



TRƯỜNG THCS-THPT MỸ THUẬN
TỔ TOÁN



TÀI LIỆU ÔN THI HỌC KỲ 2
LỚP 12

MÔN TOÁN

*Once you stop learning,
you'll start dying*



MỤC LỤC

Chủ đề 1. Nguyên hàm - Tích phân và ứng dụng	2
A. Lý thuyết	2
1. Nguyên hàm	2
2. Tích phân	2
3. Ứng dụng của tích phân trong hình học	3
B. Thực hành	4
1. Bài tập trên lớp	4
2. Bài tập về nhà	6
Chủ đề 2. Số phức	8
A. Lý thuyết	8
1. Số phức	8
2. Phép cộng, trừ, nhân, chia số phức	8
B. Thực hành	9
1. Bài tập trên lớp	9
2. Bài tập về nhà	10
Chủ đề 3. Phương pháp tọa độ trong không gian	11
A. Lý thuyết	11
1. Hệ tọa độ Oxyz	11
2. Phương trình mặt cầu	12
3. Phương trình mặt phẳng	12
4. Phương trình đường thẳng	13
B. Thực hành	14
1. Bài tập trên lớp	14
2. Bài tập về nhà	15

Chủ đề 1.

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. LÝ THUYẾT

1 NGUYÊN HÀM

1 Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1. $\int f'(x) dx = \dots\dots\dots$

! Tính chất 2. $\int k \cdot f(x) dx = \dots\dots\dots$ (k là hằng số)

Tính chất 3. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \dots\dots\dots$

Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

- $\int 0 dx = \dots\dots\dots$

- $\int a^x dx = \dots\dots\dots$ ($a > 0, a \neq 1$)

- $\int dx = \dots\dots\dots$

- $\int \cos x dx = \dots\dots\dots$

- $\int x^n dx = \dots\dots\dots$ ($n \neq -1$)

- $\int \sin x dx = \dots\dots\dots$

- $\int \frac{1}{x} dx = \dots\dots\dots$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \dots\dots\dots$

- $\int e^x dx = \dots\dots\dots$

- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \dots\dots\dots$

2 Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Định lý

Nếu $\int f(u) dx = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \dots\dots\dots$$

Hệ quả

Với $u = ax + b$ ($a \neq 0$) thì

$$\int f(ax + b) dx = \dots\dots\dots$$

3 Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{K}$ thì

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = \dots\dots\dots$$

2 TÍCH PHÂN

1 Tính chất của tích phân

Tính chất 1. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = \dots\dots\dots$ (k là hằng số)

! Tính chất 2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \dots\dots\dots$

Tính chất 3. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \dots\dots\dots$ ($a < c < b$)

2 Phương pháp tính tích phân từng phần

Định lí

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{K}$ thì

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \dots\dots\dots$$

3 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

1 Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục $\dots\dots\dots$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b \dots\dots\dots dx = \int_a^c \dots\dots\dots dx + \int_c^b \dots\dots\dots dx$$

2 Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

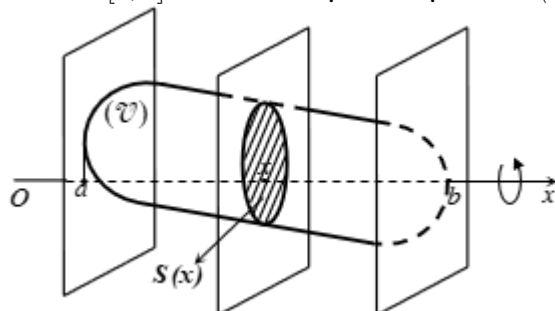
$$S = \int_a^b \dots\dots\dots dx$$

3 Thể tích của vật thể

Cắt một vật thể $\mathcal{V}$ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Cắt $\mathcal{V}$ bởi một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm $x \in [a; b]$ theo thiết diện có diện tích $S(x)$.

Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, khi đó vật thể $\mathcal{V}$ có thể tích là

$$V = \int_a^b \dots\dots\dots dx$$



4 Thể tích khối tròn xoay

Quay hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục tạo thành một khối có thể tích là

$$V = \dots \int_a^b \dots dx$$

B. THỰC HÀNH

1

BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f'(x) = F(x)$ với $\forall x \in K$.

B. $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in K$.

C. $F(x) = f(x)$ với $\forall x \in K$.

D. $F'(x) = f'(x)$ với $\forall x \in K$.

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

B. $\int 0 dx = 0$.

C. $\int f(x) dx = f'(x) + C$.

D. $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

A. $\int f(x) dx = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

B. $\int f(x) dx = \ln |x| + x^2 + C$.

C. $\int f(x) dx = \ln |x| + \frac{1}{2}x^2 + C$.

D. $\int f(x) dx = \ln x + x^2 + C$.

Câu 4. Hàm số $F(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = -2 \cos x - 3 \sin x$.

B. $f(x) = -2 \cos x + 3 \sin x$.

C. $f(x) = 2 \cos x + 3 \sin x$.

D. $f(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$.

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1| + C \ (\forall x \neq -1)$.

B. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.

D. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$.

Câu 6. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.

B. $F(1) = \ln 3 + 2$.

C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2$.

D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$.

Câu 7. Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln |x+1| + b \ln |x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a - b = 8$.

B. $2a - b = 8$.

C. $a + 2b = 8$.

D. $a + b = 8$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0; 2]$ và $f(0) = -1$, biết $\int_0^2 f'(x) dx = 5$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = 2$.

B. $f(2) = 6$.

C. $f(2) = 4$.

D. $f(2) = 5$.

Câu 9. Cho biết $\int_2^5 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 g(t) dt = 9$. Tính $\int_2^5 [f(x) - 2g(x)] dx$.

A. -6 .

B. -15 .

C. 12 .

D. 21 .

Câu 10. Cho $\int_0^1 f(x) dx = -1$, $\int_0^3 f(x) dx = 5$. Tính $\int_1^3 f(x) dx$.

A. 5 .

B. 4 .

C. 1 .

D. 6 .

Câu 11. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 1 .

B. 0 .

C. -1 .

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 12. Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

B. $\ln \frac{7}{5}$.

C. $2 \ln \frac{7}{5}$.

D. $\frac{1}{2} \ln 35$.

Câu 13. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. -3.

Câu 14. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x} dx$.

A. $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b f(x) dx$.

B. $S = \int_b^a |f(x)| dx$.

C. $S = - \int_a^b f(x) dx$.

D. $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 16.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai

đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ). Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$,

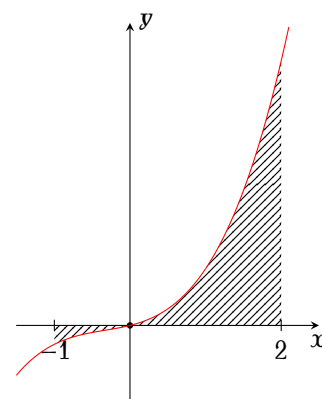
mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = b - a$.

B. $S = b + a$.

C. $S = a - b$.

D. $S = -a - b$.



Câu 17. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, hai trục tọa độ và đường thẳng $x = 2$.

A. $S = \frac{1}{3}$.

B. $S = \frac{19}{2}$.

C. $S = \frac{9}{2}$.

D. $S = \frac{5}{2}$.

Câu 18.

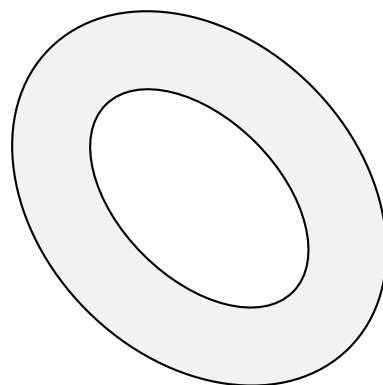
Câu lạc bộ bóng đá AS Roma dự định xây dựng sân vận động mới có tên là Stadio Dellta Roma để làm sân nhà cho đội bóng thay thế cho sân Olimpico. Hệ thống mái của sân vận động dự định được xây dựng có dạng hai hình elip như hình bên với elip lớn bên ngoài có độ dài trục lớn là 146 mét, độ dài trục nhỏ là 108 mét; hình elip nhỏ bên trong có độ dài trục lớn là 110 mét, độ dài trục nhỏ là 72 mét. Giả sử chi phí vật liệu là 100\$ mỗi mét vuông. Tính chi phí cần thiết để xây dựng hệ thống mái sân.

A. 98100\$.

B. 98100π \$.

C. 196200\$.

D. 196200π \$.



Câu 19. Viết công thức tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \ln 4$, bị cắt bởi một mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x \in (0; \ln 4)$, có thiết diện là một hình vuông cạnh $\sqrt{x}e^x$.

A. $V = \pi \int_0^{\ln 4} x e^x dx$.

B. $V = \int_0^{\ln 4} \sqrt{x} e^x dx$.

C. $V = \int_0^{\ln 4} x e^x dx$.

D. $V = \pi \int_0^{\ln 4} [x e^x]^2 dx$.

Câu 20. Gọi (H) là hình phẳng tạo bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^3 - x^2 - 2x}$ và trục hoành. Khi cho (H) quay quanh trục hoành, ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. $\frac{13\pi}{6}$.

B. $\frac{9\pi}{4}$.

C. $\frac{5\pi}{12}$.

D. $\frac{8\pi}{3}$.

2

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là hàm số $f'(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = -f'(x) + C$.
 B. $\int f'(x) dx = -f(x) + C$.
 C. $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
 D. $\int f(x) dx = f'(x) + C$.

Câu 22. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\int [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int f(x) dx + 3 \int g(x) dx$.
 B. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.
 C. $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx$.
 D. $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

Câu 23. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$.
 B. $\int f(x) dx = 3 + \cos x + C$.
 C. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C$.
 D. $\int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C$.

Câu 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ là

- A. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$.
 B. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$.
 C. $x^4 + \frac{x^2}{2} + C$.
 D. $3x^2 + C$.

Câu 25. Hàm số nào sau đây **không phải** là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 3)^3$?

- A. $F(x) = \frac{(2x - 3)^4}{8} + 8$.
 B. $F(x) = \frac{(2x - 3)^4}{8} - 3$.
 C. $F(x) = \frac{(2x - 3)^4}{8}$.
 D. $F(x) = \frac{(2x - 3)^4}{4}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết rằng $F(1) = 4$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x$.
 B. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$.
 C. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$.
 D. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{49}{12}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ và $f(0) = 2$. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = 8 - 2e$.
 B. $f(1) = e$.
 C. $f(1) = 3$.
 D. $f(1) = 5 - 2e$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$,

biết $f(1) = 2017$ và $\int_1^2 f'(x) dx = 1$, giá trị của $f(2)$ bằng

- A. 2017. B. 2019. C. 2018. D. 2016.

Câu 29. Cho $\int_a^b f(x) dx = 2$ và $\int_a^b g(x) dx = -3$. Giá trị của

$\int_a^b [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A. -4. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ và $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x) dx +$

$\int_6^{10} f(x) dx$.

- A. $P = 4$. B. $P = 10$. C. $P = -6$. D. $P = 7$.

Câu 31. Tích phân $\int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx$ bằng

- A. 6. B. 5. C. 12. D. 9.

Câu 32. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x + 1)^2 dx$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{1}{3}$. C. $I = \frac{7}{3}$. D. $I = -\frac{1}{2}$.

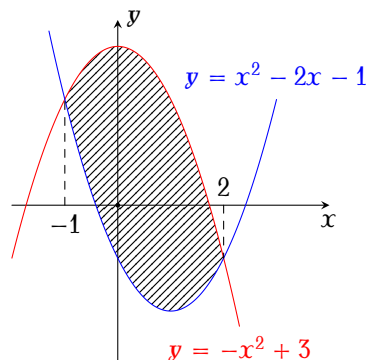
Câu 33. Cho biết $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + b \ln 2$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ, thì

- A. $a + b = \frac{1}{2}$. B. $a + b = \frac{3}{2}$.
 C. $a + b = -\frac{1}{2}$. D. $a + b = \frac{5}{2}$.

Câu 34. Nếu $t = \sqrt{x^2 + 3}$ thì tích phân $I = \int_1^2 x \sqrt{x^2 + 3} dx$ trở thành

- A. $I = \int_2^{\sqrt{7}} t dt$. B. $I = \int_2^7 t^2 dt$.
 C. $I = \int_2^{\sqrt{7}} t^2 dt$. D. $I = \int_2^{\sqrt{7}} t^3 dt$.

Câu 35. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



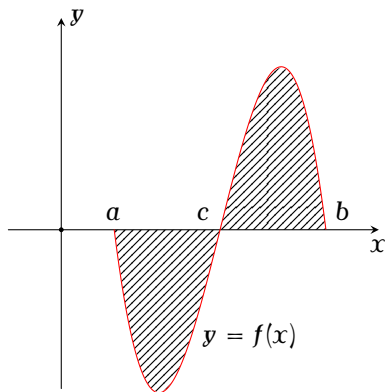
- A. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$.

B. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

Câu 36. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$, $x = b$.



Khi đó S được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S = \int_a^b f(x) dx.$

B. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

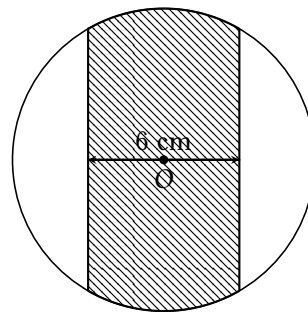
C. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

D. $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|.$

Câu 37. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

A. $S = \frac{5}{2}.$ B. $S = \frac{3}{2}.$ C. $S = \frac{7}{2}.$ D. $S = 4.$

Câu 38. Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6 m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6 m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m².



Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó?

- A. 8.412.322 đồng. B. 4.821.322 đồng.
C. 3.142.232 đồng. D. 4.821.232 đồng.

Câu 39. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$

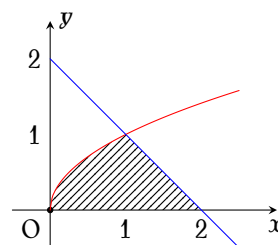
B. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx.$

C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx.$

D. $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$

Câu 40.

Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng



- A. $\frac{5\pi}{4}.$ B. $\frac{4\pi}{3}.$
C. $\frac{7\pi}{6}.$ D. $\frac{5\pi}{6}.$

Chủ đề 2.

SỐ PHỨC

A. LÝ THUYẾT

1 SỐ PHỨC

1 Định nghĩa

Mỗi biểu thức dạng trong đó $a, b \in \dots$ và $i^2 = \dots$ được gọi là một **số phức**.

- Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là, b là của z .
- Số i được gọi là
- Tập hợp các số phức kí hiệu là (The set of Complex numbers).



- Mỗi số thực a đều là một số phức với **phần ảo** bằng ...
- Số phức bi có **phần thực** bằng ... được gọi là số

2 Số phức bằng nhau

Hai số phức được gọi là bằng nhau nếu và của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dots \\ b_1 = \dots \end{cases}$$

3 Biểu diễn hình học của số phức

Điểm $M(\dots; \dots)$ trong hệ trục tọa độ Oxy được gọi là điểm của số phức $z = a + bi$.

4 Môđun của số phức

Cho số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$.

..... của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z , kí hiệu là

$$|z| = \dots\dots\dots$$

5 Số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi là **số phức liên hợp** của z , kí hiệu là

2 PHÉP CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$, khi đó:

- $z_1 + z_2 = \dots\dots\dots$
- $(a + bi)(c + di) = \dots\dots\dots$
- $z_1 - z_2 = \dots\dots\dots$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dots\dots\dots$

B. THỰC HÀNH

1

BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 41. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Số phức liên hợp của z là

- A. $z = 3 + 4i$. B. $\bar{z} = 3 + 4i$. C. $\bar{z} = 3$. D. $\bar{z} = 4i$.

Câu 42. Trong các số phức sau, số nào có môđun lớn nhất?

- A. $z_1 = 1 + 2i$. B. $z_2 = 2 - i$. C. $z_3 = 3i$. D. $z_4 = 1 + i$.

Câu 43. Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là

- A. 2 và 1. B. 1 và 2i. C. 1 và 2. D. 1 và i.

Câu 44. Cho số phức $z = (2m - 1) + (m^2 - 4)i$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để số phức z là số thuần ảo.

- A. $m = 2$, $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 45. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $2a + (b - 3)i = 4 - 5i$ với i là đơn vị ảo. Giá trị của a, b bằng

- A. $a = 1$, $b = 8$. B. $a = 8$, $b = 8$. C. $a = 2$, $b = -2$. D. $a = -2$, $b = 2$.

Câu 46. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $M(3; 4)$. B. $N(-4; 3)$. C. $P(3; -4)$. D. $Q(-3; -4)$.

Câu 47. Thu gọn số phức $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i)$ ta được

- A. $z = -1 - i$. B. $z = 1 - i$. C. $z = -1 - 2i$. D. $z = 1 + i$.

Câu 48. Cho số phức $z = 2 + bi$. Tính $z \cdot \bar{z}$.

- A. $z \cdot \bar{z} = \sqrt{4 + b^2}$. B. $z \cdot \bar{z} = 4 - b^2$. C. $z \cdot \bar{z} = -b$. D. $z \cdot \bar{z} = 4 + b^2$.

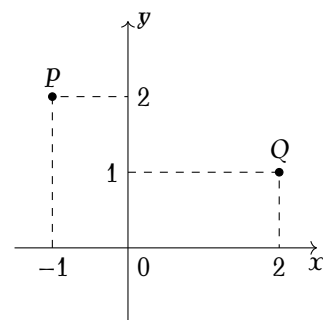
Câu 49. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

- A. $z = 3 + 6i$. B. $z = 11$. C. $z = -1 - 10i$. D. $z = -3 - 6i$.

Câu 50.

Trong hình vẽ, điểm P biểu diễn số phức z_1 , điểm Q biểu diễn số phức z_2 . Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. $z = 1 + 3i$. B. $z = -3 + i$. C. $z = -1 + 2i$. D. $z = 2 + i$.



Câu 51. Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.

- A. $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. B. $w = 0$. C. $w = 1$. D. $w = 2 - \sqrt{3}i$.

Câu 52. Cho z_1, z_2 là hai số phức tùy ý. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. B. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. C. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. D. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Câu 53. Cho số phức $z_1 = 1 + 7i$, $z_2 = 3 - 4i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

- A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. B. $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{5}$. C. $|z_1 + z_2| = 25\sqrt{2}$. D. $|z_1 + z_2| = 5$.

Câu 54. Tìm hai số thực x, y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = -1 + 6i$, với i là đơn vị ảo.

- A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Câu 55. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - 2i)z + (1 + 3i)^2 = 5i$. Khi đó điểm nào sau đây biểu diễn số phức z ?

- A. $M(2; -3)$. B. $N(2; 3)$. C. $P(-2; 3)$. D. $Q(-2; -3)$.

Câu 56. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 3$. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn số phức $w = 1 + \bar{z}$.

- A. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$. B. Đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.
C. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$. D. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Câu 57. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z - 4 - 2i| = |z - 2|$. Tính $P = x^2 + y^2$.

- A. 10. B. 16. C. 8. D. 32.

Câu 58. Tìm các căn bậc hai của -6 .

- A. $-\sqrt{6}i$. B. $\pm\sqrt{6}i$. C. $\pm 6i$. D. $\sqrt{6}i$.

Câu 59. Trong tập số phức, phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ có nghiệm là

- A. $z = -1 \pm 2i$. B. $z = 2 \pm 2i$. C. $z = -2 \pm 2i$. D. $z = 1 \pm 2i$.

Câu 60. Cho số phức $z = x + yi$ ($x \geq 0, y \geq 0$) thỏa $|z - 1 + i| \leq |z + 3 - i| \leq |z - 3 - 5i|$. Giá trị lớn nhất của $T = 35x + 63y$ bằng

- A. 70. B. 126. C. 172. D. 203.

2

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 61. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 4 - 3i$.

- A. $\bar{z} = -4 - 3i$. B. $\bar{z} = -4 + 3i$.
C. $\bar{z} = 4 + 3i$. D. $\bar{z} = 3 + 4i$.

Câu 62. Cho $m \in \mathbb{R}$. Số phức nào sau đây có môđun nhỏ nhất?

- A. $z_1 = m$. B. $z_2 = m + i$.
C. $z_3 = m + 2i$. D. $z_4 = 3 + mi$.

Câu 63. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

- A. $3 + 4i$. B. $4 - 3i$. C. $3 - 4i$. D. $4 + 3i$.

Câu 64. Số phức nào sau đây là số thuần ảo?

- A. $z = 3i$. B. $z = \sqrt{3} + i$.
C. $z = -2 + 3i$. D. $z = -2$.

Câu 65. Tìm các số thực a, b thỏa mãn $(a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi$ với i là đơn vị ảo.

- A. $a = -3, b = 1$. B. $a = 3, b = -1$.
C. $a = -3, b = -1$. D. $a = 3, b = 1$.

Câu 66. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $\bar{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $M(3; 4)$. B. $N(-4; 3)$.
C. $P(3; -4)$. D. $Q(-3; -4)$.

Câu 67. Cho $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 2 - 3i$. Khi đó $w = z_1 - 2z_2$ bằng

- A. $5 + 8i$. B. $-3 + 8i$. C. $3 - i$. D. $-3 - 4i$.

Câu 68. Cho số phức $z = 1 + i$. Số phức nghịch đảo của z là

- A. $1 - i$. B. $\frac{1 - i}{2}$. C. $\frac{1 - i}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{-1 + i}{2}$.

Câu 69. Cho số phức z , khi đó $z + \bar{z}$ là

- A. Số thực. B. Số ảo. C. 0. D. 2.

Câu 70. Tìm số phức $w = z_1 - 2z_2$, biết rằng $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$.

- A. $w = 3 - i$. B. $w = 5 + 8i$.
C. $w = -3 + 8i$. D. $w = -3 - 4i$.

Câu 71. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

- A. $w = 7 - 3i$. B. $w = -3 - 3i$.

- C. $w = 3 + 7i$. D. $w = -7 - 7i$.

Câu 72. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 2 - i + \left(\frac{1}{3} - 2i\right)$.

- A. $\frac{7}{3}$ và $-3i$. B. $\frac{7}{3}$ và -3 .
C. $\frac{7}{3}$ và 2 . D. $\frac{5}{3}$ và $\frac{1}{2}$.

Câu 73. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1 + i)z - (2 - i)\bar{z}$.

- A. -5 . B. -9 . C. $-5i$. D. $-9i$.

Câu 74. Số phức z thỏa mãn điều kiện $(3 + i)z + (1 - 2i)^2 = 8 - 17i$. Khi đó hiệu của phần thực và phần ảo của z là

- A. 7. B. -3 . C. 3. D. -7 .

Câu 75. Cho hai số phức $z = 3 - 5i$ và $w = -1 + 2i$. Điểm biểu diễn số phức $\varphi = \bar{z} - w \cdot z$ trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

- A. $(-4; -6)$. B. $(4; 6)$.
C. $(4; -6)$. D. $(-6; -4)$.

Câu 76. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2 + |z| = 0$?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 77. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $w = 2z + 2 - i$.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 78. Tìm một căn bậc hai của -8 .

- A. $-2\sqrt{2}i$. B. $-2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{-2}i$.

Câu 79. Tìm nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$.

- A. $z = -2 - 3i$. B. $z = 2 - 3i$.
C. $z = -2 + 3i$. D. $z = 2 + 3i$.

Câu 80. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A, B là điểm biểu diễn cho các số phức z và $w = (1 + i)z$. Biết tam giác OAB có diện tích bằng 8. Môđun của số phức $w - z$ bằng

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. 4.

Chủ đề 3.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

1

HỆ TỌA ĐỘ OXYZ

1

Tọa độ điểm và vectơ

Trong không gian, hệ trục tọa độ $Oxyz$ bao gồm ... trục Ox , Oy , Oz đôi một

- Các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ trên các trục Ox , Oy , Oz .
- Các mặt phẳng,, được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- Điểm $O(\dots; \dots; \dots)$ được gọi là
- Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nếu $\vec{OM} = \dots$

2

Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Các công thức cần nhớ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

- $\vec{a} \pm \vec{b} = \dots$
- $k \cdot \vec{a} = \dots$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dots \\ a_2 = \dots \\ a_3 = \dots \end{cases}$
- Trung điểm của đoạn thẳng AB là $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \dots; \dots\right)$
- Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dots; \dots\right)$
- $\vec{i} = \dots, \vec{j} = \dots, \vec{k} = \dots$
- Với vectơ $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $a_1 = \dots, a_2 = \dots, a_3 = \dots$
- $\vec{AB} = \dots$

3

Tích vô hướng

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ bằng

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$$

Độ dài của một vectơ

Cho vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Khi đó

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots}$$

Góc giữa hai vectơ

Góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được tính bởi công thức

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \dots$$

4

Tích có hướng

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (\dots; \dots; \dots)$$

2

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Định lý

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình là

$$(x - \dots)^2 + (y - \dots)^2 + (z - \dots)^2 = \dots$$

Nhận xét: Phương trình mặt cầu nói trên có thể viết dưới dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - \dots x - \dots y - \dots z + d = 0$$

trong đó $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - \dots}$ ($a^2 + b^2 + c^2 - \dots > \dots$)

3

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

1 Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa

Cho mặt phẳng (α) . Nếu vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có $\dots$ vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ $\dots$ của (α) .

- Mỗi mặt phẳng có $\dots$ vectơ pháp tuyến.
- Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) thì $k \cdot \vec{n}$ cũng là $\dots$ của (α) .

2 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$. Khi đó

$$a(x - \dots) + \dots(y - y_0) + c(\dots - z_0) = \dots$$

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Nếu mặt phẳng (α) cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ thì

$$(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \dots$$

3 Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

- $(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) \dots k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \dots kD_2 \end{cases}$
- $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) \dots k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \dots kD_2 \end{cases}$
- $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \dots$

4 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ được tính bằng

$$d(M, (\alpha)) = \frac{A \dots + B \dots + C \dots + D}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}}$$

5 Góc giữa hai mặt phẳng

Giả sử $\vec{m}$, $\vec{n}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α) , (β) . Khi đó

$$\cos(\langle \alpha, \beta \rangle) = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}$$

4

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1 Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm vectơ chỉ phương. Khi đó phương trình tham số của Δ có dạng

$$\Delta: \begin{cases} x = \dots + \dots t \\ y = \dots + \dots t \\ z = \dots + \dots t \end{cases} \quad (1)$$

trong đó t là

! Nếu $u_1, u_2, u_3 \neq 0$ thì phương trình (1) có thể viết dưới dạng **chính tắc** như sau:

$$\frac{x - \dots}{\dots} = \frac{y - \dots}{\dots} = \frac{z - \dots}{\dots}$$

2 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Hai đường thẳng song song, trùng nhau

Gọi $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và điểm $M \in \Delta_1$.

$$\bullet \Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k \dots \\ M \dots \Delta_2 \end{cases} \quad \bullet \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k \dots \\ M \dots \Delta_2 \end{cases}$$

Hai đường thẳng cắt nhau, chéo nhau

Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = x'_0 + v_1 t' \\ y = y'_0 + v_2 t' \\ z = z'_0 + v_3 t' \end{cases}$.

- d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình
- d và d' chéo nhau khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ phương và hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0 + u_1 t = x'_0 + v_1 t' \\ y_0 + u_2 t = y'_0 + v_2 t' \\ z_0 + u_3 t = z'_0 + v_3 t' \end{cases}$$

có đúng nghiệm.

$$\begin{cases} x_0 + u_1 t = x'_0 + v_1 t' \\ y_0 + u_2 t = y'_0 + v_2 t' \\ z_0 + u_3 t = z'_0 + v_3 t' \end{cases}$$

..... nghiệm.

3 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

! Để tìm giao điểm của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$, ta xét phương trình

$$A(x_0 + u_1 t) + B(y_0 + u_2 t) + C(z_0 + u_3 t) + D = 0 \quad (1)$$

- Nếu (1) vô nghiệm thì $\Delta \dots (\alpha)$
- Nếu (1) vô số nghiệm thì $\Delta \dots (\alpha)$
- Nếu (1) có đúng một nghiệm thì $\Delta \dots (\alpha)$

B. THỰC HÀNH

1

BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 81.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
 A. $(3; 3; -1)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(-1; -1; -3)$. D. $(1; 1; 3)$.
- Câu 82.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{d} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ của $\vec{d}$.
 A. $(2; -3; -1)$. B. $(-3; 2; -1)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(2; -1; -3)$.
- Câu 83.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(13; 2; 15)$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm $H(a; b; c)$. Tính $P = 3a + 15b + c$.
 A. $P = 48$. B. $P = 54$. C. $P = 69$. D. $P = 84$.
- Câu 84.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
 A. $D(-4; 8; -5)$. B. $D(-4; 8; -3)$. C. $D(-2; 8; -3)$. D. Không tồn tại.
- Câu 85.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(3; 0; -5)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là
 A. $I(2; 1; -1)$. B. $I(2; 2; -2)$. C. $I(4; 2; -2)$. D. $I(-1; 1; 4)$.
- Câu 86.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 3; 4)$, $B(2; -1; 0)$, $C(3; 1; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
 A. $G(2; 1; 2)$. B. $G(6; 3; 6)$. C. $G\left(3; \frac{3}{2}; 3\right)$. D. $G(2; -1; 2)$.
- Câu 87.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{d} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{d} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.
 A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.
- Câu 88.** Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$ bằng
 A. 8. B. 6. C. 0. D. -6.
- Câu 89.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 4)$ và $B(-2; 2; -6)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
 A. $AB = 5\sqrt{5}$. B. $AB = \sqrt{21} + \sqrt{44}$. C. $AB = \sqrt{65}$. D. $AB = \sqrt{5}$.
- Câu 90.** Giá trị cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (4; 3; 1)$ và $\vec{b} = (0; 2; 3)$ là
 A. $\frac{5\sqrt{26}}{26}$. B. $\frac{9\sqrt{2}}{26}$. C. $\frac{5\sqrt{2}}{26}$. D. $\frac{9\sqrt{13}}{26}$.
- Câu 91.** Trong không gian $Oxyz$, điều kiện để phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(-a; -b; -c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ là
 A. $a^2 + b^2 + c^2 + d > 0$. B. $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
 C. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$. D. $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0$.
- Câu 92.** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ tâm I , bán kính R của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ là
 A. $I(1; 2; 0)$, $R = 5$. B. $I(1; -2)$, $R = 5$. C. $I(-1; 2; 0)$, $R = 5$. D. $I(1; -2; 0)$, $R = 5$.
- Câu 93.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 7)$, $B(-3; 8; -1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là
 A. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = \sqrt{45}$. B. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 45$.
 C. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 3)^2 = \sqrt{45}$. D. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 45$.
- Câu 94.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{d} = (3; -1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$ và $\vec{c} = (5; 1; 7)$. Tìm giá trị của m để $[\vec{d}, \vec{b}] = \vec{c}$.
 A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.
- Câu 95.** Cho mặt phẳng $(P): 2x - 3z - 1 = 0$. Khi đó (P) có một vectơ pháp tuyến là
 A. $\vec{n} = (2; -3; 1)$. B. $\vec{n} = (2; -3; 0)$. C. $\vec{n} = (2; 0; -3)$. D. $\vec{n} = (2; -3; -1)$.
- Câu 96.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (6; 3; -2)$ thì phương trình của (α) là
 A. $6x - 3y - 2z = 0$. B. $6x + 3y - 2z = 0$. C. $-6x - 3y - 2z = 0$. D. $-6x + 3y - 2z = 0$.
- Câu 97.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 2x - y + 5z - 15 = 0$ và điểm $E(1; 2; -3)$. Mặt phẳng (P) qua E và song song với (Q) có phương trình là
 A. $x + 2y - 3z + 15 = 0$. B. $x + 2y - 3z - 15 = 0$. C. $2x - y + 5z + 15 = 0$. D. $2x - y + 5z - 15 = 0$.
- Câu 98.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 1; -2)$ và $B(5; 9; 3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là
 A. $2x + 6y - 5z + 40 = 0$. B. $x + 8y - 5z - 41 = 0$.
 C. $x - 8y - 5z - 35 = 0$. D. $x + 8y + 5z - 47 = 0$.

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 0; 7)$, $C(0; 3; 0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

- A. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{7} + \frac{z}{3} = 1$. B. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 0$. C. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 1$. D. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} + 1 = 0$.

Câu 100. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB , với $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại điểm A .

- A. $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$. B. $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$.
C. $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$. D. $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$.

Câu 101. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$ và $C(2; 0; 2)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình là

- A. $3x - 3y + z - 14 = 0$. B. $3x + 3y + z - 8 = 0$. C. $3x - 2y + z - 8 = 0$. D. $2x + 3y - z + 8 = 0$.

Câu 102. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x - 3y + 1 = 0$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $A(3; 1; 1)$. B. $B(1; -3; 1)$. C. $C(-1; 0; 0)$. D. $D(1; 0; 0)$.

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 9 = 0$ và $(Q): x - y - 6 = 0$. Số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 104. Khoảng cách từ $M(1; 4; -7)$ đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 9 = 0$ là

- A. 5. B. 12. C. $\frac{25}{3}$. D. 7.

Câu 105. Khoảng cách giữa mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ và $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$ bằng

- A. 4. B. $\frac{6}{\sqrt{14}}$. C. 6. D. $\frac{4}{\sqrt{14}}$.

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-7}{1}$ nhận vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương?

- A. $\vec{d} = (-2; -4; 1)$. B. $\vec{b} = (2; 4; 1)$. C. $\vec{c} = (1; -4; 2)$. D. $\vec{d} = (2; -4; 1)$.

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

- A. $P(-1; 2; 1)$. B. $Q(1; -2; -1)$. C. $N(-1; 3; 2)$. D. $M(1; 2; 1)$.

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $E(-1; 0; 2)$ và $F(2; 1; -5)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng EF là

- A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$. B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$. C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$.

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + z - 5 = 0$ và $(\beta): x - 2y - z + 3 = 0$ có phương trình là

- A. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$. B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$.
C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$. D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với d và song song với (P) .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.
C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2}$.

2

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 3; 1)$ và $N(3; 1; 5)$. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{MN}$.

- A. $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; -4)$. B. $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; 4)$.
C. $\overrightarrow{MN} = (1; -2; 4)$. D. $\overrightarrow{MN} = (6; 3; 5)$.

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{a} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$ có tọa độ là

- A. $(0; 3; 4)$. B. $(0; -3; 4)$.
C. $(0; -4; 3)$. D. $(-3; 0; 4)$.

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; 1; -1)$ lên trục tung.

- A. $H(2; 0; -1)$. B. $H(0; 1; 0)$.
C. $H(0; 1; -1)$. D. $H(2; 0; 0)$.

Câu 114. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-4; -2; 9)$. B. $D(-4; 2; 9)$.
C. $D(4; -2; 9)$. D. Không tồn tại.

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(3; 1; 0)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I(2; 0; 1)$. B. $I(1; 1; -1)$.
C. $I(2; 2; -2)$. D. $I(4; 0; 2)$.

Câu 116. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 3; 5)$, $B(2; 0; 1)$ và $G(1; 4; 2)$ là trọng tâm. Tìm tọa độ điểm C .

A. $C(0;0;9)$.

B. $C\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

C. $C(0;-9;0)$.

D. $C(0;9;0)$.

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{x} = (2;1;-3)$ và $\vec{y} = (1;0;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

A. $\vec{d} = (4;1;-1)$.

B. $\vec{d} = (3;1;-4)$.

C. $\vec{d} = (0;1;-1)$.

D. $\vec{d} = (4;1;-5)$.

Câu 118. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(1;4;3)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $2\sqrt{13}$.

B. $\sqrt{6}$.

C. 3.

D. $2\sqrt{3}$.

Câu 119. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1;1;0)$, $\vec{v} = (0;-1;0)$. Góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo bằng

A. 120° .

B. 45° .

C. 135° .

D. 60° .

Câu 120. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (3;-2;m)$ và $\vec{b} = (2;m;-1)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = -2$.

D. $m = -1$.

Câu 121. Cho mặt cầu (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. (S) đi qua điểm $M(1;0;1)$.

B. (S) đi qua điểm $N(-3;4;2)$.

C. (S) có tâm $I(-1;2;3)$.

D. (S) có bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Câu 122. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$, $B(1;-2;2)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$.

B. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$.

C. $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 6$.

D. $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 24$.

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;-1;2)$ và $D(0;m;p)$ cùng thuộc một mặt phẳng. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $2m + p = 0$.

B. $m + p = 1$.

C. $m + 2p = 3$.

D. $2m - 3p = 0$.

Câu 125. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (P): $2x - 4y + 6z - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n} = (1;-2;3)$.

B. $\vec{n} = (2;4;6)$.

C. $\vec{n} = (1;2;3)$.

D. $\vec{n} = (-1;2;3)$.

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, chọn câu đúng trong các câu sau:

A. Mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình $z = 0$.

B. Mặt phẳng tọa độ (Ozx) có phương trình $x = 0$.

C. Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình $y + z = 0$.

D. Mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình $x + y = 0$.

Câu 127. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $G(1;1;1)$ và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình là

A. $x + y + z - 3 = 0$.

B. $x + y + z = 0$.

C. $x - y + z = 0$.

D. $x + y - z - 3 = 0$.

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-4)$ và $B(-1;2;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB .

A. (α): $4x + 2y + 12z + 7 = 0$.

B. (α): $4x - 2y + 12z + 17 = 0$.

C. (α): $4x + 2y - 12z - 17 = 0$.

D. (α): $4x - 2y - 12z - 17 = 0$.

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(8;0;0)$, $B(0;0;-4)$, $C(0;2;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{x}{4} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

B. $x + 4y - 2z - 8 = 0$.

C. $\frac{x}{8} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-4} = 0$.

D. $x + 4y - 2z = 0$.

Câu 130. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-1;5)$ và $N(0;0;1)$. Mặt phẳng (α) chứa M , N và song song với trục Oy có phương trình là

A. $4x - z + 1 = 0$.

B. $x - 4z + 2 = 0$.

C. $2x + z - 3 = 0$.

D. $x + 4z - 1 = 0$.

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(0;2;3)$.

B. $(-1;-2;-3)$.

C. $(-1;2;3)$.

D. $(1;2;-3)$.

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;2;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;0;\sqrt{2})$ và $D(0;-2;0)$. Tính số đo góc của hai mặt phẳng (ABC) và (ACD).

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $4x - 3y + 2z + 28 = 0$ và điểm $I(0;1;2)$. Viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. (S): $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 29$.

B. (S): $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{29}$.

C. (S): $x^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 841$.

D. (S): $x^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 29$.

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;0)$ và mặt phẳng (α): $x + 2y - 2z + 1 = 0$. Khoảng cách từ M đến (α) là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 135. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I , cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 5.

A. (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

B. (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$.

C. (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

D. (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

Câu 136. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad ?$$

A. $\vec{u} = (1;4;3)$.

B. $\vec{u} = (1;4;-2)$.

C. $\vec{u} = (1;0;-2)$.

D. $\vec{u} = (1;0;2)$.

Câu 137. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d ?

A. $Q(-2;-4;7)$.

B. $N(4;0;-1)$.

C. $M(1;-2;3)$.

D. $P(7;2;1)$.

Câu 138. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3; 2; 1)$ và song song với đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}$ là

A. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 1 = 0$, $(Q): 2x - y + z - 7 = 0$.

A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{-7}$. B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-7}$.
C. $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-10}{7}$. D. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{7}$.

Câu 140. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 5; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 8 = 0$, $(Q): x - 4y + z - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với cả hai mặt phẳng (P) , (Q) .

A. $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - t \\ z = 3 \end{cases}$. B. $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 \\ z = 3 - t \end{cases}$.

C. $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 \\ z = 3 + t \end{cases}$. D. $d: \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. B	2. D	3. C	4. C	5. D	6. A	7. A	8. C	9. B	10. D
11. A	12. A	13. B	14. D	15. D	16. A	17. D	18. D	19. C	20. C
21. C	22. D	23. A	24. B	25. D	26. D	27. C	28. C	29. D	30. A
31. D	32. C	33. B	34. C	35. C	36. C	37. A	38. B	39. C	40. D
41. B	42. C	43. C	44. D	45. C	46. C	47. A	48. D	49. D	50. A
51. B	52. B	53. D	54. B	55. B	56. D	57. C	58. B	59. D	60. C
61. C	62. A	63. A	64. A	65. A	66. C	67. B	68. B	69. A	70. C
71. B	72. B	73. A	74. A	75. A	76. D	77. C	78. A	79. B	80. D
81. D	82. C	83. C	84. B	85. A	86. A	87. B	88. B	89. A	90. B
91. B	92. D	93. D	94. A	95. C	96. B	97. C	98. D	99. C	100. B
101. B	102. C	103. B	104. C	105. D	106. D	107. A	108. B	109. C	110. C
111. C	112. B	113. B	114. A	115. A	116. D	117. D	118. A	119. C	120. A
121. B	122. A	123. A	124. C	125. A	126. A	127. A	128. C	129. B	130. A
131. C	132. C	133. A	134. C	135. A	136. C	137. D	138. A	139. D	140. B