2(m-1)x + m-3$.

Hàm số đồng biến trên $(0;3) \Leftrightarrow y' = x^2 + 2(m-1)x + m-3 \geq 0, \forall x \in (0;3) \quad (*)$.

$(*)$ tương đương với $\frac{x^2-2x-3}{2x+1} \geq -m, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow -m \geq \max_{[0;3]} \left\{ g(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x+1} \right\}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2} = \frac{x^2+(x+1)^2+3}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \in (0;3)$.

Suy ra $-m \geq \max_{[0;3]} \left\{ g(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x+1} \right\} = g(3) = 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

□

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 5 Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-m}$. Tìm m sao cho

a) y tăng trên $(1; +\infty)$.

b) y giảm trên $(-3; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Đạo hàm $y' = \frac{-m-3}{(x-m)^2}$.

 **1** Hàm số tăng trên $(1; +\infty)$ khi $\begin{cases} m \leq 1 \\ -m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$.

 **2** Hàm số giảm trên $(-3; 2)$ khi $\begin{cases} m \leq -3 \text{ hoặc } m \geq 2 \\ -m-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$.

□

Bài 6 Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$. Tìm m sao cho

a) y tăng trên $(2; +\infty)$.

b) y giảm trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Đạo hàm $y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}$.

1 Hàm số tăng trên $(2; +\infty)$ khi $\begin{cases} -m \leq 2 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

2 Hàm số giảm trên $(-\infty; 1)$ khi $\begin{cases} -m \geq 1 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$.

□

Bài 7 Cho hàm số $y = -x^3 + (m - 1)x^2 + (m + 3)x$. Tìm m để hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = -3x^2 - 2(m - 1)x + m + 3$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; 3)$. Điều này tương đương với

$$-3x^2 - 2(m - 1)x + m + 3 \geq 0, \forall x \in (0; 3)$$

Xét phương trình $-3x^2 - 2(m - 1)x + m + 3 \geq 0$ (*) có $\Delta' = (m - 1)^2 - 3(m + 3) = m^2 - 5m - 2$.

• Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $y' \leq 0, x \in \mathbb{R}$ (không thỏa).

• Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \\ m > \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \end{cases}$, khi đó $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên $(0; 3)$ khi

$$\begin{aligned} 3 \leq x_1 < x_2 \text{ hoặc } x_1 < x_2 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3 \cdot y'(3) \geq 0 \\ \frac{S}{2} - 3 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \\ m > \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \end{cases} \\ -28 - 5m \leq 0 \\ \frac{-(m - 1)}{3} > 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \begin{cases} m < \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \\ m > \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \end{cases} \\ \frac{-2(m - 1)}{3} > 0 \\ \frac{m + 3}{-3} \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \\ m > \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \end{cases} \\ m \geq \frac{-28}{5} \\ m < -8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \begin{cases} m < \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \\ m > \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \end{cases} \\ m < 1 \\ m \geq -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -3 \leq m < \frac{5 - \sqrt{33}}{2}. \end{aligned}$$



Bài 8 Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + x - 2$. Tìm m sao cho hàm số
a) đồng biến trên $\mathbb{R}$; b) nghịch biến trong khoảng $(1;2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = 3x^2 - 2mx + 1$.

1 Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2mx + 1 &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3 &\leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

2 Hàm số nghịch biến trong khoảng $(1;2)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (1;2)$. Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2mx + 1 &\leq 0, \forall x \in (1;2) \\ \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{x} &\leq 2m, \forall x \in (1;2) \\ \Leftrightarrow 2m &\geq \max_{[1;2]} \left\{ g(x) = 3x + \frac{1}{x} \right\}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = 3x + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 3 - \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (1;2)$.

Suy ra $\max_{[1;2]} \left\{ g(x) = 3x + \frac{1}{x} \right\} = g(2) = \frac{13}{2}$. Do đó $2m \geq \frac{13}{2} \Leftrightarrow m \geq \frac{13}{4}$.



Bài 9 Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$. Tìm m sao cho hàm số nghịch biến trong khoảng $(-1;1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + m + 1$.

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-1;1)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-1;1)$. Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + m + 1 &\geq 0, \forall x \in (-1;1) \\ \Leftrightarrow g(x) = 3x^2 + 6x &\geq -m - 1, \forall x \in (-1;1) \\ \Leftrightarrow -m - 1 &\leq \min_{[-1;1]} g(x) \\ \Leftrightarrow -m - 1 &\leq g(-1) = -3 \Leftrightarrow m \geq 2. \end{aligned}$$



DẠNG 5: DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỀU CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC $\geq$ **PHƯƠNG PHÁP**

- Đặt hàm số $f(x) = P(x) - Q(x)$, $\forall x \in (a, b)$.
- Chứng minh hàm số $f(x) = P(x) - Q(x)$ luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên (a, b) .
- Dựa vào tính đơn điệu kết luận.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Chứng minh rằng $x > \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x - \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ có $f'(x) = 1 - \cos x > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra $f(x) > f(0) = 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ hay $x > \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. □

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 10 Chứng minh rằng:

a) $\tan x > x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

1 Xét hàm số $f(x) = \tan x - x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Suy ra $f(x) > f(0) = 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan x > x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2 Xét hàm số $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$.
Theo câu a) ta có $\tan x > x > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan^2 x - x^2 > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Suy ra $f(x) > f(0) = 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ hay $\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. □

BÀI TẬP BỔ SUNG: (TĐN)

1 Chứng minh hàm số $y = 2 \sin x + \tan x - 3x$ luôn đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2 Chứng minh

a $-\frac{x^3}{6} + x < \sin x < x, \forall x > 0$.

b $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \forall x > 1$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		4		-1		$+\infty$

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $y' > 0$ trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$.
C. $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$-$	0	$+$

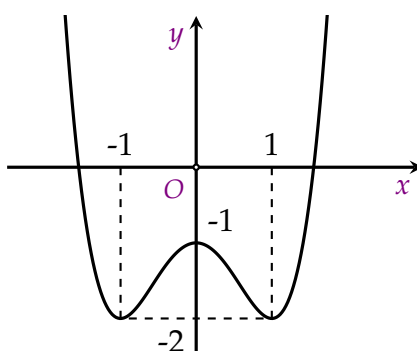
Lời giải.

Quan sát bảng xét dấu y' ta thấy $y' < 0$ trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; 1)$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

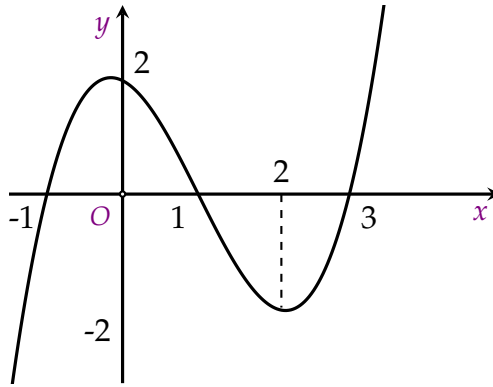
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy đồ thị đi lên trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

□

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(-1; 2)$. C. $(1; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy đồ thị đi xuống trên khoảng $(1; 2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. $\square$

Câu 5. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x-1}{x-2}$. B. $y = x^3 + x$. C. $y = -x^3 - 3x$. D. $y = \frac{x+1}{x+3}$.

Lời giải.

- Hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ không đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Do đó loại $y = \frac{x-1}{x-2}$ và $y = \frac{x+1}{x+3}$.
- Hàm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nếu $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$, nếu $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
Do đó, với $y = x^3 + x$ thì $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

Chọn đáp án **(D)**

D

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 8. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; +\infty)$. B. $(-\infty; -\frac{1}{2})$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 8x^3; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Vì $f'(x) = x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 10. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \frac{(2x^2 + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 2019$.

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2x + 1; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 12. Hàm số $y = \sqrt{2018x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

- A. $(1010; 2018)$. B. $(2018; +\infty)$. C. $(0; 1009)$. D. $(1; 2018)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = [0; 2018]$.

Ta có $y' = \frac{(2018x - x^2)'}{2\sqrt{2018x - x^2}} = \frac{2018 - 2x}{2\sqrt{2018x - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow 2018 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1009$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	0	1009	2018	$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1009; 2018)$ nên cũng đồng biến trên khoảng con $(1010; 2018)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 + 2mx + 4$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 14. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 7.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)**

D

Câu 15. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m + 2)x + 1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

- A. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$. B. $-2 \leq m \leq -1$. C. $-2 < m < -1$. D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1.$$

Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 16. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Trường hợp 1: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.
+) Nếu $m = 1$ thì $y = -x + 4$ là hàm bậc nhất có $a = -1 < 0$ nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Do đó $m = 1$ nhận
+) Nếu $m = -1$ thì $y = -2x^2 - x + 4$ là hàm bậc hai không đồng biến và cũng không nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Do đó $m = -1$ loại
- Trường hợp 2: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$. Hàm số trở thành hàm số bậc ba.
Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$. Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a = m^2 - 1 < 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Trường hợp 1: $m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$.
 +) Nếu $m = 0$ thì $y = 3x - 2$ là hàm bậc nhất có $a = 3 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Do đó $m = 0$ nhận
 +) Nếu $m = 1$ thì $y = 2x^2 + 3x - 2$ là hàm bậc hai không đồng biến và cũng không nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Do đó $m = 1$ loại

- Trường hợp 2: $m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. Hàm số trở thành hàm số bậc ba.

Ta có $y' = (m^2 - m)x^2 + 4mx + 3$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = m^2 - m > 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hoặc } m > 1 \\ 4m^2 - 3(m^2 - m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hoặc } m > 1 \\ m^2 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hoặc } m > 1 \\ -3 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-3 \leq m < 0$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A** □

A

Câu 18. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là:

A. $(-\infty; 1]$.B. $(-\infty; 4]$.C. $(-\infty; 1)$.D. $(-\infty; 4)$.**Lời giải.**TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2; +\infty)$$

Đặt $h(x) = 3x^2 - 6x + 4$ xét trên $[2; +\infty)$ ta có $h'(x) = 6x - 6; h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên $h(x)$

x	2	$+\infty$
y'		+
y		$+\infty$
	4	

Từ bảng biến thiên $h(x)$ ta có yêu cầu bài toán tương đương

$$m \leq \min_{[2; +\infty)} h(x) \Leftrightarrow m \leq 4$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S

- A. Vô số. B. 3. C. 5. D. 4.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x - m)^2}$. Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq m \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 4. B. Vô số. C. 3. D. 5.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 4m}{(x + m)^2}$. Để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \neq -m \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(C)**



Câu 21. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m - 1)x - 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \frac{-m^2 + m + 2}{(x - m)^2}$. Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq m \Leftrightarrow -m^2 + m + 2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(C)**



Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + m^2}{x + 4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 5. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Ta có $y' = \frac{4 - m^2}{(x + 4)^2}$. Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq -4 \Leftrightarrow 4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 23. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2 - m}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m \leq 1$.

B. $m \leq 3$.

C. $m < 1$.

D. $m < 3$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{m - 1}{(x + 1)^2}$. Để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{mx - 4}{x - m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \frac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ m \notin (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 0$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2}{x + 3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$

A. 2.

B. 6.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$.

Ta có $y' = \frac{3m - 2}{(x + 3m)^2}$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty; -6) \\ -3m \notin (-\infty; -6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 > 0 \\ -3m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m \leq 2$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

VẤN ĐỀ 2

CỰC TRỊ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa 2.

- Nếu có khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu có khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Các dấu hiệu để hàm số có cực trị tại x_0 :

Dấu hiệu I: Dựa vào sự đổi dấu của $f'(x)$ khi đi qua x_0 .

Giả sử hàm số có đạo hàm trên một lân cận của x_0

Nếu khi đi qua x_0 mà đạo hàm đổi dấu thì x_0 là điểm cực trị của hàm số, ta lập bảng biến thiên sẽ xác định được các điểm cực trị.

y' đổi dấu từ dương sang âm

x	$x - \delta$	x_0	$x + \delta$
y'		+	-
y		f_{CD}	

y' đổi dấu từ âm sang dương

x	$x - \delta$	x_0	$x + \delta$
y'		-	+
y		f_{CT}	

(Lưu ý: Tại x_0 hàm số có đạo hàm 0 không hoặc không có đạo hàm).

Dấu hiệu II: Dựa vào $f'(x_0) = 0$ và dấu của $f''(x_0)$.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 tại x_0 .

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực tiểu} \quad \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực đại}$$

Chú ý

- Cực đại, cực tiểu gọi chung là cực trị.
- Nếu hàm số đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0
 - x_0 gọi là điểm cực trị của hàm số.
 - Giá trị $f(x_0)$ gọi là giá trị cực trị của hàm số.
 - Điểm $M(x_0, f(x_0))$ là điểm cực trị của đồ thị.
- Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' có đổi dấu.
 - Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi y' không đổi dấu.
 - Hàm số có n cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu n lần.

DẠNG 1: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ**PHƯƠNG PHÁP****Cách 1: Dùng dấu hiệu I**

- 1 Tìm tập xác định $\mathcal{D}$.
- 2 Tính y' . Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- 3 Lập bảng biến thiên.
- 4 Kết luận.

Cách 2: Dùng dấu hiệu II

- 1 Tìm tập xác định $\mathcal{D}$.
- 2 Tính y' . Tìm các điểm tại đó $y' = 0$, kí hiệu x_i .
- 3 Tính y'' . Tính $y''(x_i)$.
- 4 Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ kết luận.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm cực trị của hàm số dùng dấu hiệu I

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$. | b) $y = x^3 + 5x - 6$. |
| c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$. | d) $y = x^4 + 2x^2 + 3$. |

Lời giải.



 **Ví dụ 2.** Tìm cực trị của hàm số dùng dấu hiệu II

- | | |
|----------------------------|--------------------|
| a) $y = 2x^4 + 2x^2 + 3$. | b) $y = \sin 2x$. |
|----------------------------|--------------------|

Lời giải.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 11 Tìm các điểm cực trị, giá trị cực trị của các hàm số sau

a) $y = x^3 - 3x - 1.$

b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10.$

c) $y = -x^3 + 3x + 2.$

d) $y = x^4 + 2x^2 + 3.$

e) $y = x^4 - 2x^2 + 1.$

f) $y = x^3(1 - x)^2.$

g) $y = x\sqrt{1 - x^2}.$

h) $y = x\sqrt{8 - 2x^2}.$

i) $y = x + \sqrt{4 - x^2}.$

Lời giải.

□

Bài 12 Tìm các điểm cực trị của hàm số

a) $y = \sin 2x - x.$

b) $y = \sin x + \cos x.$

c) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1.$

Lời giải.

□

BÀI TẬP BỔ SUNG Tìm điểm cực đại và cực tiểu của hàm số sau

1 $y =$

DẠNG 2: TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM BẬC BA CÓ CỰC TRỊ

Tìm tham số m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực trị

PHƯƠNG PHÁP

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$ (*)

- 1 Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu.
- 2 Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi y' không đổi dấu.
- 3 Hàm số có n cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu n lần.
- 4 Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases}$
- 5 Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ không có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \\ a \neq 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$
- 6 Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases}$
- 7 Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là phần dư trong phép chia y cho y' .
Lấy y chia y' giả sử ta được: $y = (ux + v) \cdot y' + px + q$ (*)
 - Gọi $A(x_0; y_0)$ là cực trị của đồ thị. Suy ra $y'(x_0) = 0$.
 - Vì $A \in (C)$ nên toạ độ A thoả mãn phương trình (*)

$$y_0 = (ux_0 + v) \cdot y'(x_0) + px_0 + q$$

Do đó $y_0 = px_0 + q$.

- Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị có phương trình: $y = px + q$.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm m để hàm số sau có cực đại và cực tiểu

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (3m+1)x - m^2$$

Lời giải.



Ví dụ 2. Tìm m để hàm số sau không có cực trị $y = mx^3 + 3mx^2 - (m - 1)x - 4$.

Lời giải.



Ví dụ 3. Cho đồ thị $(C_m) : y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$. Tìm m để hàm số (C_m) có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Lời giải.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 13 Tìm m để hàm số sau có cực đại và cực tiểu

$$y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m.$$

Lời giải.



Bài 14 Chứng minh rằng hàm số sau luôn có cực đại và cực tiểu

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (m - 3)x^2 - 2mx + 5.$$

Lời giải.



Bài 15 Tìm m để hàm số sau không có cực trị: $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m - 2)x - m$.

Lời giải.



Bài 16 Cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$. Tìm m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu và hai điểm này cách đều trục tung.

Lời giải.



Bài 17 Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$. Chứng minh rằng hàm số luôn có cực trị với mọi m . Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị.

Lời giải.



Bài 18 Cho hàm số $y = 4x^3 - mx^2 - 3x + m$. Tìm m để hàm số luôn có 2 điểm cực trị trái dấu.

Lời giải.



Bài 19 Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 2(2m + 3)x + 3m$. Định m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = -3 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right)$

Lời giải.



Bài 20 Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m + 2$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị có hoành độ dương.

Lời giải.

□

Bài 21 Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2m$. Tìm m để hàm số trên có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1 + 2x_2 = 5$.

Lời giải.

□

Bài 22 Cho hàm số $y = x^3 - (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$. Tìm m để đồ thị hàm số trên có hoành độ điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

Lời giải.

□

Bài 23 Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Lời giải.

□

DẠNG 3: TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM TRÙNG PHƯƠNG CÓ MỘT HOẶC BA CỰC TRỊ

Phương pháp

- 1 Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow a.b \geq 0$.
- 2 Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng 3 cực trị $\Leftrightarrow a.b < 0$
- 3 Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng 3 cực trị tạo thành tam giác đều $\Leftrightarrow \begin{cases} a.b < 0 \\ 24a + b^3 = 0 \end{cases}$
- 4 Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng 3 cực trị tạo thành tam giác vuông (cân)
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a.b < 0 \\ 8a + b^3 = 0 \end{cases}$
- 5 Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích S_n
 $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ S_0 = \sqrt{\frac{-b^5}{32a^3}} \end{cases}$

Lưu ý

- Nếu a có chứa tham số thì chia 2 trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$.
- Đồ thị hàm bậc bốn trùng phương luôn có 1 cực trị nằm trên trục tung.

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 1$ có 1 cực trị.

Lời giải.



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$. Tìm m để hàm số có 3 cực trị.

Lời giải.



Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị lập thành một tam giác đều.

Lời giải.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 24 Tìm m để hàm số sau có 3 cực trị $y = -x^4 + (m^2 + m)x^2 + m^2 - 2$.

Lời giải.



Bài 25 Tìm m để hàm số sau có 1 cực trị $y = mx^4 + (m - 1)x^2 + (1 - 2m)$.

Lời giải.

□

Bài 26 Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

Lời giải.

□

Bài 27 Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị lập thành một tam giác đều.

Lời giải.

□

Bài 28 Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

Lời giải.

□

DẠNG 4: TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP

• **Dùng dấu hiệu I**

1 Bước 1: Tập xác định $D = \mathbb{R}$

2 Bước 2: Lấy đạo hàm y' .

Nếu hệ số a có chứa tham số thì xét hai trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$. Cho $y' = 0$, tìm nghiệm theo m .

3 Bước 3: Thế nghiệm vừa tìm vào trở lại hàm số, lập bảng biến thiên sẽ xác định được ngay các điểm cực trị (Có thể phải chia trường hợp $x_1 < x_2$ hoặc $x_2 < x_1$ vì nghiệm có chứa tham số). Từ đó ra điều kiện cho nghiệm nào bằng x_0

x	$x - \delta$	x_0	$x + \delta$
y'	-	0	+
y	$\swarrow$ CT $\searrow$		

x	$x - \delta$	x_0	$x + \delta$
y'	+	0	-
y	$\swarrow$ CĐ $\searrow$		

• **Dùng dấu hiệu II**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 tại x_0 .

$$- \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực tiểu}$$

$$- \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực đại}$$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Định m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm các hệ số a, b, c của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ để đồ thị hàm số đạt cực trị tại điểm $(-2; 0)$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 0)$.

Lời giải.

□

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 29 Định m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 6x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

□

Bài 30 Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ đạt cực đại tại $x = -2$.

Lời giải.



Bài 31 Tìm m để hàm số $y = x^3 + (m + 3)x^2 + m - 1$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Lời giải.



Bài 32 Tìm các hệ số a, b, c, d của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, biết đồ thị hàm số cực tiểu tại điểm $(0; 0)$ và đạt cực đại tại điểm $(1; 1)$.

Lời giải.



Bài 33 Tìm các hệ số a, b của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 2$, biết đồ thị hàm số đạt cực trị tại điểm $(-1; 3)$.

Lời giải.



Bài 34 Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$

a) Có 2 cực trị.

b) Đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	The graph shows a function $f(x)$ with a local maximum at $x = -1$ with value 4, a local minimum at $x = 2$ with value 5, and another local maximum at $x = 2$ with value 2.				

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có bốn điểm cực trị. B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
 C. Hàm số không có cực đại. D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$
		0			0		

Mệnh đề nào dưới đây là sai?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị. B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
 C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	$-\infty$	

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

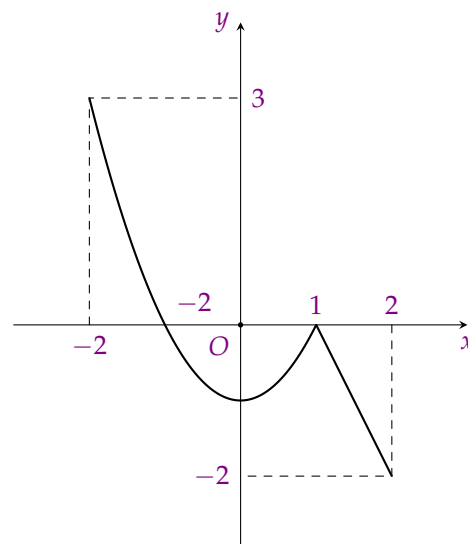
Số điểm cực tiểu của hàm số là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.



Câu 6. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có điểm cực đại là

- A. $(-1; -1)$. B. $(-1; 3)$. C. $(1; -1)$. D. $(1; 3)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 1$. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số trên. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị bằng

- A. $\frac{10}{3}$. B. $\frac{14}{3}$. C. $\frac{-35}{9}$. D. $\frac{35}{9}$.

Câu 9. Hàm số nào sau đây **không** có cực trị?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 3$. C. $y = x^3 - 3x + 1$. D. $y = x^3 + 3x + 1$.

Câu 10. Hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ có:

- A. một cực đại và hai cực tiểu. B. một cực tiểu và hai cực đại.
C. một cực đại duy nhất. D. một cực tiểu duy nhất.

Câu 11. Hàm số $y = x^4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 12. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

- A. $y = 2x^3 + 4x^2 + 1$. B. $y = x^4 + 2x^2 - 1$. C. $y = x^3 - 2x^2 - 1$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Câu 13. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{5}{3}$. Tìm tọa độ trung điểm của I của đoạn AB

- A. $I(-1; 2)$. B. $I(2; -1)$. C. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}\right)$. D. $I(2; 2)$.

Câu 14. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ là:

- A. $2\sqrt{5}$. B. $4\sqrt{5}$. C. $6\sqrt{5}$. D. $8\sqrt{5}$.

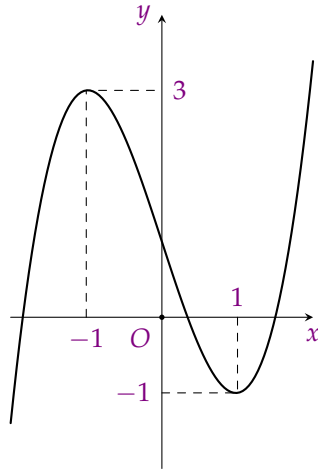
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 2)(2x + 5), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x - 2)^2(9 - x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 18. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $P(1;0)$. B. $M(0;-1)$. C. $N(1;-10)$. D. $Q(-1;10)$.

Câu 19. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB là gốc tọa độ

- A. $S = 9$. B. $S = \frac{10}{3}$. C. $S = 5$. D. $S = 10$.

Câu 20. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 5$. D. $m = -7$.

Câu 21. Hàm số $x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi và chỉ khi

- A. $m = 0$. B. $m \neq 0$. C. $m > 0$. D. $m < 0$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m - 1)x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\forall m < 1$ thì hàm số có hai điểm cực trị. B. Hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu.
C. $\forall m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu. D. $\forall m > 1$ thì hàm số có cực trị.

Câu 23. Tất cả giá trị của m để hàm số $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx + m$ có cực đại và cực tiểu là

- A. $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$. B. $m \in (-3; 1)$.
C. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. D. $m > 3$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3x + m$ có cực đại, cực tiểu sao cho y_{CD} và y_{CT} trái dấu?

- A. $m < 2$. B. $-2 < m < 2$. C. $m < -2$. D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m - 1)x^4 - 2(m - 3)x^2 + 1$ không có cực đại

- A. $1 \leq m \leq 3$. B. $m \leq 1$. C. $m \geq 1$. D. $1 < m \leq 3$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu?

- A. $m = 0$. B. $m < 0$. C. $0 < m < 1$. D. $m > 0$.

Câu 27. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Diện tích của tam giác ABC là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba cực trị tạo thành tam giác đều

- A. $m = 0$. B. $m = \sqrt[3]{3}$. C. $m = -\sqrt[3]{3}$. D. $m = \sqrt{3}$.

Câu 29. Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân?

- A. $m = 0$. B. $m = -1; m = 0$. C. $m = -1$. D. $m > -1$.

Câu 30. Giá trị cực đại của hàm số $y = x + 2 \cos x$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

- A. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

VẤN ĐỀ 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

 Định nghĩa 3.Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .M gọi là GTLN của hàm số trên D :

$$\max_{x \in D} f(x) = M \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_1 \in D : f(x_1) = M \end{cases}$$

m gọi là GTNN của hàm số trên D :

$$\min_{x \in D} f(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_2 \in D : f(x_2) = m \end{cases}$$

Phương pháp chung để tìm giá trị lớn nhất-giá trị nhỏ nhất: LẬP BẢNG BIẾN THIÊN

DẠNG 1: TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a; b]$ **PHƯƠNG PHÁP**

- Tìm các điểm tới hạn $x_1, x_2, \dots, x_n$ của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
- Tính $f(a), f(b), f(x_i)$ với $i = \overline{1, n}$.
- So sánh các giá trị vừa tìm được. Số M nào lớn nhất thì ta ghi $\max_{[a; b]} f(x) = M$. Số m nào nhỏ nhất thì ta ghi $\min_{[a; b]} f(x) = m$.

Lưu ý

- Nếu hàm số liên tục, luôn tăng trên $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b), \min_{[a; b]} f(x) = f(a)$.
- Nếu hàm số liên tục, luôn giảm trên $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a), \min_{[a; b]} f(x) = f(b)$.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm GTLN-GTNN của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 5$ trên $[-2; 2]$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 35 Tìm GTLN-GTNN của các hàm số sau

1 $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn $[-4; 3]$.

2 $y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$.

3 $y = f(x) = \frac{2-x}{1-x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

4 $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

5 $y = f(x) = x + 1 + \sqrt{-3x^2 + 6x + 9}$.

6 $y = f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

Bài 36 Tìm GTLN-GTNN của các hàm số sau

1 $y = f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ trên đoạn $[-10; 10]$.

2 $y = f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3 $y = f(x) = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4 $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

DẠNG 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng $(a; b)$

PHƯƠNG PHÁP

Với a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$. Ta lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(a; b)$.

- Nếu hàm số có 1 cực trị duy nhất là cực đại (hoặc cực tiểu) thì đó là GTLN (hoặc GTNN) của hàm số.
- Nếu hàm số có 2 cực trị trở lên, ta phải quan sát, so sánh với 2 đầu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ rồi mới kết luận GTLN, GTNN.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 2.** Tìm GTLN-GTNN của hàm số $y = x + \frac{1}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 37 Tìm GTLN-GTNN (nếu có) của các hàm số sau

 1 $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$ trên khoảng $(-3; 0)$.

 2 $y = f(x) = \frac{x}{x+1}$ trên khoảng $(-1; 3)$.

 3 $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$.

DẠNG 3: CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO, TOÁN THỰC TẾ min, max**PHƯƠNG PHÁP****1 Dùng miền giá trị:**

- Tìm tập xác định $\mathcal{D}$.
- Giả sử hàm số có miền giá trị là T . Gọi $y \in T \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{D} : y = f(x)$ hay $y-f(x)=0$. Hàm số tồn tại nên phương trình trên có nghiệm $x \in \mathcal{D}$.
- Tùy từng loại phương trình mà ta đưa ra điều kiện có nghiệm phù hợp, từ đó suy ra T rồi suy ra GTLN, GTNN của hàm số.

2 Dùng phương pháp đặt ẩn số phụ (tìm điều kiện cho ẩn), khảo sát hàm số mới theo ẩn phụ, từ đó suy ra GTLN, GTNN.**3 Dùng bất đẳng thức****Lưu ý**

Đối với những bài toán ứng dụng thực tế cần chú ý bước đặt ẩn phụ và xây dựng hàm số f theo ẩn.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm GTLN-GTNN của hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{\sin^2 x + \sin x + 1}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow y = g(t) = \frac{1+t}{t^2+t+1}$.

Ta có $g'(t) = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$.

Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2-2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-1; 1] \\ t = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$.

Ta có $g(-1) = 0; g(1) = \frac{2}{3}; g(0) = 1$.

Vậy $\max_{[-1;1]} g(t) = 1$ tại $t = 0$, $\min_{[-1;1]} g(t) = 0$ tại $t = -1$.

- Khi $t = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- Khi $t = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Kết luận: vậy $\max_{\mathcal{D}} y = 1$ tại $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, $\min_{\mathcal{D}} y = 0$ tại $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. □

✍ **Ví dụ 2.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 \sin x + 3}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Giả sử hàm số có miền giá trị là T . Gọi $y \in T \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{D} : y = f(x)$

$$\begin{aligned} y - f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow y - \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 \sin x + 3} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2y - 1) \sin x - 2 \cos x + (3y - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2y - 1) \sin x - 2 \cos x &= (3 - 3y). \end{aligned}$$

Hàm số tồn tại nên phương trình trên phải có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

(Nhớ: Điều kiện để phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$)

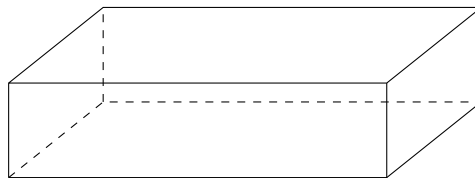
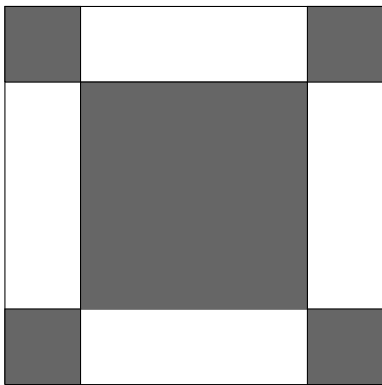
Để phương trình có nghiệm thì

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq c^2 \\ \Leftrightarrow (2y - 1)^2 + 4 &\geq (3 - 3y)^2 \\ \Leftrightarrow 5y^2 - 14y + 4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{7 - \sqrt{29}}{5} &\leq y \leq \frac{7 + \sqrt{29}}{5}. \end{aligned}$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{7 - \sqrt{29}}{5}, \max_{\mathbb{R}} y = \frac{7 + \sqrt{29}}{5}$. □

✍ **Ví dụ 3.** Người ta muốn rào quanh một khu đất hình chữ nhật với vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy rào khu đất ấy với kích thước thế nào để có diện tích lớn nhất?

✍ **Ví dụ 4.** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được thể tích lớn nhất.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 38 Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 3m - 1 = 0$ có nghiệm trong $[1; +\infty)$.

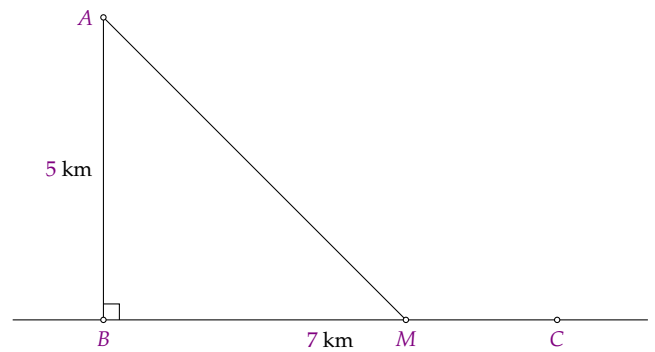
Bài 39 Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước thể tích là 2 m^3 bằng gạch có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình chữ nhật chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết xây 1 m^2 bề mặt mất 500 nghìn

đồng tiền gạch và vữa. Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất? Khi đó chi phí là bao nhiêu?

Bài 40 Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được là bao nhiêu?

Bài 41

Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển B là 5 km. Trên bờ biển có một cái kho C ở vị trí cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất?



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$ là

- A. $\frac{9}{8}$. B. $\frac{5}{4}$. C. 2. D. 1.

Câu 17. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3 \sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M^2 + m^2$ là

- A. $\frac{31}{2}$. B. $\frac{11}{2}$. C. $\frac{41}{4}$. D. $\frac{61}{4}$.

Câu 18. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$. B. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$. C. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$. D. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$.

Câu 19. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m ?

- A. $m = 5$. B. $m = 4$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 . Tìm m ?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-m^2}$, m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{(-3;-2)} y = \frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $3 < m \leq 4$. B. $-2 < m \leq 3$. C. $m > 4$. D. $m \leq -2$.

Câu 22. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{m^2x - 1}{x + 2}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 1.

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = \sqrt{3}$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$, m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 4$. B. $3 < m \leq 4$. C. $m < -1$. D. $1 \leq m < 3$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

- A. $m = 2$. B. $m = 6$. C. $m = 0$. D. $m = 4$.

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là

- A. -16 . B. 16. C. -12 . D. -2 .

VẤN ĐỀ 4

TIỆM CẬN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1) Đường tiệm cận ngang: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn. Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa ít nhất một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$$

2) Đường tiệm cận đứng: Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa ít nhất một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

Thiếu hình ảnh

PHƯƠNG PHÁP

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm các đường tiệm cận đứng và ngang (nếu có) của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+3}$

 **Ví dụ 2.** Tìm các đường TCD và TCN (nếu có) của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2+x+1}{2x-3}$

 **Ví dụ 3.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+m}{x-1}$ có tiệm cận đứng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 42 Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang (nếu có) của các đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x-2}$

b) $y = \frac{x}{2-x}$

c) $y = \frac{-x+3}{x+1}$

d) $y = \frac{2x-5}{5x-2}$

e) $y = \frac{6}{3-2x}$

f) $y = \frac{2x+3}{x^2-9}$

g) $y = \frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$

h) $y = \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

i) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

Bài 43 Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-mx+3}{x-3}$ có tiệm cận đứng.

Bài 44 Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

VẤN ĐỀ 5

KHẢO SÁT VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ Phương pháp chung khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

- 1 Tìm tập xác định.
- 2 Tìm y' . Cho $y' = 0$ tìm nghiệm và tìm các giá trị mà tại đó y' không xác định.
- 3 Tìm giới hạn tại vô cực và tiệm cận nếu có.
- 4 Lập bảng biến thiên, kết luận các khoảng đơn điệu và cực trị.
- 5 Vẽ đồ thị: Đảm bảo tính đối xứng, qua các điểm đặc biệt.

DẠNG 1: CÁC DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Các dạng đồ thị hàm số bậc ba

hình vẽ

VÍ DỤ✎ **Ví dụ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.✎ **Ví dụ 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$.✎ **Ví dụ 3.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4x - 3$.✎ **Ví dụ 4.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

DẠNG 2: CÁC DẠNG ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c$

Các dạng đồ thị hàm số trùng phương

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

 **Ví dụ 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

 **Ví dụ 3.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$.

 **Ví dụ 4.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

DẠNG 3: HÀM PHÂN THỨC $\frac{ax+b}{cx+d}$

Các dạng đồ thị hàm số phân thức

VÍ DỤ

✍ **Ví dụ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.✍ **Ví dụ 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$.**BÀI TẬP****Bài 45** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau đây:

1 $y = -x^3 + 3x^2 - 3$

2 $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$

3 $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

4 $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

5 $y = 3x - x^3$

6 $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

7 $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{7}{3}$

8 $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$

Bài 46 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau đây:

1 $y = x^4 - 2x^2$

2 $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

3 $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

4 $y = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$

5 $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$

6 $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$

7 $y = x^4 + 3x^2$

8 $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$

Bài 47 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau đây:

1 $y = \frac{-2x+4}{x+1}$

$$2 \quad y = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$3 \quad y = \frac{x+2}{x-2}$$

$$4 \quad y = \frac{5x-7}{3x+2}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

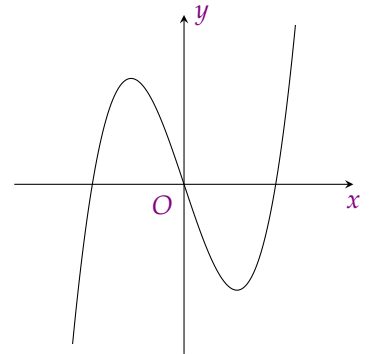
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình bên?

A. $y = x^3 - 3x$.

B. $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

D. $y = -x^4 + 2x^2$.



Câu 2.

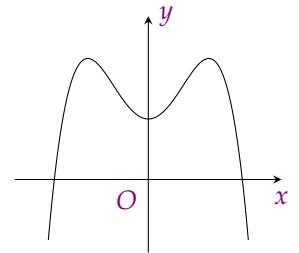
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình bên?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Câu 3.

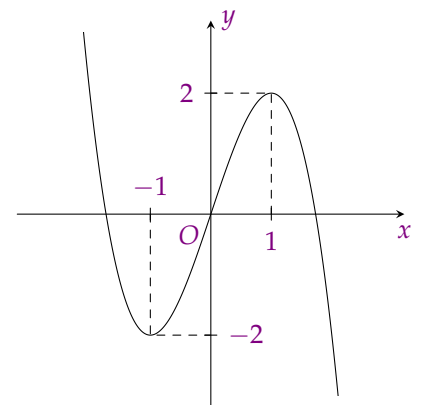
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.



Câu 4.

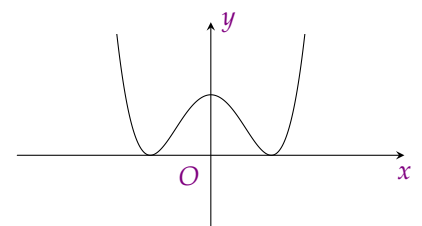
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



Câu 5.

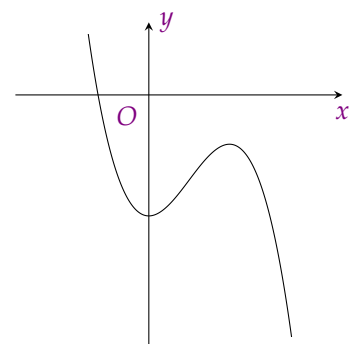
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.

B. $y = -x^3 + 2x^2 - 2$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.



Câu 6.

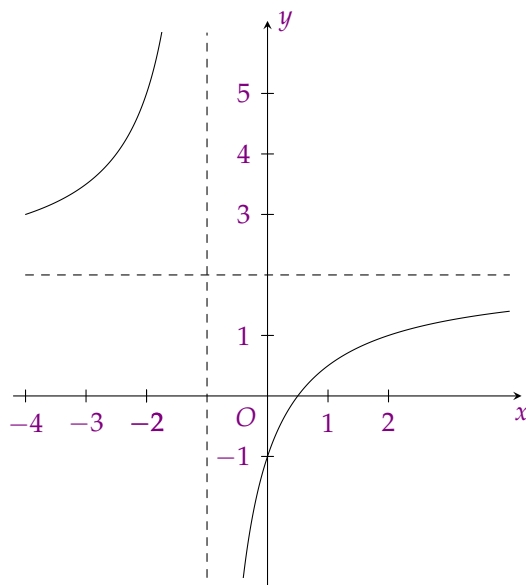
Cho đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x-2}{x-1}$.



Câu 7.

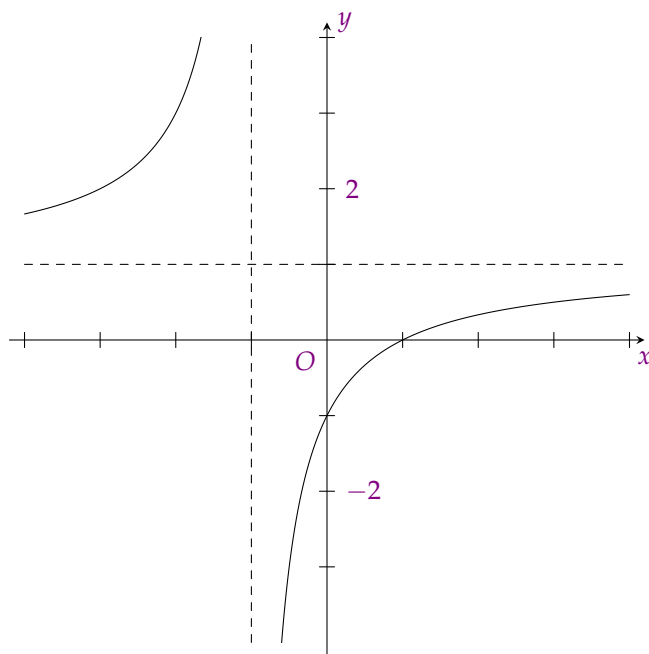
Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$.

C. $y = x^4 - 3x^2$.

D. $y = x^3 - 3x^2$.



Câu 8.

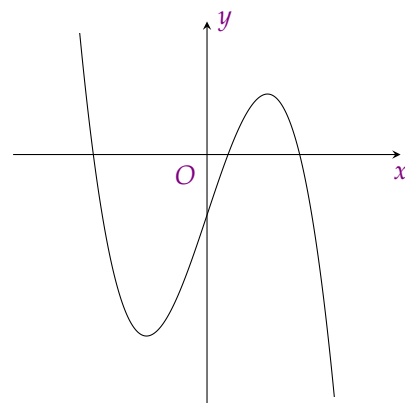
Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$, ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a > 0, d > 0$.

B. $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$.

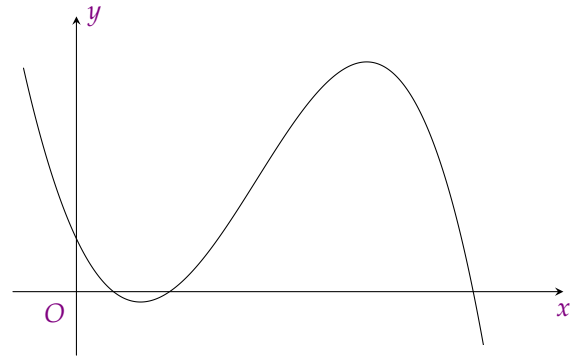
D. $a < 0, d < 0$.



Câu 9.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.



Câu 10. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	$+\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

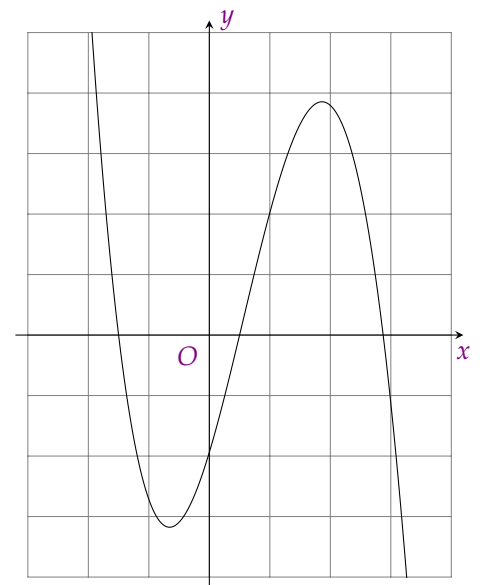
- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 11.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



VẤN ĐỀ 6

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là $y'(x_0)$

Nếu biết được chiều dương của trục Ox lập với đường thẳng 1 góc α thì hệ số góc của đường thẳng đó là $\pm \tan \alpha$

DẠNG 1: CHO ĐIỂM ĐIỂM $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

PHƯƠNG PHÁP

Cho hàm số $y = f(x)(C)$. Viết PTTT của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) . Ta có: $y'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ PTTT của (C) tại $M(x_0; y_0)$ là: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x - 2$ tại điểm thuộc đồ thị và có hoành độ bằng 1.

Giải:

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 48 Viết phương trình tiếp tuyến của các đồ thị hàm số:

1 $y = \frac{-x+2}{2x+1}$ tại điểm $M(-1; -3)$

2 $y = -x^3 + 6x - 5$ tại điểm thuộc đồ thị và có hoành độ bằng 2

3 $y = x^4 - 5x^2 + 4$ tại điểm thuộc đồ thị và có tung độ bằng 0

4 $y = x^3 - 3x$ tại điểm thuộc đồ thị và có tung độ bằng -2

5 $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$ tại điểm thuộc đồ thị và có hoành độ bằng x_0 , biết rằng $y''(x_0) = -6$

6 $y = 2x^2 - x^4$ tại giao điểm của đồ thị với trục hoành.

7 $y = x^3 - x^2 - 2x + 2$ tại giao điểm của đồ thị với trục hoành.

8 $y = \frac{1-x}{2+3x}$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

9 $(C) : y = 1 + \frac{2}{x-1}$ tại giao điểm của (C) với đường thẳng $(d) : y = 2x - 1$

DẠNG 2: CHO HỆ SỐ GÓC TIẾP TUYẾN $k = f'(x_0)$ **PHƯƠNG PHÁP**

Cho hàm số $y = f(x)$. Viết PTTT của đồ thị biết hệ số góc của tiếp tuyến là k_π .

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = k_{\pi T} (*)$

Giải phương trình $(*)$ ta được x_0 , thay vào $y = f(x)$ được y_0 . Suy ra tọa độ tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$

Viết PTTT của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) theo dạng là: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Chú ý:

Đường thẳng $(d) : y = ax + b$ có hệ số góc $k_d = a$

(d) song song tiếp tuyến thì : $k_{TT} = k_d$

(d) vuông góc tiếp tuyến thì : $k_{TT} = -\frac{1}{k_d}$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d) : y = x - 5$

 **Ví dụ 2.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x+1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d) : x - 2y + 6 = 0$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 49 Viết PTTT của đồ thị các hàm số:

 $y = x^3 + x^2 - 4x - 2$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1

 $y = \frac{3}{2-x}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3

 $y = x^3 + x^2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d) : y = 8x - 3$

 $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d) : 9x - y + 5 = 0$

 $y = x^3 - 3x^2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d) : 9x - y + 11 = 0$

 $y = x^4 + x^2 - 2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d) : 6x - y - 1 = 0$

 $y = 2x^2 - 9x + 1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d) : y = 2x + 1$

 $y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d) : 3x - 5y - 4 = 0$

 $y = x^4 + 2x^2 + 1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d) : x + 8y - 1 = 0$

 $y = x^2 + 1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất của mp Oxy.

Bài 50 Viết PTTT của đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ biết tiếp tuyến:

 Song song với đường thẳng $(d) : 4x - y - 2 = 0$

 Vuông góc với đường thẳng $(d) : x + 6y + 7 = 0$

DẠNG 3: CHO ĐIỂM TIẾP TUYẾN ĐI QUA

PHƯƠNG PHÁP

Cho hàm số $y = f(x)$. có đồ thị (C) Viết PTTT của (C), biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$.

Lưu ý: Điểm A có thể thuộc hoặc không thuộc đồ thị (C)

Bước 1: Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ có dạng $(\Delta) : y = k(x - x_A) + y_A$ (k : chưa biết)

Bước 2 : Để (Δ) là tiếp tuyến của (C) thì hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$$

Giải phương trình này tìm k , suy ra PTTT(Δ).

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; -2)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 51 Viết PTTT của các đồ thị hàm số:

- 1 $y = \frac{x+2}{x-2}$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(6; 1)$.
- 2 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C), biết tiếp tuyến kẻ từ điểm $A(\frac{23}{9}; -2)$.
- 3 $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $I(\frac{3}{2}; 1)$.
- 4 $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2$, biết tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- 5 $y = x^4 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến xuất phát từ điểm $M(0; 4)$.

Bài 52 Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ (C).

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)
- 2 Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A(-1; 2)$ đến đồ thị hàm số.

Bài 53 Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (C).

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)
- 2 Qua điểm $C(\frac{4}{9}; \frac{4}{3})$ kẻ được mấy tiếp tuyến tới đồ thị hàm số? Viết phương trình các tiếp tuyến đó.

Bài 54 Hãy tìm trên đồ thị sau đây điểm mà tại đó hệ số góc của tiếp tuyến đạt giá trị nhỏ nhất:

- 1 $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$
- 2 $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

3 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

Bài 55 Cho hàm số $y = \frac{-2x+4}{x-1}$ (C)

1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2 Tìm 2 điểm A, B thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại các điểm đó song song với nhau, đồng thời 3 điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 12. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

- A. $y = 9x + 7$. B. $y = -9x - 7$. C. $y = -9x + 7$. D. $y = 9x - 7$.

Câu 13. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = -2x + 3$. B. $y = -2x - 3$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = 2x + 3$.

Câu 14. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

- A. có hệ số góc bằng -1 . B. song song với trục hoành.
C. có hệ số góc dương. D. song song với đường thẳng $x = 1$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng tất cả các giá trị các phân tử của S là

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$, ($ab \neq -2$). Biết rằng a, b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng

- A. -2 .. B. 4. C. -1 .. D. 5.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							

$-\infty$

1

0

$+\infty$

$-\infty$

1

0

$+\infty$

$-\infty$

1

0

$+\infty$

$-\infty$

1

0

$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

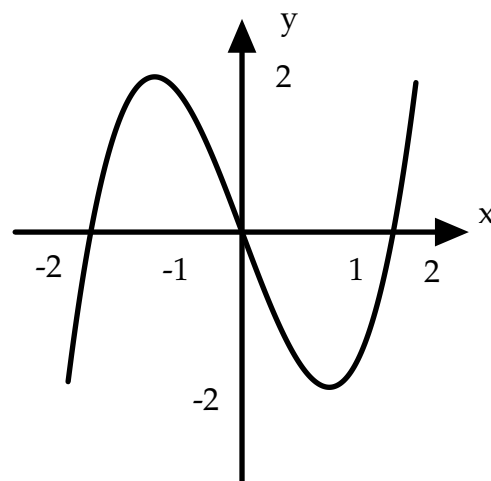
- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 18.

CHƯƠNG 1. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là:

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.



Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			3		3			
	$-\infty$			-1			$-\infty$	

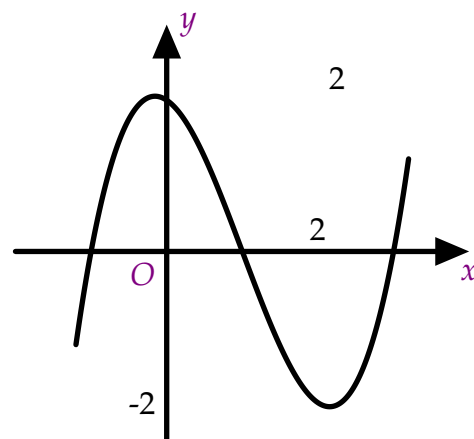
Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 20.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

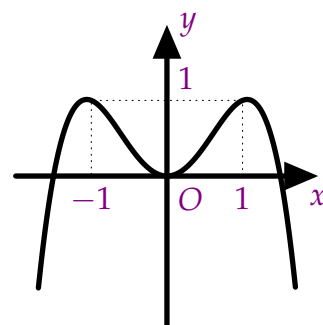
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.



Câu 21.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c (a, b, c \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hị vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

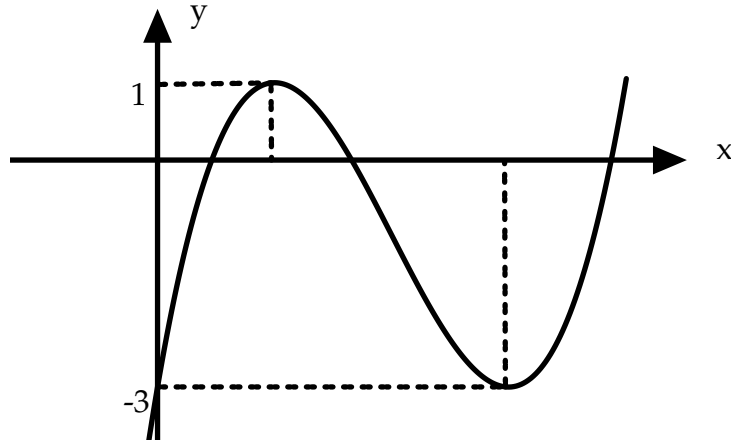
- A. 2. B. 0. C. 4. D. 3.



Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 6.



Câu 23. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 24. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2(C)$ cắt đường thẳng $d : y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

- A. $m > -2$. B. $m = -2$. C. $m > -3$. D. $m = -3$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

- A. $m \in (-\frac{5}{4}; +\infty)$. B. $m \in (-2; +\infty)$.
C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 28. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

- A. 4036. B. 4040. C. 4038. D. 4034.

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN \leq 10$

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 30. Cho đồ thị $(C) : y = x^4 - mx^2 + m - 1$. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 10$. D. $m = 11$.

Câu 31. Tìm tọa độ những điểm M trên đồ thị $(C) : y = \frac{2x-1}{x-1}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận của đồ thị đạt giá trị nhỏ nhất

- A. Không có m. B. $(-2; 5/3)$ và $(0; 1)$. C. $(3; 5/2)$ và $(0; 1)$. D. $(2; 3)$ và $(0; 1)$.

Câu 32. Đồ thị $(C_m) : y = \frac{mx+4}{x+m}$ luôn đi qua bao nhiêu điểm cố định với mọi m ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 33. Trên đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{2x+4}{x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

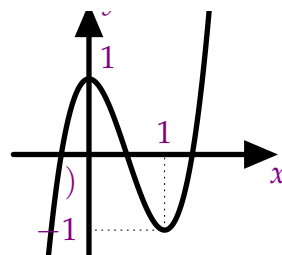
Câu 34. Tìm m để đồ thị $(C) : y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

- A. $m \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{5}; +\infty)$. B. $m \in (-\frac{4}{3}; +\infty)$.
C. $m \in (-\frac{4}{5}; +\infty) \setminus \{0\}$. D. $m \in (0; +\infty)$.

Câu 35.

Biết rằng hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phát biểu nào sau đây là phát biểu đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có 5 cực trị.
- B. Đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có 2 cực trị.
- C. Đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có 3 cực trị.
- D. Đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có 1 cực trị.



VẤN ĐỀ 7

TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

DẠNG 1: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA 2 ĐỒ THỊ $y = f(x)$, $y = g(x)$

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Lập phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ (*)

Bước 2: Giải phương trình đó tìm được nghiệm x và thế vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$ tìm được y .

Suy ra giao điểm $M(x; y)$

Đặc biệt:

+ Tìm giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành: Cho $y = 0$ giải phương trình tìm x . Suy ra giao điểm $M(x; 0)$

+ Tìm giao điểm của đồ thị (C) với trục tung: Cho $x = 0$ thế vào phương trình tìm y . Suy ra giao điểm $M(0; y)$

Chú ý:

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của 2 đồ thị.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm giao điểm của đồ thị (C) : $y = \frac{2x+1}{x-1}$ và đường thẳng (d) : $y = 3x - 1$.

BÀI TẬP

Bài 56  **1** Tìm giao điểm của đồ thị (C) : $y = \frac{4}{x+3}$ và đường thẳng (d) : $y = -x + 3$.

 **2** Tìm giao điểm của đồ thị (P) : $y = -2x^2 + 3x + 1$ và đường thẳng (d) : $y = -4$.

 **3** Tìm giao điểm của đồ thị (C) : $y = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ và đường thẳng (d) : $y = x + 1$.

 **4** Tìm giao điểm của đồ thị (C) : $y = -x^4 + 20x^2 - 64$ với trục hoành.

 **5** Tìm giao điểm của đồ thị (C) : $y = \frac{2-x}{x+1}$ với trục hoành và trục tung.

 **6** Tìm giao điểm của đồ thị (C) : $y = x^3 + 7x^2 - 28x + 20$ với trục hoành và trục tung.

DẠNG 2: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH DỰA VÀO ĐỒ THỊ
PHƯƠNG PHÁP

Ta biến đổi pt để về dạng $f(x) = g(m)$.

Đây chính là phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị : $\begin{cases} y = f(x) & (C) \\ y = g(m) & (\Delta) \end{cases}$

Số nghiệm p.trình (*) cũng chính là số giao điểm của (C) và (Δ)

Trong đó (C) đã khảo sát hoặc dễ khảo sát và vẽ đồ thị.

(γ) là đường thẳng có phương song song hoặc trùng với Ox.

Khi lập bảng biện luận, cần chú ý đến các giá trị đặc biệt trên trục tung (đối với (C) là hàm bậc ba, bậc bốn trùng phương) hoặc chú ý đến tiệm cận ngang (đối với (C) là hàm nhất biến)

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Cho $y = -x^3 + 3x + 1$ (C)

 1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)

 2 Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x + m = 0$

 **Ví dụ 2.**  1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{2x-1}{x+2}$

 2 Tìm các giá trị của m để phương trình $\frac{2\sin x - 1}{\sin x + 2} = m$ có đúng 2 nghiệm trên đoạn $[0; \pi]$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 57

 1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ (C)

 2 Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 = \frac{m}{2}$

Bài 58 Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ (C).

 1 Khảo sát và vẽ (C).

 2 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^2 - m + 1 = 0$.

Bài 59 Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

Bài 60 Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt $x^4 - 2x^2 - 1 = 2m$

Bài 61 Định m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt: $x^3 - 3x^2 + 2 - \frac{m}{2} = 0$

Bài 62 Định m để phương trình sau có 1 nghiệm duy nhất: $x^3 + 3x^2 - 3m = 0$

DẠNG 3: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐỒ THỊ (C) : $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ CẮT ĐƯỜNG THẲNG (d) TẠI 2 ĐIỂM PHÂN BIỆT

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (d). (Điều kiện $x \neq x_0$, với x_0 là số làm cho mẫu bằng 0). Phương trình được biến đổi thành $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Bước 2: Để (C) và (d) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thì phương trình trên phải có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt khác } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm m để đồ thị (C) : $y = \frac{x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng (d) : $y = 2x + m$ tại 2 điểm phân biệt.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 63 Tìm m để đồ thị (C) : $y = \frac{4}{x-4}$ cắt đường thẳng (d) : $y = m(x-2)$ tại 2 điểm phân biệt.

Bài 64 Tìm m để đồ thị (C) : $y = \frac{x+2}{x-2}$ cắt đường thẳng (d) : $y = x + m$ tại 2 điểm phân biệt.

Bài 65 Tìm m để đồ thị (C) : $y = \frac{2x+1}{x+1}$ cắt đường thẳng (d) : $y = mx + 2m + 1$ tại 2 điểm phân biệt.

Bài 66 Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ (C). Tìm m để đường thẳng (d) : $y = -x + m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4$.

DẠNG 4: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐỒ THỊ (C) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ CẮT ĐƯỜNG THẲNG (d) TẠI 3 ĐIỂM PHÂN BIỆT.

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (d), ký hiệu là phương trình (*)

Bước 2: Nhầm được 1 nghiệm là x_0 . Chia Hoocner, đưa phương trình này về dạng

$$(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ \underbrace{ax^2 + bx + c}_{B(x)} = 0 \end{cases}$$

Bước 3: Để (C) và (d) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 3 nghiệm phân

biệt. $\Leftrightarrow$ phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt khác x_0 . $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$ Trong trường hợp

không nhầm được nghiệm, ta có thể lý luận hàm số có 2 điểm cực trị nằm 2 phía so với đường (d). Ví dụ: Để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì hàm số phải có CD, CT và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** (d) : $y = mx$ tại 3 Ví dụ 5: Tìm m để đồ thị (C) : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ cắt đường thẳng điểm phân biệt.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 67 Tìm m để đồ thị (C) : $y = x^3 - 3x + 1$ cắt đường thẳng (d) : $y = mx + 1$ tại 3 điểm phân biệt.

Bài 68 Tìm m để đồ thị $(C_m) : y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$ cắt đường thẳng (d): $y = x + 4$ tại 3 điểm phân biệt.

Bài 69 Tìm m để đồ thị $(C_m) : y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 70 Cho hàm số $(C_m) : y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$.

 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.

 2 Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) cắt Ox tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$

DẠNG 5: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐỒ THỊ (C) : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 3 ĐIỂM PHÂN BIỆT LẬP THÀNH MỘT CẤP SỐ CỘNG

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: dùng định nghĩa cấp số cộng

Cách 2: dùng tính chất đặc biệt sau:

Lưu ý quan trọng: Nếu đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm cách đều nhau (đây cũng là tính chất của một cấp số cộng) thì điểm uốn nằm trên trục hoành.

Điều kiện cần để đồ thị hàm bậc ba cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số cộng là tọa độ điểm uốn phải nằm trên trục hoành $\Leftrightarrow y\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0$.

Giải phương trình này suy ra m.

VÍ DỤ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Tìm m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt lập thành một cấp số cộng:

Bài 71 (C): $y = x^3 + 3(m-1)x^2 + 2(m^2 - 4m + 1)x - 4m(m-1)$

Bài 72 (C): $y = x^3 + mx^2 + 1$

DẠNG 6: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐỒ THỊ (C): HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNGNG CẮT ĐƯỜNG THẲNG (d) NẴM NGANG TẠI 4 ĐIỂM PHÂN BIỆT.

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (d), đưa về dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*)

Bước 2: Đặt $t = x^2$. Phương trình (*) trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (1)

Đề (C) và (d) cắt nhau tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm m để đồ thị (C) : $y = x^4 - 2mx + m + 1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 73 Tìm m để đồ thị (C) : $y = x^4 - mx^2 + m$ cắt đường thẳng (d) : $y = 1$ tại 4 điểm phân biệt.

Bài 74 Cho hàm số $(C_m) : y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$. Định m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Bài 75 Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 3$ (C_m). Tìm m để đường thẳng $y = -2m + 2$ cắt đồ thị (C_m) tại đúng hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8

VẤN ĐỀ 8

ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

PHƯƠNG PHÁP

Cho họ đường cong $(C_m) : y = f(x, m)$ với $m \in \mathbb{R}$.

Biến đổi phương trình trở thành:
$$\begin{cases} Am + B = 0 & (1) \\ Am^2 + Bm + C = 0 & (2) \end{cases}$$
 Chú ý rằng nếu điểm $A(x_0; y_0) \in (C_m)$ thì tọa độ của A phải thỏa pt (1) (hoặc pt 2) với mọi giá trị của tham số m .

. Tọa độ điểm cố định của (C_m) phải thỏa hệ $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ (nếu là phương trình 1) hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$ (nếu là phương trình 2)

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $(C_m) : y = x^3 + (1 - m)x^2 + 2x + m + 2$. Tìm tọa độ những điểm cố định mà đường cong (C_m) luôn đi qua với mọi m

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 76 Tìm các điểm cố định mà họ đường cong (C_m) luôn đi qua:

1 $(C_m) : y = x^3 + mx^2 - 4x - 4m$

2 $(C_m) : y = \frac{mx+1}{x+m}$

3 $(C_m) : y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$

VẤN ĐỀ 9

ĐIỂM CÓ TỌA ĐỘ NGUYÊN CỦA ĐỒ THỊ

PHƯƠNG PHÁP

Cho hàm số $y = f(x)(C)$. Tìm trên đồ thị (C) những điểm có tọa độ nguyên. Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (C) và có tọa độ nguyên.

Trường hợp 1 : $y = A + \frac{B}{ax+b}$. Ta đặt như sau $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{-\frac{b}{a}\} \\ A \in \mathbb{Z} \\ B : (ax+b) \end{cases}$ (A: số nguyên; B chia hết cho

$ax+b$

Trường hợp 2: $y = \sqrt{f(x)}$ Dưa vào tập xác định để lọc ra các giá trị nguyên của x_0 , tiếp tục kiểm tra đến y_0 rồi kết luận.

Trường hợp 3: $y = f(\sin x)$ hoặc $y = f(\cos x)$. Dựa vào điều kiện $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1$ để tìm ra miền giá trị, từ đó ra y_0 trước rồi suy ra nghiệm x_0 phụ thuộc vào $k(k \in \mathbb{Z})$, chọn k thích hợp để ra kết quả.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tìm các điểm có tọa độ nguyên của đồ thị (C) : $y = \frac{x+3}{2x+1}$

Lời giải.

TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (C) có tọa độ nguyên. Ta có: $y_0 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2x_0+1)}$
 $\Leftrightarrow 2y_0 = 1 + \frac{5}{2x_0+1}$ Để ý rằng $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2y_0 \in \mathbb{Z}$. Suy ra $(2x_0 + 1)$ phải là ước số của 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 1 = 1 \\ 2x_0 + 1 = -1 \\ 2x_0 + 1 = 5 \\ 2x_0 + 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3(N) \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2(N) \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 1(N) \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 0(N) \end{cases}$$

Có 4 điểm trên (C) có tọa độ nguyên là

$$(0;3), (-1;-2), (2;1), (-3;0)$$

□

 **Ví dụ 2.** Tìm các điểm có tọa độ nguyên của đồ thị (C) : $y = x + 2 + \sqrt{1-x^2}$

Lời giải.

TXĐ: $D = [-1;1]$

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (C) có tọa độ nguyên. Ta có:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ x_0 \in [-1;1] \\ y_0 = x_0 + 2 + \sqrt{1-x_0^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0; -1; 1 \\ y_0 = x_0 + 2 + \sqrt{1-x_0^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3(N) \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1(N) \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3(N) \end{cases}$$

Có 3 điểm trên (C) có tọa độ nguyên là $(0;3), (-1;1), (1;3)$

□

 **Ví dụ 3.** Tìm các điểm có tọa độ nguyên của đồ thị (C) : $y = 1 + \sin x$

Lời giải.

TXC $D = \mathbb{R}$.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $0 \leq y \leq 2$

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (C) có tọa độ nguyên. Ta có:

$$\begin{cases} y_0 = 1 + \sin x \\ y_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 \in [0; 2] \\ x_0 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 0 \Rightarrow 1 + \sin x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \Rightarrow 1 + \sin x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \Rightarrow 1 + \sin x_0 = 2 \\ x_0 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 0 \Rightarrow \sin x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \Rightarrow \sin x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \Rightarrow \sin x_0 = 1 \\ x_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Để thấy $x_0 = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta chỉ có thể chọn được duy nhất một giá trị $k = 0$ thì mới được $x_0 = 0$ là số nguyên.

Lúc đó $y_0 = 1$ Vậy có 1 điểm trên (C) có tọa độ nguyên là $(0; 1)$

□

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 77 Tìm trên đồ thị của các hàm số sau những điểm có tọa độ nguyên:

$$y = \frac{3x+2}{x-1}$$

 $y = \frac{-2x+1}{x+1}$

VẤN ĐỀ 10

ĐỒ THỊ HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

DẠNG 1: TRỊ TUYỆT ĐỐI TOÀN PHẦN $y = |f(x)|$ (C')

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Khảo sát và vẽ đồ thị $y = f(x)$ (C) (không có dấu GTTĐ)

Bước 2: Ta nhận xét đồ thị (C') như sau

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Do đó đồ thị $y = |f(x)|$ gồm 2 phần:

Phần I: Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị (C) : $y = f(x)$

Phần 2: Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C) : $y = f(x)$ qua trục hoành.

VÍ DỤ

 Ví dụ 1.

1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ (C).

2 Suy ra đồ thị hàm số $y = \left| \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} \right|$ (C')

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 78 Cho hàm số (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 6$ (C)

1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2 Biện luận theo a số nghiệm của phương trình: $|x^3 - 3x^2 - 6| = 2a - 1$

Bài 79 Cho hàm số (C) : $y = x^3 - 3x$ (C)

1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x^3 - 3x| + m - 2 = 0$

Bài 80 Cho hàm số (C) : $y = x^4 - 2x^2 - 1$ (C)

1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x^4 - 2x^2 - 1| = m$

Bài 81 Cho hàm số (C) : $y = \frac{x+1}{x-1}$

1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

2 Vẽ đồ thị hàm số (C') : $y = \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

DẠNG 2: TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA RIÊNG x : $y = f(|x|)$ (C')**PHƯƠNG PHÁP**

Bước 1: Khảo sát và vẽ đồ thị $y = f(x)$ (C) (không có dấu GTTĐ)

Bước 2: Tả nhận xét đồ thị (C') như sau

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

và $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là Oy Do đó đồ thị $y = f(|x|)$ (C') gồm 2 phần:

Phần 1: Phần bên phải trục tung Oy của đồ thị (C): $y = f(x)$.

Phần 2: Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.**  1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ (C)

 2 Tìm m để phương trình $2|x^4 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 82 Cho hàm số $y = x^3 + x - 1$ (C).

 1 Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

 2 Từ đó hãy suy ra đồ thị hàm số: $y = |x|' + |x|$

Bài 83 Cho hàm số: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ (C)

 1 Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

 2 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x|' - 6x^2 + 9|x| - 3 + m = 0$

Bài 84 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2+x}{2-x}$ Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{2+|x|}{2-|x|}$

DẠNG 3: TRỊ TUYỆT ĐỐI CỤC BỘ $y = |u(x)| \cdot v(x)$ (C')

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Khảo sát và vẽ đồ thị $y = u(x) \cdot v(x)$ (C) (không có dấu GTTĐ)

Bước 2: Ta nhận xét đồ thị (C^*) như sau

$$y = |u(x)|v(x) = \begin{cases} u(x), v(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x), v(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$$

Do đó đồ thị $y = |u(x)|v(x)$ (C') gồm 2 phần:

Phần I: Phần của đồ thị (C): $y = f(x)$ trên miền $u(x) \geq 0$

Phần 2: Đối xứng phần đồ thị của (C): $y = f(x)$ trên miền $u(x) < 0$ qua trục hoành.

VÍ DỤ

 Ví dụ 1.

1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$ (C).

2 Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{|1-x|}$ (C')

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 85 Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ (C)

1 Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2 Từ đồ thị (C), hãy suy ra đồ thị của hàm số: $y = |x - 1| (2x^2 - x - 1)$

Bài 86 Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ (C)

1 Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

2 Định m để phương trình sau có đúng 5 nghiệm phân biệt :

$$|x^2 - 3| (x^2 + 1) - 3m + 6 = 0$$

VẤN ĐỀ 11

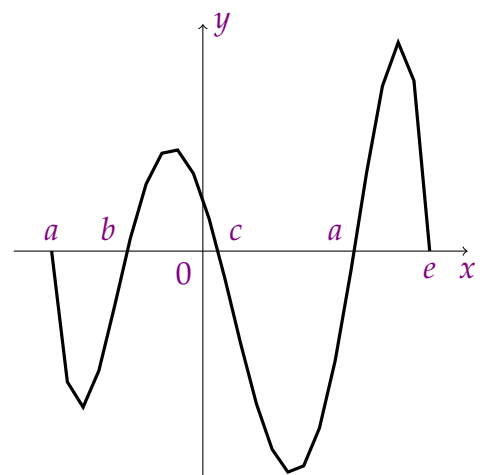
TÍNH CHẤT ĐỒ THỊ HÀM $F'(X)$ **DẠNG 1:** TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ DỰA VÀO ĐỒ THỊ $y = f'(x)$ **PHƯƠNG PHÁP**

Theo định lý về tính đơn điệu và dấu của đạo hàm, dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta nhận thấy:

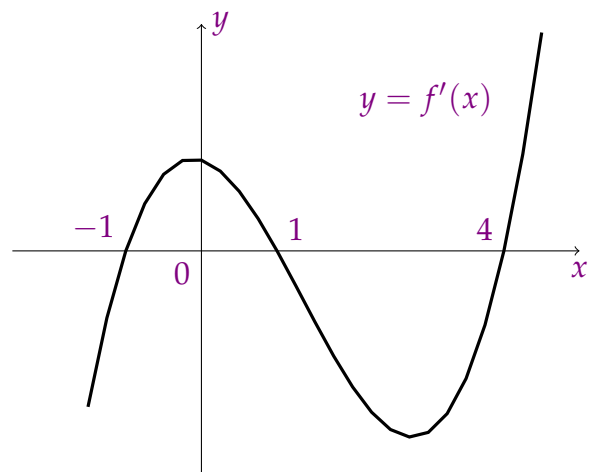
- * $f'(x) > 0$ thì x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên trục hoành. Khi đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.
- * $f'(x) < 0$ thì x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành. Khi đó hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

VÍ DỤ**✎ Ví dụ 1.**

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; e]$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên, hãy tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; e]$.

**✎ Ví dụ 2.**

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



DẠNG 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ DỰA VÀO ĐỒ THỊ $y = f'(x)$

PHƯƠNG PHÁP

Theo định lý về điều kiện đủ để hàm số có cực trị, dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có hệ quả:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b) và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$. Suy ra nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(x_0, 0)$.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Ngược lại, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

VÍ DỤ

✍ Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

✍ Ví dụ 2.

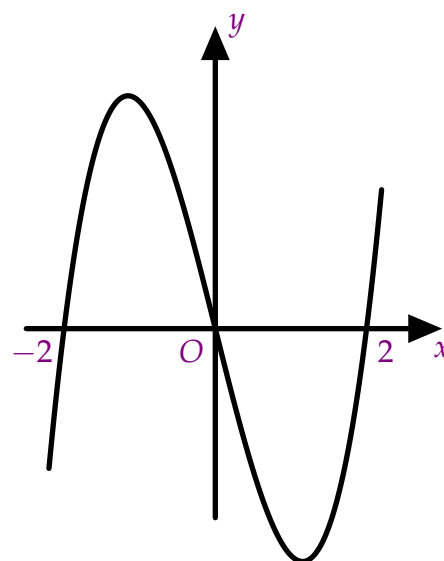
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình ảnh bên. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

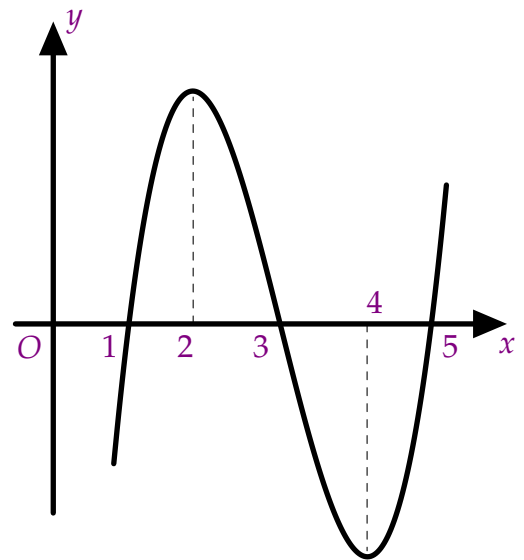
- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Câu 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

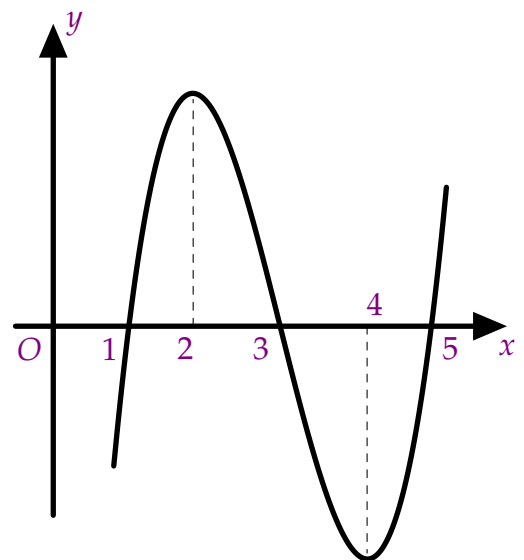
- A. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$.



Câu 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Đặt $y = g(x) = f(x+1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

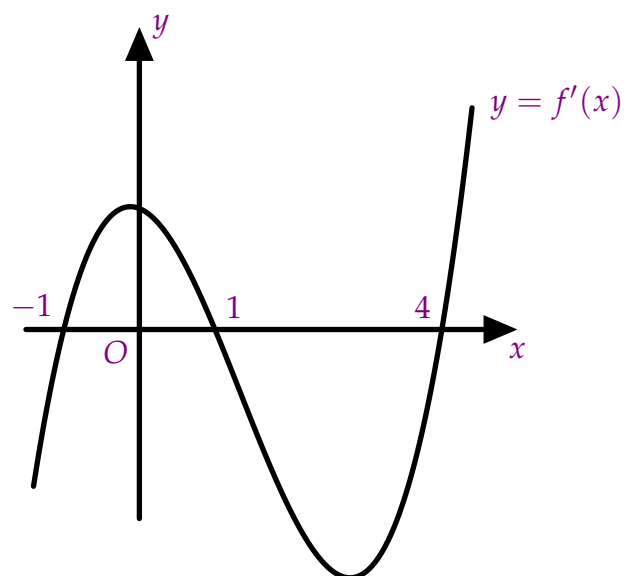
- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
- B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;5)$.



Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau: Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(1;3)$.
- B. $(2;+\infty)$.
- C. $(-2;1)$.
- D. $(-\infty;-2)$.

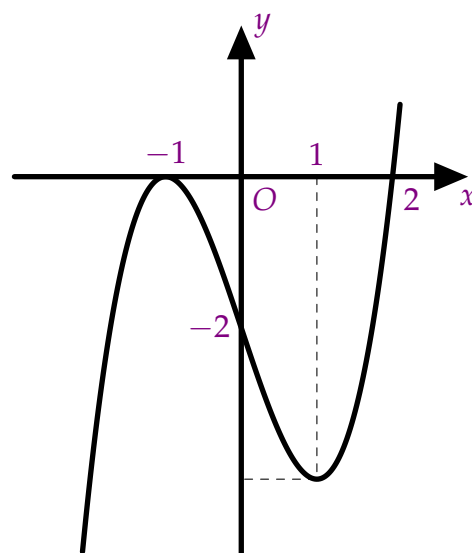


Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.

Mệnh đề nào dưới đây sai?

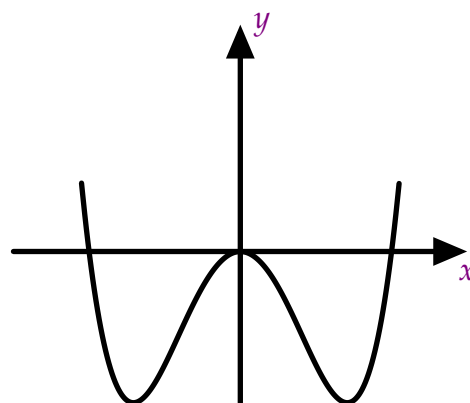
- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.



Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

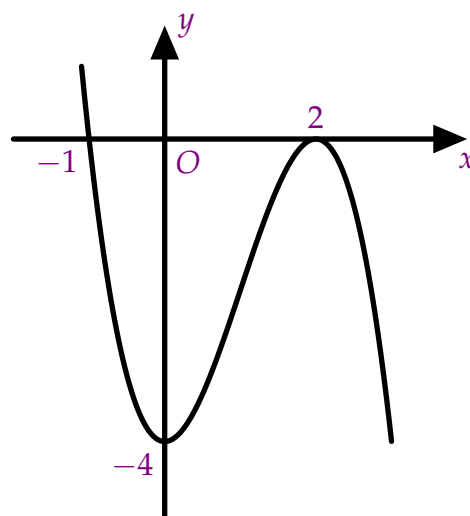
- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.



Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) + 4x$.

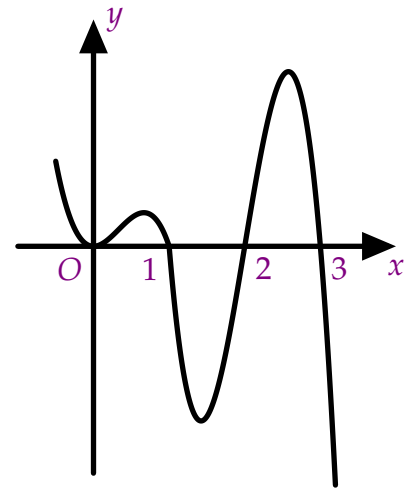
- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.



Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;3]$.

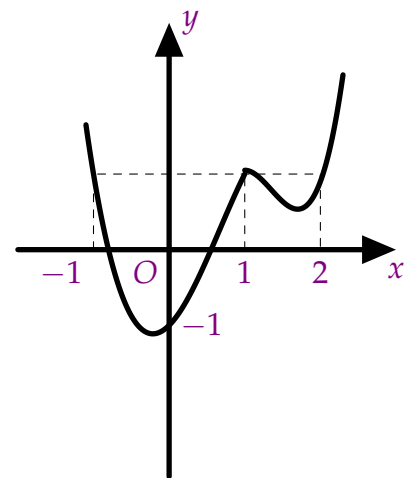
- A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.



Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

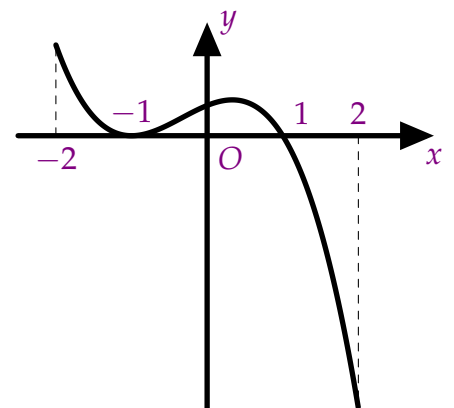
- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.



Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2;2]$

- A. $x_0 = 2$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = -2$. D. $x_0 = 1$.



Câu 11. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

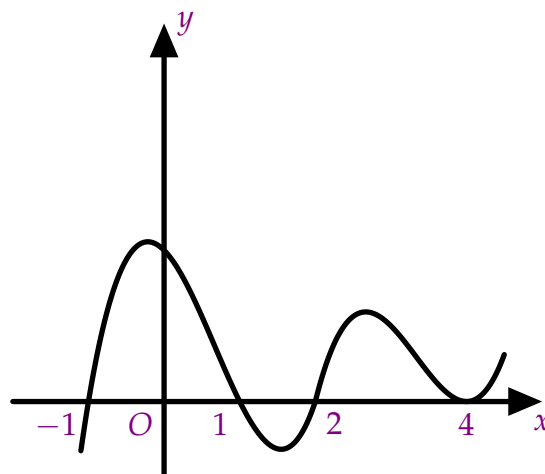
Hàm số $y = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;1)$. B. $(2;4)$. C. $(1;2)$. D. $(4;+\infty)$.

Câu 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(2019 - 2020x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

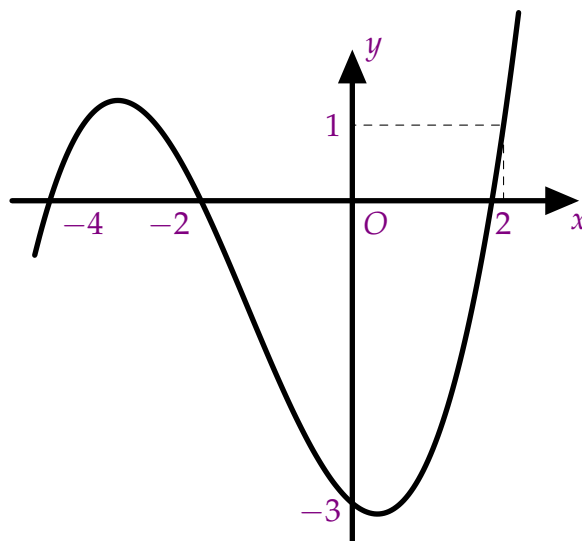
- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; -1)$.
C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.



Câu 13.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

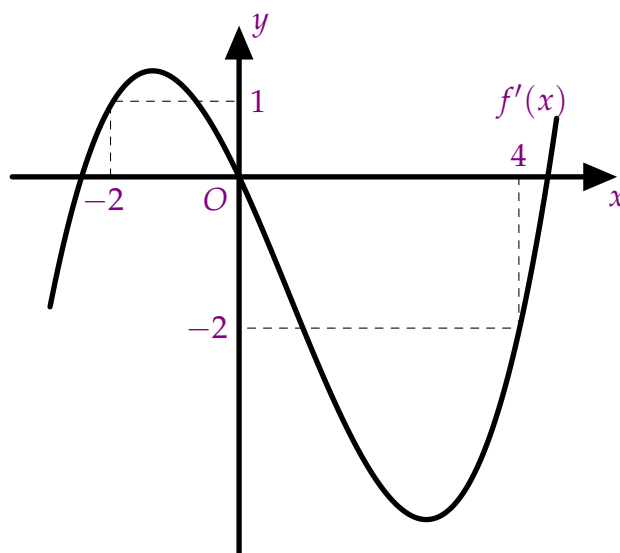
- A. $(0; 2)$. B. $(-1; 1)$.
C. $(1; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.



Câu 14.

Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình sau. Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; +\infty)$. B. $(0; 4)$.
C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; 0)$.



Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 8.

C. 9.

D. 11.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 89 Cho hàm số $(C_m) :: y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$.

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=0$.
- 2 Tìm m để hàm số (C_m) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Bài 90 Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$. Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Bài 91 Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ (C_m) . Tìm m để đường thẳng $y = -x + 1$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt.

Bài 92 Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (C_m) .

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$
- 2 Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác vuông.

Bài 93 Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (C) .

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .
- 2 Với giá trị nào của m , phương trình $x^2|x^2 - 2| = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt?

Bài 94 Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C) .

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .
- 2 Định m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 95 Cho hàm số $y = -x^3 + 3x$ (C) . Tìm m để phương trình $-|x^3| + 3|x| = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 96 Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách từ đó đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

- 1 $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C)
- 2 $y = \frac{x+2}{x-2}$ (C)

Bài 97 Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ (C)

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .
- 2 Chứng minh rằng đường thẳng $y = -x + m$ luôn cắt đồ thị tại 2 điểm A và B . Tìm m để AB ngắn nhất.

Bài 98 Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x + 2$ (1) .

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) .
- 2 Tìm m để đường thẳng $(d) :: y = 2mx - 2m + 6$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng -6 .

Bài 99

- 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

2 Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x^3| - 9x^2 + 12|x| = m$

Bài 100 Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (1)

1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2 Gọi M là điểm thuộc đồ thị (1) có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của đồ thị (1) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B . Tính diện tích tam giác OAB .

VẤN ĐỀ 1

LŨY THỪA

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa lũy thừa và căn

Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

$b \in \mathbb{R}$ là căn bậc n của $a \Leftrightarrow b^n = a$

Nhận xét

Với mỗi $a \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n lẻ, kí hiệu $\sqrt[n]{a}$

Với n chẵn

- $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a
- $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0
- $a > 0$: Có đúng hai căn bậc n chẵn
Kí hiệu: $\sqrt[n]{a}$ và $-\sqrt[n]{a}$, trong đó $\sqrt[n]{a} > 0$ và $-\sqrt[n]{a} < 0$

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n, (n \in \mathbb{N}^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n}, (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, (\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n)$
$\alpha = \lim r_n, (r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

Một số tính chất của lũy thừa

Định lí 1: Cho $a \neq 0, b \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}$, ta có:

- a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- d) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Định lí 2: Cho $m, n \in \mathbb{Z}$

- Với $a > 1$: $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$
- Với $0 < a < 1$: $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$

Hệ quả 1

Với $0 < a < b$ và $m \in \mathbb{Z}$ thì ta có:

- $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$
- $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$

3. Một số tính chất của căn bậc n

Cho $a, b \geq 0; m, n \in \mathbb{N}^*; p, q \in \mathbb{Z}$. Ta có:

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

b) $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p \ (a > 0)$

c) Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0$
Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$

d) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b > 0)$

e) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{1}{10}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 128^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-9}$

 **Ví dụ 2.** Rút gọn: $B = \frac{x^{\frac{5}{4}}y + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} \ (x, y > 0)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

THIẾU TRANG 116

a) $\frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$

b) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$

c) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab} \right)$

d) $\frac{a^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^{-1}} \right)}{a^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^{-2}} \right)}$

VẤN ĐỀ 2

LÔGARIT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

 Định nghĩa 4.

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

 Tính chất 1. Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có:

- 1
 - $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
 - $a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$
- 2 Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:
 - $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$
- 3 Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:
 - $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$
 - Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{a} = -\log_a b$
- 4 Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α ta có:
 - $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$
 - Đặc biệt $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
- 5 Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có:
 - $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
 - Đặc biệt: $\log_a c \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$
- 6 Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên
 - Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10
Viết: $\log_{10} b = \log b = \lg b$
 - Lôgarit tự nhiên và lôgarit cơ số e
Viết: $\log_e b = \ln b$ với $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828 \dots$

VÍ DỤ

✎ Ví dụ 1. Tính:

a) $\log_{\frac{1}{4}} 8$

b) $3^{2\log_3 5}$

c) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$

d) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$

✎ Ví dụ 2. Cho biết $a = \log_2 20$. Tính $\log_{20} 5$ theo a

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1 Tính

a) $\log_2 64$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 8$

c) $\log_3 \sqrt[5]{9}$

d) $\log_5 625$

e) $\log_{0,5} 0,125$

f) $\log_8 \frac{1}{4}$

g) $\log_{0,2} 625$

h) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$

i) $\log_4 \sqrt[4]{8}$

Bài 2 Tính

a) $\log_7 49 - \log_7 343$

b) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$

c) $\log_6 4 + \log_6 9$

d) $\log_{\frac{1}{12}} 2 + 2\log_{\frac{1}{12}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{12}} \frac{3}{8}$

e) $3\log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$

f) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$

Bài 3 Tính

a) $3^{2\log_3 5}$

b) $4^{\log_2 \frac{1}{7}}$

c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$

d) $49^{\log_7 2}$

e) $25^{\frac{1}{2}\log_5 10}$

f) $64^{\frac{1}{2}\log_2 10}$

g) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$

h) $3^{\log_2 27}$

i) $3^{1+\log_3 5}$

j) $2^{1-\log_2 7}$

k) $5^{\frac{1}{2}\log_5 25 + 2\log 100 - \frac{1}{2}\log_5 9}$

Bài 4 Tính:

a) $\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$

b) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$

c) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$

d) $\frac{\log_4 64}{\log_2 64}$

Bài 5

- a) Cho biết $a = \log_2 20$. Tính $\log_{20} 5$ theo a
- b) Cho biết $a = \log_6 2$ và $b = \log_6 5$. Tính $\log_3 5$ theo a và b
- c) Cho biết $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$. Tính $\log_{30} 1350$ theo a và b
- d) Cho biết $a = \log_{15} 3$. Tính $\log_{25} 15$ theo a

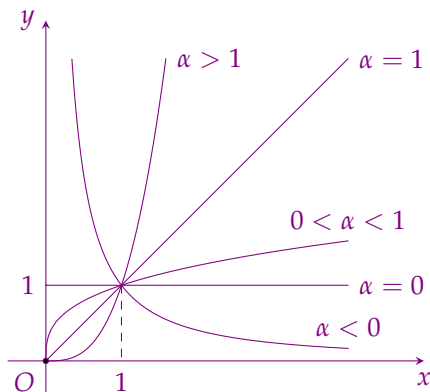
VẤN ĐỀ 3

HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$.

- **Định nghĩa:** Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là hàm số lũy thừa.
- **Tập xác định:** Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là.
 - ☉ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nếu α là số nguyên dương.
 - ☉ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ với α là nguyên âm hoặc bằng 0.
 - ☉ $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ với α không nguyên.
- **Đạo hàm:** Hàm số $y = x^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.
- **Tính chất của hàm số lũy thừa trên khoảng $(0; +\infty)$.**

$y = x^\alpha, \alpha > 0$	$y = x^\alpha, \alpha < 0$																		
a. Tập khảo sát: $(0; +\infty)$	a. Tập khảo sát: $(0; +\infty)$																		
b. Sự biến thiên: + $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0$. + Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ + Tiệm cận: không có	b. Sự biến thiên: + $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0$. + Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ + Tiệm cận: - Trục Ox là tiệm cận ngang. - Trục Oy là tiệm cận đứng.																		
c. Bảng biến thiên	c. Bảng biến thiên																		
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'		+	y	0	$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'		-	y	$+\infty$	0
x	0	$+\infty$																	
y'		+																	
y	0	$+\infty$																	
x	0	$+\infty$																	
y'		-																	
y	$+\infty$	0																	
d. Đồ thị hàm số	Đồ thị hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1; 1)$.																		
	Lưu ý Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: $y = x^3, y = x^{-2}, y = x^\pi$																		

2 Hàm số mũ $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$).

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$, nghĩa là khi giải phương trình mũ mà đặt $t = a^{f(x)}$ thì $t > 0$.
- Tính đơn điệu:

☉ Khi $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó ta luôn có

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

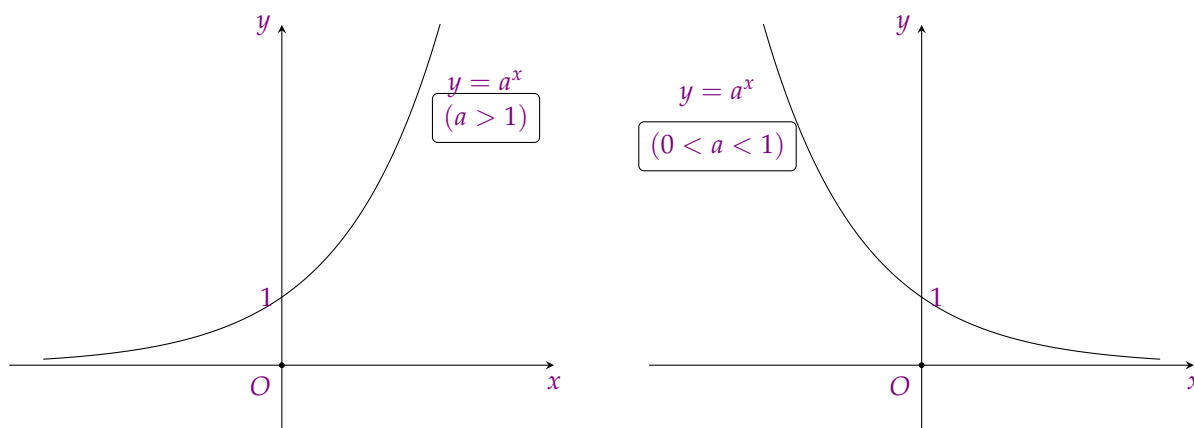
☉ Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó ta luôn có

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

- Đạo hàm:

$$\begin{aligned} (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \Rightarrow (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a. \\ (e^x)' &= e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'. \\ (\sqrt[n]{u})' &= \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}. \end{aligned}$$

- Đồ thị: Nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang.



3 Hàm số logarit $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$).

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$, nghĩa là khi giải phương trình logarit mà đặt $t = \log_a f(x)$ thì t không có điều kiện.
- Tính đơn điệu:

☉ Khi $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $\mathcal{D}$, khi đó

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

☉ Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $\mathcal{D}$, khi đó

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

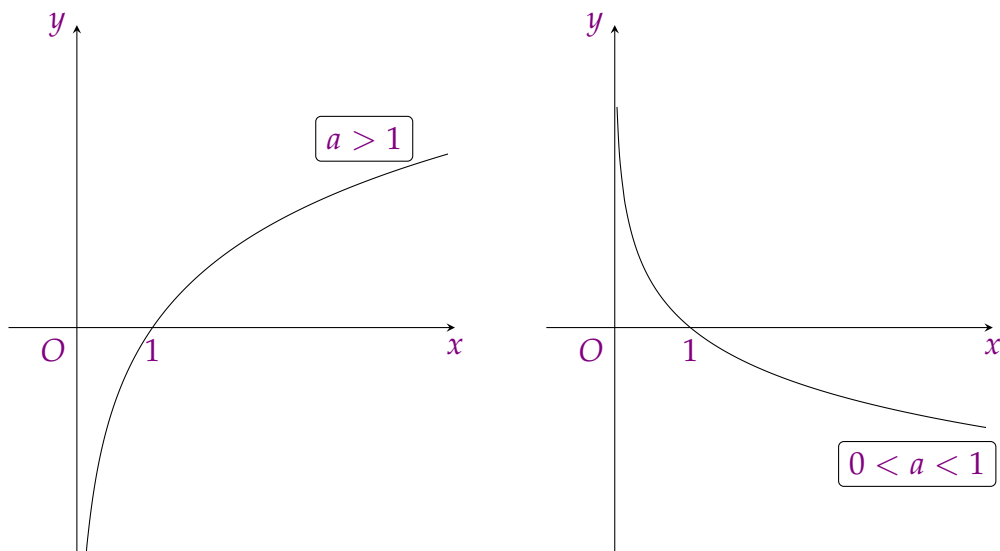
- Đạo hàm:

$$\text{☉ } (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow (\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

$$\textcircled{\heartsuit} (\ln x)' = \frac{1}{x}, (x > 0) \Rightarrow (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}.$$

$$\Rightarrow (\ln^n |u|)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} |u|.$$

- **Đồ thị:** Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng.



VÍ DỤ

✎ Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $y = (x^2 - 4x)^2$ | b) $y = (x^2 - 4x)^{-2}$ |
| c) $y = (x^2 - 4x)^{\sqrt{2}}$ | d) $y = (x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}}$ |
| e) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ | f) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$ |
| g) $y = \log_3 (x^2 + 2x)$ | h) $y = \ln \left(\frac{2x+1}{x-2} \right)$ |

✎ Ví dụ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------|
| a) $y = (x^2 + 3x - 4)^{\frac{3}{4}}$ | b) $y = \log_3 (x^2 + 1)$ |
| c) $y = (2x^2 - 3x - 4) e^x$ | d) $y = x^2 \cdot \ln x$ |

✎ Ví dụ 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| a) $y = x^{-\frac{3}{4}}$ | b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ | c) $y = \left(\frac{1}{3} \right)^x$ |
|---------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 9 Tìm tập xác định:

a) $y = 3(x - 1)^{-3}$. b) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x - 4}$. c) $y = (2 - x^2)^{\frac{3}{5}}$. d) $y = (x + 1)^{\sqrt{2}}$.

Bài 10 Tìm tập xác định:

a) $y = \log_2(2 - 5x)$. b) $y = \log_3(x^2 + 2x)$. c) $y = \log_{0,3}(4 - x^2)$.
d) $y = \log_{\sqrt{2}} \frac{2x + 3}{x - 1}$. e) $y = \log_2(x^2 - 6x + 5)$. f) $y = \frac{2}{\log_4 x - 3}$.

Bài 11 Tính đạo hàm:

a) $y = (x^2 + 3x - 4)^{\frac{3}{4}}$. b) $y = (4 - x^2)^{\sqrt{2}}$. c) $y = e^x \cdot \sin 2x$.
d) $y = (2x^2 - 3x - 4)e^x$. e) $y = 3^{x^2+2}$. f) $y = e^{3x^2+2}$.
g) $y = 2^x + \frac{4}{e^x}$. h) $y = x^2 \cdot \ln x$. i) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.
j) $y = \log_3(x^2 - 2x + 5)$.

Bài 12 Chứng minh rằng mỗi hàm số sau đây thỏa mãn hệ thức tương ứng đã cho:

a) Cho $y = e^{\sin x}$. Chứng minh rằng: $y' \cos x - y \sin x - y'' = 0$.
b) Cho $y = (x + 1)e^x$. Chứng minh rằng: $y' - y = e^x$.
c) Cho hàm số $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$. Chứng minh rằng: $x \cdot y' + 1 = e^y$.

Bài 13 Tìm GTLN,GTNN:

a) $y = x^2 e^x + 1$ trên $[-3; 2]$. b) $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 1$ trên $[1; e^3]$.
c) $y = \ln^2 x - \ln x$ trên $[1; e^2]$. d) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$ trên $[-3; 0]$.
e) $y = x^2 \ln x$ trên $[1; e]$. f) $y = \frac{x}{e^x}$ trên $[0; +\infty)$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.
- B. Hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- D. Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $a > 0$ và $a \neq 1$ luôn đi qua điểm $M(a; 1)$.

Lời giải.

□

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai ?

- A. Hàm số $y = x^a$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- B. Đồ thị hàm số $y = x^a$ với $a > 0$ không có tiệm cận.
- C. Hàm số $y = x^a$ với $a < 0$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Đồ thị hàm số $y = x^a$ với $a < 0$ có hai tiệm cận.

Lời giải.

□

Câu 3. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{5}} x$. Khẳng định nào sau đây sai

- A. Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- B. $y' = \frac{-1}{x \ln 5}$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy .

Lời giải.

□

Câu 4. Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- C. Hàm số $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

□

Câu 5. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \log_2 x$.
- B. $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$.
- C. $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.
- D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Lời giải.

□

Câu 6. Xác định a để hàm số $y = (2a - 5)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $\frac{5}{2} < a < 3$.
- B. $\frac{5}{2} \leq a \leq 3$.
- C. $a > 3$.
- D. $a < \frac{5}{2}$.

Lời giải.

□

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ ($a > 0; a \neq 1$) là:

- A. $(0; +\infty)$.
- B. $[0; +\infty)$.
- C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

□

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{-e}$ là:

- A. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
- B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.
- C. $D = (0; +\infty)$.
- D. $D = (1; 2)$.

Lời giải.

□

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = (3x^2 - 1)^2$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.

B. $D = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.

C. $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right)$.

D. $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Lời giải.

□

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln(-2x^2 + 8)$,

A. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

B. $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

C. $D = (-2; 2)$.

D. $D = [-2; 2]$.

Lời giải.

□

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \log_2 \frac{x+3}{2-x}$ là:

A. $D = (-3; 2)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

C. $D = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

D. $D = [-3; 2]$.

Lời giải.

□

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x-1)$ là:

A. $D = (1; 2)$.

B. $D = (1; +\infty)$.

C. $D = (0; +\infty)$.

D. $D = [1; 2]$.

Lời giải.

□

Câu 13. Tìm các giá trị thực của m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$?

A. $-2 < m < 2$.

B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

C. $m > -2$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

□

Câu 14.

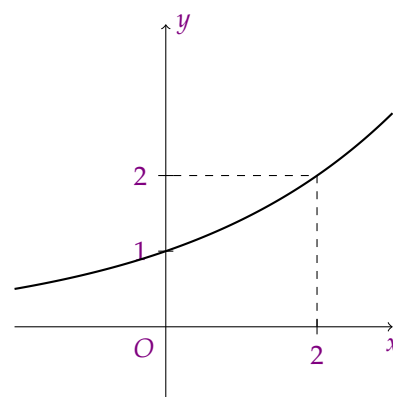
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = (\sqrt{2})^x$.

B. $y = x$.

C. $y = 2^x$.

D. $y = (\sqrt{2})^{-x}$.



Lời giải.

□

Câu 15.

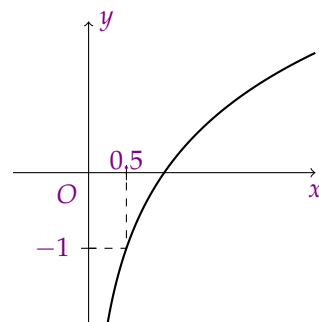
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \log_2 x$.

B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

C. $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

D. $y = \log_2(2x)$.



Câu 16.

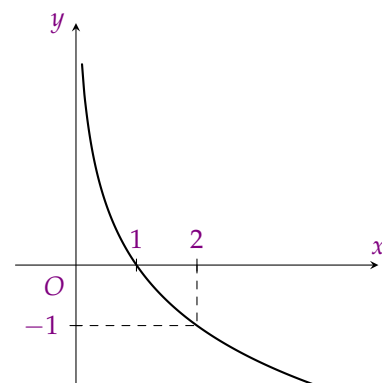
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \log_{0.5} x$.

B. $y = \log_2 x$.

C. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

D. $y = -3x + 1$.



Câu 17.

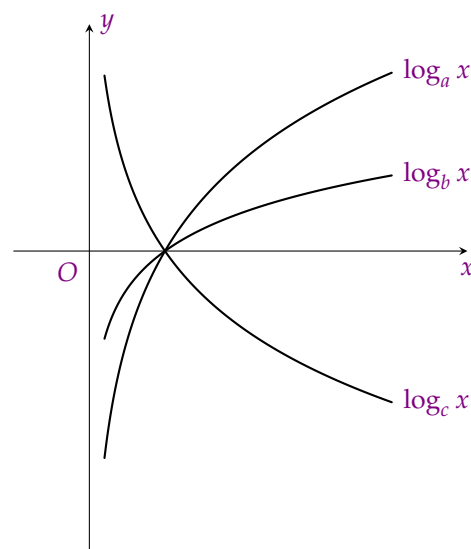
Hình bên là đồ thị ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ ($0 < a, b, c \neq 1$) được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $b > a > c$.

B. $a > b > c$.

C. $b > c > a$.

D. $a > c > b$.



Câu 18.

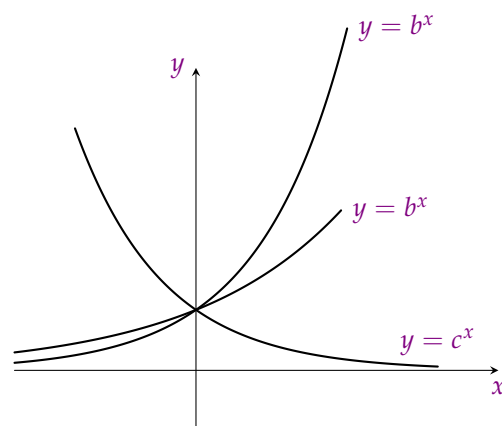
Hình bên là đồ thị ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ ($0 < a, b, c \neq 1$) được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $b > a > c$.

B. $a > b > c$.

C. $a > c > b$.

D. $c > b > a$.



Câu 19. Hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. B. $y' = \frac{1}{3\sqrt{(x-1)^3}}$. C. $y' = \frac{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}{3}$. D. $y' = \frac{3\sqrt{(x-1)^3}}{3}$.

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y = 4^{2x}$ là

A. $y' = 2 \cdot 4^{2x} \ln 4$. B. $y' = 4^{2x} \ln 2$. C. $y' = 4^{2x} \ln 4$. D. $y' = 2 \cdot 4^{2x} \ln 2$.

Câu 21. Hàm số $y = \log_{0,5} x^2$ ($x \neq 0$) có công thức đạo hàm là

A. $y' = \frac{2}{x \ln 0,5}$. B. $y' = \frac{1}{x^2 \ln 0,5}$. C. $y' = \frac{2}{x^2 \ln 0,5}$. D. $y' = \frac{1}{x \ln 0,5}$.

Câu 22. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 (4x + 1)$

A. $y' = \frac{1}{(4x + 1) \ln 3}$. B. $y' = \frac{4}{(4x + 1) \ln 3}$. C. $y' = \frac{\ln 3}{(4x + 1)}$. D. $y' = \frac{4 \ln 3}{(4x + 1)}$.

Câu 23. Đạo hàm của hàm số $y = \ln (x^2 + 3)$

A. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 3) \ln 2}$. B. $y' = \frac{2x}{x^2 + 3}$. C. $y' = \frac{2x}{\ln (x^2 + 3)}$. D. $y' = \frac{x}{x + 3}$.

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 (3^x + 1)$

A. $y' = \frac{3^x}{3^x + 1}$. B. $y' = \frac{3^x \ln 3}{3^x + 1}$. C. $y' = \frac{\ln 3}{3^x + 1}$. D. $y' = \frac{1}{(3^x + 1) \ln 3}$.

Câu 25. Đạo hàm của hàm số $y = (2x - 1)3^x$

A. $3^x (2 - 2x \ln 3 + \ln 3)$. B. $3^x (2 + 2x \ln 3 - \ln 3)$.
C. $2 \cdot 3^x + (2x - 1)x \cdot 3^{x-1}$. D. $2 \cdot 3^x \ln 3$.

Câu 26. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)3^x$

A. $(x + 1)^2 e^x$. B. $(x^2 + 1)^2 e^x$. C. $(x + 1)e^x$. D. $x^2 e^x$.

Câu 27. Cho hàm số $y = e^x \cdot \sin x$. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $y' = e^x \cos x$. B. $y' - y = y''$. C. $y'' = 2(y' - y)$. D. $y'' = -2e^x \cos x$.

Câu 28. Hàm số $y = x^2 e^x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^2 e^x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

A. e . B. $\frac{1}{e}$. C. $2e$. D. 0 .

Câu 30. Cho hàm số $y = e^{ax^2+bx+c}$ đạt cực trị tại $x = 1$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e . Tính giá trị của hàm số tại $x = 2$

A. $y(2) = 1$. B. $y(2) = e$. C. $y(2) = e^2$. D. $y(2) = \frac{1}{e^2}$.

VẤN ĐỀ 4

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

VẤN ĐỀ 5

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho phương trình: $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$, khi đó tập nghiệm của phương trình là:

A. $S = \{2; 5\}$.

B. $S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{16}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{16}}{2} \right\}$.

C. $S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{16}}{2}; \frac{5 + \sqrt{16}}{2} \right\}$.

D. $S = \{-2; -5\}$.

Câu 2. Phương trình $3^{x^3-9x+4} = 81$ có mấy nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$ là:

A. $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$.

B. $x = 1$.

C. $x = 0$.

D. $x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{2}{3}$.

Câu 4. Phương trình $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ có nghiệm là:

A. $x = 1, x = \log_2 3$.

B. $x = -1, x = \log_3 2$.

C. $x = 1, x = \log_3 2$.

D. $x = -1, x = -\log_3 2$.

Câu 5. Phương trình $5^x + 25^{1-x} = 6$ có tích các nghiệm là:

A. $\log_5 \left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right)$.

B. $\log_5 \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$.

C. 5.

D. $5 \log_5 \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$.

Câu 6. Cho phương trình $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó, tích $x_1 \cdot x_2$ bằng:

A. -1.

B. 2.

C. -2.

D. 1.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$ là:

A. $x \in \{0; 1\}$.

B. $x \in \left\{ \frac{2}{3}; \frac{3}{2} \right\}$.

C. $x \in \{-1; 0\}$.

D. $x \in \{1; -1\}$.

Câu 8. Với giá trị của tham số m thì phương trình $(m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m+5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. $-4 < m < -1$.

B. Không tồn tại m .

C. $-1 < m < \frac{3}{2}$.

D. $-1 < m < -\frac{5}{6}$.

Câu 9. Phương trình: $\log_3 (x^2 + 4x + 12) = 2$. Chọn đáp án đúng:

A. Có hai nghiệm cùng dương.

B. Có hai nghiệm trái dấu.

C. Có hai nghiệm cùng âm.

D. Vô nghiệm.

Câu 10. Phương trình: $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ có nghiệm là 1 số mà tổng các chữ số đó là:

A. 6.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Câu 11. Giải phương trình $\log_3 (x^2 - x - 5) = \log_3 (2x + 5)$. Ta có tổng các nghiệm là

A. 4.

B. 7.

C. 3.

D. 2.

Câu 12. Phương trình: $\log (x^2 - 6x + 7) = \log (x - 3)$ có số nghiệm là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 13. Phương trình: $\ln x + \ln(3x - 2) = 0$ có mấy nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

- Câu 14.** Số nghiệm của phương trình $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2 (x^2 - 25) = 0$ là?
 A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 15.** Số nghiệm của phương trình $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ là?
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 16.** Số nghiệm của phương trình sau: $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$ là?
 A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 17.** Số nghiệm của phương trình: $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x-2) + 1$ là?
 A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.
- Câu 18.** Số nghiệm của phương trình $\log_2(2^x - 1) = -2$ bằng
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 19.** Số nghiệm của phương trình $\log_3(36 - 3^{x+4}) = 1 - x$ là
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.
- Câu 20.** Giải phương trình $\log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x + 2 = 0$. Ta có tổng các nghiệm là
 A. 6. B. 3. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{9}{2}$.
- Câu 21.** Giải phương trình $\log_3 x + \log_x 9 = 3$. Ta có tích các nghiệm là
 A. 3. B. 1. C. 2. D. 27.
- Câu 22.** Phương trình $\log_2 \sqrt{x+4} = \log_2(2 + \sqrt{x-4})$ có bao nhiêu nghiệm?
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 23.** Tìm m để phương trình $\log_2(4^x - m) = x + 1$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.
 A. $0 < m < 1$. B. $0 < m < 2$. C. $-1 < m < 0$. D. $-2 < m < 0$.
- Câu 24.** Tìm m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2) \log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 27$
 A. $m = \frac{28}{3}$. B. $m = \frac{4}{3}$. C. $m = 25$. D. $m = 1$.
- Câu 25.** Giải phương trình $\log_3^2 x + (x+12) \log_3 x + 11 - x = 0$. Ta có tích các nghiệm là
 A. 3. B. $2\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. 27.

VẤN ĐỀ 6

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

PHƯƠNG PHÁP

$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$, nếu $a > 1$ (cùng chiều).

$a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$, nếu $0 < a < 1$ (đổi chiều).

Tương tự: $a^x \leq a^y \Leftrightarrow x \leq y$, nếu $a > 1$ (cùng chiều).

$a^x \leq a^y \Leftrightarrow x \geq y$, nếu $0 < a < 1$ (đổi chiều).

- Khi giải bất phương trình mũ, ta cần chú ý đến tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}. \text{ Tương tự với bất phương trình dạng } \begin{cases} a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \end{cases}.$$

- Trong trường hợp cơ sở a có chứa ẩn thì: $a^M > a^N \Leftrightarrow (a - 1)(M - N) > 0$.
- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:
 - ☑ Đưa về cùng cơ sở.
 - ☑ Đặt ẩn phụ.
 - ☑ Sử dụng tính đơn điệu: $\begin{cases} y = f(x) \text{ đồng biến trên } D \text{ thì: } f(u) < f(v) \Rightarrow u < v \\ y = f(x) \text{ nghịch biến trên } D \text{ thì: } f(u) < f(v) \Rightarrow u > v \end{cases}$.

VÍ DỤ

✍ **Ví dụ 1.** Giải các bất phương trình sau:

- a) $3^x > 81$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$; c) $3^{x^2-x} < 9$; d) $4^x - 2 \cdot 25^x < 10^x$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 33 Giải các bất phương trình sau:

- a) $3^{x^2-3x+4} > 9$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} - \frac{1}{4} \leq 0$;
 c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-3x} - \frac{2}{3} \geq 0$; d) $2^{x+1} - 16 > 2^x + 8$;
 e) $2^{x+1} + 9 \cdot 2^x - 2^{x+2} \leq 14\sqrt{2}$; f) $2^x \cdot 3^{x+1} + 2^{x+1} \cdot 3^x \geq 180$;
 g) $2^x \cdot 5^{x-1} + 2^{x-1} \cdot 5^x + 10^x \leq 17$.

Bài 34 Giải các bất phương trình sau:

a) $9^{2x+\frac{1}{2}} - 6 \cdot 3^{2x} > 9;$

b) $e^{2x} - 2e^x < 3;$

c) $4^{2x} - 2^{2x+2} + 3 \geq 0;$

d) $2^x + 2^{-x} \leq 3;$

e) $\left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 \leq 0;$

f) $5^{2x} + 5^{2-2x} \geq 26;$

g) $2\left(\frac{1}{4}\right)^x > 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1;$

h) $3\left(\frac{1}{9}\right)^x + 1 > 4\left(\frac{1}{3}\right)^x;$

i) $9^x + 4^x > 2 \cdot 6^x;$

j) $9 \cdot 9^x - 25 \cdot 12^x + 16 \cdot 16^x < 0;$

k) $6^{2x} - 3^x \cdot 4^x \leq 6 \cdot 2^{2x};$

l) $5^2 \cdot 3^{2x} + 3^2 \cdot 5^{2x} \leq 34 \cdot 15^x.$

Bài 35 Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2^x - 2}{2^x + 2} > 0;$

b) $\frac{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}{7^x - 7^2} \leq 0;$

c) $\frac{(3^x - 3)(3^x - 27)}{2^x - 4} \geq 0;$

d) $\frac{5^x - 5}{3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1} > 0.$

Bài 36 Giải các phương trình sau:

a) $3^{2x^2+2x+1} - 28 \cdot 3^{x^2+x} + 9 > 0;$

b) $2^{2x^2-4x-2} - 4 \cdot 2^{2x-x^2+1} - 2 < 0;$

c) $9^{x^2+x-1} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 \geq 0;$

d) $9^{x^2-2x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3;$

e) $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x \geq 0;$

f) $2^{3x+1} - 7 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 2 \leq 0.$

- e) $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 1) < 3$; f) $\log_2 x + \log_2 (x - 1) \geq 1$;
 g) $\ln (x + 1) + \ln (x + 3) \leq \ln (x + 7)$; h) $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 4) + 1 > \log_{\frac{1}{2}} (1 + x)$;
 i) $\log_{\sqrt{2}} (2x - 2) \geq \log_{\sqrt{2}} (4 - 2x) + 2$

Bài 39 Giải các bất phương trình sau:

- a) $\log_2^2 x > -1 + \log_2 x^2$; b) $4 \log_9^2 x - \log_3 x^3 < \log_3 x - 5$;
 c) $\log_2 x (\log_2 x - 3) \geq 2$; d) $2 \log^2 x + 4 \leq 3 \log 10x$;
 e) $\ln^2 x + \ln x^2 + 3 \leq 0$; f) $\log_3 x + \log_x 3 - \frac{5}{2} < 0$;
 g) $\log_7 x + \log_x 7 \geq \log_7 49$; h) $\log_2 x + \log_x 2 > \log_2 4$.

Bài 40 Giải các bất phương trình sau:

- a) $\log_2 (8 - 2^x) > x$; b) $\log_3 (18 - 2^x) > x$;
 c) $\log_3 (3^x - 8) > 2 - x$; d) $\log_2 (9 - 2^x) + x < 3$;
 e) $\log_7 (6 + 7^{-x}) - x \geq 1$; f) $\log_2 (3 \cdot 2^x) - 1 \leq 2x$;
 g) $\log_2 x \cdot \log_2 2x > 2$; h) $\log_2 x \cdot \log_2 2x \geq \log_2 x + \log_2 4x$;
 i) $\frac{1}{4 - \log_2 x} + \frac{1}{2 + \log_2 x} > 1$; j) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} \geq 1$;
 k) $\frac{\log^2 x - 3 \log x + 3}{\log x - 1} < 1$; l) $\log_4 (3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{3^x - 1}{16} \leq \frac{3}{4}$;
 m) $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $0,3^{x^2+x} > 0,09$ là

- A. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. B. $(-2; 1)$.
 C. $(-\infty; -2)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 2. Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} < \frac{1}{27}$ là

- A. $x < 5$. B. $x > 5$. C. $x > -1$. D. $x < -1$.

Câu 3. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (1; +\infty)$.
 C. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. D. $S = (1; 3)$.

Câu 4. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $(\sqrt{3} - 1)^{x+1} > 4 - 2\sqrt{3}$.

- A. $S = [1; +\infty)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 1]$. D. $S = (-\infty; 1)$.

Câu 5. Tích các nghiệm nguyên dương của bất phương trình $(\sqrt{2})^{x^2-2x} \leq (\sqrt{2})^3$ bằng

- A. 6. B. 4. C. 0. D. 10.

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+2x+1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{x-5}$ là

- A. $x \leq -4$. B. $x \geq 1$. C. $x \leq -4 \vee x \geq 1$. D. $x \leq -4 \cap x \geq 1$.

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^{3-2x} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}$ là

- A. $x \geq 0$. B. $x \leq 0$. C. $x \geq \frac{4}{3}$. D. $x \leq \frac{4}{3}$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 \geq 0$ là

- A. $(-\infty; -1] \cup [8; +\infty)$. B. $[0; 4]$.
C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; +\infty)$.

Câu 9. Bất phương trình $9^x - 3^x - 6 < 0$ có tập nghiệm là

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} - 2 \cdot 3^x - 1 \geq 0$ là

- A. $(-\infty; 0]$. B. $[0; +\infty)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $[1; +\infty)$.

Câu 11. Bất phương trình $5^+ = 5^3 + \leq 20$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(0, 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 12. Giải bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x < 1$.

- A. $x = \log_2 2$. B. $x < \log_2 \frac{2}{3}$. C. $x < \log_2 \frac{2}{3}$. D. $x > \log_2 \frac{2}{3}$.

Câu 13. Cho bất phương trình $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0$ tập nghiệm của bất phương trình là

- A. $[1; 2]$. B. $[0; 1]$. C. $[-2; -1]$. D. $[-1; 0]$.

Câu 14. Nghiệm của bất phương trình $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$ là

- A. $x < 0$. B. $x > 0$. C. $x < 1$. D. $x > 1$.

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^x > (2 + \sqrt{3})^{x+2}$ là

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 16. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 17. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $(2 + \sqrt{3})^{x^2} \leq (7 - 4\sqrt{3})^{x-4}$ bằng

- A. -7. B. 4. C. 5. D. 0.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = 5^x \cdot 7^{x^3+1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x + x^5 \log_5 7 + \log_5 7 > 0$. B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \ln 5 + x^5 \ln 7 + \ln 7 > 0$.
C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \log_7 5 + x^5 > -1$. D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow 1 + x^4 \log_5 7 > -\log_5 7$.

Câu 19. Với giá trị nào của m để bất phương trình $9^x - 2(m+1)3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. $m \neq -2$. B. $m \leq -\frac{3}{2}$.
C. $m \in (-5 - 2\sqrt{3}; -5 + 2\sqrt{3})$. D. không tồn tại m .

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$ là

- A. $(-\infty; 1)$. B. $[0; 2)$. C. $[0; 1) \cup (2; 3]$. D. $[0; 2) \cup (3; 7]$.

Câu 21. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-1) > 2$ là

- A. $x < \sqrt{3} + 1$. B. $x > (\sqrt{3})^2$. C. $x > 4$. D. $x \leq 4$.

Câu 22. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log(2x^2 - 11x + 25) \leq 1$ là

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x+1) > \log_{0,2}(3-x)$ là

- A. $S = (1; 3)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 1)$. D. $S = (-1; 1)$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\ln(x^2 - 3x + 2) \geq \ln(5x + 2)$ là

- A. $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$. B. $[0; 1) \cup (2; 8]$. C. $(-\frac{5}{2}; 0] \cup [8; +\infty)$. D. $[8; +\infty)$.

Câu 25. Bất phương trình $\log_4(x + 7) > \log_2(x + 1)$ có tập nghiệm là

- A. $(1; 4)$. B. $(5; +\infty)$. C. $(-1; 2)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 26. Giải bất phương trình $\log_3(3x - 2) \geq 2\log_9(2x - 1)$, ta được tập nghiệm là

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $[1; +\infty)$.

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x - 1) \leq \log_2(5 - x) + 1$ là

- A. $(1; 5)$. B. $[1; 3]$. C. $(1; 3]$. D. $[3; 5]$.

Câu 28. Bất phương trình $2\log_3(4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2$ là

- A. $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$. D. $\left[\frac{3}{4}; 3\right)$.

Câu 29. Bất phương trình $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x > \log_{20} x$ có tập nghiệm là

- A. $[1; +\infty)$. B. $(0; 1]$. C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x^2 + 2x - 3) + \log(x + 3) - \log(x - 1) < 0$.

- A. $(-4; -2) \cup (1; +\infty)$. B. $(-2; 1)$.
C. $(1; +\infty)$. D. $\emptyset$.

Câu 31. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0$ là

- A. $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$. B. $S = (0; \frac{1}{2}]$.
C. $S = [64; +\infty]$. D. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [64; +\infty)$.

Câu 32. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(2 - x^2)] > 0$ là

- A. $(-1; 1) \cup (2; +\infty)$. B. $(-1; 0) \cup (0; 1)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 33. Giải bất phương trình $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) \geq 0$ trên tập số thực $\mathbb{R}$.

- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. D. $\left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Câu 34. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2(2 - x) + 4\log_2(2 - x) \geq 5$.

- A. $S = (-\infty; 0] \cup \left[\frac{63}{32}; 2\right)$. B. $S = (-\infty; 0] \cup \left[\frac{63}{32}; +\infty\right)$.
C. $[2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 0]$.

Câu 35. Giải bất phương trình $\frac{\ln x + 2}{\ln x - 1} < 0$ ta được tập nghiệm là

- A. $\left(\frac{1}{e^2}; e\right)$. B. $(-\infty; e)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{e^2}\right)$. D. $(e; +\infty)$.

Câu 36. Số nghiệm thực nguyên của bất phương trình $\log(2x^2 - 11x + 15) \leq 1$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 37. Giải bất phương trình $\log_2(3x - 2) > \log_2(6 - 5x)$ được tập nghiệm là $(a; b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = \frac{26}{5}$. B. $S = \frac{8}{3}$. C. $S = \frac{28}{15}$. D. $S = \frac{11}{5}$.

Câu 38. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn điều kiện $\log(x - 40) + \log(60 - x) < 2$?

- A. 20. B. 18. C. 21. D. 19.

Câu 39. Giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $\log_2(3x^2 - 2mx - m^2 - 2m + 4) > 1 + \log_2(x^2 + 2)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m < -1 \vee m > 0$. B. $-1 < m < 0$. C. $m > 0$. D. $m < -1$.

Câu 40. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3^2 x^5 - 25 \log_3 x^2 - 750 \leq 0$ là

- A. 925480. B. 38556. C. 378225. D. 388639.

VẤN ĐỀ 8

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

DẠNG 1:

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 241 Giải các hệ phương trình sau

- 1 $\begin{cases} x + y = 11 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 + \log_2 15 \end{cases}$
- 2 $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 1 + \log 8 \\ \log(x + y) - \log(x - y) = \log 3 \end{cases}$
- 3 $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$
- 4 $\begin{cases} x + y = 25 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$
- 5 $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$
- 6 $\begin{cases} 2^x + 5^{x+y} = 7 \\ 2^{x-1} \cdot 5^{x+y} = 5 \end{cases}$
- 7 $\begin{cases} 3^{\log x} = 4^{\log y} \\ (4x)^{\log 4} = (3y)^{\log 3} \end{cases}$
- 8 $\begin{cases} 4^{\log_3 xy} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases}$
- 9 $\begin{cases} y = 1 + \log_2 x \\ x^y = 64 \end{cases}$
- 10 $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_5(3x + 2y) - \log_5(3x - 2y) = 1 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 9

BÀI TOÁN THỰC TẾ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các dạng toán về lãi suất ngân hàng:

DẠNG 1: LÃI ĐƠN

là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến gửi tiền ra.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$ / kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A + nAr = A(1 + nr)$$

 **Chú ý** trong tính toán các bài toán lãi suất và các bài toán liên quan, ta nhớ $r\%$ là $\frac{r}{100}$

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Ông A gửi vào ngân hàng 1 triệu đồng với lãi đơn 5% / năm thì sau 5 năm số tiền ông A nhận được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

DẠNG 2: LÃI KÉP

tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau. Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ / kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$S_n = A(1 + r)^n$$

 **Ví dụ 2.** Chú Việt gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 5% / năm.

-  Tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm.
-  Với số tiền 10 triệu đó, nếu chú Việt gửi ngân hàng với lãi kép $\frac{5}{12}\%$ /tháng thì sau 10 năm chú Việt nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn hay ít hơn?

DẠNG 3: TIỀN GỬI HÀNG THÁNG

Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào 1 thời gian cố định.

Công thức tính: Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$ / tháng

thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n . Ý tưởng hình thành công thức: + Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_1 = A(1+r) = \frac{A}{r} [(1+r)^1 - 1] (1+r)$$

+ Đầu tháng thứ hai, khi đã gửi thêm số tiền A đồng thì số tiền là

$$T_1 = A(1+r) + A = A[(1+r) + 1] = A \frac{[(1+r)^2 - 1]}{(1+r) - 1} = \frac{A}{r} [(1+r)^2 - 1]$$

+ Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_2 = \frac{A}{r} [(1+r)^2 - 1] (1+r)$$

+ Từ đó ta có công thức tổng quát

$$S_n = \frac{A}{r} [(1+r)^n - 1] (1+r)$$

✍ Ví dụ 3. Đầu mỗi tháng ông Mạnh gửi ngân hàng 580000 đồng với lãi suất 0,7%/ tháng. Sau 10 tháng thì số tiền ông Mạnh nhận được cả gốc lẫn lãi (sau khi ngân hàng đã tính lãi tháng cuối cùng) là bao nhiêu?

✍ Ví dụ 4. Ông Nghĩa muốn có ít nhất 100 triệu đồng sau 10 tháng kể từ khi gửi ngân hàng với lãi 0,7%/ tháng thì mỗi tháng ông Nghĩa phải gửi số tiền ít nhất bao nhiêu?

✍ Ví dụ 5. Đầu mỗi tháng anh Thắng gửi vào ngân hàng số tiền 3 triệu đồng với lãi suất 0,6%/ tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh Thắng được số tiền cả gốc lẫn lãi từ 100 triệu trở lên?

DẠNG 4: VAY VỐN TRẢ GÓP

Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ / tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

a) Công thức tính: Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có $S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên $A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$ và $X = \frac{A(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$

✍ Ví dụ 6. Chị Năm vay trả góp ngân hàng số tiền 50 triệu đồng với lãi suất 1,15%/ tháng trong vòng 2 năm thì mỗi tháng chị Năm phải trả số tiền bao nhiêu?

✍ Ví dụ 7. Anh Ba vay trả góp ngân hàng số tiền 500 triệu đồng với lãi suất 0,9%/ tháng, mỗi tháng trả 15 triệu đồng. Sau bao nhiêu tháng thì anh Ba trả hết nợ?

PHẦN B

HÌNH HỌC

VẤN ĐỀ 1

KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

DẠNG 1: KHỐI ĐA DIỆN LÒI

DẠNG 2: NĂM KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU**TÓM TẮT LÝ THUYẾT****Định nghĩa 5.**

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:

- 1) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- 2) Mỗi đỉnh của nó có số cạnh đi qua là q .

Khối đa diện đều như vậy được ký hiệu là khối đa diện đều loại $\{p; q\}$.

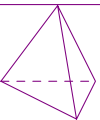
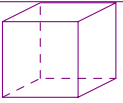
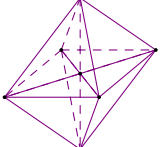
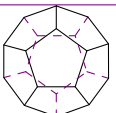
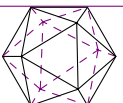
Có năm loại khối đa diện đều. Đó là các khối đa diện đều loại $\{3, 3\}$, loại $\{4, 3\}$, loại $\{3, 4\}$, loại $\{5, 3\}$, và loại $\{3, 5\}$.

Công thức Euler:

$$D + M = C + 2 \quad \text{Số đỉnh là } D.$$

$$qD = pM = 2C \quad \text{Số mặt là } M.$$

$$\text{Số cạnh là } C.$$

Tên	Loại $\{p; q\}$	Hình ảnh	Số đỉnh D	Số mặt M	Số cạnh C	Số cạnh của mỗi mặt p	Số cạnh chung một đỉnh q
Tứ diện đều	$\{3; 3\}$		4	4	6	3	3
Lục diện đều	$\{4; 3\}$		8	6	12	4	3
Bát diện đều	$\{3; 4\}$		6	8	12	3	4
Thập nhị diện đều	$\{5; 3\}$		20	12	30	5	3
Nhị thập diện đều	$\{3; 5\}$		12	20	30	3	5

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu loại khối đa diện đều?

- A. 3. B. 5. C. 20. D. Vô số.

Câu 2. Khối đa diện nào có số đỉnh nhiều nhất?

- A. Khối nhị thập diện đều (20 mặt đều). B. Khối bát diện đều (8 mặt đều).
C. Khối thập nhị diện đều (12 mặt đều). D. Khối tứ diện đều.

Câu 3. Khối bát diện đều là khối đa diện đều loại nào?

- A. $\{5;3\}$. B. $\{3;5\}$. C. $\{3;4\}$. D. $\{4;3\}$.

Câu 4. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Câu 5. Hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 8. B. 12. C. 10. D. 9.

Câu 6. Hình bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4. B. 6. C. 9. D. 12.

Câu 7. Khối đa diện nào sau đây có các mặt không phải là tam giác đều?

- A. Khối bát diện đều. B. Khối mười hai mặt đều.
C. Khối tứ diện đều. D. Khối hai mươi mặt đều.

Câu 8. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là

- A. 4π . B. 8π . C. 12π . D. 10π .

Câu 9. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là

- A. 12π . B. 16π . C. 20π . D. 24π .

Câu 10. Tổng độ dài l của tất cả các cạnh của một tứ diện đều cạnh a là

- A. $l = 4a$. B. $l = 6a$. C. $l = 12a$. D. $l = 24a$.

VẤN ĐỀ 2

KHỐI CHÓP

KIẾN THỨC CẦN NHỚ (THIẾU TRANG 189)

DẠNG 1: HÌNH CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

PHƯƠNG PHÁP

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là chiều cao hình chóp.
- Một hình chóp có hai mặt bên vuông góc với đáy thì đường giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

VÍ DỤ

✍ **Ví dụ 8.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = 3$, $BC = 4$, $SA = 6$. Hãy tính thể tích khối chóp $S.ABC$ rồi suy ra khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Tổng quát

Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = a$, $BC = b$, $SA = c$. Hãy tính thể tích khối chóp $S.ABC$ rồi suy ra khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

✍ **Ví dụ 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$, góc hợp bởi mặt bên (SBC) với mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

✍ **Ví dụ 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a . Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2\sqrt{2}a$. Gọi B' , C' là các điểm lần lượt trên các cạnh SB và SC sao cho $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$, $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$. Tính thể tích khối chóp $A.BB'C'C$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1 Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $AC = 2a$, $SA = a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3}{3}$

Bài 2 Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $BC = a$, $AC = 3a$, $SA = a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Bài 3 Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$, và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3}{2}$

Bài 4 Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $\widehat{ACB} = 60^\circ$, góc hợp bởi SC với mặt phẳng đáy là 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Bài 5 Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết $SA \perp (ABC)$, $AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:**
 $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài 6 Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD = 10$, $AB = 10$, $BC = 24$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$. **ĐS:** $V = 400$

Bài 7 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Bài 8 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Bài 9 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc hợp bởi SB với mặt phẳng đáy là 60° . Tính thể tích V của khối chóp $SABCD$. **ĐS:** $V = a^3\sqrt{3}$

Bài 10 Cho hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$. Góc hợp bởi SC với mặt phẳng đáy là 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$. **ĐS:** $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$

Bài 11 Cho hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Góc hợp bởi SO với mặt phẳng đáy là 60° . Tính thể tích V của khối chóp $SABCD$. **ĐS:** $V = \frac{8\sqrt{2}a^3}{9}$

Bài 12 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , đường chéo AC dài bằng a , hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc hợp bởi SB với mặt phẳng (SAC) là 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Bài 13 Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$. **ĐS:** $V = \frac{a^3}{3}$

Bài 14 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBD) tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $S.BCD$. **ĐS:** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$, $V_{S.BCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Bài 15 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $SABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3}{4}$

Bài 16 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SC \perp (ABC)$ và SB tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 17 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Đường cao của tam giác đều ABC bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 18 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $SA \perp (ABC)$ góc hợp bởi SB với mặt phẳng đáy là 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3}{4}$

Bài 19 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , tâm O , $SA \perp (ABC)$. Góc hợp bởi SO với mặt phẳng đáy là 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 20 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và thể tích của khối chóp đó bằng $\frac{a^3}{4}$. Tính độ dài của cạnh SA **ĐS:** $SA = a\sqrt{3}$

Bài 21 Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$. **ĐS:** $V_{S.ABCD} = a^3$

Bài 22 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , biết $SA \perp (ABC)$, $AB = 4a$, $SB = 5a$. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABC$, tính tỷ số $\frac{a^3}{3V}$. **ĐS:** $\frac{1}{12}$

Bài 23 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, $SA = a$, $BC = 2a$, góc giữa mặt bên (SBC) với đáy bằng 60° .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a **ĐS:** $V = a^3\sqrt{3}$

b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a . **ĐS:** $h_A = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Bài 24 Cho hình chóp $SABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $\hat{A} = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 25 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a . **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Bài 26 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, cho biết $SA = 2a$, tam giác ABC là tam giác đều, các cạnh bằng a . Trên SB , SC lần lượt lấy các điểm B' và C' sao cho $\frac{SB'}{SB} = \frac{1}{2}$ và $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S'AB'C'$. **ĐS:** $V_{S.AB'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

DẠNG 2: HÌNH CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI MẶT ĐÁY

PHƯƠNG PHÁP

Để xác định đường cao của hình chóp, ta thường dùng định lý sau đây:

“Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau có giao tuyến là đường (Δ) . Nếu đường thẳng (a) nằm trong (P) và vuông góc với giao tuyến (Δ) thì (a) vuông góc với mp (Q) ”

Suy ra: Đường cao của hình chóp chính là đường cao của mặt bên đó hạ từ đỉnh của hình chóp.

VÍ DỤ

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy, $SA = SB$ và góc giữa cạnh bên SC với mặt đáy bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

BÀI TẬP

Bài 27 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$. Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Bài 28 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SAC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

ĐS: $V = \frac{a^3}{4}$

Bài 29 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh $4a$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, biết rằng hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy là điểm H nằm trên cạnh AB và $AH = a$. Góc hợp bởi SC với mặt phẳng đáy là 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = 4a^3\sqrt{13}$

Bài 30 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, đường cao bằng $3a$. Tam giác SAB cũng là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = 3a^3\sqrt{3}$

Bài 31 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh a . Mp (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tam giác SBC là tam giác vuông tại S , hình chiếu của điểm S lên cạnh BC là điểm I , biết $\frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$

Bài 32 Cho hình chóp $S.ABC$, biết $AB = 6$, $AC = 3$, $BC = 5$. Tam giác SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, diện tích tam giác SAB bằng 9. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. **ĐS:** $V = 2\sqrt{14}$

Bài 33 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Bài 34 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Bài 35 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 6a$, $AD = 4a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy là 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

$$\text{ĐS: } V = 40a^3$$

Bài 36 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $AD = a$. Mặt bên SAB là một tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ nếu cho biết góc $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Bài 37 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng 30° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

$$\text{ĐS: } V = \frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$$

Bài 38 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là một tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Bài 39 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $6a$, $SA = SB = 5a$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$.

$$\text{ĐS: } V_{S.BMDN} = 24a^3$$

Bài 40 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AD .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

b) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) .

$$\text{ĐS: } \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Bài 41 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AD . Gọi M là trung điểm cạnh CD , cạnh bên SB hợp với mặt phẳng đáy một góc bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABM$.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Bài 42 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

DẠNG 3: HÌNH CHÓP ĐA GIÁC ĐỀU, HÌNH CHÓP ĐỀU

PHƯƠNG PHÁP

Định nghĩa 6.

Hình chóp đa giác đều là hình chóp:

- Có đáy là một đa giác đều (tạm gọi tâm là O).
- Các cạnh bên bằng nhau (nhưng chưa chắc bằng với cạnh đáy)

Suy ra: (khi làm bài không cần phải chứng minh lại)

- Hình chiếu vuông góc của đỉnh hình chóp lên mặt đáy sẽ đi qua tâm O của đa giác đáy.
- Các cạnh bên tạo với mặt đáy những góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với mặt đáy những góc bằng nhau.

Định nghĩa 7.

Hình chóp đều - Có đáy là một đa giác đều (tạm gọi tâm là O). - Các cạnh bên bằng nhau và bằng với cạnh đáy.

Đặc biệt: Hình tứ diện đều là "hình chóp tam giác đều" và có thêm: "tất cả các cạnh bằng nhau"

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy là a . Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh là a , tính V_{ABCD} .

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a . Góc hợp bởi mặt bên và mặt đáy là 60° . Tính $V_{S.ABCD}$.

BÀI TẬP

Bài 43 Tính thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$.

ĐS: $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

Bài 44 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng hai lần cạnh đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$

Bài 45 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$

Bài 46 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

ĐS: $V = \frac{a^3}{12}$

Bài 47 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

ĐS: $V = 6a^3$

Bài 48 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Bài 49 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Bài 50 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm của đáy là O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC . Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{30}}{6}$

Bài 51 Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a . Gọi O là tâm của tam giác ABC . Chiều cao của $S.ABC$ là $2a$. Tính

a) $V_{S.ABC}, V_{S.ABO}$.

ĐS: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}, V_{S.ABO} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

b) Góc giữa cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ với mặt đáy.

ĐS: $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$

c) Góc giữa mặt bên của hình chóp $S.ABC$ với mặt đáy.

ĐS: $\beta = \arctan(4\sqrt{3})$

Bài 52 Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a . Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chiều cao $S.ABCD$ là $2a$. Tính:

a) $V_{S.ABCD}, V_{S.ABO}, V_{S.ABC}$.

ĐS: $V_{S.ABCD} = \frac{2a^3}{3}, V_{S.ABO} = \frac{a^3}{6}, V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}$

b) Góc giữa cạnh bên của hình chóp $S.ABCD$ với mặt đáy.

ĐS: $\alpha = \arctan(2\sqrt{2})$

c) Góc giữa mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ với mặt đáy.

ĐS: $\beta = \arctan 4$

Bài 53 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có chiều cao bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

ĐS: $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$

b) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) theo a .

ĐS: $3a$

Bài 54 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, biết đường cao của đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc giữa cạnh bên với đáy bằng 30° .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

ĐS: $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

ĐS: $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

Bài 55 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = 2a\sqrt{6}$ (với O là tâm của tam giác đáy) và $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
ĐS: $V = 72\sqrt{2}a^3$

Bài 56 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt bên là a . Góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
ĐS: $V = \frac{32a^3}{9}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 11. Cho hình bát diện đều cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}a^2$.

B. $S = \sqrt{3}a^2$.

C. $S = 2\sqrt{3}a^2$.

D. $S = 8a^2$.

Câu 12. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h , diện tích đáy bằng B là

A. $V = \frac{1}{2}Bh$.

B. $V = \frac{1}{6}Bh$.

C. $V = Bh$.

D. $V = \frac{1}{3}Bh$.

Câu 13 (TNPT Quốc gia-2020). Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. 6. B. 12. C. 2. D. 3.

Câu 14. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng 12 m^2 và chiều cao bằng 2 m là

- A. 24 m^3 . B. 8 m^3 . C. 12 m^3 . D. 6 m^3 .

Câu 15. Cho khối chóp có đáy là hình vuông cạnh a , chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối chóp đã cho là

- A. $V = 4a^3$. B. $V = \frac{2}{3}a^3$. C. $V = 2a^3$. D. $V = \frac{4}{3}a^3$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $V = \sqrt{2}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$, $AC = 8$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $V = 32$. B. $V = 40$. C. $V = 24$. D. $V = 192$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và thể tích của khối chóp đó bằng $\frac{a^3}{12}$. Cạnh bên SA có độ dài là

- A. $SA = 2\sqrt{3}$. B. $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $SA = \frac{3a}{4}$. D. $SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp $O.ABC$ có AO , OB , OC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $OA = 1$, $OB = 3$, $OC = 4$. Độ dài đường cao OH của hình chóp $O.ABC$ là

- A. $\frac{13}{12}$. B. $\frac{12}{13}$. C. $\frac{14}{13}$. D. 7.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Biết $AB = 4a$, $AD = 2a$ và $SA = 18a$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = 32a^3$. B. $V = 72a^3$. C. $V = 48a^3$. D. $V = 18a^3$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và $SA \perp (ABC)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 2a^3$. B. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = 6a^3$. D. $V = 8a^3$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = a$, $BC = 2a$, $SA = b$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a và b .

- A. $V = \frac{1}{3}a^2b$. B. $V = \frac{1}{2}a^2b$. C. $V = \frac{1}{6}a^2b$. D. $V = \frac{1}{12}a^2b$.

Câu 24. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết $SA \perp (ABC)$, $AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $V = 4a^3\sqrt{3}$. B. $V = 6a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, $SA = 3a$, $BC = 2a$, góc giữa mặt bên (SBC) với đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = 2a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$, góc hợp bởi mặt bên (SBC) với mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh bên SC với mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC với mặt đáy là 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{28a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{20a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = 20a^3\sqrt{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $\hat{A} = 120^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , với $AD = CD = a$, $AB = 3a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = a^3\sqrt{2}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a , mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy, $SA = SB$ và góc giữa cạnh bên SC với mặt đáy bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Câu 35 (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = SB = SC = 2a$, tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AD . Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $h = \frac{3}{4}a$. B. $h = \frac{2}{3}a$. C. $h = \frac{4}{3}a$. D. $h = \frac{8}{3}a$.

Câu 38. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh là $2a$. Tính V_{ABCD} .

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{4a^3}{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 39. Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$ là

- A. $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{2}$. B. $V = \frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $V = \frac{8a^3}{3}$.

Câu 40 (Chuyên Thái Bình). Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Biết $SA = SB = SC = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $V = 4\sqrt{5}a^3$. B. $V = 4\sqrt{3}a^3$. C. $V = \frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. D. $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 42. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{4a^3}{3}$. C. $y = \frac{4a^3}{3}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Biết chiều cao của hình chóp $S.ABCD$ là $2a$, tính theo a khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$. C. $\frac{a\sqrt{17}}{17}$. D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 44. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$, biết đường cao của tam giác đáy ABC bằng $a\sqrt{3}$. Tính chiều cao của hình chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $\frac{8a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{16a}{3}$. C. $4a$. D. $8a$.

Câu 45. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, cạnh đáy bằng a . Tính góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$.

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Câu 47. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là 5 . Góc giữa mặt bên với đáy là 45° . Tính theo a chiều cao hình chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{5\sqrt{3}}{12}$.

Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy là a . Biết góc giữa cạnh bên với mặt đáy là 60° . Gọi M là trung điểm CD , N là trung điểm AD . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABMN$.

- A. $V = \frac{5a^3\sqrt{6}}{48}$. B. $V = \frac{5a^3\sqrt{6}}{24}$. C. $V = \frac{5a^3\sqrt{6}}{24}$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$. Biết $SA \perp (ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = 3MB$, N là hình chiếu vuông góc của A trên SC , $SA = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{3}{16}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi I, K lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB$ và $\triangle SAC$. Tỉ số $\frac{V_{S.AIK}}{V_{S.ABC}}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{9}$.

Câu 51 (Trích đề thi thử lần 1 của Bộ GD - 2016).

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$, $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

- A. $V = \frac{7}{2}a^3$. B. $V = 14a^3$. C. $V = \frac{28}{3}a^3$. D. $v = 7a^3$.

VẤN ĐỀ 3

KHỐI LĂNG TRỤ

DẠNG 1: LĂNG TRỤ ĐỨNG, LĂNG TRỤ XIÊN

$$V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

$S_{\text{đáy}}$: là diện tích đáy

h : là chiều cao của lăng trụ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa $A'B$ với mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$, góc giữa đường chéo AC' với đáy là 60° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật đó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

LĂNG TRỤ ĐỨNG

Bài 57 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Bài 58 Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , với $BA = BC = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a . **ĐS:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Bài 59 Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a . **ĐS:** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$

Bài 60 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ theo a . **ĐS:** $V = 4\sqrt{3}a^3$

Bài 61 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\overline{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $B'C'C$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . a. Tính độ dài đoạn AC' . **ĐS:** $AC' = 3a$ b. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. **ĐS:** $V = \sqrt{6}a^3$

Bài 62 Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° , tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. **ĐS:** $V = 8\sqrt{3}$

LĂNG TRỤ XIÊN

Bài 63 Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tam giác ABC là tam giác vuông tại B và đường cao của tam giác đó là BH . Biết $A'H \perp (ABC)$ và $AB = 1$, $AC = 2$, $AA' = \sqrt{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. **ĐS:** $V = \frac{\sqrt{21}}{8}$

Bài 64 Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a , các cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. **ĐS:** $V = \frac{3a^2}{8}$

Bài 65 Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa AC' và (ABC) bằng 60° và $AC' = 2a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. **ĐS:** $V = a^3\sqrt{3}$

Bài 66 Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của cạnh BC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. **ĐS:** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$

Bài 67 Cho hình lăng trụ $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\overline{ABC} = 60^\circ$, chân đường cao của lăng trụ hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$. Góc giữa mặt phẳng $(AA'B'B)$ với đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD \cdot A'B'C'D'$. **ĐS:** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$

Bài 68 Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và đỉnh A' cách đều 3 điểm A, B, C . Biết góc giữa $A'A$ với mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. **ĐS:** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Bài 69 Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có 2 đáy là các tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Hình chiếu H của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. **ĐS:** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$ b. Tính góc giữa BC và AC' . **ĐS:** $\alpha = \arctan 3$

Bài 70 Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD \cdot A'B'C'D'$. **ĐS:** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 52. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

- A. $V = Bh$. B. $V = \frac{1}{2}Bh$. C. $V = 2Bh$. D. $V = \frac{1}{3}Bh$.

Câu 53. Thể tích khối lập phương có cạnh bằng 20 cm là

- A. $V = 80 \text{ cm}^3$. B. $V = 800 \text{ cm}^3$. C. $V = 8000 \text{ cm}^3$. D. $V = 80000 \text{ cm}^3$.

Câu 54 (TNPT Quốc gia-2020). Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước là $2; 4; 6$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

- A. 16. B. 12. C. 48. D. 8.

Câu 55 (Chuyên Hùng Vương-Gia lai). Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $4a^2$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng a . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. a^3 . B. $\frac{1}{3}a^3$. C. $3a^3$. D. $4a^3$.

Câu 56. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , với $BA = BC = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 57 (Chuyên quốc học Huế). Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ đó theo a .

- A. $\frac{3a^3}{2}$. B. $\frac{3a^3}{4}$. C. $\frac{4a^3}{3}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 58. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa $A'C$ và đáy là 60° . Tính theo a thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 59. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Biết $BB' = a$ và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = \frac{a^3}{2}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{6}$.

Câu 60 (Chuyên Thái Bình). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích mặt chéo $ACC'A'$ bằng $2\sqrt{2}a^2$. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. a^3 . B. $2a^3$. C. $\sqrt{2}a^3$. D. $2\sqrt{2}a^3$.

Câu 61. Tính thể tích hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{1}{3}a^3$.

Câu 62. Hình lập phương có đường chéo bằng a thì có thể tích bằng

- A. $V = 3\sqrt{3}a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{9}a^3$. D. $V = a^3$.

Câu 63. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{3a^3}{8}$. B. $V = \frac{a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 64. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $BB'C'C$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính theo a độ dài đoạn AC' và thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $3a, a^3\sqrt{6}$. B. $a\sqrt{3}, \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $3a, 2a^3\sqrt{6}$. D. $a\sqrt{3}, \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 65. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm của tam giác ABD . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AA' = a\sqrt{2}$.

- A. $V = a^3\sqrt{5}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 66. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AA' = a\sqrt{2}$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V = \frac{3a^3}{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Câu 67. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $A'A = A'B = A'D$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$.

- A. $V = \frac{8\sqrt{10}a^3}{3}$. B. $V = \frac{16\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = 3a^3\sqrt{3}$.

Câu 68. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và đỉnh A' cách đều 3 điểm A, B, C . Biết góc giữa $A'A$ với mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 69. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° . Hình chiếu vuông góc H của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của BC' . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{8}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 70. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = a$. Lấy điểm M trên cạnh $A'D'$ sao cho $A'M = 3MD'$. Tính theo a thể tích khối chóp $M.ABC$ và thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $\frac{2a^3}{3}, 2a^3$. B. $\frac{a^3}{3}, \frac{2a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{3}, 2a^3$. D. $a^3, \frac{4a^3}{3}$.

Câu 71. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đường chéo $AC_1 = 2a$. Hãy tính thể tích khối lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

- A. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{8a^3}{27}$. C. $8a^3$. D. $6a^3\sqrt{6}$.

Câu 72. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $A'C$ tạo với $(A'BCD')$ một góc 30° . Gọi O' là giao điểm $A'C'$ và BD' . Tính theo a thể tích khối chóp $O'.ABCD$

- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{3a^3}{2}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{9}$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 73 (Đề thi thử lần 1 của Bộ GD – 2016).

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\text{ cm}$ rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

- A. $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = 6$.

Câu 74 (Đề thi thử lần 2 của Bộ GD-2016).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

- A. $h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. B. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. C. $h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. D. $h = \sqrt{3}a$.

Câu 75. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.B'C'$.

- A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $v = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 76 (Đề thi thử lần 2 của Bộ GD-2016).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

- A. $R = 3a$. B. $R = \frac{3a}{4}$. C. $R = \frac{3a}{2}$. D. $R = 2a$.

Câu 77 (Đề thi thử lần 3 của Bộ GD-2016).

Tính thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 78 (Đề thi thử lần 3 của Bộ G D - 2016).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. B. $V = \sqrt{3}a^3$. C. $v = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 79 (Đề thi thử lần 3 của Bộ G D-2016).

Cho khối tứ diện có thể tích là V . Gọi V' là thể tích khối đa diện có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

- A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SO \perp (ABCD)$, $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = 4a$, $SO = 2\sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm SC . Tính thể tích khối chóp $M.OBC$.

- A. $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $4a^3$.

Câu 81. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và $A'B = 3a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\sqrt{2}a^3$. B. $2a^3$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 82. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi I là trung điểm CD . Biết thể tích của khối chóp là $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Góc giữa cạnh bên SI với mặt phẳng đáy là

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. $\arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 83. Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh là 4 cm , người ta gấp nó thành 4 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tứ giác đều như hình vẽ. Hỏi thể tích lăng trụ này là bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{3}\text{ cm}^3$. B. 16 cm^3 . C. 4 cm^3 . D. $\frac{64}{3}\text{ cm}^3$.

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABC$ với tam giác ABC cân, $AB = AC = 3a$, $BC = 2a$. Các mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Gọi H là hình chiếu của S lên mp (ABC) . Biết thuộc miền trong của tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

HD: Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính r thông qua diện tích tam giác ABC , từ đó suy ra chiều cao hình chóp $S.ABC$. suy ra thể tích khối chóp $S.ABC$

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 85. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt bên của hình chóp tạo với đáy một góc 60° . Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC , SD lần lượt tại M , N . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABMN$.

- A. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 86. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích mặt bên $ABB'A'$ bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC' và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 7. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

HD: Từ hình hộp $ABC.A'B'C'$, ta tạo thêm 2 điểm D và D' để có được hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Để ý rằng $V_{ABC.ABC} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

- A. 14. B. $\frac{28}{3}$. C. $\frac{14}{3}$. D. 28.

Câu 87. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(AB'C')$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$.

HD: Gọi M là trung điểm $A'C'$, dựng MN vuông góc AC' . Chứng minh $[(ACC'A'); (AB'C')] = \widehat{MNB'} = 60^\circ$. Tính $\tan \widehat{C'NM}$ rồi suy ra độ dài AA' . Suy ra $V_{ABC.A'B'C'}$. Từ lập luận $V_{B'.ACC'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{B'.ABC} = V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$ ta được kết quả cần tìm

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

VẤN ĐỀ 1

MẶT CẦU- KHỐI CẦU

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

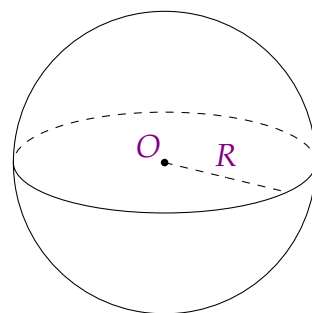
- 1 Định nghĩa** Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O và bán kính R .
Ký hiệu $S(O; R)$.

Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O; R)$ cùng với các điểm trong mặt cầu đó gọi là khối cầu tâm O bán kính R .

Lưu ý Tập hợp các điểm nằm trong không gian nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính AB .

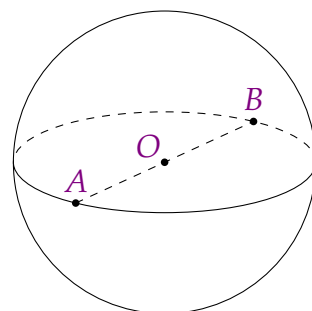
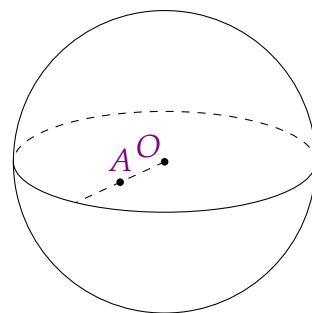
- 2 Công thức**

- Thể tích khối cầu bán kính R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$

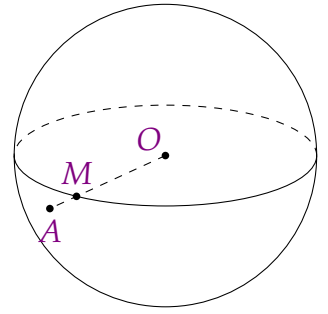


- 3 Vị trí tương đối của một điểm đối với mặt cầu**
Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A bất kì, khi đó:

- Nếu $OA < R \Leftrightarrow A$ nằm trong mặt cầu.
- Nếu $OA = R \Leftrightarrow A \in S(O; R)$. Khi đó OA gọi là bán kính của mặt cầu. Nếu $OA = OB$ là hai bán kính sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ thì đoạn thẳng AB gọi là một đường kính của mặt cầu.



Nếu $OA > R \Leftrightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu.

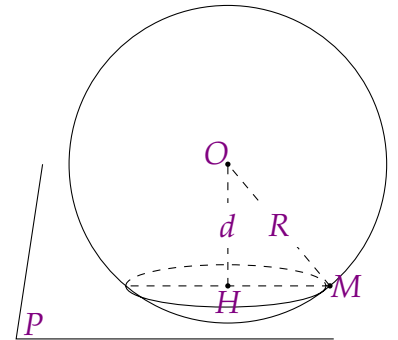


- Suy ra khối cầu $S(O; R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \leq R$.

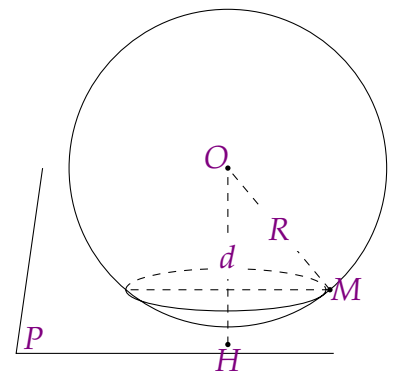
4 Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến (P) và H là hình chiếu của O trên $(P) \Rightarrow d = OH$.

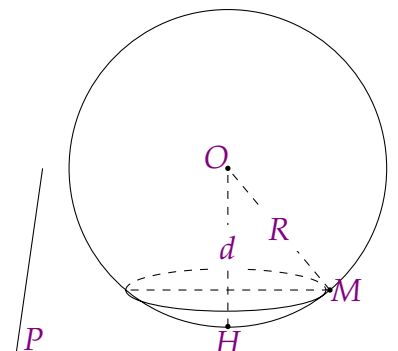
- Nếu $d < R$ thì (P) cắt mặt cầu $S(O; R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P) có tâm là H và bán kính $r = HM = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - OH^2}$.



- Nếu $d > R$ thì (P) không cắt mặt cầu $S(O; R)$.



- Nếu $d = R$ thì (P) và $S(O; R)$ có một điểm chung duy nhất. Ta nói mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc (P) . Do đó, điều kiện cần và đủ để (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là $\boxed{d(O; (P)) = R}$



DẠNG 1: TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP

VÍ DỤ

- 1 Hình chóp có các đỉnh cùng nhìn một đoạn thẳng dưới một góc vuông

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $A \perp (ABC)$. $BA = a$, $BC = b$, $SA = c$. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải.



- 2 Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau

Ví dụ 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, $AB = a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Biết góc hợp bởi cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ với các mặt đáy bằng 60° . Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải.



- 3 Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy

Ví dụ 3. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 6a$, $AC = 8a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải.



DẠNG 2: TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH MẶT CẦU

 **Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SC tạo với đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải.



 **Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = h$.

- Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$
- Tính diện tích và thể tích khối cầu nói trên theo a và h .

Lời giải.



 **Ví dụ 3.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , gọi H là hình chiếu của A xuống (BCD) . Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải.



Một số công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện, hình tròn xoay

Hình	Bán kính mặt cầu ngoại tiếp R	Bán kính mặt cầu nội tiếp r
Hình hộp chữ nhật có kích thước 3 cạnh a, b, c	$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$	
Hình lập phương cạnh a	$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r = \frac{a}{2}$
Hình nón	$R = \frac{(h_{\text{nón}})^2 + (R_{\text{đáy}})^2}{2 \cdot h_{\text{nón}}}$	$r = \frac{h_{\text{nón}} \cdot r_{\text{đáy}}}{h_{\text{nón}} + r_{\text{đáy}}}$
Hình chóp đa giác đều hình chóp đều	$R = \frac{(h_{\text{chóp}})^2 + (R_{\text{đáy}})^2}{2 \cdot h_{\text{chóp}}}$ hoặc $R = \frac{(\text{Cạnh bên})^2}{2 \cdot h_{\text{chóp}}}$	
Tứ diện đều cạnh a	$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$	$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$
Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy	$R = \sqrt{(R_{\text{đáy}})^2 + \frac{(h_{\text{chóp}})^2}{4}}$	
Hình trụ	$R = \sqrt{(R_{\text{đáy}})^2 + \frac{(h_{\text{trụ}})^2}{4}}$	
Lăng trụ đứng	$R = \sqrt{(R_{\text{đáy}})^2 + \frac{(h_{\text{LT}})^2}{4}}$	
Tứ diện $OABC$ vuông tại O	$R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}$	

BÀI TẬP TỰ LUẬN

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Thể tích của khối cầu có bán kính R là:

- A. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.. B. $V = \frac{4}{3}\pi R^2$.. C. $V = \frac{1}{3}\pi R^3$.. D. $V = 4\pi R^3$..

Câu 2. Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là:

- A. $S = \pi R^2$.. B. $S = \frac{4}{3}\pi R^3$.. C. $S = \frac{3}{4}\pi R^2$.. D. $S = 4\pi R^2$..

Câu 3. Một mặt cầu có đường kính là $2a$ thì có diện tích bằng

- A. $4\pi a^2$. B. $16\pi a^2$. C. $8\pi a^2$. D. $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 4. Mặt cầu (S) có diện tích bằng $100\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ thì có bán kính là:

- A. 3 cm. B. 4 cm. C. 5 cm. D. $\sqrt{5}$ cm.

VẤN ĐỀ 2

MẶT NÓN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

VÍ DỤ

✍ **Ví dụ 2.** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$ và $AC = 2a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AC ?

✍ **Ví dụ 3.** Tính thể tích của khối nón có bán kính đáy $r = 3 \text{ cm}$ và góc ở đỉnh 60° ?

✍ **Ví dụ 4.** Cho hình nón (N) có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a . Tính diện tích toàn phần của hình nón (N) theo a ?

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 19 Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Tính diện tích xung quanh của hình nón. **ĐS:** $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$

Bài 20 Thiết diện đi qua trục của hình nón đỉnh S là tam giác vuông cân SAB có cạnh huyền bằng $2a$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón và thể tích V của khối nón đó. **ĐS:**
 $S_{tp} = (\sqrt{2} + 1)\pi a^2, V = \frac{\pi a^3}{3}$

Bài 21 Một hình nón có đường kính đáy là $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120° . Tính thể tích của khối nón đó theo a . **ĐS:** $V = \pi a^3$

Bài 22 Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $AC = \sqrt{3}a$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón và thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB . **ĐS:** $S_{tp} = (2\sqrt{3} + 3)\pi a^2, V = \pi a^3$

Bài 23 Cho khối nón có bán kính đường tròn đáy bằng 10 và diện tích xung quanh bằng 120π . Tính chiều cao h của khối nón đó. **ĐS:** $h = 2\sqrt{11}$

Bài 24 Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích đáy của hình nón bằng π . Tính chiều cao của hình nón đó. **ĐS:** $h = \sqrt{3}$

Bài 25 Một khối nón có thể tích bằng 30π , nếu giữ nguyên chiều cao và tăng bán kính khối nón đó lên 2 lần thì thể tích của khối nón mới bằng bao nhiêu? **ĐS:** $V_{mới} = 120\pi$

Bài 26 Cho hình nón (N) có độ dài đường sinh bằng 5 và diện tích xung quanh bằng 15π . Tính diện tích toàn phần của hình nón (N) . **ĐS:** $S_{tp} = 24\pi$

Bài 27 Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 20 \text{ cm}$, bán kính đáy $r = 25 \text{ cm}$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm của đáy là 12 cm . Hãy xác định thiết diện của (P) và khối nón và tính diện tích của thiết diện đó. **ĐS:** $S = 300 (\text{cm}^2)$

Bài 28 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. **ĐS:** $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{5}a^2}{4}, V = \frac{\pi a^3}{12}$

Bài 29 Một hình nón tròn xoay có đỉnh là D , O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng l và có góc giữa đường sinh và đáy bằng α .

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón đó.

ĐS:

$$S_{xq} = \pi l^2 \cos \alpha, V = \frac{\pi l^2 \cos^2 \alpha}{3}$$

b) Gọi I là một điểm trên đường cao DO của hình nón sao cho $\frac{DI}{DO} = k$ ($0 < k < 1$). Tính diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón.

$$\text{ĐS: } S_{(C)} = \pi k^2 l^2 \cos^2 \alpha$$

Bài 30 Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng a

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó. ĐS: $S_{tp} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) \pi a^2, V = \frac{\pi \sqrt{2} a^3}{12}$

b) Một mặt phẳng đi qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° . Tính diện tích thiết diện được tạo nên.

$$\text{ĐS: } S_{\text{thiết diện}} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{3}$$

Bài 31 Cho $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều có các cạnh bên bằng a và góc giữa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng α . Hình nón đỉnh S có đáy nội tiếp tam giác đều ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp đã cho. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón này theo a và α .

ĐS:

$$S_{xq} = \frac{\pi a^2}{12 \cos \alpha (1 + 3 \cos^2 \alpha)}$$

Bài 32 Cho khối nón có bán kính đáy $r = 12 \text{ cm}$ và có góc ở đỉnh là $\alpha = 120^\circ$. Hãy tính diện tích của thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc nhau.

$$\text{ĐS: } S_{\text{thiết diện}} = 96 \text{ cm}^2$$

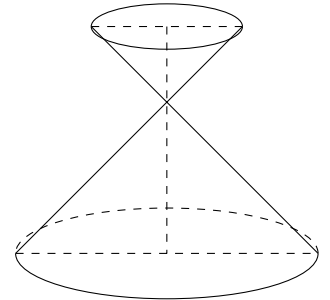
Bài 33 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao SO bằng h và góc $\widehat{SAB} = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$). Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ của hình chóp.

$$\text{ĐS: } S_{xq} = \frac{\pi h^2 \sqrt{2(\tan^2 \alpha + 1)}}{\tan^2 \alpha - 1}$$

Bài 34

Cho một đồng hồ cát như hình bên (gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi \text{ cm}^3$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?

$$\text{ĐS: } \frac{1}{8}$$



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho

- A. $V = 16\pi\sqrt{3}$. B. $V = 12$. C. $V = 4$. D. $V = 4\pi$.

Câu 2. Cho hình nón có đường kính đáy bằng 2. Thể tích của khối nón bằng

- A. $V = \pi\sqrt{5}$. B. $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$. D. $V = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 3. Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π . Tính thể tích V của khối nón (N) đó.

- A. $V = 12\pi$. B. $V = 20\pi$. C. $V = 36\pi$. D. $V = 60\pi$.

Câu 4. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho

- A. $l = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $l = 2a\sqrt{2}$. C. $l = \frac{3a}{2}$. D. $l = 3a$.

Câu 5. Cho hình nón có đường sinh bằng $4a$, diện tích xung quanh bằng $8\pi a^2$. Chiều cao của hình nón là

- A. $2a$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Cho hình nón có diện tích đáy bằng 16π (dm²) và diện tích xung quanh bằng 20π (dm²). Thể tích khối nón bằng

- A. 16π (dm³). B. $\frac{16\pi}{3}$ (dm³). C. 8π (dm³). D. 32π (dm³).

Câu 7. Một hình nón có đường kính đáy bằng $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120° . Tính thể tích của khối nón đó theo a

- A. $\frac{\pi a^2}{2}$. B. πa^2 . C. $\frac{4\pi a^2}{9}$. D. $2\pi a^2$.

Câu 8. Cho khối nón có bán kính đáy bằng $r = 12$, góc ở đỉnh bằng 120° . Thiết diện qua hai đường sinh của hình nón vuông góc nhau có diện tích là

- A. 48. B. 72. C. 96. D. 144.

Câu 9. Cho tam giác OIM vuông tại I , $IM = 4$, góc $\widehat{IOM} = 30^\circ$. Thể tích của khối nón được tạo thành khi xoay tam giác OIM quanh trục OI là

- A. $64\pi\sqrt{3}$. B. $\frac{64\pi\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{64\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2a$, góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Độ dài đường sinh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AB là

- A. $l = 4a$. B. $l = a\sqrt{3}$. C. $l = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $l = 2a$.

Câu 11. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , gọi I là trung điểm của BC , $BC = 2a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI .

- A. $\pi\sqrt{2}$. B. 2π . C. $2\pi\sqrt{2}$. D. 4π .

Câu 12. Cho tam giác đều ABC cạnh a quay xung quanh đường cao AH tạo nên hình nón. Thể tích khối nón bằng

- A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{\pi a^3}{24}$. D. $\frac{\pi a^3}{8}$.

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = AC = 2a$. Tính độ dài đường sinh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AC .

- A. $a\sqrt{2}$. B. $2a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{5}$.

Câu 14. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Thể tích khối nón là

- A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{8}$.

Câu 15. Cho hình nón có chiều cao bằng $\frac{3a}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua trục của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông. Diện tích toàn phần của hình nón là

- A. $\frac{9\pi a^2(1+\sqrt{2})}{2}$. B. $\frac{9a^2(1+\sqrt{2})}{2}$. C. $\frac{9\pi a^2}{4}$. D. $\frac{9\pi a^2(1+\sqrt{2})}{4}$.

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là S và đáy là hình tròn nội tiếp $ABCD$ bằng

- A. $\frac{\pi a^2 \sqrt{15}}{4}$. B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{4}$. C. $\frac{\pi a^2 \sqrt{15}}{2}$. D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là S và đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

- A. $\frac{\pi a^2}{6}$. B. $\frac{\pi a^2}{3}$. C. $\frac{2\pi a^2}{3}$. D. $\frac{a^2}{6}$.

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Thể tích của khối nón có đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp $ABCD$ bằng $\frac{\pi a^3}{6}$. Chiều cao của hình nón là

- A. a . B. $2a$. C. $3a$. D. $4a$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy ABC đến một mặt bên là $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. B. $\frac{4\pi a^3}{9}$. C. $\frac{4\pi a^3}{27}$. D. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Câu 20. Tại khu nghỉ dưỡng Kim Bôi có một nhà hàng được thiết kế theo kiến trúc hình nón rất đẹp vừa được tạp chí kiến trúc Archdaily (Mỹ) đăng tải. Hình nón này được làm từ tre là chủ yếu, chiều cao nhà hàng này là 15 m và đường kính lớn nhất của nhà hàng này là 32 m. Tính diện tích xung quanh của nhà hàng này.

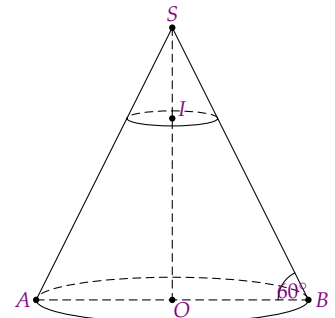
- A. 1507 m^2 . B. 1530 m^2 . C. 3351 m^2 . D. 1100 m^2 .

Câu 21.

Câu 22.

Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S , O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi I là một điểm trên đường cao SO của hình nón sao cho tỉ số $\frac{SI}{SO} = \frac{1}{3}$. Khi đó, diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón là

- A. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{18}$. B. $\frac{\pi a^2}{9}$. C. $\frac{\pi a^2}{18}$. D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{36}$.



VẤN ĐỀ 3

MẶT TRỤ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa: Hình trụ là hình tròn xoay sinh bởi một hình chữ nhật quay quanh một cạnh.

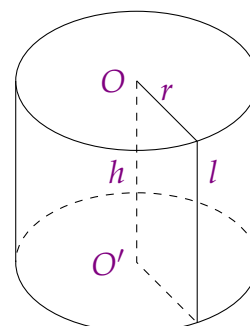
(C) và (C') là hai đường tròn đáy;

r là bán kính hình trụ;

OO' là trục của hình trụ

l là đường sinh của hình trụ

h là chiều cao của hình trụ $l = h$



2. Công thức:

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi.r.l$

* Thể tích của khối trụ tròn xoay: $V_{kt} = \pi.r^2.h = \pi.r^2.l$

* Diện tích 2 đáy của hình trụ: $S_d = 2\pi.r^2$

* Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = 2\pi.r.l + 2\pi.r^2$

VÍ DỤ

✍ Ví dụ 1. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có đường kính đáy là 50 cm và khoảng cách giữa hai đáy là 70 cm ?

✍ Ví dụ 2. Tính diện tích toàn phần của hình trụ được tạo thành khi quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh AD biết $AB = a$, $AD = 2a$?

✍ Ví dụ 3. Tính thể tích khối trụ biết thiết diện qua trục của hình trụ đó là một hình vuông có cạnh 10R ?

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 35 Hình trụ có bán kính bằng 5, khoảng cách giữa hai đáy bằng 7. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó. **ĐS:** $S_{tp} = 120\pi$

Bài 36 Một hình trụ có bán kính đáy bằng 2cm, thiết diện qua trục là hình vuông. Tính diện tích xung quanh và thể tích khối trụ đó. **ĐS:** $S_{xq} = 16\pi (cm^2)$, $V = 16\pi (cm^3)$

Bài 37 Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π , thiết diện qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ đó. **ĐS:** $V = 2\pi$

Bài 38 Một hình vuông cạnh a quay quanh một cạnh tạo thành một hình tròn xoay có diện tích toàn phần là bao nhiêu? **ĐS:** $S_{tp} = 4\pi a^2$

Bài 39 Một khối trụ (T) có thể tích là $81\pi (cm^3)$ và có đường sinh gấp ba lần bán kính đáy. Tính độ dài đường sinh của (T). **ĐS:** $h = 9cm$

Bài 40 Một khối trụ (T) có thể tích là $120\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ và có bán kính đáy bằng 6 cm . Tính chiều cao của (T). ĐS: $h = 4\text{cm}$

Bài 41 Cho khối trụ có chiều cao bằng 20cm và bán kính đáy bằng 10cm . Người ta kẻ hai bán kính OA và $O'B'$ lần lượt nằm trên hai đáy sao cho chúng hợp với nhau một góc 60° . Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với trục của khối trụ đó. Hãy tính diện tích của thiết diện. ĐS: $S_{\text{thiết diện}} = 200\text{cm}^2$

Bài 42 Một khối trụ có bán kính đáy bằng r và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a) Tính diện tích xung quanh của khối trụ đó. ĐS: $S_{xq} = 4\pi r^2$

b) Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho. ĐS: $V_{LT} = 8r^3$

Bài 43 Một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O' bán kính r và có đường cao $h = r\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho OA vuông góc với $O'B$.

a) Chứng minh các mặt bên của tứ diện $OABO'$ là các tam giác vuông. Tính thể tích khối tứ diện này. ĐS: $V_{OABO'} = \frac{\sqrt{2}r^3}{6}$

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với OO' . Tính khoảng cách giữa trục OO' và (α) . ĐS: $d[OO'; (\alpha)] = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

Bài 44 Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50cm và có chiều cao $h = 50\text{cm}$.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên. ĐS: $S_{xq} = 5000\pi, V = 125000\pi$

b) Một đoạn thẳng có chiều dài là 100cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng đó đến trục của hình trụ. ĐS: 25cm

Bài 45 Một khối trụ có bán kính đáy $r = 53$ và chiều cao $h = 56$. Một thiết diện song song với trục là hình vuông. Tính khoảng cách từ trục đến mặt phẳng thiết diện. ĐS: 45

Bài 46 Cho hình trụ có bán kính đáy và chiều cao bằng nhau và bằng r . Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB, CD lần lượt là hai dây cung của hai đáy, các cạnh AD, BD không phải là đường sinh của hình trụ. Tính cạnh của hình vuông. ĐS: $\frac{r\sqrt{10}}{2}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy và chiều cao đều bằng 2.

- A. $V = 4\pi$. B. $V = 12\pi$. C. $V = 16\pi$. D. $V = 8\pi$.

Câu 2. Cho hình trụ có bán kính đáy 3 cm, đường cao 4 cm, diện tích xung quanh của hình trụ này là: 20π (cm²) 22π (cm²) 24π (cm²) 26π (cm²)

Câu 3. Một hình trụ có bán kính R , chiều cao $R\sqrt{3}$. Diện tích toàn phần của hình trụ

- A. $\pi R^2(\sqrt{3} + 1)$. B. $2\pi R^2\sqrt{3} + \pi R^2$. C. $2\pi R^2(\sqrt{3} + 1)$. D. $2\pi R(\sqrt{3} + 1)$.

Câu 4. Cho hình trụ có khoảng cách giữa hai đáy bằng 10, biết diện tích xung quanh của hình trụ bằng 80π . Thể tích của khối trụ là:

- A. 160π . B. 100π . C. 64π . D. 144π .

Câu 5. Một hình trụ có diện tích toàn phần là $10\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Chiều cao của hình trụ đó là:

- A. $3a$. B. $4a$. C. $2a$. D. $6a$.

Câu 6. Một hình trụ có bán kính $2R$ và thiết diện qua trục là hình vuông. Thể tích khối trụ là

- A. $16R^2\pi$. B. $16R^3\pi$. C. $24R^2\pi$. D. $24R^3\pi$.

Câu 7. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a , mặt phẳng qua trục cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $8a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ?

- A. $4\pi a^2$. B. $8\pi a^2$. C. $16\pi a^2$. D. $2\pi a^2$.

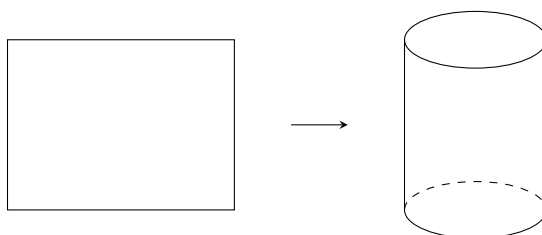
Câu 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$ (cm), $AD = 5$ (cm). Thể tích khối trụ hình thành được khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đoạn AB bằng:

- A. 25π (cm³). B. 75π (cm³). C. 50π (cm³). D. 45π (cm³).

Câu 9. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$ và $BC = 2$. Gọi P, Q lần lượt là các điểm trên cạnh AB và CD sao cho: $BP = 1, QD = 3QC$. Quay hình chữ nhật $APQD$ xung quanh trục PQ ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó

- A. 10π . B. 12π . C. 4π . D. 6π .

Câu 10. Một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài 10,2 dm, chiều rộng 2π dm được uốn lại thành mặt xung quanh của một chiếc thùng đựng nước có chiều cao 2π dm (như hình vẽ). Biết rằng chỗ ghép mát 2 cm. Hỏi thùng đựng được bao nhiêu lít nước?



- A. 50 lít. B. 100 lít. C. 20,4 lít. D. 20 lít.

Câu 11. Cho lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$.

- A. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{2}$. C. $\frac{S_2}{S_1} = \pi$. D. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 12 (trích đề thi thử lần 3 của Bộ GD - 2016).

Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{\pi a^3}{4}$. B. $V = \pi a^3$. C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$. D. $V = \frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 13. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là một tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. Cạnh AA' hợp với $B'C$ góc 60° . Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ theo a là:

- A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{6}$. D. $V = \frac{\pi a^3}{6}$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABCA'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$. đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = 2a\sqrt{3}$. Thể tích hình trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $6\pi a^2$. B. $6\pi a^3$. C. $18\pi a^3$. D. $6a^3$.

Câu 15 (trích đề thi thử lần 2 của Bộ GD - 2016).

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. B. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$. C. $V = 3\pi a^2 h$. D. $V = \pi a^2 h$.

Câu 16. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ với mặt phẳng (α)

- A. $\frac{R^2 \sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{3R^2 \sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{3R^2 \sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Hình trụ bán kính đáy r . Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy với $OO' = 2r$. Một mặt cầu tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O' . Gọi V_C và V_T lần lượt là thể tích của khối cầu và khối trụ. Khi đó $\frac{V_C}{V_T}$ là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 18. Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , chiều cao bằng $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy là R . Một hình nón có đỉnh là (O') và đáy là hình tròn $(O; R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng:

- A. 3. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

Câu 19. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu có bán kính bằng 1. Thể tích khối trụ đó là

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Câu 20. Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đó là:

- A. 6π . B. 8π . C. 10π . D. 12π .

Câu 21. Trong một chiếc hộp hình trụ, người ta bỏ vào đáy 3 quả banh tennis, biết đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng 3 lần đường kính của quả banh. Gọi S_1 là tổng diện tích xung quanh 3 quả banh, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỷ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

