CHUYÊN ĐỀ PHỤC HÌNH VÀ TRẢI PHẲNG

A. Lý Thuyết

Định nghĩa: Trải phẳng là mở một hình 3 chiều $(3D)$ và trải tất cả các bề mặt của nó ra một mặt phẳng 2 chiều $(2D)$ duy nhất. Hình $2D$ thu được gọi là hình trải phẳng. Hình này có thể được gấp lại theo các nếp (cạnh) để tái tạo chính xác hình $3D$ ban đầu. Phục hình là ngược lại của trải phẳng

Ứng dụng trong giải toán:

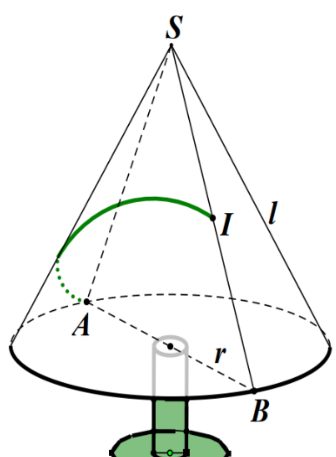
- Tính Diện tích Xung quanh và Toàn phần
- Tìm Đường đi Ngắn nhất trên Bề mặt *(bài toán hay gặp)*
- ……………………………………………………………..

Tính đúng đắn của phương pháp này vì khi trải phẳng các **kích thước được bảo toàn**

*(Trong từng mặt phẳng của đa diện, lật quanh cạnh chỉ là phép quay → mọi đoạn trên mặt đó giữ nguyên độ dài. Tổng chiều dài của một đường đi qua nhiều mặt **không đổi** khi trải.)*

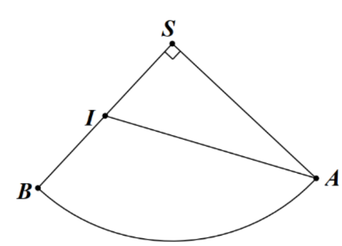
B. Bài Tập

Câu 1 [HSG Hà Tĩnh] Phần trên của một cây thông Noel có dạng hình nón, đỉnh S, độ dài đường sinh $l = 2m$ và bán kính đáy $r = 1m$. Biết rằng AB là một đường kính đáy của hình nón và I là trung điểm đoạn thẳng SB (tham khảo hình vẽ). Để trang trí, người ta lắp một dây bóng nháy trên mặt ngoài của cây thông từ vị trí A đến I. Tính độ dài ngắn nhất của dây bóng nháy.



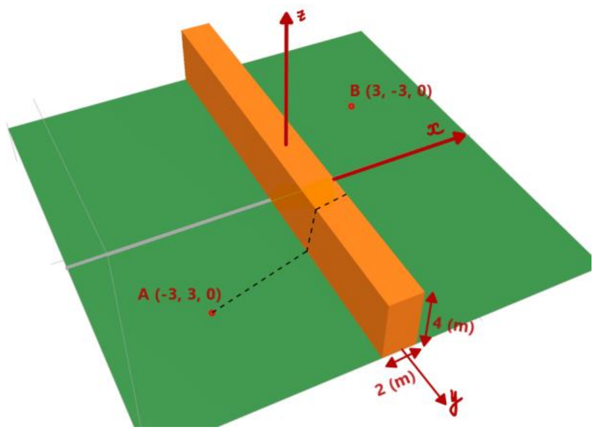
Solution: CeT

Khi lắp dây bóng từ A đến I trên mặt nón sẽ có hai hướng, do tính đối xứng nên ta chỉ xét một hướng. Trải một nửa mặt nón lên mặt phẳng ta được một hình quạt (như hình vẽ). Độ dài ngắn nhất của dây bóng nhảy bằng AI. Cung AB là nửa đường tròn đáy nên $l_{AB} = \pi(m)$.



Số đo góc $ASB: \alpha = \dfrac{l_{AB}}{SA} = \dfrac{l_{AB}}{1} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 + SI^2} = \sqrt{5}(m)$

Câu 2 [DVD] Trong không gian $Oxyz$, trên mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), một con gián muốn di chuyển từ điểm $A(-3;3;0)$ trên mặt đất về với tổ của mình ở tọa độ điểm $B(3;-3;0)$. Để trở về tổ, con gián phải bò qua một bước tường có dạng hình hộp chữ nhật dọc theo trục Oy như hình vẽ, biết bức tường có độ cao bằng $4(m),(0 \le z \le 4)$ và độ dày bằng $2(m)$ $(-1 \le x \le 1)$. Con gián có khả năng bám dính và di chuyển dễ dàng trên bức tường thẳng đứng. Xác định quãng đường ngắn nhất mà con gián có thể đi để trở về được tổ (làm tròn đến chữ số hàng chục).

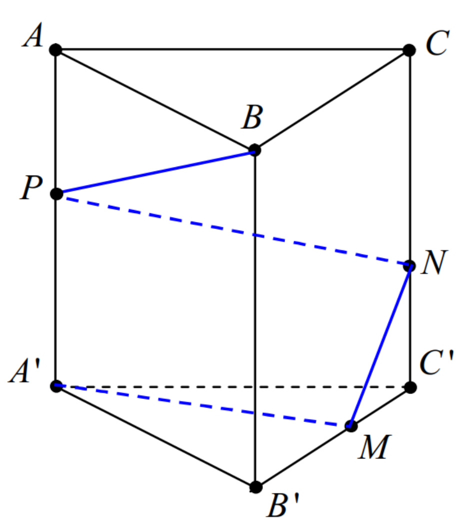


Solution: CeT

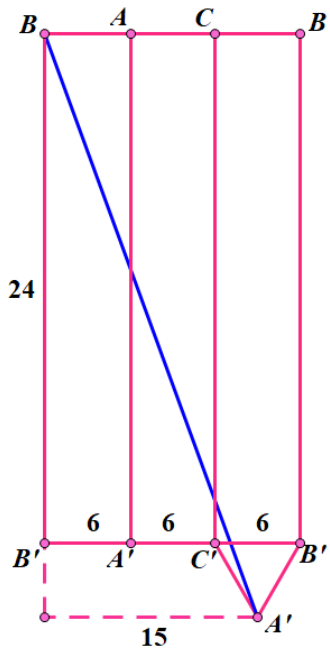
Trải phẳng: Ta thấy điểm A và B đều tịnh tiến thêm 4 đơn vị

$A'(-7;\ 3;\ 0),\ B'(7;\ 3;\ 0) \Rightarrow Min = A'B' = \sqrt{14^2 + 6^2} = 2\sqrt{58}$

Câu 3 [TDM 42] Cho một hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng 6 và cạnh bên bằng 24. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình lăng trụ từ điểm A' đến điểm B như hình vẽ, sao cho sợi dây luôn áp sát vào các mặt. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây ?

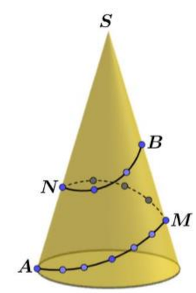


Trải phẳng như hình:



Dễ tính được: $L_{\min} = \sqrt{15^2 + \left(24 + 3\sqrt{3}\right)^2}$

Câu 4 [HXN] Một người muốn nối một dây đèn nhiều màu sắc từ vị trí A đến vị trí B trên vật trang trí có dạng hình nón với bán kính đáy bằng 2 dm và chiều cao bằng 6 dm. Thiết diện qua trục hình nón là tam giác chứa các cạnh SA, SB (S là đỉnh hình nón); dây điện được kéo từ A đến một vị trí M thuộc đường sinh SB, sau đó qua N thuộc đường sinh SA trước khi đến B. Biết rằng $SB = 2$ dm. Tìm đoạn dây điện bé nhất được dùng cho việc này(tính theo dm và làm tròn đến hàng phần chục).



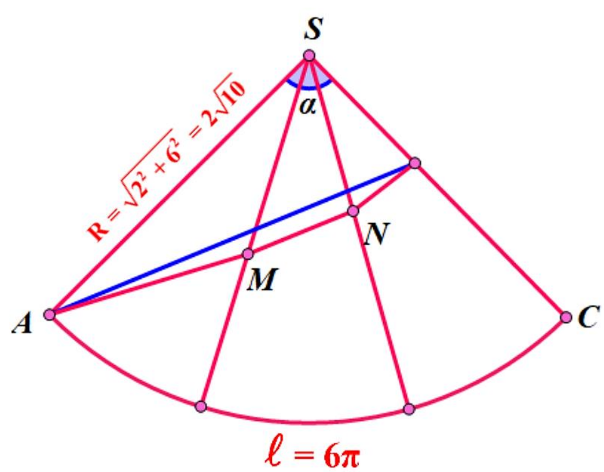
Solution: CeT

Ta có: $l_{AC} = \frac{3}{2} \times \text{chu vi} = \frac{3}{2}.2\pi.2 = 6\pi$

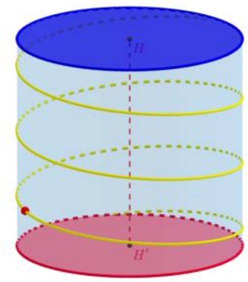
Mà $l_{AC} = R.\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l_{AC}}{R} = \frac{6\pi}{2\sqrt{10}}$

$\Rightarrow AB_{\min} = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\alpha}$

$= \sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2 + 2^2 - 2.2.2\sqrt{10}.\cos\alpha} \approx 8,3$ (dm)



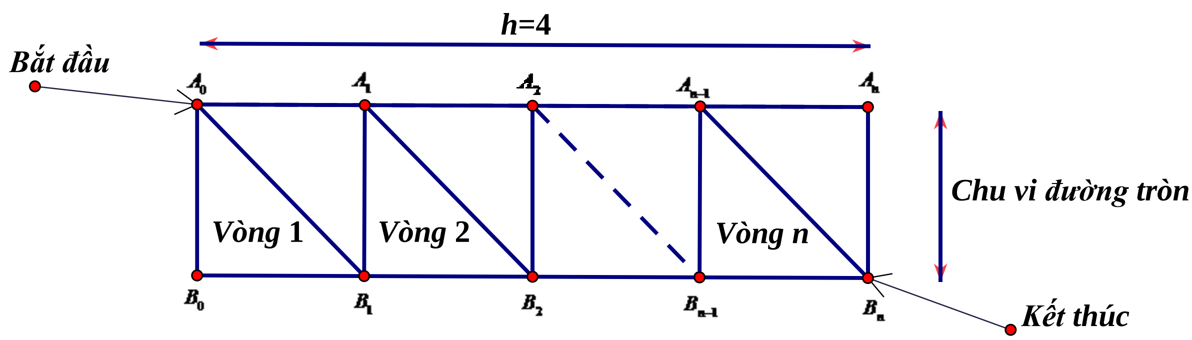
Câu 5 **[Thầy Nguyễn Ngọc Hiệp – THPT chuyên Lê Quý Đôn]**



Một con kiến bò lên đều quanh hình trụ (từ mặt đáy dưới lên mặt đáy trên), bán kính mặt đáy hình trụ $R=\frac{3}{8\pi}$ và chiều cao hình trụ $h=4$. Hỏi con kiến bò ngắn nhất bao nhiêu vòng quanh hình trụ để đoạn đường kiến đi là 1 số nguyên.

Solution: CeT

Hình sau khi đã trải phẳng:



Gọi "điểm bắt đầu" là vị trí ở mặt đáy dưới của hình trụ mà kiến xuất phát;

"điểm kết thúc" là vị trí ở mặt đáy trên của hình trụ mà kiến kết thúc hành trình di chuyển.

Gọi $n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ là số vòng mà con kiến bò được trong suốt hành trình di chuyển.

Ta trải phẳng hình vẽ bài toán bằng cách cắt hình trụ bởi một đường thẳng đi qua "điểm bắt đầu" và "điểm kết thúc". Ta ký hiệu các điểm như hình vẽ.

Chu vi đường tròn đáy: $A_0B_0=A_1B_1=\cdots=A_nB_n=2\pi R=2\pi.\frac{3}{8\pi}=\frac{3}{4}$

Ta có: $A_0A_1=A_1A_2=\cdots=A_{n-1}A_n=\frac{4}{n}$

Khi đó độ dài đoạn đường mỗi vòng kiến đi được:

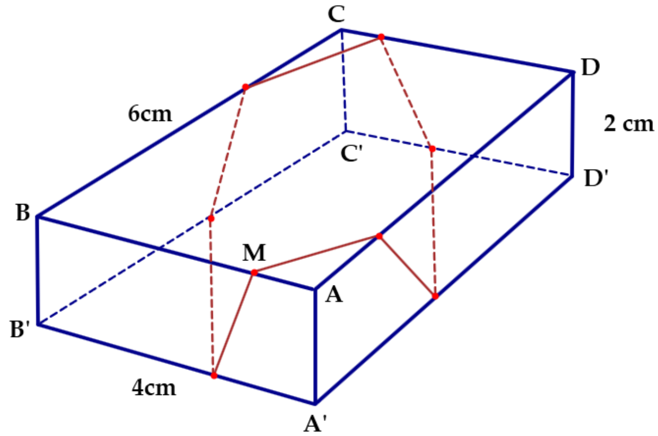
$$d=A_0B_1=A_1B_2=\cdots=A_{n-1}B_n=\sqrt{\left(\frac{4}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{n^2}+\frac{9}{16}}$$

Từ đó suy ra độ dài đoạn đường kiến đi được trong suốt hành trình:

$$S=nd=n\sqrt{\frac{16}{n^2}+\frac{9}{16}}=\sqrt{16+\frac{9n^2}{16}}$$

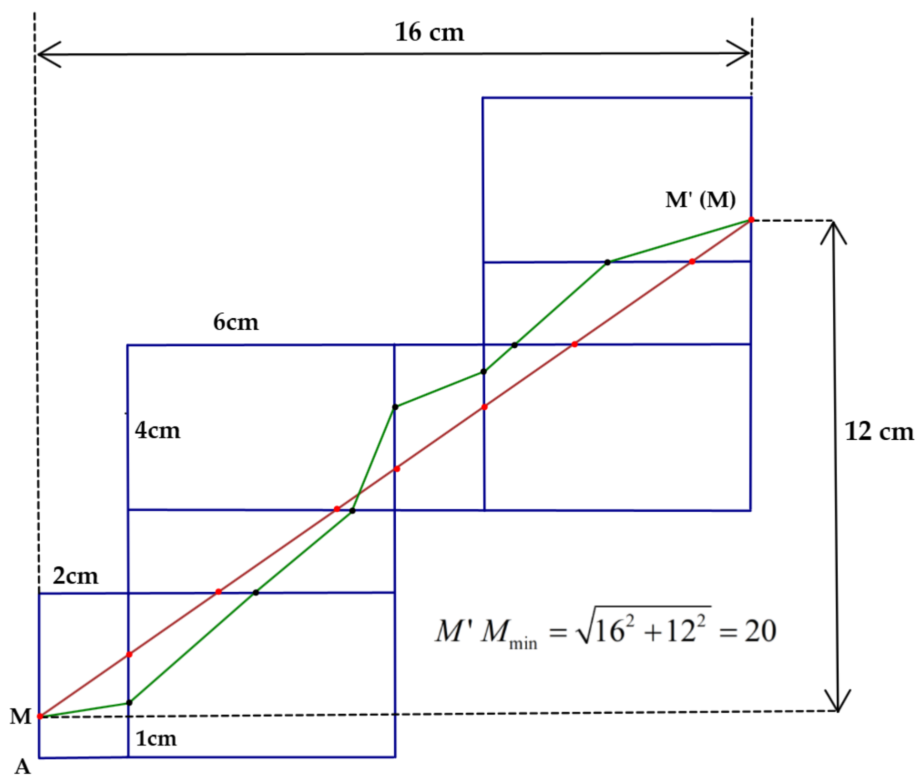
Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases}\sqrt{16+\frac{9n^2}{16}}\in\mathbb{Z}\\ n_{\min}\end{cases}\Leftrightarrow n=4$

Câu 5 [LimC] Chiều dài ngắn nhất của sợi dây để quấn quanh hộp quà có dạng hình hộp chữ nhật kích thước $2\text{cm} \times 4\text{cm} \times 6\text{cm}$ như trong hình vẽ là bao nhiêu. Biết rằng sợi dây bắt đầu và kết thúc tại điểm M và $AM = 1\text{cm}$.



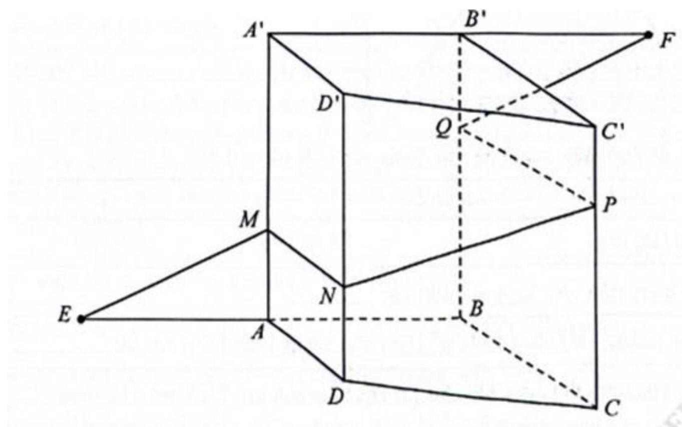
Solution: LimC

Trải phẳng hình vẽ như bên dưới.

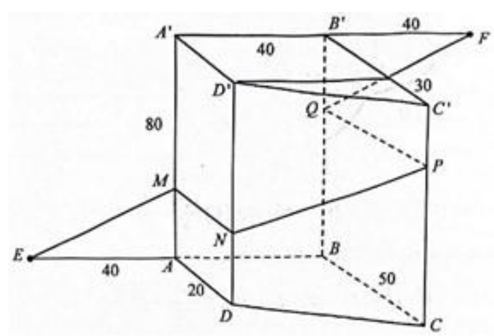


Điểm M' chính là điểm M ban đầu. Ta cần tìm đường đi ngắn nhất từ M đến M' sao cho sợ dây cắt qua tất cả các mặt trên hình vẽ. Dễ thấy MM' ngắn nhất khi nó là đoạn thẳng nối liền từ M đến M'. Tính được $MM' = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$

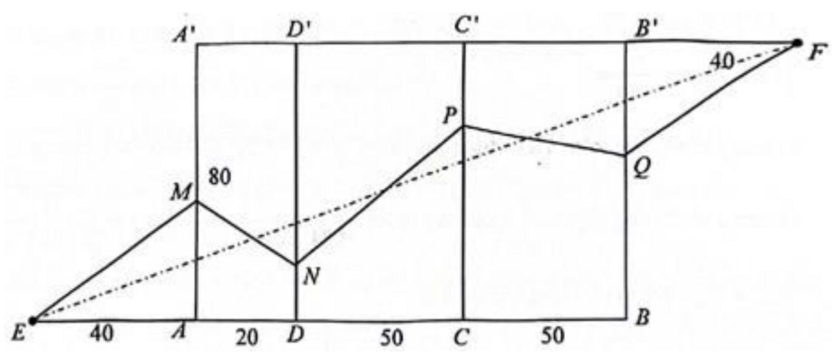
Câu 6 [DGH] Cho một toà nhà mô hình dạng hình lăng trụ đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B có $AB = 40$ cm, $AD = 20$ cm, $BC = 50$ cm, $AA' = 80$ cm . Người ta đi một đường dây từ điểm E (đối xứng với B qua A) đến lần lượt các điểm M, N, P, Q trên các cạnh tương ứng là AA', DD', CC', BB', rồi đến điểm F (đối xứng với A' qua B') Hãy tính chiều dài ngắn nhất của đường dây theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?



Solution: DGH MnP



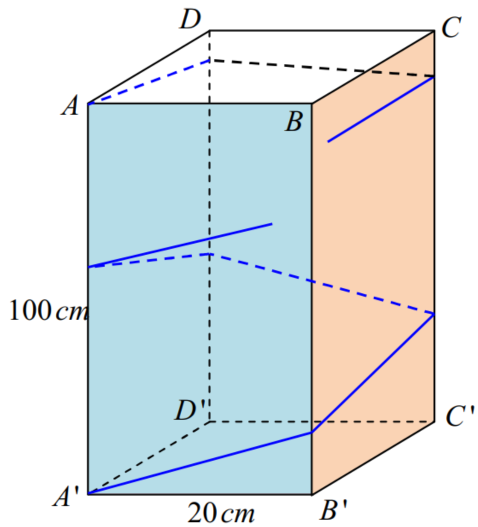
Coi như kéo phẳng hình về phía F sao cho nó phẳng và tất cả đều kéo về mặt phẳng $(ABB'A')$ cũ.



Dễ dàng tính được: $CD = \sqrt{40^2 + (50-20)^2} = 50$. Ta có chiều dài đường dây:

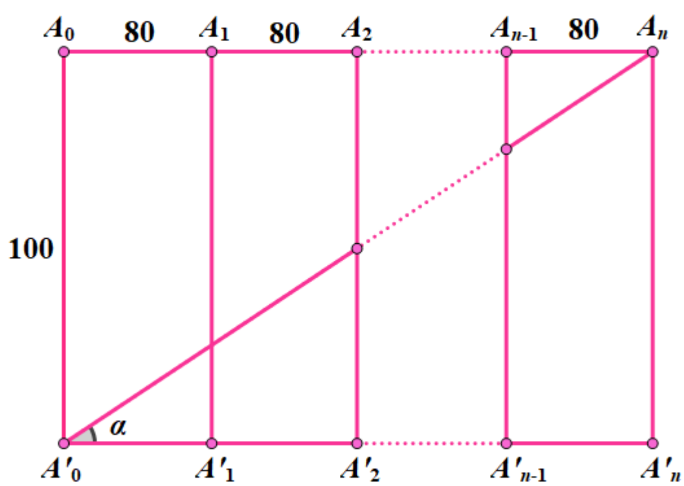
$$L = EM + MN + NP + PQ + QF \geq EF = \sqrt{(40+20+50+50+40)^2 + 80^2} = 215,40\ldots \approx 215$$

Câu 7 [TDM42] Cho toà nhà đồ chơi có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng $20\,\text{cm}$ và chiều cao bằng $100\,\text{cm}$. Một con kiến bắt đầu từ A' di chuyển đến điểm A theo cách sẽ bám sát vào các mặt xung quanh của toà nhà luôn theo hướng chếch lên tạo với phương ngang một góc $\alpha \in (16^\circ;33^\circ)$. Biết con kiến luôn di chuyển với tốc độ bằng $\dfrac{3}{5\tan\alpha}$ cm/s. Hãy tính theo phút khoảng thời gian nhỏ nhất để con kiến bò đến điểm A (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) ?



Solution: CeT

Giả sử con kiến đi n vòng quanh lăng trụ. Con kiến đi từ A' đến A nên số vòng đi phải là số nguyên. Ta khai triển (trải phẳng) hình lăng trụ n lần như sau:

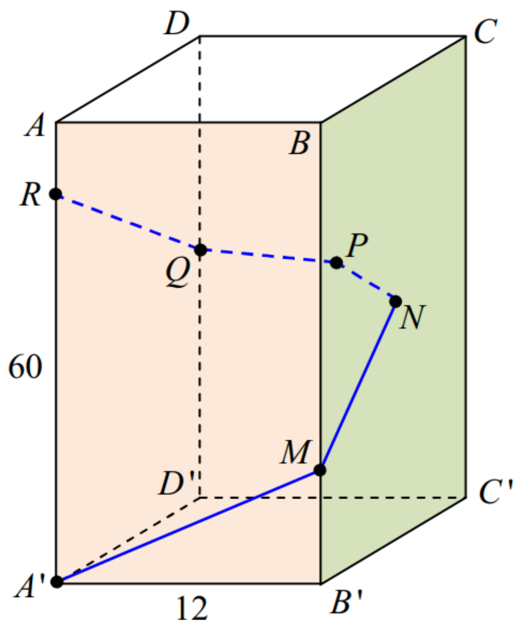


Do con kiến luôn đi chếch lên so với phương ngang góc $\alpha \in (16^\circ;33^\circ)$ nên:

$$\tan 16^\circ < \tan\alpha = \frac{100}{80n.} < \tan 33^\circ \Rightarrow 1,92 < n < 4,36 \Rightarrow 2 \le n \le 4$$

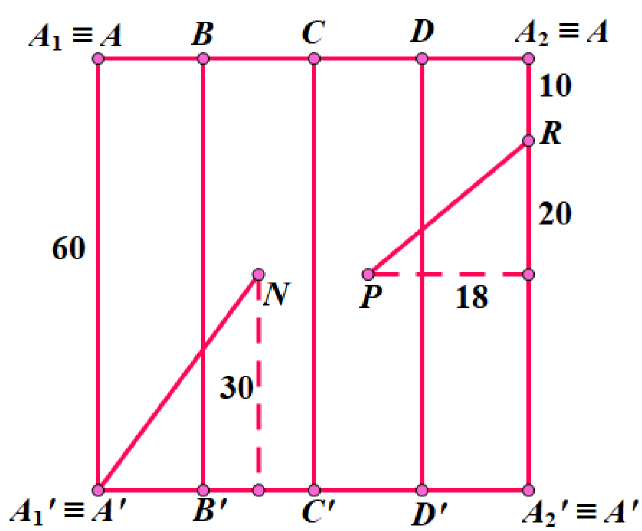
$$\Delta t = \frac{A'_0A_n}{v} = \frac{\sqrt{(80n)^2 + 100^2}}{0,48n} = \frac{1}{0,48}.\sqrt{80^2 + \frac{100^2}{n^2}} \Rightarrow t_{\min} \Leftrightarrow n_{\max} = 4 \Rightarrow t_{\min} \approx 2,91\,\text{phút}$$

Câu 8 [TDM42] Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh đáy bằng 12 và cạnh bên bằng 60. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình lăng trụ từ điểm A' đến điểm R như hình vẽ, sao cho các đoạn $A'M, MN, PQ, QR$ luôn áp sát vào các mặt của lăng trụ, đoạn NP xuyên vào bên trong hình lăng trụ với N và P lần lượt là tâm các mặt bên $BCC'B'$ và $CDD'C'$, có $AR = 10$. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây(làm tròn kết quả đến hàng phần mười) ?



Solution: CeT

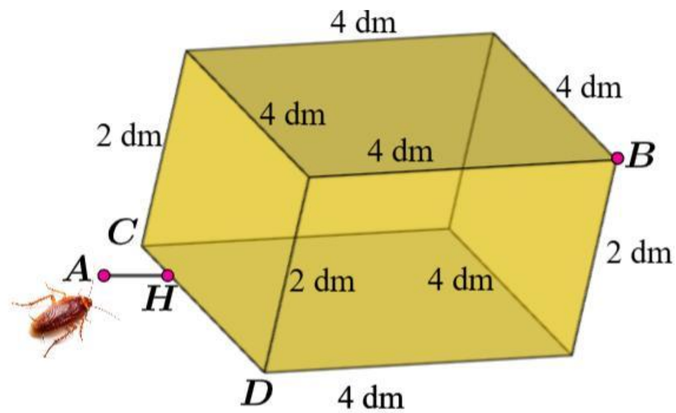
Hai điểm N, P cố định và $NP = 6\sqrt{2}$, ta trải phẳng như hình



$L = AM + MN + NP + PQ + QR \geq A'N + NP + PR$

$\Rightarrow L_{\min} = \sqrt{18^2 + 30^2} + 6\sqrt{2} + \sqrt{18^2 + 20^2} \approx 70,4$

Câu 9 [HXN] Một chú tiểu cường từ vị trí A muốn đến vị trí B để kiếm thức ăn. Trong hình là chiếc hộp có dạng lăng trụ đứng với tất cả các mặt đều là hình chữ nhật, mặt tiếp xúc với nền nhà là hình vuông cạnh $CD = 4$ dm, chiều cao lăng trụ bằng 2 dm. Biết $AH = 0,5$ dm, $DH = 3$ dm và $AH \perp CD$. Trên bề mặt hộp có chứa cạnh CD thì tiểu cường di chuyển với tốc độ $0,3$ dm/s;phần còn lại quãng đường (trừ đáy tiếp xúc mặt đất) thì tiểu cường luôn di chuyển $0,4$ dm/s. Vì tiểu cường giỏi toán hình học không gian nên nó đã chọn con đường ngắn nhất để đi từ A đến B, hỏi thời gian tương ứng là bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần chục)?



Solution: CeT

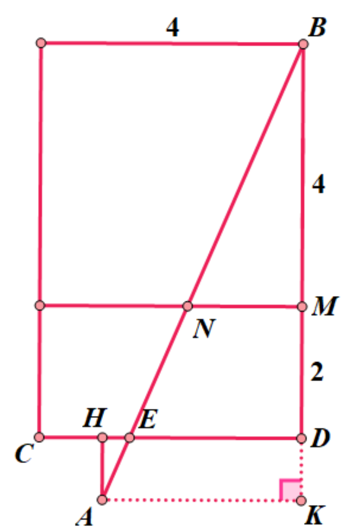
Trải mặt phẳng trên ta được $AB = \sqrt{3^2 + (4+2+0,5)^2} = \dfrac{\sqrt{205}}{2}$

*trải mặt bên cho ra kết quả lớn hơn nên ta bỏ qua trường hợp con kiến đi theo mặt bên

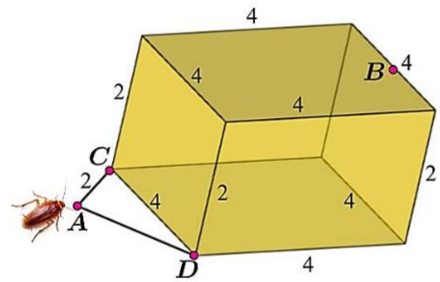
$$\Delta BMN \sim \Delta BDE \sim \Delta BKA \Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BK} = \frac{\frac{\sqrt{205}}{2}}{6,5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BN = \dfrac{4\sqrt{205}}{13} \\ BE = \dfrac{6\sqrt{205}}{13} \end{cases} \Rightarrow NE = BE - BN = \frac{2\sqrt{205}}{13}$$

$$t = \frac{\frac{2\sqrt{205}}{13}}{0,3} + \frac{\left(\frac{\sqrt{205}}{2} - \frac{2\sqrt{205}}{13}\right)}{0,4} \approx 19,7$$

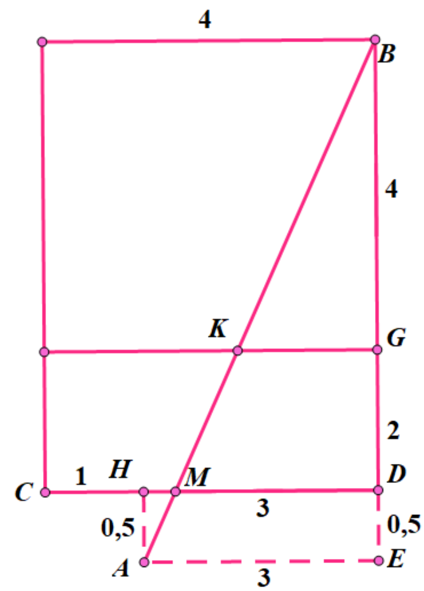


Câu 10 [HXN] Một con gián từ vị trí A muốn đến vị trí B để kiếm thức ăn. Nó phải di chuyển đến cạnh CD rồi tìm cách bò lên chiếc hộp và tìm đến vị trí B (B là trung điểm một cạnh hình hộp chữ nhật như hình vẽ). Biết rằng $AC \perp AD$ và $AC = 2$ dm. Tìm quãng đường ngắn nhất mà con kiến thực hiện khi đi từ A đến B, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm.



Solution: CeT

Trải phẳng như hình



Ta có: $AB = \sqrt{3^2 + (0,5+2+4)^2} = \dfrac{\sqrt{205}}{2}$.

Các tam giác BGK, BDM, BEA đồng dạng nên:

$$\frac{BK}{BG} = \frac{BM}{BD} = \frac{BA}{BE} = \frac{\sqrt{205}}{13} \Rightarrow BM = \frac{6\sqrt{205}}{13}, BK = \frac{4\sqrt{205}}{13};$$

$$MK = BM - BK = \frac{2\sqrt{205}}{13}; AM = AB - MK - BK = \frac{\sqrt{205}}{26}$$

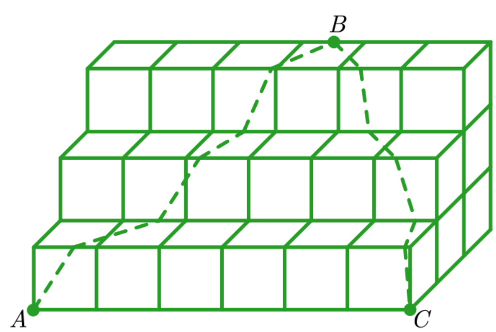
Thời gian tối thiểu là $t_{\min} = \dfrac{AM + BK}{0,4} + \dfrac{MK}{0,3} \approx \boxed{19,7(s)}$.

Câu 11 [SÁCH 40 ĐỀ TSA PTK]

Một con kiến bò từ điểm A (cố định) lên điểm B (linh động) trên đỉnh của bậc thang, rồi từ B đi xuống điểm C (cố định) như hình vẽ bên. Biết rằng một ô vuông gạch của cầu thang có độ dài các cạnh bằng 2 (cm). Gọi $\mathcal{L}$ là độ dài đường đi của con kiến.

a) Giá trị nhỏ nhất của $\mathcal{L}^2$ là ..... (cm).

b) Khi $\mathcal{L}$ là nhỏ nhất thì $AB^2 =$ ..... (cm).



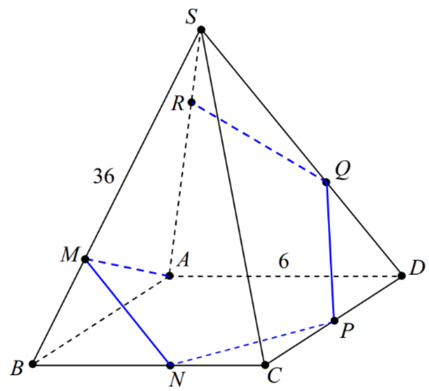
Solution: CeT

Trải phẳng hình ta sẽ được hình vuông $AEFC$ cạnh 12 và B thuộc EF

Do đó: $L = AB + BC \Rightarrow L_{\min} \Leftrightarrow (AB+BC)_{\min} \Leftrightarrow B$ là trung điểm EF (dễ chứng minh)

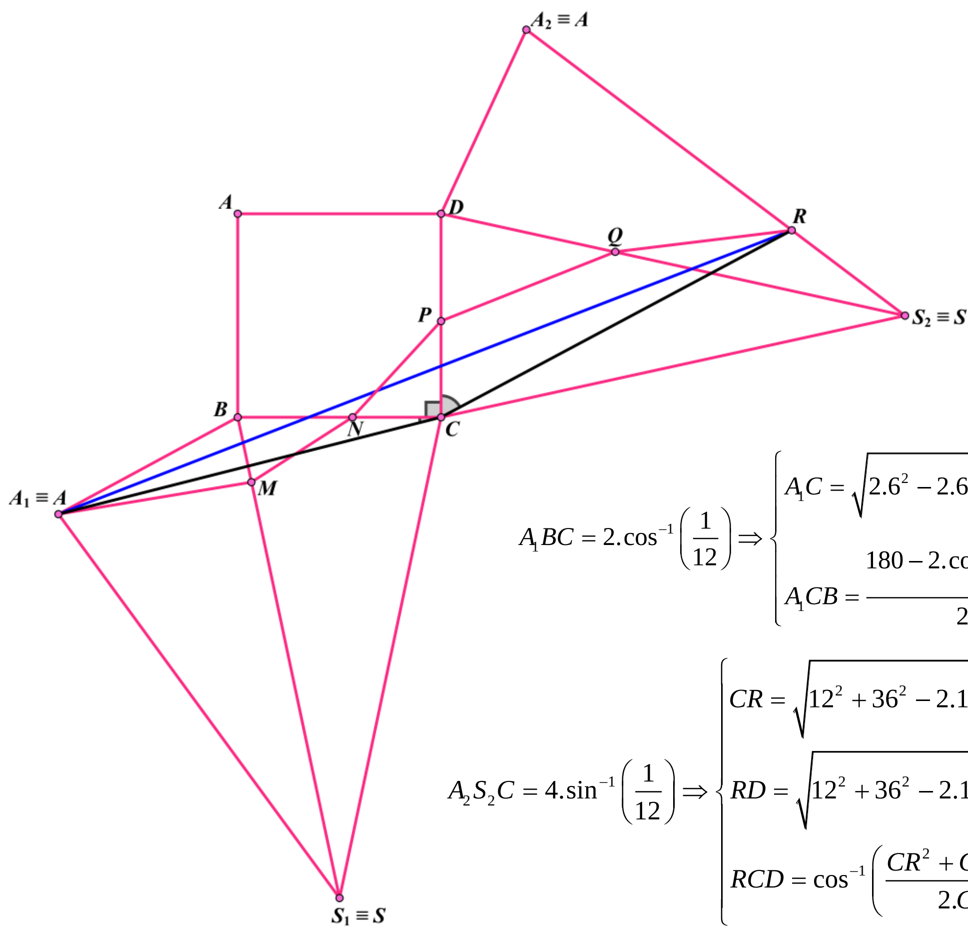
$$\Rightarrow L_{\min}{}^2 = 720;\ AB^2 = 180$$

Câu 12 [TDM 42] Cho một hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 6 và cạnh bên bằng 36. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình chóp từ điểm A đến điểm R như hình vẽ, sao cho sợi dây luôn áp sát vào các mặt của hình chóp. Biết $RA = 2RS$. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây ?



Solution: CeT

Khai triển các mặt của hình chóp về chung một mặt phẳng với mặt đáy như hình, ta dễ dàng tính toán các số liệu:



$$\widehat{A_1BC} = 2.\cos^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) \Rightarrow \begin{cases} A_1C = \sqrt{2.6^2 - 2.6^2.\dfrac{-71}{72}} = \sqrt{143} \\ \widehat{A_1CB} = \dfrac{180 - 2.\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{12}\right)}{2} \end{cases}$$

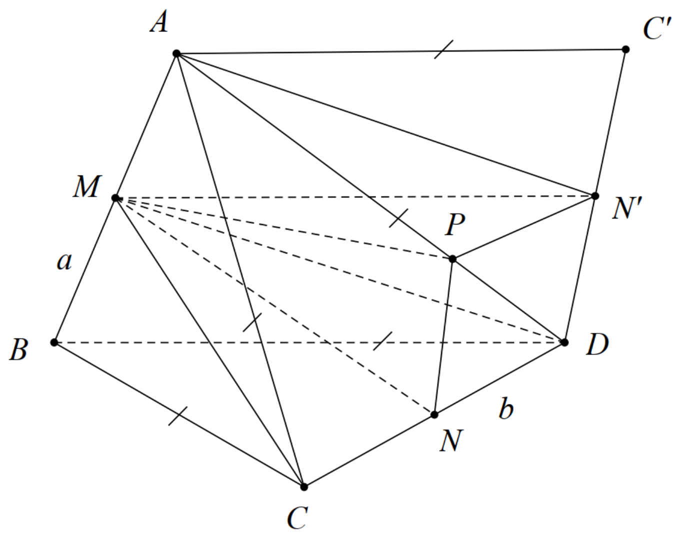
$$\widehat{A_2S_2C} = 4.\sin^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) \Rightarrow \begin{cases} CR = \sqrt{12^2 + 36^2 - 2.12.36.\cos\left(4.\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{12}\right)\right)} = \sqrt{\dfrac{1871}{3}} \\ RD = \sqrt{12^2 + 36^2 - 2.12.36.\cos\left(2.\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{12}\right)\right)} = 14\sqrt{3} \\ \widehat{RCD} = \cos^{-1}\left(\dfrac{CR^2 + CD^2 - DR^2}{2.CR.CD}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{215\sqrt{3}}{36\sqrt{1871}}\right) \end{cases}$$

Do đó $L_{\min} = A_1R = AR = \sqrt{A_1C^2 + CR^2 - 2.A_1C.CR.\cos\left(\widehat{A_1CB} + 90 + \widehat{RCD}\right)} \approx 36,8$

Câu 13 [Tạp chí khoa học số 23 (12-2016) trường Đại Học Đồng Tháp]

Cho tứ diện $ABCD$ có: $AC = AD = BC = BD = 1$; $AB = a$; $CD = b$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm trên cạnh AD một điểm P sao cho $PM + PN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Solution: CeT



Trải tam giác ACD theo trục AD lên mặt phẳng ABD:

$C \to C'$; $DC = DC' = b$, $N \to N'$; $PN = PN'$

Yêu cầu bài toán sẽ tương đương với: Tìm $P \in AD$ sao cho $PM + PN'$ nhỏ nhất.

$\Rightarrow P$ là giao điểm của MN' và AD. Khi đó $(PM + PN')_{\min} = MN'$.

Dễ thấy:

Tam giác ABD cân ở D và M là trung điểm của $AB \Rightarrow DM \perp AB$

Tam giác $AC'D$ cân ở D và N' là trung điểm của $AB \Rightarrow AN' \perp DC'$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMDN'$ nội tiếp có $AM = \dfrac{a}{2}; DN' = \dfrac{b}{2}; AN' = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4}}; MD = \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{4}}$

Áp dụng định lý Ptoleme ta có:

$$MN' = \frac{DN'.AM + DM.AN'}{1}$$

$$\Rightarrow MN' = \frac{b}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} + \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow MN' = \frac{b\sqrt{4 - b^2} + a\sqrt{4 - a^2}}{4}.$$

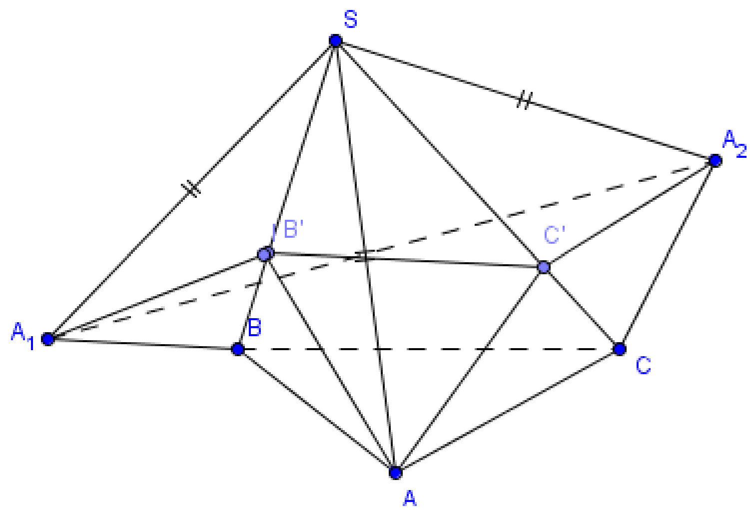
Vậy điểm P cần tìm trên cạnh AD là giao điểm của MN' và AD.

Khi đó tổng $(PM + PN)_{\min} = (PM + PN')_{\min} = MN' = \dfrac{b\sqrt{4 - b^2} + a\sqrt{4 - a^2}}{4}$.

Câu 14 [Phương pháp trải hình trên mặt phẳng -Trần Thị Hiền]

Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=30^{\circ}$; $AB=a$. Lấy B',C' lần lượt thuộc cạnh SB,SC. Xác định vị trí của B',C' sao cho chu vi $\triangle AB'C'$ là nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Solution: CeT



Trải tứ diện xuống mặt phẳng SBC như sau:

$\Delta ABS \to \Delta A_1BS$; $\Delta ACS \to \Delta A_2CS$

Khi đó, với các điểm: $B' \in SB$; $C' \in SC$

Thì: $P_{AB'C'} = AB' + B'C' + C'A = A_1B' + B'C' + C'A_2 \geq A_1A_2$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow B',C' \in A_1A_2$

Do A_1, A_2 cố định $\Rightarrow A_1A_2$ cố định

SB, SC cố định $\Rightarrow$ Ta luôn xác định được B',C' thỏa mãn chu vi $\Delta AB'C'$ là nhỏ nhất.

Khi đó, ta có: $\widehat{A_1SA_2} = \widehat{A_1SB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSA_2} = 3.30^{\circ} = 90^{\circ} \Rightarrow A_1A_2 = \sqrt{2}.SA_1 = \sqrt{2}.SA_2 = \sqrt{2}.SA$

Xét ΔSAB có $AB=a$; $\widehat{ASB}=30^{\circ} \Rightarrow \widehat{SBA}=75^{\circ}$ (Vì ΔSAB cân tại S)

$$SA = \frac{AB}{\sin 30^{\circ}}.\sin 75^{\circ} = \frac{a}{\sin 30^{\circ}}\cos 15^{\circ} = \frac{a}{2\sin 15^{\circ}}$$

Ta có: $\sin^2 15^{\circ} = \dfrac{1-\cos 30^{\circ}}{2} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

mà $0^{\circ} < 15^{\circ} < 90^{\circ} \Rightarrow \sin 15^{\circ} > 0 \Rightarrow \sin 15^{\circ} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$$\Rightarrow SA = \frac{a}{2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \Rightarrow A_1A_2 = \sqrt{2}.\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2a}{\sqrt{3}-1}$$

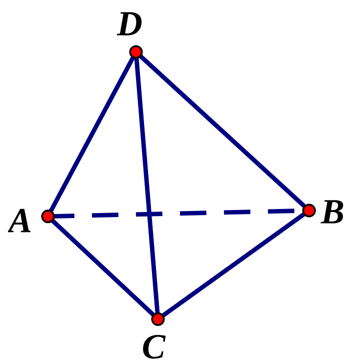
Vậy, giá trị nhỏ nhất của chu vi $\Delta AB'C'$ là $\frac{2a}{\sqrt{3}-1}$ tại B', C' là giao điểm của SB, SC với A_1A_2.

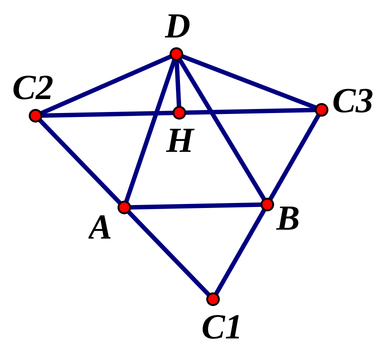
Câu 15 [HSG KHÁNH HÒA] Cho tứ diện $ABCD$ có $ACB = 60^o$ và

$$ACD + BCD = CAD + BAD + BAC = CBD + ABD + ABC = 180^o.$$

Gọi S là diện tích toàn phần của hình tứ diện $ABCD$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của S, biết chu vi tam giác ABC bằng 3.

Solution: CeT





Cắt tứ diện $ABCD$ theo các cạnh CA, CB, CD và trải xuống mặt phẳng (ABD).

Khi đó $\Delta ADC \longrightarrow \Delta ADC_2$; $\Delta BDC \longrightarrow \Delta BDC_3$; $\Delta ABC \longrightarrow \Delta ABC_1$.

Ta có :

$CBD + ABD + ABC = C_3BD + ABD + ABC_1 = 180^o \Rightarrow C_3, B, C_1$ thẳng hàng.

$CAD + BAD + BAC = C_2AD + BAD + BAC_1 = 180^o \Rightarrow C_2, A, C_1$ thẳng hàng.

$ACD + BCD = BAC = AC_2D + BC_1D = 180^o$. $\Rightarrow C_1C_2DC_3$ là tứ giác nội tiếp, do đó

$C_2DC_3 = 120^o$, (vì $ACB = AC_1B = 60^o$)

Diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ là diện tích tứ giác $C_1C_2DC_3$.

Ta có: $S_{C_1C_2DC_3} = S_{C_1C_2C_3} + S_{C_2DC_3}$

Đặt $CA = x; CB = y \Rightarrow AB = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$

Chu vi ΔABC bằng $x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = 3$.

Ta có : $C_1C_2 = 2CA = 2x; C_1C_3 = 2CB = 2y; C_2C_3 = 2AB = 2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}$.

$\tan 60^{\circ}=\dfrac{C_3H}{DH}\Rightarrow DH=\dfrac{C_2C_3}{2.\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-xy}}{\sqrt{3}}$.

Ta có: $S_{C_1C_2DC_3}=S_{C_1C_2C_3}+S_{C_2DC_3}=\dfrac{1}{2}.C_1C_2.C_1C_3.\sin 60^{\circ}+\dfrac{1}{2}.DH.C_2C_3$

$$=\sqrt{3}xy+\frac{x^2+y^2-xy}{\sqrt{3}}=\frac{(x+y)^2}{\sqrt{3}}$$

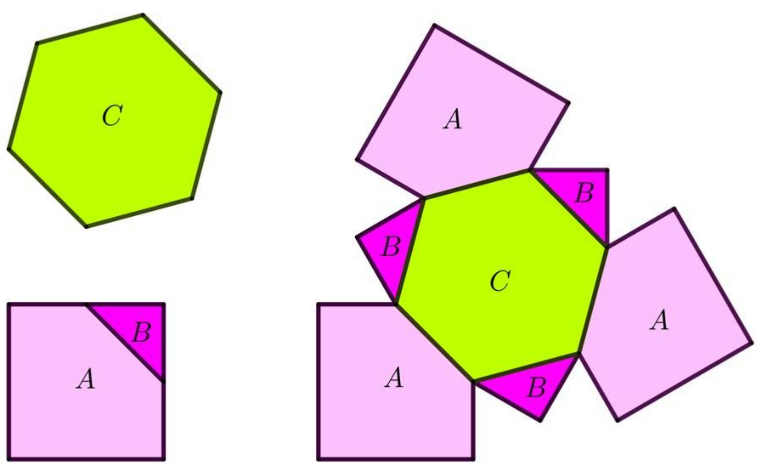
Áp dụng bất đẳng thức $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}$, ta có:

$$3=x+y+\sqrt{x^2+y^2-xy}=x+y+\sqrt{(x+y)^2-3xy}\ge x+y+\sqrt{(x+y)^2-\frac{3}{4}(x+y)^2}=\frac{3}{2}(x+y)$$

$\Rightarrow x+y\le 2$. Vậy $S=\dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{3}}\le\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow S_{\max}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (khi $x=y=1$).

Chán trải hình rồi thì ta gấp hình nhé :v

Câu 16 [VTED] Ba tấm bìa hình vuông độ dài cạnh 40 cm, mỗi tấm bìa được cắt thành hai phần A và B dọc theo đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh kề nhau. Sau đó sáu phần này cùng với tấm bìa lục giác đều C độ dài cạnh $20\sqrt{2}$ cm được dán và gấp lại để thu được một khối đa diện.



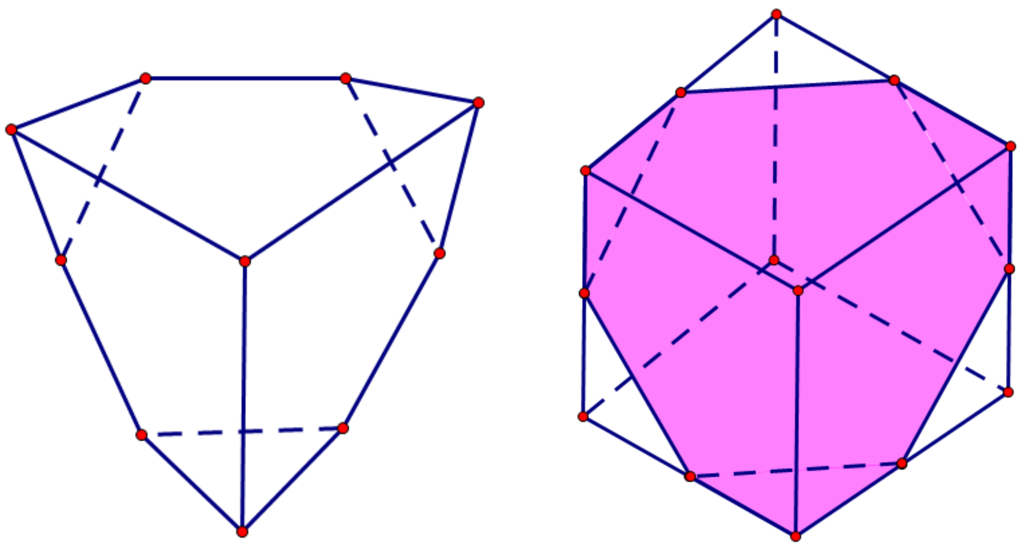
Thể tích của khối đa diện này là bao nhiêu bao nhiêu lít?

Solution: CeT

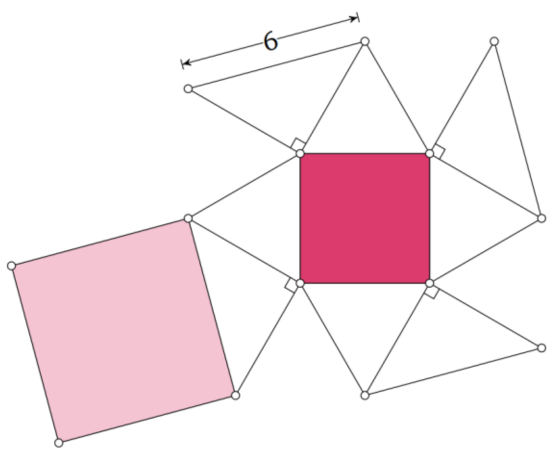
Dễ dàng nhận ra thể tích của khối đa diện sau khi gấp bằng một nữa thể tích khối lập phương

$V=\dfrac{1}{2}V_{LP}=\dfrac{1}{2}.40^3=32000\text{ cm}^3=32$ lít.

Tham khảo hình vẽ bên dưới:

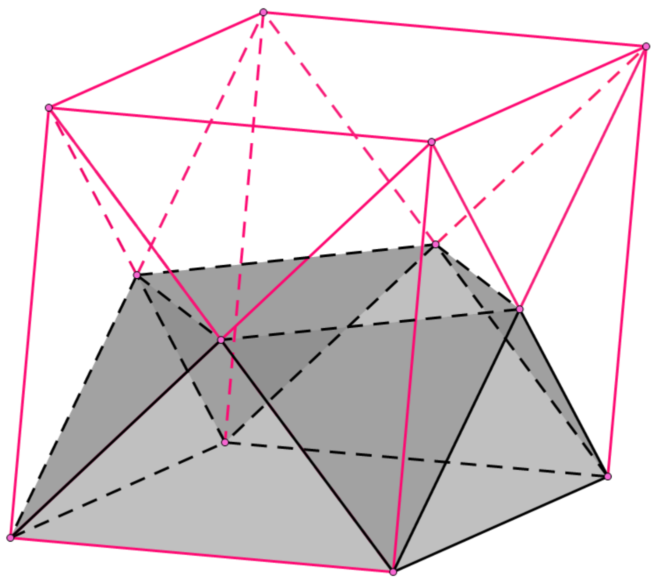


Câu 17 **[PimaX]** Hình trải phẳng của một khối đa diện lồi được cho như hình vẽ ở bên. Biết rằng các mặt của khối đa diện này là các hình vuông, hình tam giác đều và hình tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 6. Thể tích của khối đa diện đã cho bằng



Solution: CeT

Đối với dạng bài này khó nhất chính là tưởng tượng được hình dạng của khối đa diện sau khi gấp
Tiếp đó là tư duy làm sao để tính được thể tích của khối đa diện
Ở bài này vì đề cho **tam giác vuông cân**, và **tam giác đều** nên ta nghĩ ngay đến việc dựng một hình lập phương chứa khối đa diện cần tìm
Từ những phân tích đó ta dựng hình như hình vẽ sau:



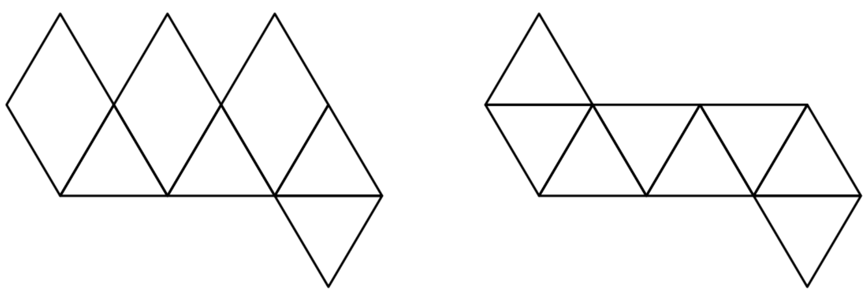
Khối đa diện chính là phần được tô đậm trong hình

Gọi V là thể tích của khối đa diện cần tìm

Suy ra $V_{\text{lập phương}} = 4.V_{\text{tứ diện}} + 2.V \Rightarrow V = \frac{V_{LP} - 4.V_{TD}}{2} = \frac{6^3 - \frac{3.3\sqrt{2}.3\sqrt{2}}{6}}{2} = 90$

Câu 18 **[Đề tuyển sinh năm 2012 Trường trung học cơ sở Nada - Nhật Bản, Ngày 1]**

Hình trải phẳng của 2 khối đa diện A và B được cho lần lượt như ở 2 hình vẽ bên dưới.

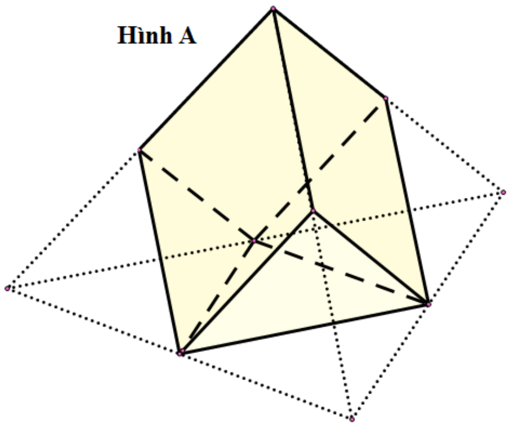


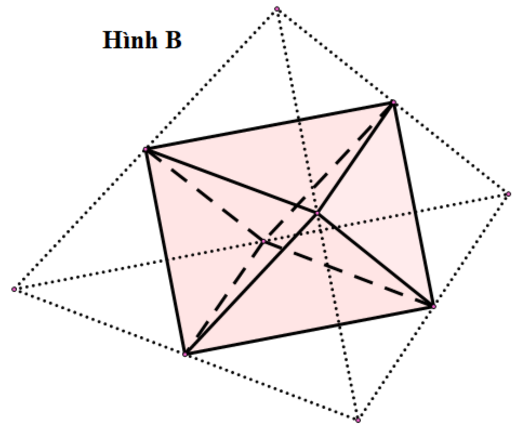
Nếu độ dài tất cả các cạnh của A và B bằng nhau, thì thể tích của A gấp bao nhiêu lần thể tích của B?.

Solution: CeT

Hai bài trên ta thường liên tưởng đến việc đưa khối đa diện cần tìm vào khối lập phương, tuy nhiên ở bài toán này có vẻ lối tư duy này không khả thi cho lắm. Vì thế ta liên tưởng đến việc đưa nó vào một tứ diện đều

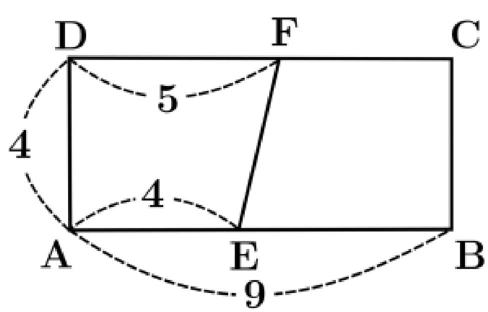
Tham khảo hình vẽ bên dưới:

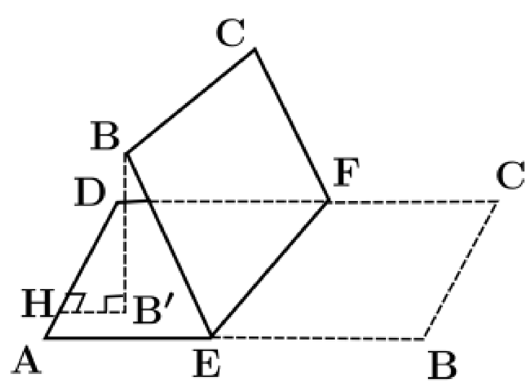




Từ đây dễ dàng tìm được đáp án là $\frac{5}{4}$ lần

Câu 19 [NBV] Như hình vẽ, có một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ với các độ dài $AB = 9, AD = 4$. Trên đoạn AB, lấy điểm E sao cho $AE = 4$, và trên đoạn DC, lấy điểm F sao cho $DF = 5$. Nối hai điểm E và F, rồi gấp tờ giấy theo đường EF, sao cho hai nửa mặt phẳng $AEFD$ và $EBCF$ hợp với nhau một góc $60°$.



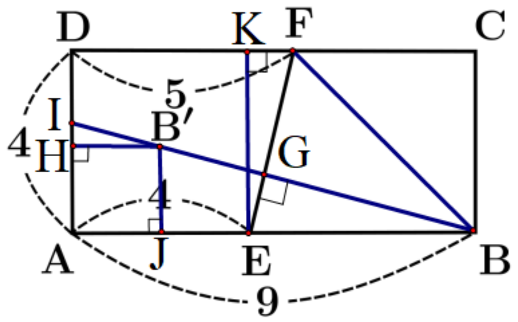


Gọi B' là chân đường vuông góc hạ từ điểm B (sau khi gấp) xuống mặt phẳng $AEFD$, và H là chân đường vuông góc từ B' xuống đoạn AD. Tính giá trị của $17B'H$.

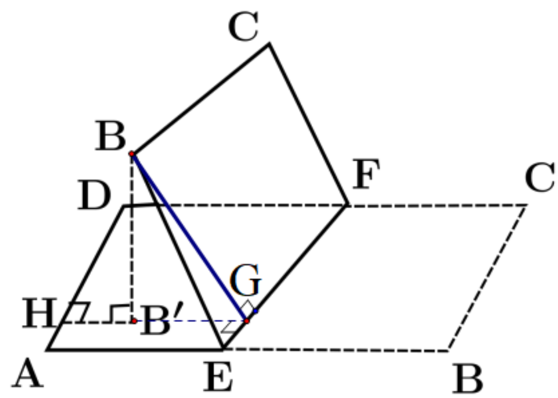
***Solution:* Nhóm NBV**

Trả lời: 33

Trong hình 2. Kẻ $BG \perp EF$ tại G



Hình 1



Hình 2

Suy ra $EF \perp (BB'G) \Rightarrow EF \perp B'G$ tại G mà $BG \perp EF$ suy ra tại hình 1, ta có 3 điểm B', G, B thẳng hàng.

Tại hình 1, ta kẻ BG cắt AD tại I. Kẻ $EK \perp DC$ tại K, suy ra $EF = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

Ta có: $S_{\Delta BEF} = S_{EBCK} - S_{\Delta EFK} - S_{\Delta BFC} = 5.4 - \frac{1}{2}.4.1 - \frac{1}{2}.4.4 = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}BG.EF = 10 \Leftrightarrow BG = \frac{20}{\sqrt{17}}$

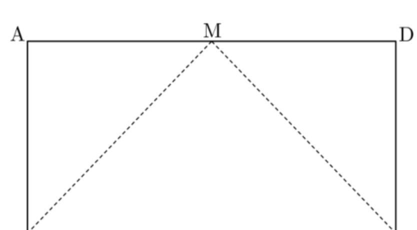
Ta có $BGB' = 60° \Rightarrow B'G = \frac{10}{\sqrt{17}}$ suy ra $BB' = \frac{30}{\sqrt{17}}$

Gọi J là hình chiếu vuông góc của B' lên AE, ta dễ chứng minh được góc $KFE = BB'J \Rightarrow \sin KFE = \sin BB'J = \frac{EK}{EF} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

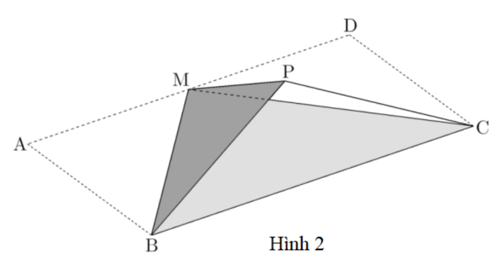
Ta có: $B'H = AJ = AB - BJ = 9 - BJ = 9 - \sin BB'J.BB' = 9 - \frac{4}{\sqrt{17}}.\frac{30}{\sqrt{17}} = \frac{33}{17}$

Vậy $17B'H = 33$

Câu 20 [NBV] Cho tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ như Hình 1, với $AB = 3, AD = 2\sqrt{7}$. Gọi M là trung điểm của đoạn AD. Gập tờ giấy theo hai đường thẳng BM và CM sao cho hai điểm A và D trùng nhau tại một điểm P như Hình 2. Khi đó, gọi θ là góc giữa hai mặt phẳng PMB và BCM. (Không xét độ dày của tờ giấy)



Hình 1



Hình 2

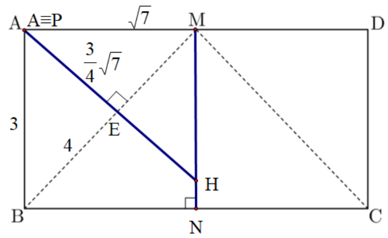
Giá trị của $\cos\theta$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

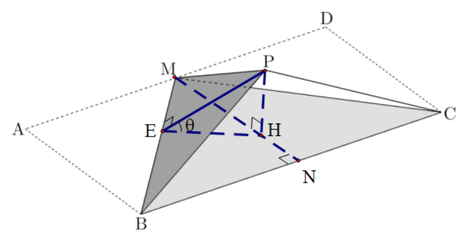
Solution: Nhóm NBV

Trả lời: 0,78

Kẻ $MN \perp BC$ tại N. Khi đó kẻ $PH \perp MN$ (dễ chứng minh được $PH \perp (MBC)$)

Kẻ $PE \perp MB$ tại E, suy ra $\begin{cases} MB \perp PE \\ MB \perp PH \end{cases} \Rightarrow MB \perp (EPH) \rightarrow \cos\theta = \dfrac{HE}{PE}$ (*)





Xét tam giác vuông AMB có: $AB.AM = BM.AE \Leftrightarrow 3.\sqrt{7} = 4AE \Rightarrow AE = \dfrac{3}{4}\sqrt{7}$

Ta có $\Delta BAM \backsim \Delta AEM$ nên $\dfrac{BA}{AE} = \dfrac{BM}{AM} = \dfrac{AM}{EM} \Leftrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{EM} \Rightarrow EM = \dfrac{7}{4}$

Dễ thấy $AHM = AME$ và $HAM = ABM = BMH$ nên $\dfrac{BA}{AM} = \dfrac{EM}{EH} \Rightarrow EH = \dfrac{7}{12}\sqrt{7}$

Từ (*) ta có: $\cos\theta = \dfrac{HE}{PE} = \dfrac{\frac{7\sqrt{7}}{12}}{\frac{3\sqrt{7}}{4}} = \dfrac{7}{9} \approx 0,78$

…Hết…