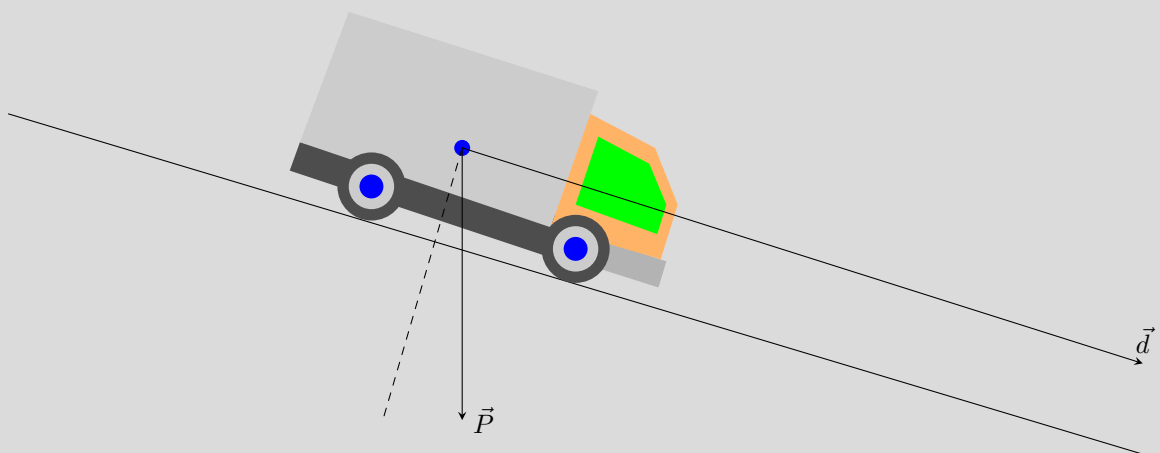


BÀI GIẢNG

TOÁN 12

(Tài liệu theo sách mới)



MỤC LỤC

Chương 1. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	2
Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN	2
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	2
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	4
Dạng 1. Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ, độ dài véc tơ.....	4
Dạng 2. Xác định góc và tích vô hướng của hai véc tơ.....	15
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	23
Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN	29
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	29
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	30
Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ véc tơ.....	30
Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian.....	39
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	45
Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ	55
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	55
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	56
Dạng 1. Tọa độ của các phép toán véc tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng.....	56
Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai véc tơ và ứng dụng.....	65
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	75

VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

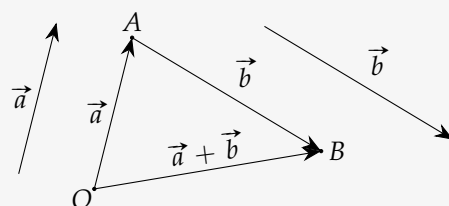
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tổng của hai véc tơ

Định nghĩa 1.1.

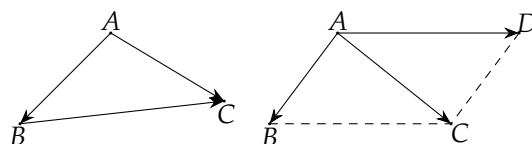
Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\vec{OB}$ là tổng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là phép cộng véc tơ.



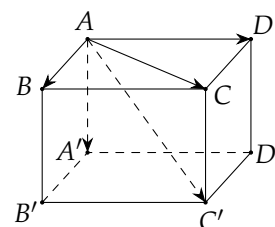
① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C , ta có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

② Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$



③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$

⚠ Hệ thức tương tự: $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$.



Tính chất 1.1.

- ① Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- ② Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- ③ Với mọi véc tơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- ④ Tổng của ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

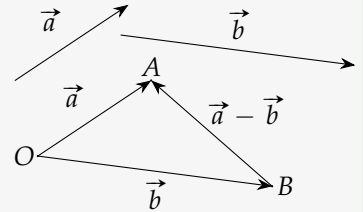
2. Hiệu của hai véc tơ

Định nghĩa 1.2.

a) Vectơ đối:

- ① Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- ② Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).
- ③ Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

b) Định nghĩa hiệu của hai vectơ: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.
Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.



- ① Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
- ② Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

3. Tích của một số với một véc-tơ

Định nghĩa 1.3. Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của một số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- ✔ Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- ✔ Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.



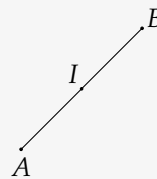
$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Tính chất 1.2.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

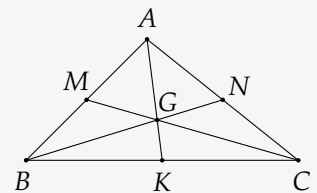
① I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;...



② G là trọng tâm của tam giác ABC thì

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GK}$;...



Nhận xét:

① Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k , ta luôn có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{cases}$.

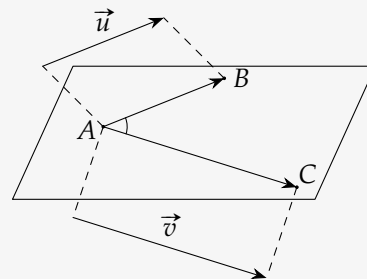
② Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

③ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Định nghĩa 1.4.

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.



⚠ $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.



- Nếu $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$;
- Nếu $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$;
- Nếu $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.

Định nghĩa 1.5. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, ký hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$



- ① Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ② $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$. $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- ③ Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- ④ Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Tính chất 1.3. Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc-tơ, độ dài véc-tơ

Ví dụ 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$.

- a) Tìm vectơ: $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$. b) Chứng minh: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$.

d) Chứng minh: $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$.

e) Chứng minh: $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.

f) Tính độ dài véc tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'}$.

📌 Lời giải.

a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$.

Suy ra $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'}$.

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

c) Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'A'}$. Do đó

$$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'D}.$$

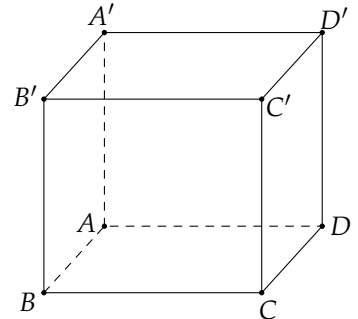
d) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} &= \overrightarrow{BB'} - (\overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'B'}) = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{D'B'} \\ &= \overrightarrow{BB'} + (-\overrightarrow{D'B'}) = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD'}.\end{aligned}$$

e) Do G là trọng tâm tam giác $AB'D'$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$. Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'C} &= \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} \\ &= \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GD'} \\ &= 3\overrightarrow{A'G}.\end{aligned}$$

f) Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$. Suy ra $|\vec{u}| = AC' = a\sqrt{3}$.



Ví dụ 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa

a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

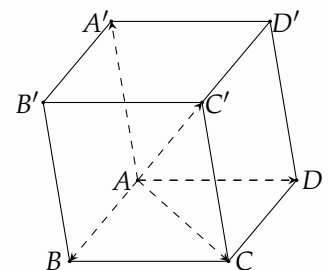
b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$;

c) bằng với $\overrightarrow{AD}$;

d) bằng với $\overrightarrow{A'B}$;

e) đối với $\overrightarrow{CD'}$;

f) đối với $\overrightarrow{B'C}$.



📌 Lời giải.

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và AC . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ đối nhau;
 b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$;
 c) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$.

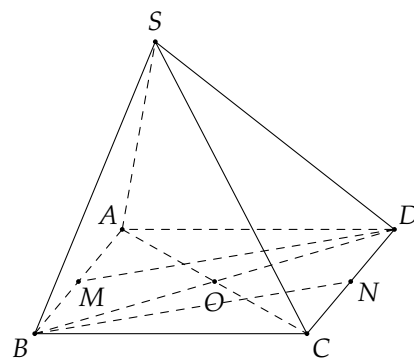
Lời giải.

- a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB \parallel CD$, suy ra $BM = DN$ và $BM \parallel DN$.
 Do đó $BMDN$ là hình bình hành.
 Hai véc-tơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai véc-tơ đối nhau.

- b) Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$. Suy ra

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

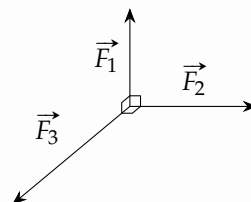
- c) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{DM}$.
 Suy ra $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{SC}$.



Ví dụ 4

Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N.

- a) Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F}_2, \vec{F}_3$.
 b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Lời giải.

- a. Gọi O là vị trí trên vật mà ba lực cùng tác động vào. Gọi A, B, C là các điểm sao cho $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}, \vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$. Khi đó

$$|\vec{F}_2 + \vec{F}_3| = OE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ N}.$$

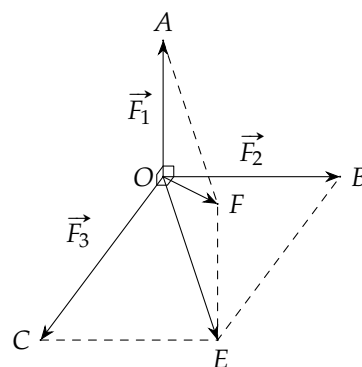
- b. Dựng các hình chữ nhật $OBEC$ và $OEFA$ thì ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF} \end{cases}$$

Do đó $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$.

Vậy độ lớn hợp lực của F_1, F_2 và F_3 là

$$\begin{aligned} |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| &= OF = \sqrt{OA^2 + OE^2} \\ &= \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} \text{ N}. \end{aligned}$$



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

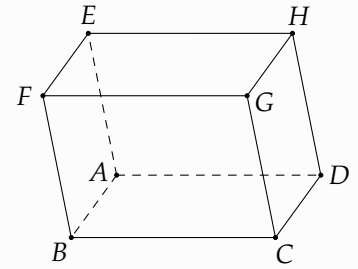
Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là các véc-tơ nào sau đây?

Ⓐ $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$.

Ⓑ $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$.

Ⓒ $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{FE}$.

Ⓓ $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{EF}$.



Lời giải.

Câu 2

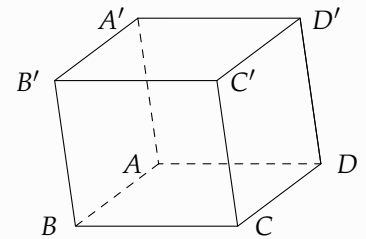
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AD}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AC}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.



Lời giải.

Câu 3

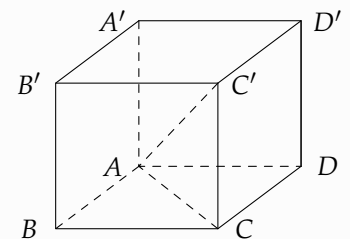
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

Ⓐ $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

Ⓑ $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D'B'} = \vec{0}$.

Ⓓ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.

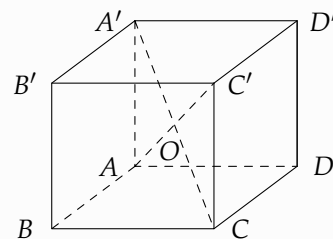


Lời giải.

Câu 4

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
 Ⓑ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
 Ⓓ $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.



📌 **Lời giải.**

Câu 5

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ theo a .

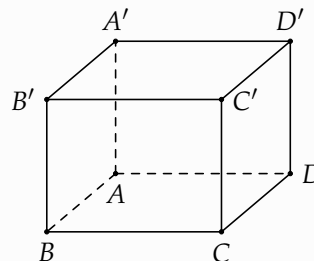
- Ⓐ $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$. Ⓑ $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$. Ⓒ $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$. Ⓓ $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.

📌 **Lời giải.**

Câu 6

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a .

- Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ $(1 + \sqrt{3})a$.
 Ⓒ $a\sqrt{6}$. Ⓓ $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.



📌 **Lời giải.**

Câu 7

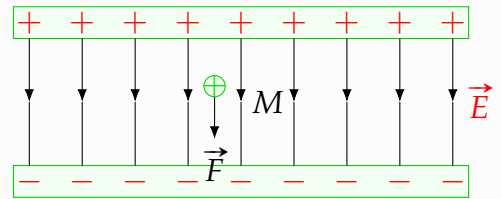
Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C.

☐ A 10^{-3} N.

☐ B 10^4 N.

☐ C 10^{-14} N.

☐ D 10^{-4} N.



Lời giải.

Câu 8

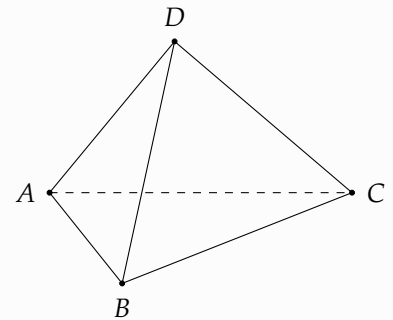
Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

☐ A $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CD} + \vec{BC}$.

☐ B $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BC}$.

☐ C $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC}$.

☐ D $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{DB} - \vec{DC}$.



Lời giải.

Câu 9

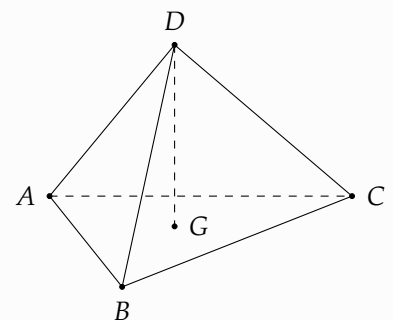
Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm k thỏa đẳng thức vectơ $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = k \cdot \vec{DG}$.

☐ A $k = 1$.

☐ B $k = 3$.

☐ C $k = 2$.

☐ D $k = 3$.



Lời giải.

.....

.....

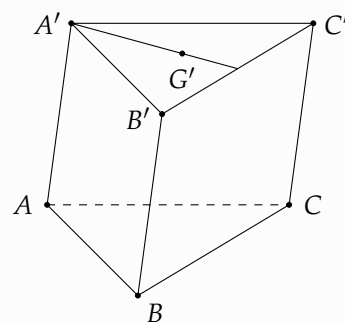
.....

.....

Câu 10

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

- Ⓐ $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. Ⓑ $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
- Ⓒ $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. Ⓓ $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.



Lời giải.

.....

.....

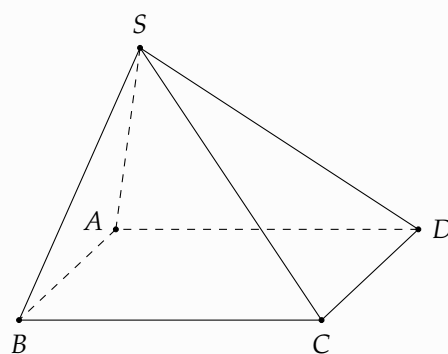
.....

.....

Câu 11

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- Ⓐ $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$. Ⓑ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
- Ⓒ $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. Ⓓ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.



Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 12

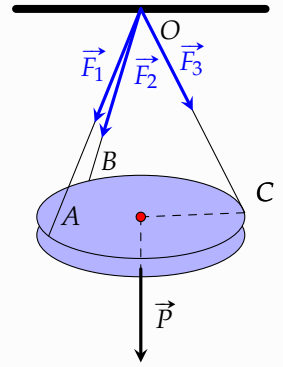
Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

Ⓐ $14\sqrt{3} \text{ (N)}$.

Ⓑ $15\sqrt{3} \text{ (N)}$.

Ⓒ $17\sqrt{3} \text{ (N)}$.

Ⓓ $16\sqrt{3} \text{ (N)}$.



📌 Lời giải.

Câu 13

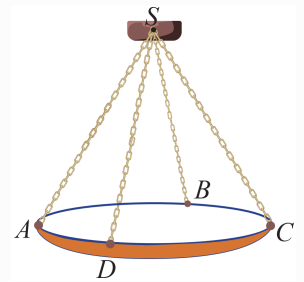
Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Ⓐ $\frac{15\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.

Ⓑ $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.

Ⓒ $\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.

Ⓓ $\frac{30\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.



📌 Lời giải.

Câu 14

Cho tứ diện $RYFS$. Có bao nhiêu vectơ được tạo thành có điểm đầu là R và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

Ⓐ 4.

Ⓑ 3.

Ⓒ 2.

Ⓓ 1.

📌 Lời giải.

Câu 15

Cho hình lăng trụ $HKY.H'K'Y'$. Gọi L, L' là trung điểm của $KY, K'Y'$ tương ứng. Các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lăng trụ và cùng phương với $\overrightarrow{KL}$ là

- (A) $\overrightarrow{K'Y'}, \overrightarrow{Y'K'}$. (B) $\overrightarrow{KY}, \overrightarrow{YK}$.
(C) $\overrightarrow{KY}, \overrightarrow{YK}, \overrightarrow{K'Y'}, \overrightarrow{Y'K'}$. (D) $\overrightarrow{KYK'Y'}$.

 **Lời giải.**

Câu 16

Cho hình lăng trụ $PJI.P'J'I'$. Gọi E, E' là trung điểm của $JI, J'I'$ tương ứng. Các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lăng trụ và cùng hướng với $\overrightarrow{JE}$ là

- (A) $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{J'I'}$. (B) $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{I'J}$. (C) $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{J'I'}, \overrightarrow{I'J'}$. (D) $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{I'J'}$.

 **Lời giải.**

Câu 17

Cho hình lăng trụ $ZBC.Z'B'C'$. Gọi R, R' là trung điểm của $BC, B'C'$ tương ứng. Số vectơ bằng $\overrightarrow{RR'}$ là

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

 **Lời giải.**

Câu 18

Cho hình lăng trụ $TSL.T'S'L'$. Gọi P, P' là trung điểm của $SL, S'L'$ tương ứng. Số vectơ đối của $\overrightarrow{P'P}$ là

- (A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

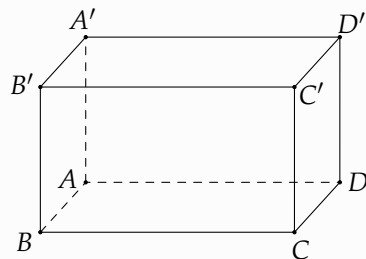
 **Lời giải.**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$.
 b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.
 c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$.
 d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$.

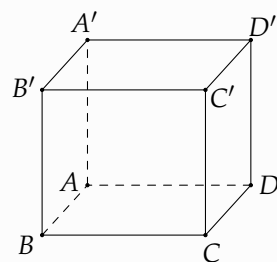


Lời giải.

Câu 2

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.
 b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$.
 c) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = a\sqrt{2}$.
 d) $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = a$.

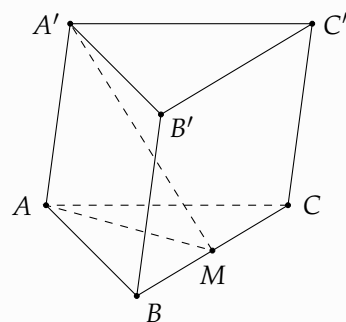


Lời giải.

Câu 3

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của BC . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
 b) $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
 c) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c}$.
 d) $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

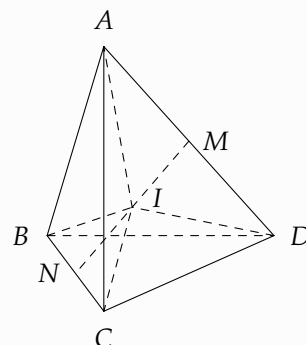


Lời giải.

Câu 4

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC , I là trung điểm MN . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$. b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$. d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

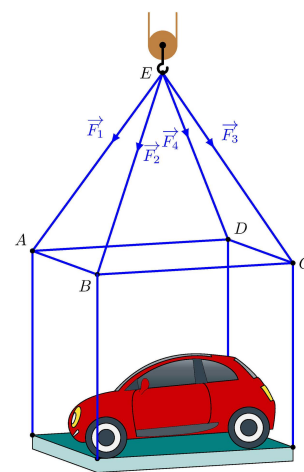


Lời giải.

Câu 5

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

- a) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.
b) $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$.
c) $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 8141 \text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải.

Câu 1

Cho hình lăng trụ $TAL.T'A'L'$ có đáy là tam giác TAL cân tại T , cạnh bên bằng 3 và góc ở đỉnh bằng 30° . Gọi E là trung điểm của AL . Độ dài của $\overrightarrow{TE}$ (làm tròn đến kết quả phần trăm) bằng

KQ:

Lời giải.

Dạng 2 Xác định góc và tích vô hướng của hai vectơ

Ví dụ 1

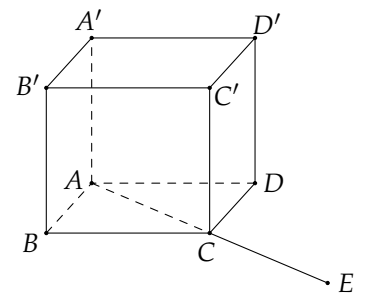
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5.

- Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$.
- Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD}$;
- Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

a) Ta có :

- $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \widehat{CAB} = 45^\circ$
- $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ$.
- $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (E là điểm đối xứng của A qua C).
- $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'} \Rightarrow (\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{C'BD}$. Lại có, tam giác $C'BD$ là tam giác đều nên $\widehat{C'BD} = 60^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}) = 60^\circ$.



b) Ta có $AC = BD = B'D' = 5\sqrt{2}$. Suy ra

- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos 45^\circ = 25$.
- Do AC vuông góc $B'D'$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$.
- $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD} = AD' \cdot BD \cdot \cos 60^\circ = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$.

c) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 5^2 - 5^2 = 0\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

Ví dụ 2

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$. b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \\ &= a \cdot a \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$.

Ta lại có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

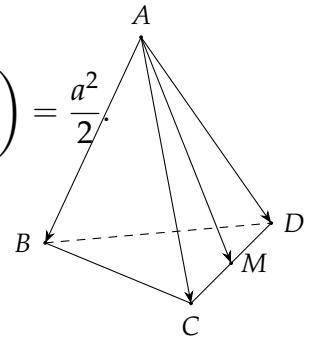
b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Mà AM , BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD , BCD nên

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{CD}.$$

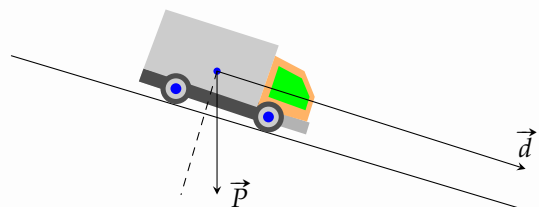
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$$

Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.



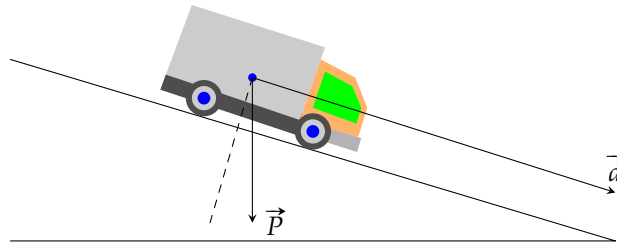
Ví dụ 3

Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$.



Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải.



Ta có $1,5 \text{ tấn} = 1\,500 \text{ kg}$.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 1\,500 \cdot 9,8 = 14\,700 \text{ (N)}$.

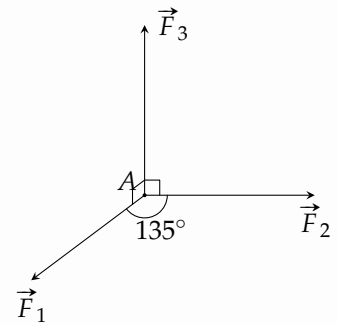
Vectơ $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|\vec{d}| = 30 \text{ (m)}$ và $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 14\,700 \cdot 30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38\,436 \text{ (J)}.$$

Ví dụ 4

Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



Lời giải.

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, tức là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, ta có

$$\begin{aligned} |\vec{F}|^2 &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)^2 \\ &= \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + \vec{F}_3^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + 2\vec{F}_2 \cdot \vec{F}_3 + 2\vec{F}_3 \cdot \vec{F}_1 \\ &= 20^2 + 15^2 + 10^2 + 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 135^\circ \\ &= 725 - 300\sqrt{2}. \end{aligned}$$

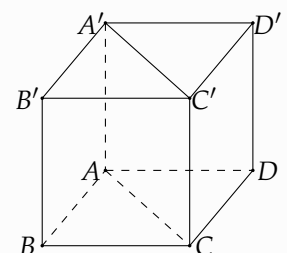
Vậy $|\vec{F}| = \sqrt{725 - 300\sqrt{2}} \approx 17,34 \text{ (N)}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 2

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- ☐ A $(\vec{A'C'}, \vec{AD}) = 45^\circ$.
☐ B $(\vec{A'C'}, \vec{B'B}) = 90^\circ$.
☐ C $(\vec{A'A}, \vec{CB'}) = 45^\circ$.
☐ D $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$.

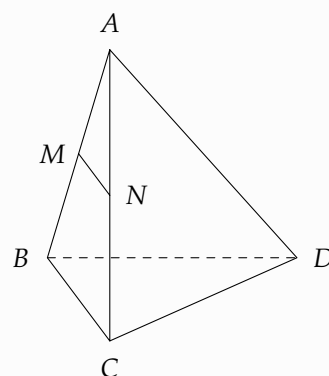


 Lời giải.

Câu 3

Cho tứ diện đều $ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC . Hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD}$.

- Ⓐ $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 150^\circ$. Ⓑ $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 120^\circ$.
 Ⓒ $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 30^\circ$. Ⓓ $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 60^\circ$.

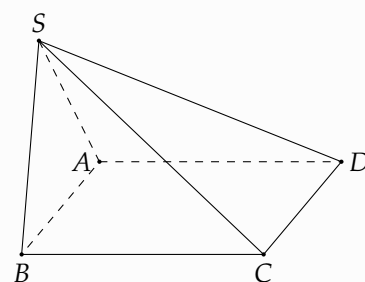


 Lời giải.

Câu 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

- Ⓐ $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ$. Ⓑ $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 60^\circ$.
 Ⓒ $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 90^\circ$. Ⓓ $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 150^\circ$.



 Lời giải.

Câu 5

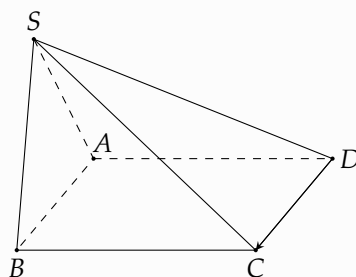
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Tính $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$.

(A) $\frac{a^2}{4}$.

(B) $-\frac{a^2}{4}$.

(C) $-\frac{a^2}{2}$.

(D) $\frac{a^2}{2}$.



📌 Lời giải.

Câu 6

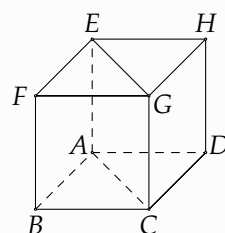
Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

(A) $a^2\sqrt{2}$.

(B) a^2 .

(C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

(D) $a^2\sqrt{3}$.



📌 Lời giải.

Câu 7

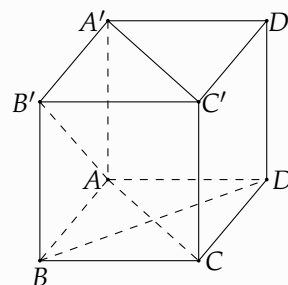
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

(A) $\frac{a^2}{2}$.

(B) $-a^2$.

(C) a^2 .

(D) $-\frac{a^2}{2}$.



📌 Lời giải.

Câu 8

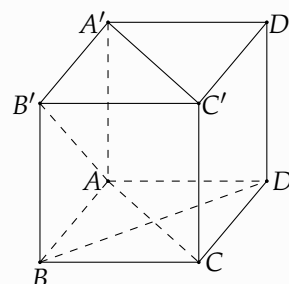
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

(A) $\frac{a^2}{2}$.

(B) $-a^2$.

(C) a^2 .

(D) $-\frac{a^2}{2}$.



Lời giải.

Câu 9

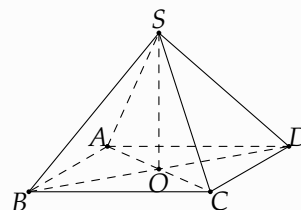
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$.

(A) $-\frac{a^2}{4}$.

(B) $\frac{a^2}{2}$.

(C) $-\frac{a^2}{2}$.

(D) $\frac{a^2}{4}$.



Lời giải.

Câu 10

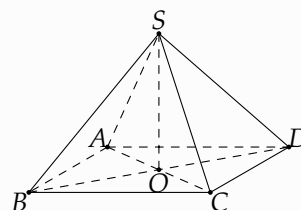
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(A) $-a^2$.

(B) $\frac{a^2}{2}$.

(C) $-\frac{a^2}{2}$.

(D) a^2 .



Lời giải.

Câu 11

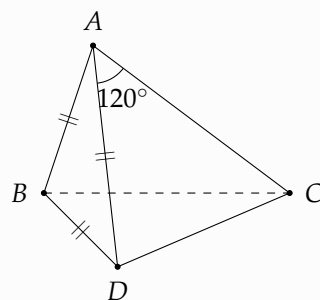
Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120^\circ$. Tính $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$.

(A) $-\frac{3}{2}a^2$.

(B) $\frac{3}{2}a^2$.

(C) $\frac{1}{2}a^2$.

(D) $-\frac{1}{2}a^2$.



👉 Lời giải.

Câu 12

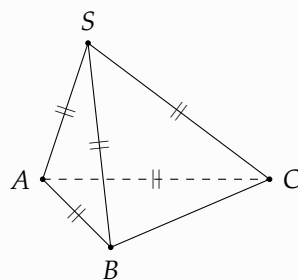
Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\vec{SC}$ và $\vec{AB}$.

(A) 60° .

(B) 90° .

(C) 120° .

(D) 150° .



👉 Lời giải.

Câu 13

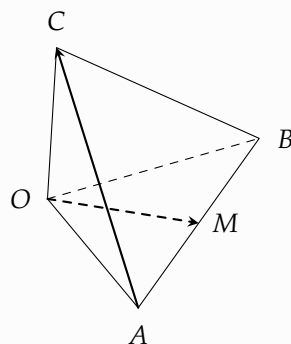
Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vectơ $\vec{OM}$ và $\vec{AC}$.

(A) 90° .

(B) 120° .

(C) 60° .

(D) 30° .



👉 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45° .

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}$.

d) $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0$.

Lời giải.

Câu 2

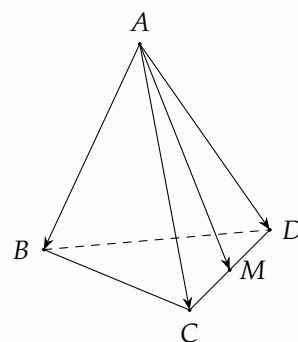
Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) $\vec{AM} \cdot \vec{CD} = 0$.

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$.

c) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

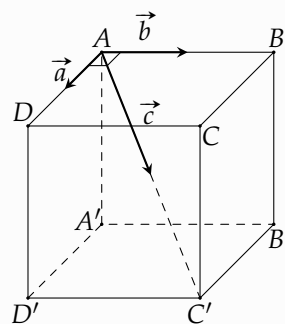
d) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = -\frac{a^2}{2}$.



Lời giải.

Câu 3

Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.



- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.
 b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$ (N).
 c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.
 d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59$ (N) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

📌 Lời giải.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
 Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

📌 Lời giải.

Câu 2

Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.
 Ⓑ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.
 Ⓒ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$.
 Ⓓ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.
 ☐ B $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.
 ☐ C $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.
 ☐ D $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

 **Lời giải.**

Câu 4

Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$.
 ☐ B $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$.
 ☐ C $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$.
 ☐ D $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$.

 **Lời giải.**

Câu 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- ☐ A $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.
 ☐ B $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
 ☐ C $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.
 ☐ D $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

 **Lời giải.**

Câu 6

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

Ⓐ $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. Ⓑ $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Ⓒ $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. Ⓓ $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

📌 Lời giải.

Câu 7

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C'}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

Ⓐ $\overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Ⓑ $\overrightarrow{B'C'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Ⓒ $\overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Ⓓ $\overrightarrow{B'C'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

📌 Lời giải.

Câu 8

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

📌 Lời giải.

Câu 9

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Ⓑ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Ⓒ $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Ⓓ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

📌 Lời giải.

Câu 10

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Ⓑ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Ⓒ $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Ⓓ $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

📌 **Lời giải.**

Câu 11

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vecto $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

Ⓐ $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

📌 **Lời giải.**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G .

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

c) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$.

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

📌 **Lời giải.**

Câu 2

Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O .

- a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
 b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA'} = \vec{0}$.
 c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.
 d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{SO}$.
 b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
 c) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 5\vec{SC}$.
 d) $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ).

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
 b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
 c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'}$.
 d) $\overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BG}$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC .

- a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
 b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
 c) $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
 d) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

📌 Lời giải.

§2. TỌA ĐỘ CỦA VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hệ tọa độ trong không gian

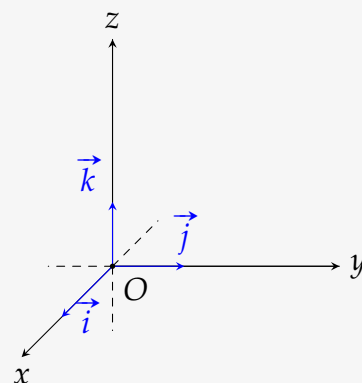
Định nghĩa 2.1.

Trong không gian, ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz .

☑ Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

☑ Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

☑ $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$
Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.



2. Tọa độ của điểm

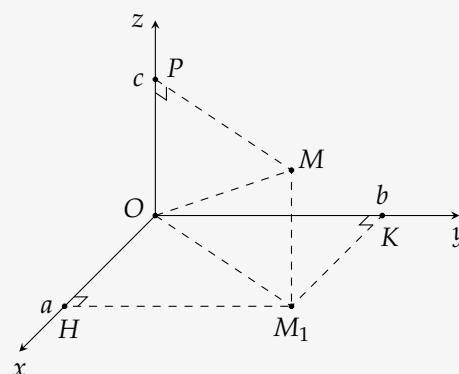
Phương pháp 2.1.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Tọa độ điểm M được xác định như sau:

☑ Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm hoành độ a , tung độ b của điểm M_1 .

☑ Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Bộ số $(a; b; c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a; b; c)$.



3. Tọa độ của véc-tơ

Phương pháp 2.2.

Trong không gian $Oxyz$:

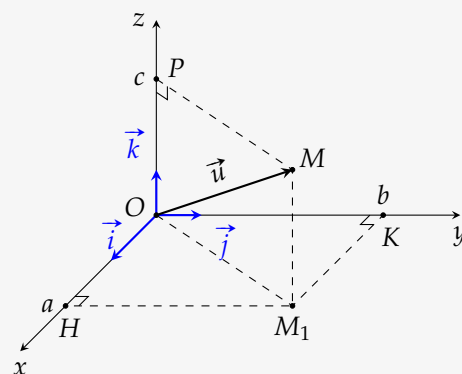
☑ Tọa độ của điểm M cũng là tọa độ của véc-tơ $\vec{OM}$.

☑ Cho $\vec{u}$. Dựng điểm $M(a; b; c)$ thỏa $\vec{OM} = \vec{u}$ thì tọa độ của điểm M là tọa độ của $\vec{u}$. Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \vec{OM} = \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



⚠ **Tọa độ các véc tơ đơn vị lần lượt là:** $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tọa độ điểm, tọa độ véc tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ véc tơ ta chú ý các kết quả sau:

① $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c)$.

② $\vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$

③ $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$ thì $M(a; b; c)$.

④ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

⑤ Chiếu điểm $M(a; b; c)$ lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn: $M(1; 2; 3)$ chiếu lên (Oxy) thì $z = 0$. Suy ra hình chiếu là $M_1(1; 2; 0)$.

⑥ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; -2; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$. Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

👉 **Lời giải.**

Tọa độ của các điểm $A_1 = (3; -2; 0)$.

Tọa độ của các điểm $A_2 = (3; 0; -1)$.

Tọa độ của các điểm $A_3 = (0; -2; -1)$

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

👉 **Lời giải.**

Tìm tọa độ của các điểm $H = (-2; 0; 0)$.

Tìm tọa độ của các điểm $K = (0; 3; 0)$.

Tìm tọa độ của các điểm $P = (0; 0; 4)$.

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; -2)$, $B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2)$.

a) Tìm tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ của điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

👉 **Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 3 - 1; 1 - (-2)) = (3; 2; 3)$.

b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D; y_D; z_D)$, ta có $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; -2 - y_D; 2 - z_D)$.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

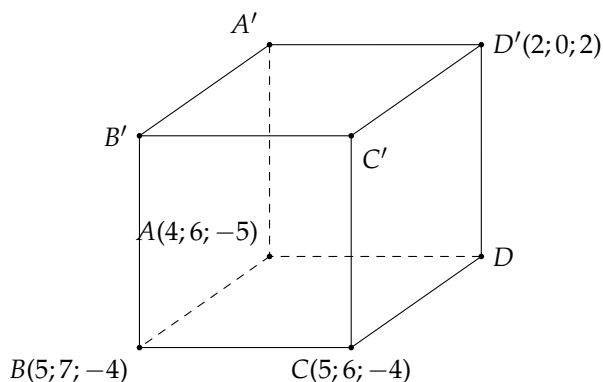
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 3 \\ -2 - y_D = 2 \\ 2 - z_D = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4 \\ z_D = -1 \end{cases}$$

Vậy $D(-4; -4; -1)$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $A(4; 6; -5)$, $B(5; 7; -4)$, $C(5; 6; -4)$, $D'(2; 0; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

📌 Lời giải.



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A - x_B + x_C \\ y_D = y_A - y_B + y_C \\ z_D = z_A - z_B + z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \\ z_D = -5 \end{cases} \text{ . Suy ra } D(4; 5; -5).$$

Do đó $\overrightarrow{DD'} = (2 - 4; 0 - 5; 2 - (-5)) = (-2; -5; 7)$.

Theo tính chất của hình hộp ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = (-2; -5; 7)$. Suy ra tọa độ đỉnh còn lại của hình hộp là $A' = (2; 1; 2)$, $B'(3; 2; 3)$, $C'(3; 1; 3)$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2; -3; -5)$.

Ⓑ $(2; 3; -5)$.

Ⓒ $(-2; 3; 5)$.

Ⓓ $(2; 3; 5)$.

📌 Lời giải.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

- Ⓐ $(3; -1; 4)$. Ⓑ $(3; 4; -1)$. Ⓒ $(4; -1; 3)$. Ⓓ $(4; 3; -1)$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz ?

- Ⓐ $M(1; 0; 0)$. Ⓑ $M(1; 0; 2)$. Ⓒ $M(1; 2; 0)$. Ⓓ $M(0; 0; -2)$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là

- Ⓐ $M(0; 2; 1)$. Ⓑ $M(1; 2; 0)$. Ⓒ $M(2; 0; 1)$. Ⓓ $M(2; 1; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$. Tọa độ điểm A là

- Ⓐ $(1; 0; -2)$. Ⓑ $(0; 1; -2)$. Ⓒ $(0; -1; 2)$. Ⓓ $(1; -2; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia Ox và $OA = 2$.

- Ⓐ $A(0; 0; 2)$. Ⓑ $A(2; 2; 0)$. Ⓒ $A(0; 2; 0)$. Ⓓ $A(2; 0; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 7

Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA = 3$.

- Ⓐ $A(0; 3; 0)$. Ⓑ $A(0; -3; 0)$. Ⓒ $A(0; -9; 0)$. Ⓓ $A(3; -3; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; -4)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- Ⓐ $(-1; -2; 6)$. Ⓑ $(3; 0; -2)$. Ⓒ $(1; 0; -6)$. Ⓓ $(1; 2; -6)$.

📌 Lời giải.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; -2)$, $B(3; -2; 4)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- Ⓐ $(2; 5; 6)$. Ⓑ $(4; 1; 2)$. Ⓒ $(2; -5; 6)$. Ⓓ $(-2; 5; 6)$.

📌 Lời giải.

Câu 10

Cho hai điểm A, B thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$ và $\overrightarrow{OB} = (5; 2; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -4)$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} = (7; 1; 2)$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 4)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 11

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm M và N biết $M(2; 1; -1)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; -3)$. Tọa độ N là

- Ⓐ $N(1; -3; -4)$. Ⓑ $N(1; 3; -4)$. Ⓒ $N(-1; 3; -4)$. Ⓓ $N(1; 3; 4)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 12

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

- Ⓐ $M(3; 0; 0)$. Ⓑ $M(0; -4; 5)$. Ⓒ $M(0; 0; 5)$. Ⓓ $M(3; 0; 5)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 13

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- Ⓐ $M(0; 0; 3)$. Ⓑ $N(1; 2; 0)$. Ⓒ $Q(0; 2; 0)$. Ⓓ $P(1; 0; 0)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 14

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- Ⓐ $(2; 0; 0)$. Ⓑ $(2; 1; 0)$. Ⓒ $(0; 1; -3)$. Ⓓ $(2; 0; -3)$.

📌 Lời giải.

Câu 15

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

- Ⓐ $(0; 2; 1)$. Ⓑ $(0; 2; 0)$. Ⓒ $(3; 0; 0)$. Ⓓ $(0; 0; 1)$.

📌 Lời giải.

Câu 16

Hình chiếu của điểm $M(2; 3; -2)$ trên trục Oy có tọa độ là

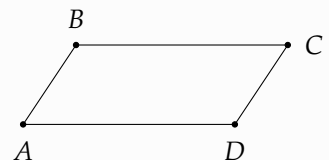
- Ⓐ $(2; 0; 0)$. Ⓑ $(0; 3; 0)$. Ⓒ $(0; 0; -2)$. Ⓓ $(2; 0; -2)$.

📌 Lời giải.

Câu 17

Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$. Tọa độ đỉnh D là

- Ⓐ $D(11; 2; 2)$. Ⓑ $D(1; 8; 2)$.
Ⓒ $D(11; 2; -2)$. Ⓓ $D(1; 8; -2)$.

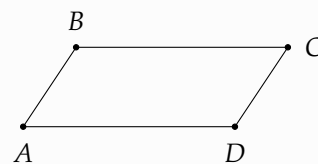


📌 Lời giải.

Câu 18

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- ☐ A $D(4;2;9)$.
 ☐ B $D(-2;4;-5)$.
 ☐ C $D(6;2;-3)$.
 ☐ D $D(-4;-2;9)$.

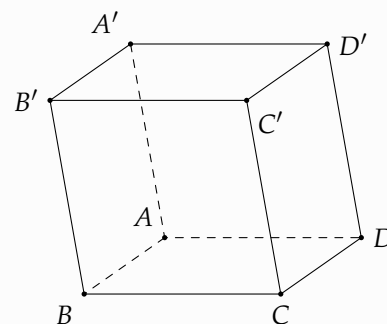


Lời giải.

Câu 19

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh C của hình hộp.

- ☐ A $C(2;0;2)$.
 ☐ B $C(2;0;2)$.
 ☐ C $C(2;0;2)$.
 ☐ D $C(2;0;2)$.



Lời giải.

Câu 20

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- ☐ A $A'(-1;-5;8)$.
 ☐ B $A'(-1;-5;8)$.
 ☐ C $A'(-1;-5;8)$.
 ☐ D $A'(-1;-5;8)$.

Lời giải.

Câu 21

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $B(-4, 1, -2)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OB}$.

- Ⓐ $(-4, 1, -2)$. Ⓑ $(4, -1, 2)$. Ⓒ $(-4, 1, 0)$. Ⓓ $(-4, 0, -2)$.

🔑 Lời giải.

Câu 22

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho véc-tơ $\vec{c} = (4, 3, -1)$ và điểm B . Biết $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$. Tìm tọa độ của điểm B .

- Ⓐ $(0, 3, -1)$. Ⓑ $(4, 3, -1)$. Ⓒ $(-4, -3, 1)$. Ⓓ $(4, 0, -1)$.

🔑 Lời giải.

Câu 23

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là bao nhiêu?

- Ⓐ $(2, -3, -1)$. Ⓑ $(-1, -3, -1)$. Ⓒ $(-1, 2, -3)$. Ⓓ $(-3, 2, -1)$.

🔑 Lời giải.

Câu 24

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A = (3, -3, 3)$ và $B = (4, -1, -1)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- Ⓐ $(-7, 2, -4)$. Ⓑ $(10, -5, 2)$. Ⓒ $(-1, -2, 4)$. Ⓓ $(1, 2, -4)$.

🔑 Lời giải.

Câu 25

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A = (-3, -4, -4)$, $B = (2, 2, 0)$ và điểm $C = (3, 4, -1)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

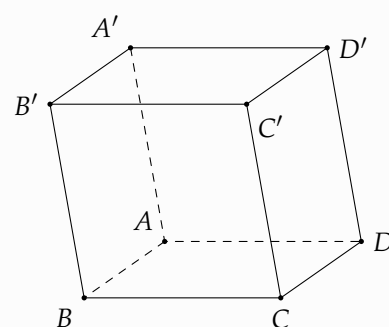
- Ⓐ $(-8, -10, -3)$. Ⓑ $(2, 2, -5)$. Ⓒ $(4, 6, 3)$. Ⓓ $(-2, -2, -5)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 26

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh D' của hình hộp.

- Ⓐ $D'(-1;-6;8)$. Ⓑ $D'(-1;-6;8)$.
Ⓒ $D'(-1;-6;8)$. Ⓓ $D'(-1;-6;8)$.



📌 **Lời giải.**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 27

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

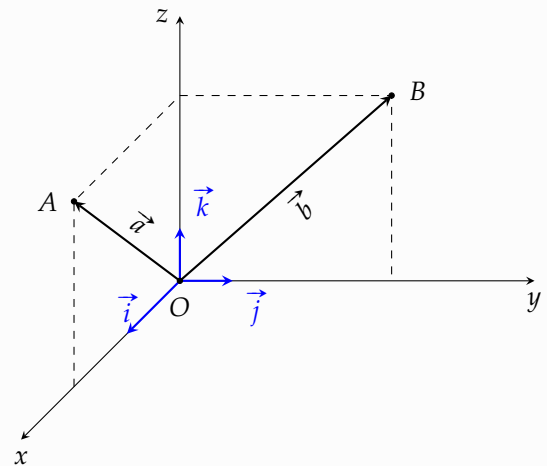
- a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.
b) Dựng điểm A thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.
c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.
d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

📌 **Lời giải.**

Câu 28

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Đặt $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.

- $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.
- Toạ độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.
- Toạ độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$.
- Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.

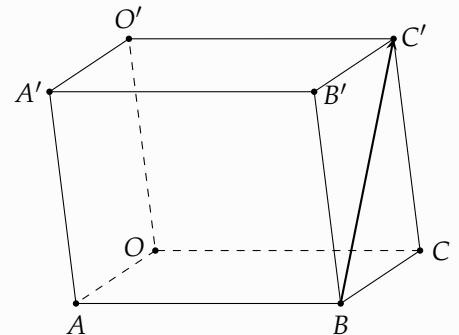


👉 Lời giải.

Câu 29

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1; 1; -1)$, $B(0; 3; 0)$, $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$. Gọi H , K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

- Toạ độ điểm C' là $(2; -3; 6)$.
- Toạ độ điểm O' là $(3; -5; 5)$.
- Toạ độ véc tơ $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$.
- Toạ độ véc tơ $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$.



👉 Lời giải.

Dạng 2 Tọa độ hóa một số hình không gian

- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.
- Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.
- Tọa độ các điểm đặc biệt:

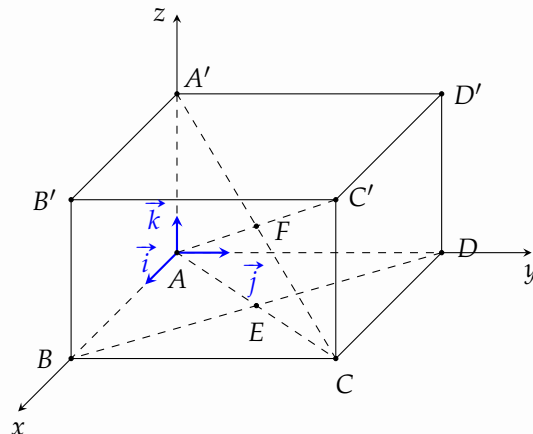
• $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$.

• $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$.

- $M \in Oz \Rightarrow M(0;0;z).$
- $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0).$
- $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z).$
- $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0;y;z).$

Ví dụ 1

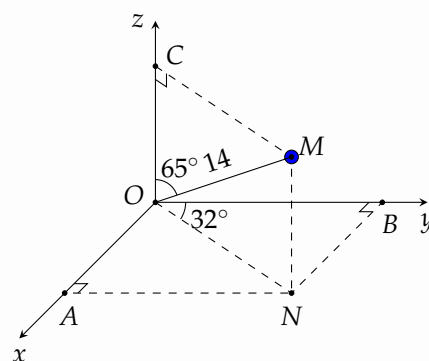
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AA' = 2, AD = 4$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, F là trung điểm AC' . Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với A), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm E, F .



👉 Lời giải.

Ví dụ 2

Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình bên, cho biết M là vị trí của máy bay với $OM = 14, \widehat{NOB} = 32^\circ, \widehat{MOC} = 65^\circ$. Tính tọa độ điểm M .



👉 Lời giải.

Ta có:

$$OC = OM \cos 65^\circ \approx 5,9.$$

$$ON = CN = OM \sin 65^\circ \approx 12,7.$$

$$OB = ON \cos 32^\circ \approx 10,8.$$

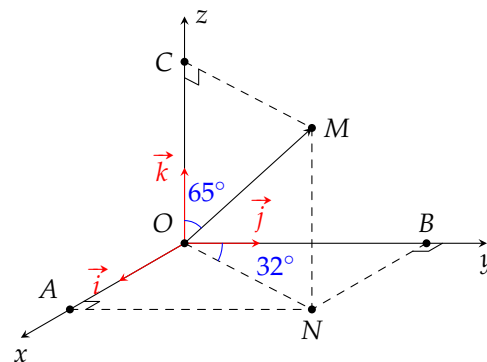
$$OA = BN = ON \sin 32^\circ \approx 6,7.$$

Vì $OANB$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Vì $OCMN$ là hình chữ nhật nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 6,7\vec{i} + 10,8\vec{j} + 5,9\vec{k}.$$

Do đó $M(6,7; 10,8; 5,9)$.

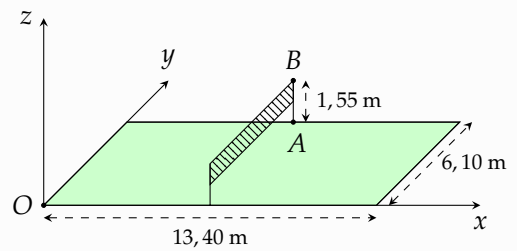


PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 30

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của B .

- ☐ A $(6, 1; 6, 7; 1, 55)$. ☐ B $(6, 7; 6, 1; 1, 55)$.
☐ C $(6, 1; 0; 1, 55)$. ☐ D $(0; 6, 7; 1, 55)$.

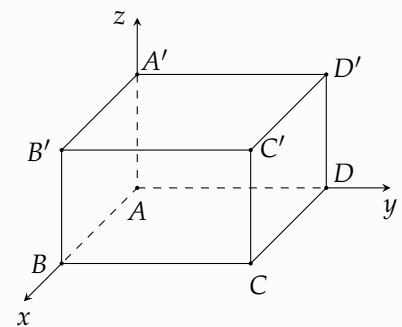


📌 Lời giải.

Câu 31

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm B' là

- ☐ A $B(0; 2; 0)$. ☐ B $B(2; 2; 2)$.
☐ C $B(2; 2; 0)$. ☐ D $B(2; 0; 2)$.

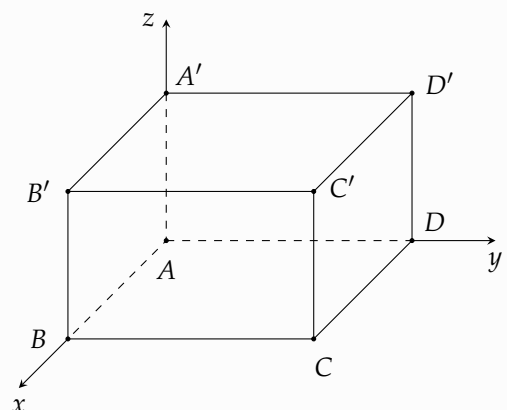


📌 Lời giải.

Câu 32

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm C' là

- ☐ A $C'(2; 2; 0)$. ☐ B $C'(2; 2; 2)$.
☐ C $C'(2; 2; 0)$. ☐ D $C'(2; 0; 2)$.

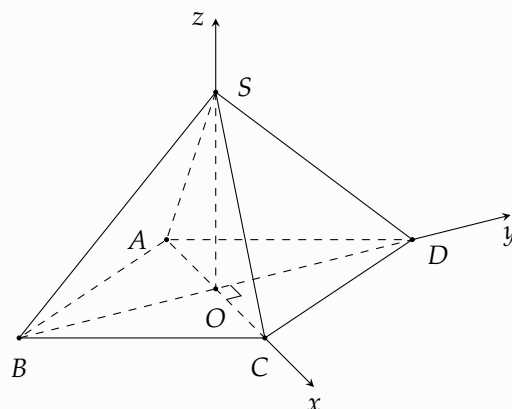


Lời giải.

Câu 33

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), toạ độ $\overrightarrow{SC}$ là

- ☐ A $\overrightarrow{SC} = (2a; 0; -2a)$. ☐ B $\overrightarrow{SC} = (2a; -a; -2a)$.
☐ C $\overrightarrow{SC} = (a; 0; -2a)$. ☐ D $\overrightarrow{SC} = (a; 0; 2a)$.

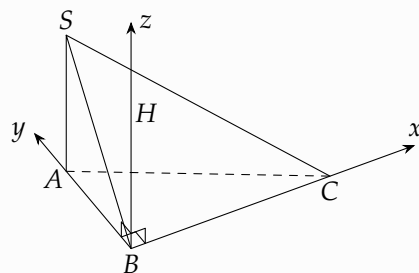


Lời giải.

Câu 34

Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm B), tìm khẳng định sai.

- ☐ A $A(0; 2; 0)$. ☐ B $B(0; 0; 0)$.
☐ C $C(0; 0; 3)$. ☐ D $S(-2; 2; 2)$.



Lời giải.

Câu 35

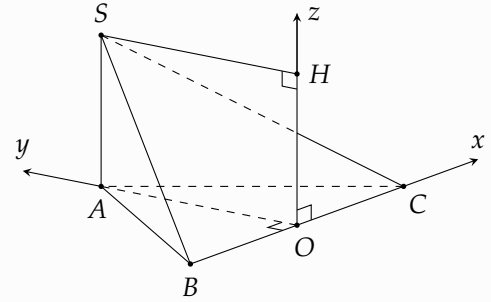
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và $SA = 1$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy tìm tọa độ điểm S .

Ⓐ $S(0; \sqrt{3}; 1)$.

Ⓑ $S(0; \sqrt{3}; 1)$.

Ⓒ $S(0; \sqrt{3}; 1)$.

Ⓓ $S(0; \sqrt{3}; 1)$.



📌 Lời giải.

Câu 36

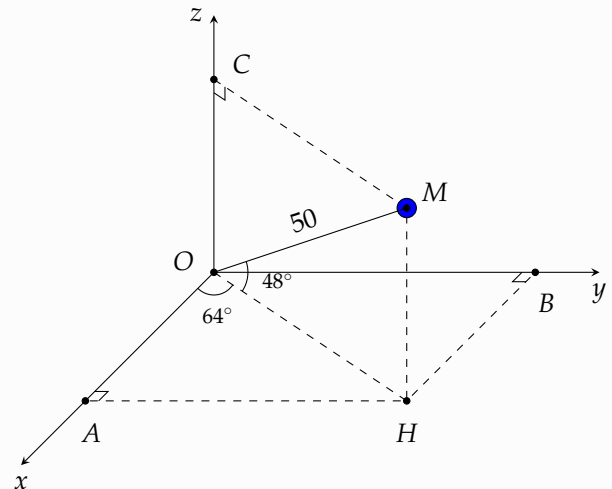
Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$, $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .

Ⓐ $M(14,7; 30,1; 37,2)$.

Ⓑ $M(14,7; 30,1; 37,2)$.

Ⓒ $M(14,7; 30,1; 37,2)$.

Ⓓ $M(14,7; 30,1; 37,2)$.



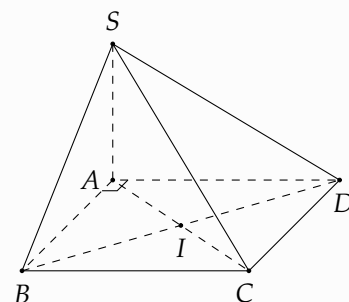
📌 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 37

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc toạ độ O trùng với điểm A , các véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$. b) Tọa độ $C(1; 2; 3)$.
c) Tọa độ $S(2; 0; 0)$. d) Tọa độ $I(1; 1; 0)$.

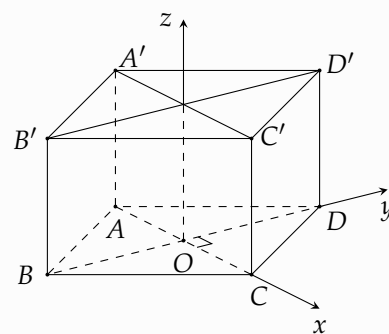


Lời giải.

Câu 38

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$. b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.
c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$. d) $\overrightarrow{BD'} = (0; 0; 2)$.

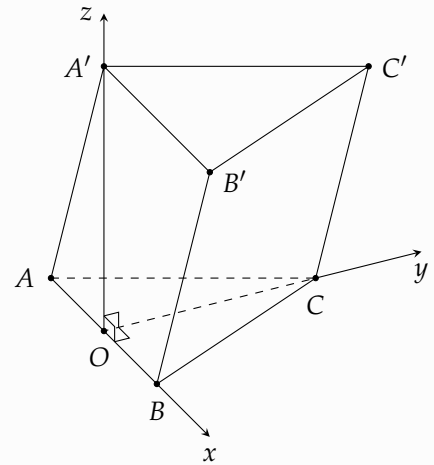


Lời giải.

Câu 39

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$.
- b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$.
- c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$.
- d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.



Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ lên trục Ox có tọa độ là

- A** $(0; 2; 0)$.
- B** $(0; 0; 5)$.
- C** $(1; 0; 0)$.
- D** $(0; 2; 5)$.

Lời giải.

Câu 2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2; -1; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) là

- A** $(0; -1; 0)$.
- B** $(-2; 0; 0)$.
- C** $(0; -1; 3)$.
- D** $(-2; -1; 0)$.

Lời giải.

Câu 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) . Tọa độ của H là

- Ⓐ $H(-1; -2; 3)$. Ⓑ $H(0; 0; 3)$. Ⓒ $H(1; 2; 0)$. Ⓓ $H(1; 2; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; 1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- Ⓐ $(3; 4; 1)$. Ⓑ $(-1; -2; 3)$. Ⓒ $(3; 5; 1)$. Ⓓ $(1; 2; 3)$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz) .

- Ⓐ $(1; 0; 1)$. Ⓑ $(0; 1; 0)$. Ⓒ $(1; 1; 0)$. Ⓓ $(0; 1; 1)$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

- Ⓐ $(-2; -1; -3)$. Ⓑ $(-3; 2; -1)$. Ⓒ $(2; -3; -1)$. Ⓓ $(-1; 2; -3)$.

📌 Lời giải.

Câu 7

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai vector $\vec{a} = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1; 4)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

- Ⓐ $(5; -1; -10)$. Ⓑ $(0; 3; 0)$. Ⓒ $(-3; 3; 6)$. Ⓓ $(5; -1; 10)$.

📌 Lời giải.

Câu 8

Cho điểm $A(1; 3; -1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- Ⓐ $M(3; 0; 0)$. Ⓑ $N(0; 3; -1)$. Ⓒ $P(0; 1; 0)$. Ⓓ $Q(0; 0; -1)$.

📌 Lời giải.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ lên mặt (Oxz) có tọa độ là

- Ⓐ $(1; 2; 0)$. Ⓑ $(0; 2; 5)$. Ⓒ $(1; 0; 5)$. Ⓓ $(0; 1; 5)$.

📌 Lời giải.

Câu 10

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; -4)$. Vector $\vec{AB}$ có tọa độ

- Ⓐ $(3; 0; -2)$. Ⓑ $(1; 2; -6)$. Ⓒ $(1; 0; -6)$. Ⓓ $(-1; -2; 6)$.

📌 Lời giải.

Câu 11

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- Ⓐ $(1; 0; 3)$. Ⓑ $(1; 0; 0)$. Ⓒ $(1; -2; 0)$. Ⓓ $(0; -2; 3)$.

📌 Lời giải.

Câu 12

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ là $\vec{u} = (2; 1; -1)$ và $\vec{v} = (1; 3; 1)$. Tọa độ của vectơ $(\vec{u} + 2\vec{v})$ tương ứng là

- Ⓐ $(3; 4; 0)$. Ⓑ $(1; -2; -2)$. Ⓒ $(4; 7; 1)$. Ⓓ $(5; 5; -1)$.

📌 Lời giải.

Câu 13

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 0)$ và điểm $B(3; 1; 1)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua B là

- Ⓐ $(1; -2; -4)$. Ⓑ $(0; 3; -1)$. Ⓒ $(4; 3; 2)$. Ⓓ $(0; 1; 3)$.

📌 Lời giải.

Câu 14

Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- Ⓐ $(2; -3; 1)$. Ⓑ $(1; -3; 2)$. Ⓒ $(2; 1; -3)$. Ⓓ $(1; 2; -3)$.

📌 Lời giải.

Câu 15

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là

- (A)** $M(0; 2; 1)$. **(B)** $M(1; 2; 0)$. **(C)** $M(2; 1; 0)$. **(D)** $M(2; 0; 1)$.

 **Lời giải.**

Câu 16

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có tọa độ lần lượt là $A(3; 1; 2)$, $B(1; 0; 1)$, $C(2; 3; 0)$. Tọa độ đỉnh D là

- (A)** $D(4; 4; 1)$. **(B)** $D(0; 2; -1)$. **(C)** $D(1; 3; -1)$. **(D)** $D(0; 2; 1)$.

 **Lời giải.**

Câu 17

Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$.

- (A)** $\vec{u} = (-1; -2; 3)$. **(B)** $\vec{u} = (-1; 2; 7)$. **(C)** $\vec{u} = (-1; -2; 3)$. **(D)** $\vec{u} = (1; 2; 7)$.

 **Lời giải.**

Câu 18

Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$.

- (A)** $\vec{u} = (-1; -2; 3)$. **(B)** $\vec{u} = (-1; 2; 7)$. **(C)** $\vec{u} = (-1; -6; 3)$. **(D)** $\vec{u} = (1; 2; 7)$.

 **Lời giải.**

Câu 19

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -3; 0)$, $P(0; 0; 4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

- Ⓐ $(-2; -3; 4)$. Ⓑ $(-2; -3; -4)$. Ⓒ $(2; 3; 4)$. Ⓓ $(3; 4; 2)$.

📌 Lời giải.

Câu 20

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-4; 1; -5)$, $B(2; 3; -7)$, $C(3; -2; 9)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là

- Ⓐ $(2; 3; -3)$. Ⓑ $(-3; -3; -3)$. Ⓒ $(-3; -3; 3)$. Ⓓ $(-6; 5; -12)$.

📌 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ và điểm $A(4; 6; -3)$.

- a) Tọa độ vectơ $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$. b) Tọa độ điểm $B(2; 7; -6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng. d) Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

📌 Lời giải.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

- a) Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.
b) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.
c) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.
d) Tọa độ vectơ $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2; 4; -1)$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng các điểm có tọa độ $A(2;1;0)$, $C(0;3;0)$, $C'(-1;2;1)$, $D'(0;-2;0)$.

- Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1;0;1)$, $B'(0;4;2)$.
- Tọa độ các điểm B, D là $B(1;5;1)$, $D(1;-1;-1)$.
- Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.
- Tọa độ vectơ $\overrightarrow{B'D'}$ là $\overrightarrow{B'D'} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

🔑 Lời giải.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

- Tọa độ $\vec{a} = (1;3;-4)$.
- Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì $A(1;-4;3)$.
- Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.
- Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

🔑 Lời giải.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1)$, $B(0;3;0)$, $\overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

- Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$.
- Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$.
- Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB'} = (-2;-3;-6)$.
- Tọa độ vectơ $\overrightarrow{HK} = (-1;2;-1)$.

🔑 Lời giải.

Câu 6

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m + 1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$? KQ:

 **Lời giải.**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -2)$, $B(2; -3; 5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là $(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng? KQ:

 **Lời giải.**

Câu 2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m + 1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$? KQ:

 **Lời giải.**

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm được tọa độ điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a + b + c$? KQ:

 **Lời giải.**

Câu 4

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N . KQ:

 **Lời giải.**

Câu 5

Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vector $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Khi đó tính $a + c$. KQ:

 **Lời giải.**

Câu 6

Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A . Tính tốc độ của máy bay B . KQ:

 **Lời giải.**

Câu 7

Một thiết bị thăm dò đáy biển như hình vẽ được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$. KQ:

 **Lời giải.**

.....

.....

§3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Định nghĩa 3.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Khi đó

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3);$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3);$$

$$\textcircled{3} \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

! Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

Định nghĩa 3.2. Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

! $\textcircled{1} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0;$

$$\textcircled{2} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0}).$$

3. Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

Định nghĩa 3.3. Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương. Khi đó vectơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

! $\textcircled{1}$ Vectơ $\vec{w}$ xác định như trên còn gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

$$\textcircled{2} \quad \text{Quy ước} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \text{ thì}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \text{ không cùng phương với } \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}.$$

4. Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

Định nghĩa 3.4.

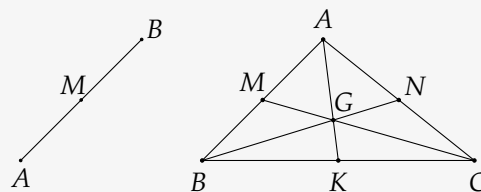
Trong không gian $Oxyz$, tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

- ① Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- ② Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

Ví dụ 1

Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $3\vec{a}$;

b) $2\vec{a} - \vec{b}$;

c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có

a) $3\vec{a} = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 3; 3 \cdot 2)$. Vậy $3\vec{a} = (-6; 9; 6)$.

b) Ta có $2\vec{a} = (-4; 6; 4)$ và $\vec{b} = (2; 1; -1)$.

Do đó, $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2; 6 - 1; 4 - (-1))$. Vậy $2\vec{a} - \vec{b} = (-6; 5; 5)$.

c) Do $\vec{a} = (-2; 3; 2)$ và $2\vec{b} = (4; 2; -2)$ nên $\vec{a} + 2\vec{b} = (2; 5; 0)$.

Ngoài ra, vì $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2}; -3; -\frac{9}{2}\right)$ nên $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2}; 2; -\frac{9}{2}\right)$.

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$.

- a) Chứng minh $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

- b) Tìm giá trị của m và n để véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (3; -2; 1)$, $\vec{v} = \left(-\frac{3}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{w} = (6; m; -n)$.

a) Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} = 3k \\ 1 = -2k \\ -\frac{1}{2} = k \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Như vậy $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ nên hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

b) Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\vec{w} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3k \\ m = -2k \\ -n = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = -4 \\ n = -2 \end{cases}$$

Như vậy $m = -4$ và $n = -2$ thì hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương. Khi đó $\vec{w} = (6; -4; 2)$.

Ví dụ 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(4; -2; 1)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz) .

Lời giải.

a) Ta có $\vec{AB} = (-2; 3; 1)$, $\vec{AC} = (1; -1; -1)$. Vì $\frac{-2}{1} \neq \frac{-3}{-1}$ nên hai véc-tơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ không cùng phương.

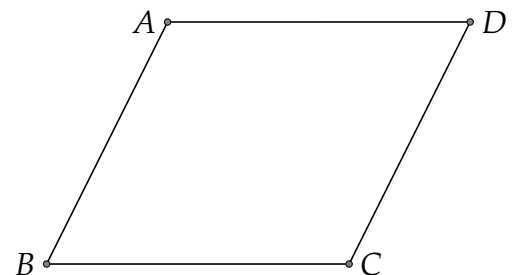
Hay ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Suy ra, tọa độ trọng tâm là $G\left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; 2\right)$.

b)

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\vec{DC} = \vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_D = -2 \\ -2 - y_D = 3 \\ 1 - z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = -5 \\ z_D = 0 \end{cases}$$

Vậy $D(6; -5; 0)$.



c) Vì E thuộc mặt phẳng Oxz nên $E = (x; 0; z)$.

Ta có $\vec{AE} = (x - 3; 1; z - 2)$.

Mặt khác A, B, E thẳng hàng nên hai véc-tơ $\vec{AB}$, $\vec{AE}$ cùng phương, do đó:

$$\vec{AE} = k\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -2k \\ 1 = 3k \\ z - 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ k = \frac{1}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy $E = \left(\frac{7}{3}; 0; \frac{7}{3}\right)$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(5; -3; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(4; 1; 2)$.

- a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$.
b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\vec{NA} = -\vec{NB}$.

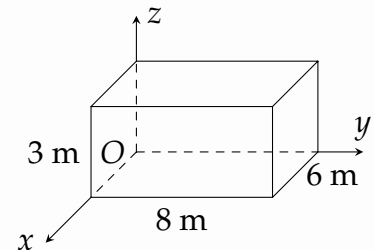
Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} A(5; -3; 0) \\ B(2; 1; -1) \\ C(4; 1; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AB} = (-3; 4; -1) \\ \vec{AC} = (-1; 4; 2) \\ \vec{BC} = (2; 0; 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\vec{AB} = (-6; 8; -2) \\ \vec{AC} = (-1; 4; 2) \\ -5\vec{BC} = (-10; 0; -15) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (-17; 12; -15).$

b) Gọi $N(x; y; z)$, khi đó $\begin{cases} \vec{NA} = (5 - x; -3 - y; -z) \\ \vec{NB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z) \end{cases}$
 $2\vec{NA} = -\vec{NB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5 - x) = -2 + x \\ 2(-3 - y) = -1 + y \\ -2z = 1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(4; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right).$

Ví dụ 5

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.

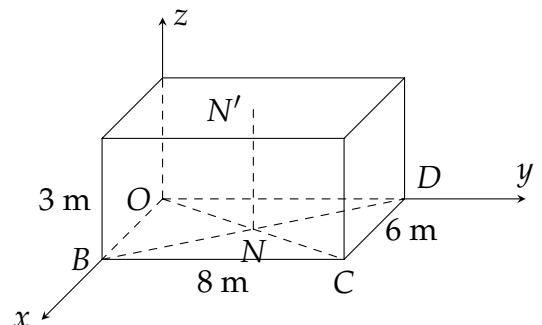


Lời giải.

Gọi các điểm $B(3; 0; 0)$, $C(3; 6; 0)$, $D(0; 6; 0)$ như hình vẽ. N là trung điểm OC , N' là hình chiếu của N lên mặt phẳng trần nhà. Suy ra N' là điểm treo đèn.

Ta có N có tọa độ là $\left(\frac{0+3}{2}; \frac{0+6}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$, suy ra $N\left(\frac{3}{2}; 3; 0\right)$. Suy ra $N'\left(\frac{3}{2}; 3; 3\right)$.

Vậy tọa độ của điểm treo đèn là $\left(\frac{3}{2}; 3; 3\right)$.



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án. Các câu hỏi sau đều xét trong không gian $Oxyz$.

Câu 1

Cho $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; -4; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{a} = 2\vec{b}$. (B) $\vec{b} = 2\vec{a}$. (C) $\vec{b} = -2\vec{a}$. (D) $\vec{a} = -2\vec{b}$.

📌 Lời giải.

Câu 2

Cho hai véc-tơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$, $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- Ⓐ $\vec{a}(4; 1; -5)$. Ⓑ $\vec{a}(4; 1; -1)$. Ⓒ $\vec{a}(3; 1; -4)$. Ⓓ $\vec{a}(0; 1; -1)$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Cho $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (2; 0; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

- Ⓐ $\vec{u} = (-4; -2; 9)$. Ⓑ $\vec{u} = (4; 2; -9)$. Ⓒ $\vec{u} = (-4; -5; 9)$. Ⓓ $\vec{u} = (1; 3; -11)$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{b}$ thỏa mãn biểu thức $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$.

- Ⓐ $\vec{b} = (-2; 1; -1)$. Ⓑ $\vec{b} = (-1; 2; -1)$. Ⓒ $\vec{b} = (5; 2; 1)$. Ⓓ $\vec{b} = (1; -2; 1)$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho vectơ $\vec{a} = (1; -3; 4)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với $\vec{a}$?

- Ⓐ $\vec{b} = (-2; -6; 8)$. Ⓑ $\vec{c} = (-2; 6; -8)$. Ⓒ $\vec{d} = (-2; 6; 8)$. Ⓓ $\vec{m} = (2; -6; -8)$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Hai véc-tơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương khi

(A) $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$

(B) $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$

(C) $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$

(D) $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$

 **Lời giải.**

Câu 7

Cho hai điểm $A(2; 3; 1)$ và $B(3; 1; 5)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

(A) $AB = \sqrt{21}$.

(B) $AB = 2\sqrt{3}$.

(C) $AB = 2\sqrt{5}$.

(D) $AB = \sqrt{13}$.

 **Lời giải.**

Câu 8

Cho hai điểm $M(3; -2; 1)$ và $N(0; 1; -1)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

(A) $MN = \sqrt{17}$.

(B) $MN = 22$.

(C) $MN = \sqrt{22}$.

(D) $MN = \sqrt{19}$.

 **Lời giải.**

Câu 9

Cho hai điểm $A(-1; 1; 2)$ và $B(3; -5; 0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

(A) $(1; -2; 1)$.

(B) $(4; -6; 2)$.

(C) $(2; -3; -1)$.

(D) $(2; -4; 2)$.

 **Lời giải.**

Câu 10

Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 2)$. Tọa độ điểm C sao cho B là trung điểm của đoạn AC là

- Ⓐ $C(5; -3; 4)$. Ⓑ $C(4; -3; 5)$. Ⓒ $C(-1; 3; -2)$. Ⓓ $C(2; 0; 1)$.

📌 Lời giải.

Câu 11

Cho tam giác ABC với $A(0; -1; 3)$, $B(2; 1; 1)$, $C(1; 0; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- Ⓐ $(1; 0; 1)$. Ⓑ $(-1; 0; 1)$. Ⓒ $(0; 1; 1)$. Ⓓ $(1; 1; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 12

Cho $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3; -4; 1)$ và $C(2; 0; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- Ⓐ $(1; -2; 3)$. Ⓑ $(-1; 2; -3)$. Ⓒ $(2; -2; 1)$. Ⓓ $(-2; 2; -1)$.

📌 Lời giải.

Câu 13

Cho tam giác ABC trọng tâm G . Biết $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $G(1; 1; 1)$. Khi đó điểm C có tọa độ là

- Ⓐ $(2; 2; 4)$. Ⓑ $(-2; 0; 2)$. Ⓒ $(-2; -3; -2)$. Ⓓ $(2; 2; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 14

Cho bốn điểm $A(1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(-1;3;-4)$, $D(2;6;0)$ tạo thành một hình tứ diện. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB , CD . Tìm tọa độ trung điểm G của đoạn MN .

- Ⓐ $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$. Ⓑ $G(2;4;0)$. Ⓒ $G(1;2;0)$. Ⓓ $G(4;8;0)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 15

Cho hai điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

- Ⓐ $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Ⓑ $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$. Ⓒ $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 16

Cho các điểm $A(1;-1;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;1;3)$ và M là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó điểm M có tọa độ là

- Ⓐ $(3;2;3)$. Ⓑ $(3;-2;-3)$. Ⓒ $(3;-2;3)$. Ⓓ $(3;2;-3)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 17

Cho tọa độ các điểm $A(-1;3)$, $B(2;-2)$ và $C(m;1)$. Tìm m để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

- Ⓐ $m = \frac{2}{5}$. Ⓑ $m = \frac{1}{5}$. Ⓒ $m = -\frac{1}{3}$. Ⓓ $m = -\frac{1}{5}$.

📌 **Lời giải.**

Câu 18

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C .

☐ (A) $(0; -2; 0)$.

☐ (B) $(2; 2; 2)$.

☐ (C) $(2; 0; 2)$.

☐ (D) $(2; -2; 2)$.

 Lời giải.

Câu 19

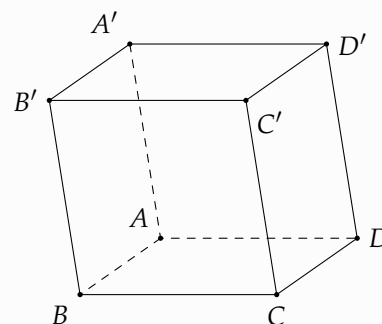
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$, $a \neq 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AC' .

☐ (A) $|a|$.

☐ (B) $2|a|$.

☐ (C) $3|a|$.

☐ (D) $\frac{3|a|}{2}$.



 Lời giải.

Câu 20

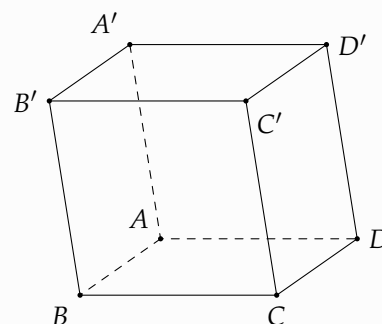
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 1)$, $B'(1; 0; 0)$, $C'(1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của điểm D .

☐ (A) $D(0; -1; 1)$.

☐ (B) $D(0; 1; 1)$.

☐ (C) $D(0; 1; 0)$.

☐ (D) $D(1; 1; 1)$.



 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21

Cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.

c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Lời giải.

Câu 22

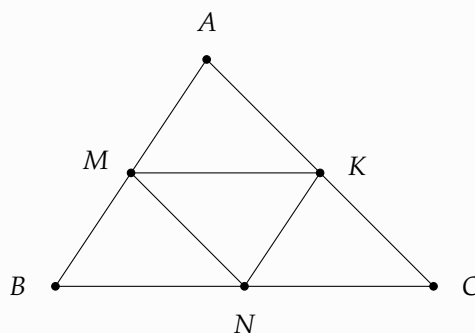
Cho ba điểm $A(3; 3; -6)$, $B(1; 3; 2)$ và $C(-1; -3; 1)$. Gọi M , N , K lần lượt là trung điểm của AB , BC và CA .

a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1; 1; -1)$.

d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



Lời giải.

Câu 23

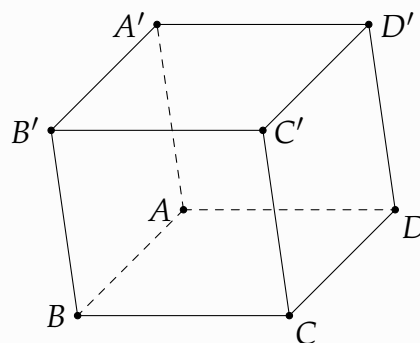
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 2; 0)$, $D'(-1; 3; 5)$. Gọi M , N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.

a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$.

b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$.

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$.

d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$.

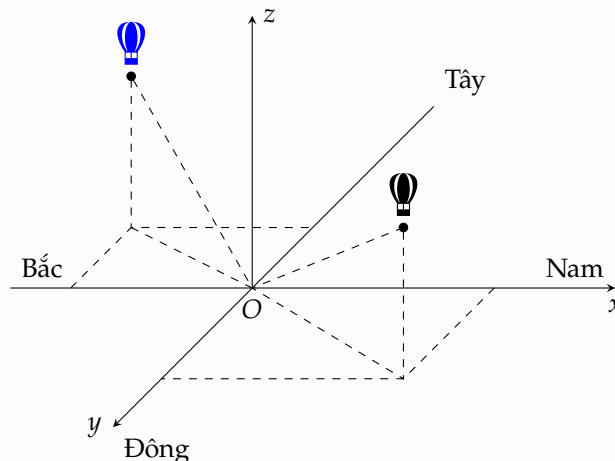


Lời giải.

Câu 24

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.
- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5; -1; 0,8)$.
- Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.
- Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

📌 **Lời giải.**

Dạng 2

Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng

Ví dụ 1

Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$, $\vec{d} = (1; 7; -3)$.

- Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$.
- Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

📌 **Lời giải.**

a) Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 1$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 3$.

b) Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{60}.$$

c) Ta có $\vec{d} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{a}$.

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (-4; 3; m)$.

- Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- Tìm m để vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

 **Lời giải.**

a) Ta có $\begin{cases} \vec{a} = (1; 0; 1) \\ \vec{b} = (1; 1; 0) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2}.$

b) Ta có $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = (5; 3; 2).$

Ta có $\vec{d} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -20 + 9 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}.$

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 0; 2)$, $B(0; 4; 3)$ và $C(-2; 1; 2)$.

- Chỉ ra tọa độ một véc tơ (khác $\vec{0}$) vuông góc với hai véc tơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.
- Tính chu vi tam giác ABC .
- Tính $\cos \widehat{BAC}$.
- Tìm độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

 **Lời giải.**

a)

b) Ta có $AB = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2}$ và $AC = \sqrt{1 + 1 + 0}.$

c)

d) Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác, ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = 3.$

$$\text{Suy ra } \vec{DB} = -3\vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{x_B + 3x_C}{4} = -\frac{3}{2} \\ y_D = \frac{y_B + 3y_C}{4} = \frac{7}{4} \\ z_D = \frac{z_B + 3z_C}{4} = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right).$$

Vậy $AD = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{16} + \frac{81}{16}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0; 1; -2)$; $B(3; 0; 0)$ và điểm C thuộc trục Oz . Biết ABC là tam giác cân tại C . Tìm tọa độ điểm C .

 **Lời giải.**

Gọi $C(0;0;z)$ là điểm thuộc trục Oz .

Tam giác ABC cân tại C nên $CA = CB$.

Suy ra $CA^2 = CB^2 \Rightarrow 1 + (z+2)^2 = 9 + z^2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow C(0;0;1)$.

Ví dụ 5

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$, $P(1;m-1;2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NM} = (3;2;-2)$ và $\overrightarrow{NP} = (2;m-2;1)$.

Vì tam giác MNP vuông tại N nên ta có $\overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6

Cho hai điểm $A(2, -1, 1)$; $B(3, -2, -1)$. Tìm điểm N trên trục Ox cách đều A và B .

Lời giải.

N nằm trên trục Ox nên $N(x;0;0)$.

Khi đó, ta có $\overrightarrow{AN} = (x-2;1;-1)$; $\overrightarrow{BN} = (x-3;2;1)$.

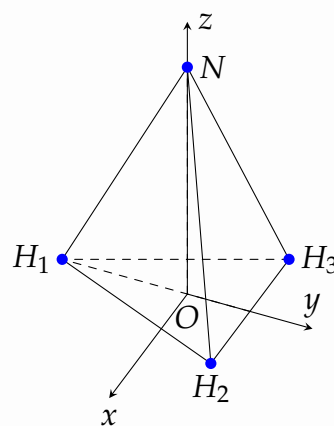
Vì N cách đều A và B nên $AN = BN \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 1 + 1} = \sqrt{(x-3)^2 + 4 + 1} \Leftrightarrow x = 4$.

Suy ra $N(4;0;0)$.

Ví dụ 7

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết $\text{H} - \text{N} - \text{H}$, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\widehat{H_1NH_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° .

Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình bên).



a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.

b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

Lời giải.

a) Gọi $x = H_1H_2$, khi đó độ dài $OH_1 = x \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2 = x \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$.

b) Gọi y là khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen; khi đó $NH_2 = y$.

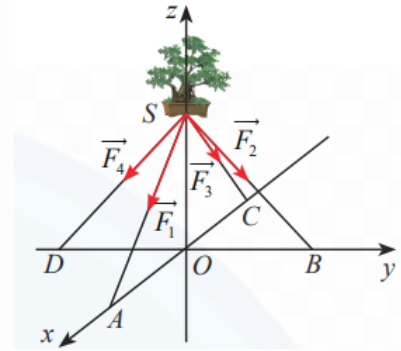
Áp dụng định lí cosin ta có

$$H_1H_2^2 = NH_1^2 + NH_2^2 - 2 \cdot NH_1 \cdot NH_2 \cos \widehat{H_1NH_2} \Leftrightarrow 2y^2 - 2y^2 \cos 107^\circ = 12$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{12}{2 - 2 \cos 107^\circ} \Leftrightarrow y = 2,155$$

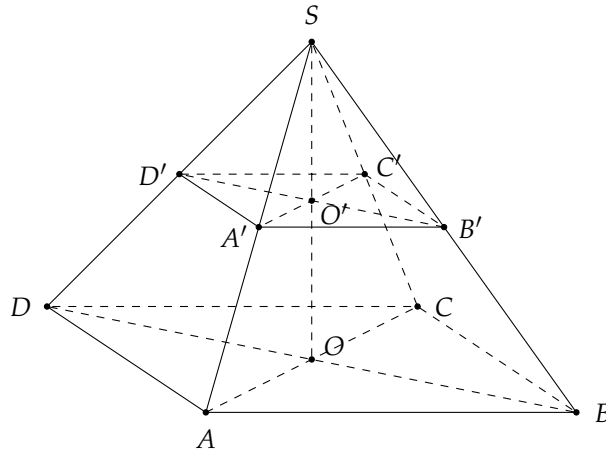
Ví dụ 8

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn $40(\text{N})$ và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.



Ta có $\vec{SA} = (20; 0; -20)$, $\vec{SB} = (0; 20; -20)$, $\vec{SC} = (-20; 0; -20)$, $\vec{SD} = (0; -20; -20)$.
Suy ra $SA = SB = SC = SD = 20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều. Các vectơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D' .
Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.
Gọi $\vec{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{SA'} + \vec{SB'} + \vec{SC'} + \vec{SD'} = 4\vec{SO'}.$$

Ta có $|\vec{F}| = 40$, suy ra $|\vec{SO'}| = SO' = 10$. Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA' = \sqrt{2}SO' = 10\sqrt{2}$.
Suy ra $\vec{F}_1 = \vec{SA'} = \frac{1}{2}\vec{SA} = (10; 0; -10)$. Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{2}\vec{SB} = (0; 10; -10), \vec{F}_3 = \frac{1}{2}\vec{SC} = (-10; 0; -10), \vec{F}_4 = \frac{1}{2}\vec{SD} = (0; -10; -10).$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$ là

(A) 0.

(B) 6.

(C) 8.

(D) -6.

 Lời giải.

Câu 2

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ và $\vec{v} = (0; 1; -2)$ bằng

- (A) -4 . (B) 0 . (C) 4 . (D) -2 .

 Lời giải.

Câu 3

Cho các véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

- (A) -1 . (B) -2 . (C) 2 . (D) 1 .

 Lời giải.

Câu 4

Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.

- (A) 480 (J). (B) 530 (J). (C) 510 (J). (D) 500 (J).

 Lời giải.

Câu 5

Góc giữa hai véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ bằng

- (A) 60° . (B) 120° . (C) 150° . (D) 30° .

 Lời giải.

Câu 6

Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 1; 0)$ và $\vec{v} = (0; -1; 0)$. Góc hợp bởi hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng

- (A) 60° . (B) 45° . (C) 135° . (D) 120° .

 **Lời giải.**

Câu 7

Cho hai véc-tơ $\vec{a}(-2; -3; 1)$ và $\vec{b}(1; 0; 1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- (A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$. (B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$.
(C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$. (D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

 **Lời giải.**

Câu 8

Cho $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 2; -4)$. Giá trị của $|\vec{a} - \vec{b}|$ bằng

- (A) $5\sqrt{2}$. (B) 50. (C) $2\sqrt{5}$. (D) 3.

 **Lời giải.**

Câu 9

Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 0; 2)$ và $\vec{v} = (x; -2; 1)$. Biết rằng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. Khi đó $|\vec{v}|$ bằng

- (A) $\sqrt{21}$. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

 **Lời giải.**

Câu 10

Tìm số thực a để vec-tơ $\vec{u} = (a; 0; 1)$ vuông góc với vec-tơ $\vec{v} = (2; -1; 4)$.

☐ A $a = -2$.

☐ B $a = -4$.

☐ C $a = 4$.

☐ D $a = 2$.

 Lời giải.

Câu 11

Tìm x để hai vec-tơ $\vec{a} = (x; x - 2; 2)$ và $\vec{b} = (x; 1; -2)$ vuông góc với nhau.

☐ A $x = 3$.

☐ B $x = 1$.

☐ C $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$.

☐ D $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$.

 Lời giải.

Câu 12

Cho hai vec-tơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Vec-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai vec-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?

☐ A $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$.

☐ B $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$.

☐ C $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$.

☐ D $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$.

 Lời giải.

Câu 13

Tích có hướng của hai vec-tơ $\vec{a} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (0; 4; -3)$ có tọa độ là

☐ A $(-6; 3; -4)$.

☐ B $(6; -3; 4)$.

☐ C $(6; 3; 4)$.

☐ D $(-6; -3; -4)$.

 Lời giải.

Câu 14

Cho $A(2; 1; 4)$, $B(-2; 2; -6)$, $C(6; 0; -1)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 67$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -67$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 65$.

 **Lời giải.**

Câu 15

Cho $A(1; -2; 3)$, $B(2; -4; 1)$, $C(2; 0; 2)$, khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- (A) 4. (B) -1. (C) 7. (D) -5.

 **Lời giải.**

Câu 16

Cho tam giác ABC với $A(8; 9; 2)$, $B(3; 5; 1)$, $C(11; 10; 4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là

- (A) 60° . (B) 150° . (C) 30° . (D) 120° .

 **Lời giải.**

Câu 17

Cho điểm $A(3; -1; 5)$, $B(m; 2; 7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để độ dài đoạn $AB = 7$.

- (A) $m = 3$ hoặc $m = -3$. (B) $m = 9$ hoặc $m = -3$.
(C) $m = -3$ hoặc $m = -9$. (D) $m = 9$ hoặc $m = 3$.

 **Lời giải.**

Câu 18

Cho ba điểm $A(3; 2; 8)$, $B(0; 1; 3)$ và $C(2; m; 4)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B .

- (A) $m = 4$. (B) $m = -10$. (C) $m = 25$. (D) $m = -1$.

🔑 Lời giải.

Câu 19

Cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- (A) $m = 0$. (B) $m = -4$. (C) $m = 2$. (D) $m = -6$.

🔑 Lời giải.

Câu 20

Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 3; 5)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

- (A) $H(3; 4; 6)$. (B) $H(-3; 4; 7)$. (C) $H(2; 4; 1)$. (D) $H(2; -4; 3)$.

🔑 Lời giải.

Câu 21

Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Gọi $M(0; 0; z)$ là điểm thuộc trục Oz sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $z \in (0; 1]$. (B) $z \in (1; 2]$. (C) $z \in (-1; 0]$. (D) $z \in (-2; -1]$.

🔑 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 22

Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

- a) $|\vec{a}| = 2$. b) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

 **Lời giải.**

Câu 23

Cho hai vectơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$.

- a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$. b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.
c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$. d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

 **Lời giải.**

Câu 24

Cho tam giác ABC có $A(1; 2; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(2; 1; 0)$.

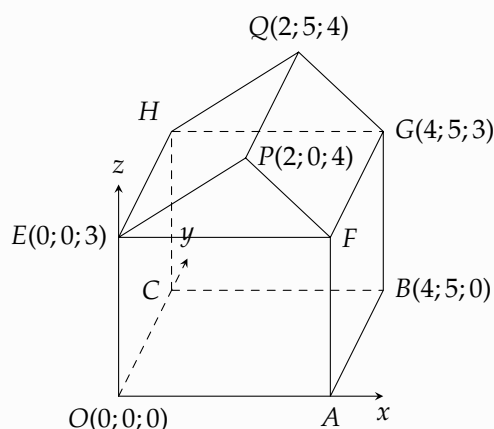
- a) Tam giác ABC vuông tại A .
b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.
d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

 **Lời giải.**

Câu 25

Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

- Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.
- Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.
- Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).
- Chiều cao của ngôi nhà là 4.



📌 Lời giải.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác ABC . Phát biểu nào sau đây là sai?

- $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
- $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.
- $\vec{GD} - \vec{GA} = \vec{AD}$.
- $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DG}$.

📌 Lời giải.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\vec{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Tọa độ của điểm M là

- $(-4; 3; 2)$.
- $(2; 3; -4)$.
- $(3; -4; 2)$.
- $(-2; -3; 4)$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 2; -1)$, $\vec{v} = (5; -4; 2)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là

- Ⓐ $(-2; 6; -3)$. Ⓑ $(2; -6; 3)$. Ⓒ $(-2; -2; -3)$. Ⓓ $(2; 2; 1)$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; -2; 3)$. Toạ độ của vectơ $-3\vec{u}$ là

- Ⓐ $(3; -6; 9)$. Ⓑ $(-3; -6; -9)$. Ⓒ $(3; 6; 9)$. Ⓓ $(-3; 6; -9)$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(2; -3; 4)$, $N(1; 2; 3)$ và $P(3; -2; 2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có toạ độ là

- Ⓐ $(2; -1; 3)$. Ⓑ $(6; -3; 9)$. Ⓒ $(-2; 1; -3)$. Ⓓ $(-6; 3; -9)$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (2; 3; -3)$ và $\vec{v} = (-3; -2; 4)$ bằng

- Ⓐ $\sqrt{22} - \sqrt{29}$. Ⓑ $-\sqrt{22} \cdot \sqrt{29}$. Ⓒ 24. Ⓓ -24.

📌 Lời giải.

Câu 7

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai điểm $I(3; 5; -7)$ và $K(-5; 5; -1)$ bằng:

- (A) 100. (B) 20. (C) 10. (D) 17.

📌 Lời giải.

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 1; -2)$ và $\vec{v} = (-2; 1; 5)$. Toạ độ của vectơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ là

- (A) $(5; 7; -11)$. (B) $(-7; 11; -5)$. (C) $(7; -11; 5)$. (D) $(-5; -7; 11)$.

📌 Lời giải.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Tính độ dài của $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

- (A) $\sqrt{74}$. (B) $\frac{3\sqrt{6}}{6}$. (C) $\sqrt{52}$. (D) $\sqrt{42}$.

📌 Lời giải.

Câu 10

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; 5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Khi A, B, M thẳng hàng thì giá trị của x, y, z là

- (A) $x = 7; y = 7$. (B) $x = 4; y = 7$. (C) $x = 7; y = 2$. (D) $x = 7; y = -4$.

📌 Lời giải.

Câu 11

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 4; -2)$, $B(2; 1; -3)$, $C(3; 0; 2)$ và $D(2; 5; -1)$. Điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ có tọa độ là:

- Ⓐ $G(2; -1; -1)$. Ⓑ $G(2; -2; -1)$. Ⓒ $G(1; 1; -1)$. Ⓓ $G(6; 3; -2)$.

👉 Lời giải.

Câu 12

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; -1; -2)$ và trọng tâm $G(2; 1; -3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ là

- Ⓐ $(3; 6; 3)$. Ⓑ $(3; 6; -3)$. Ⓒ $(-3; 6; -3)$. Ⓓ $(3; 2; 1)$.

👉 Lời giải.

Câu 13

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$. Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$.

- Ⓐ $\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$. Ⓑ $\left(\frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; 3\right)$.

👉 Lời giải.

Câu 14

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $E(1; 3; 2)$, $F(0; -1; 5)$, $K(2; 4; -1)$ và tam giác ABC thỏa mãn $\vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CK} = \vec{0}$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

- Ⓐ $G(1; 2; 2)$. Ⓑ $G(-1; -4; 3)$. Ⓒ $G(2; 2; 1)$. Ⓓ $G(1; -3; -1)$.

👉 Lời giải.

Câu 15

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{PQ} = (0; 1; -2)$, $\overrightarrow{PR} = (-2; -1; 0)$ và điểm $M(1; -2; 2)$ trung điểm của đoạn QR . Tọa độ điểm Q là

- (A) $(-1; 1; -2)$. (B) $(-2; 2; -3)$. (C) $(0; 1; 3)$. (D) $(2; -1; 1)$.

 Lời giải.

Câu 16

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(2; 2; 2)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

- (A) $I(1; 1; 0)$. (B) $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. (C) $I(1; 1; 1)$. (D) $I(1; 1; 2)$.

 Lời giải.

Câu 17

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-2; 3; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng:

- (A) 42. (B) -50. (C) -48. (D) 44.

 Lời giải.

Câu 18

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và điểm $B(4; -3; 1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

- (A) $(6; -2; 4)$. (B) $(3; -1; 2)$. (C) $(1; -2; -1)$. (D) $(2; -4; -2)$.

 Lời giải.

Câu 19

Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 4; 2)$, $\vec{b} = (-5; 0; 3)$, $\vec{c} = (1; 2; -4)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

- Ⓐ $\vec{u} = (2; 10; 16)$. Ⓑ $\vec{u} = (1; 5; 8)$. Ⓒ $\vec{u} = (-2; 10; 16)$. Ⓓ $\vec{u} = (2; -10; 16)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 20

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 5; 2)$, $\vec{b} = (0; -1; 3)$, $\vec{c} = (1; -1; 1)$. Tìm tọa độ của $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.

- Ⓐ $\vec{v} = (-9; 2; 10)$. Ⓑ $\vec{v} = (-9; -9; 10)$. Ⓒ $\vec{v} = (9; -9; 10)$. Ⓓ $\vec{v} = (9; 2; 10)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 21

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(0; -2; 1)$ và $B(1; -1; 2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $M = 2\vec{MB}$.

- Ⓐ $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$. Ⓑ $M\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$. Ⓒ $M(2; 0; 5)$. Ⓓ $M(1; -3; -4)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 22

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 1)$, $B(-1; -2; 1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là?

- Ⓐ $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$. Ⓑ $I(-3; 1; 0)$. Ⓒ $I\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$. Ⓓ $I\left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 23

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(-2; -4; 9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là:

- (A) 5. (B) 3. (C) $\sqrt{54}$. (D) $\sqrt{17}$.

 Lời giải.

Câu 24

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 2)$, $C(3; -1; 3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho bốn điểm A, B, C, D lập thành một hình chữ nhật.

- (A) $D(4; 3; 4)$. (B) $D(4; -1; 4)$. (C) $D(2; -3; 2)$. (D) $D(4; 1; 4)$.

 Lời giải.

Câu 25

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4; 1; 5)$, $B(1; 5; -3)$. Gọi C là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Oyz) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) $\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB}$. (B) $\vec{AB} = 5\vec{BC}$. (C) $\vec{AC} = 4\vec{BC}$. (D) $\vec{AC} = -4\vec{BC}$.

 Lời giải.

Câu 26

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1; 1; -3)$, $\vec{b} = (2; 2; -2)$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ và $\vec{d} = (1; 1; -1)$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

- (A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$. (B) $\vec{a}$ và $\vec{d}$. (C) $\vec{a}$ và $\vec{c}$. (D) $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

 Lời giải.

Câu 27

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; -1)$, $B(1; 2; 0)$, $C(m; n; 0)$. Tìm m, n sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

- ☐ A $m = 1; n = 1$. ☐ B $m = 1; n = 2$. ☐ C $m = 2; n = 1$. ☐ D $m = 2; n = 2$.

 Lời giải.

Câu 28

Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a} = (-1; 2x - 1; 1 - 3z)$ và $\vec{b} = (2 + 3y; -1; -2)$. Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tổng $T = x + 2y^2 + 3z^3$ bằng:

- ☐ A 2. ☐ B 5. ☐ C 1. ☐ D 4.

 Lời giải.

Câu 29

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là:

- ☐ A $(-2; 1; 1)$. ☐ B $\left(\frac{-2}{11}; \frac{3}{11}; 1\right)$. ☐ C $\left(\frac{-2}{11}; \frac{3}{11}; 1\right)$. ☐ D $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$.

 Lời giải.

Câu 30

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6; -3; 4)$, $B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oxz) và (Oyz) . Biết rằng M, N, P nằm

trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của tổng $a + b + c$ là

(A) 17.

(B) -17.

(C) -11.

(D) 11.

 Lời giải.

Câu 31

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; -2; 1)$ và $\vec{b} = (2; -4; -2)$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

(A) 8.

(B) -8.

(C) 12.

(D) -12.

 Lời giải.

Câu 32

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{b} = (x_1, y_1, z_1)$. Tọa độ $[\vec{a}, \vec{b}]$ là

(A) $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 + x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$.

(B) $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 - x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$.

(C) $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 + x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$.

(D) $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 - x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$.

 Lời giải.

Câu 33

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; -1; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

(A) $(5; 1; -1)$.

(B) $(5; -1; -1)$.

(C) $(-1; -1; -1)$.

(D) $(1; -1; 5)$.

 Lời giải.

Câu 34

Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc tạo bởi hai vectơ $\vec{a} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (0; -2; 1)$ là

- Ⓐ $\frac{4}{5}$. Ⓑ $-\frac{4}{5}$. Ⓒ $\frac{4}{25}$. Ⓓ $-\frac{4}{25}$.

📖 Lời giải.

Câu 35

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m} = (4; 3; 1)$ và $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ và $|\vec{p}| = 15$. Tọa độ của vectơ $\vec{p}$ là

- Ⓐ $(0; 9; 12)$. Ⓑ $(-9; 12; 0)$. Ⓒ $(0; -9; 12)$. Ⓓ $(9; -12; 0)$.

📖 Lời giải.

Câu 36

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; -1; 1)$, $\vec{b} = (4; 1; 2)$, $\vec{c} = (1; 0; m + 2)$. Tìm m để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

- Ⓐ $m = -5$. Ⓑ $m = 5$. Ⓒ $m = -1$. Ⓓ $m = 1$.

📖 Lời giải.

Câu 37

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; -2; 0)$; $B(1; 0; -1)$; $C(0; -1; 2)$ và $D(0; 3; m)$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây để bốn điểm trên đồng phẳng?

- Ⓐ $(1; 2)$. Ⓑ $(-2; -1)$. Ⓒ $(-1; 1)$. Ⓓ $(5; 7)$.

📖 Lời giải.

Câu 38

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-1; 3; 2)$, $\vec{b} = (-3; -1; 2)$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(A) 10.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 3.

 Lời giải.

Câu 39

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-3; 1; -1)$ và $\vec{v} = (1; 0; 5)$. Tích vô hướng của hai vectơ này bằng

(A) -8.

(B) 8.

(C) 3.

(D) -3.

 Lời giải.

Câu 40

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; -1; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

(A) $(5; 1; -1)$.

(B) $(5; -1; -1)$.

(C) $(-1; -1; -1)$.

(D) $(1; -1; 5)$.

 Lời giải.

Câu 41

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; 3)$, $B(1; 0; 4)$ và $C(2; 3; 2)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

(A) $S = \sqrt{2}$.

(B) $S = 2\sqrt{2}$.

(C) $S = 4\sqrt{2}$.

(D) $S = 3\sqrt{2}$.

 Lời giải.

Câu 42

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3); B(3; 4; 5)$. Diện tích tam giác OAB bằng

- Ⓐ $\sqrt{87}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{21}}{2}$. Ⓒ $\sqrt{6}$. Ⓓ $2\sqrt{6}$.

📌 **Lời giải.**

Câu 43

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (3; -2; m)$, $\vec{b} = (2; m; -1)$ với m là tham số nhận giá trị thực. Tìm giá trị của m để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

- Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = -1$. Ⓓ $m = -2$.

📌 **Lời giải.**

Câu 44

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4; 6; 2)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của A trên các trục Ox, Oy và Oz . Tính diện tích S của tam giác MNP .

- Ⓐ $S = 14$. Ⓑ $S = 28$. Ⓒ $S = 7$. Ⓓ $S = \frac{49}{2}$.

📌 **Lời giải.**

Câu 45

Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; -1; 2)$, $\vec{b} = (4; 2; -6)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng

- Ⓐ 66. Ⓑ $\sqrt{66}$. Ⓒ $3\sqrt{14}$. Ⓓ 2.

📌 **Lời giải.**

Câu 46

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc Ox và cách đều hai điểm $A(4; 2; -1)$ và $B(2; 1; 0)$ là

- (A) $M(-4; 0; 0)$. (B) $M(5; 0; 0)$. (C) $M(4; 0; 0)$. (D) $M(-5; 0; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 47

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 3)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy để tam giác ABC vuông tại A .

- (A) $(0; 1; \frac{1}{2})$. (B) $(0; 2; 0)$. (C) $(0; \frac{1}{2}; 0)$. (D) $(0; \frac{1}{2}; 0)$.

📌 Lời giải.

Câu 48

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 2)$, $B(1; 1; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Hỏi cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AB và BC bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) 1.

📌 Lời giải.

Câu 49

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 60° và $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$. Khi đó $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{7}$. (C) 2. (D) $\sqrt{5\sqrt{3} + 20}$.

📌 Lời giải.

Câu 50

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (5; -2; 4)$. Độ dài đường trung tuyến $\overrightarrow{AM}$ là

- Ⓐ $\sqrt{5}$. Ⓑ $5\sqrt{2}$. Ⓒ $3\sqrt{2}$. Ⓓ 5.

 **Lời giải.**

Câu 51

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; 1; 2)$. Điểm M trên trục Ox có hoành độ dương và thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = 23$. Khi đó tọa độ điểm M là

- Ⓐ $M(4; 0; 0)$. Ⓑ $M(3; 0; 0)$. Ⓒ $M(2; 0; 0)$. Ⓓ $M(1; 0; 0)$.

 **Lời giải.**

Câu 52

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-2; 1; 5)$ và $\vec{v} = (m - 2; 3; m + 1)$, m là tham số. Tìm m để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

- Ⓐ $m = -4$. Ⓑ $m = 4$. Ⓒ $m = -3$. Ⓓ $m = 3$.

 **Lời giải.**

Câu 53

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} + 2\vec{v}$.

- Ⓐ $\sqrt{97}$. Ⓑ 8. Ⓒ 7. Ⓓ $4\sqrt{6}$.

 **Lời giải.**

Câu 54

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; -5)$, $B(2; 3; -6)$ và $C(4; 4; -5)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

- Ⓐ $H\left(\frac{5}{7}; 4; -5\right)$. Ⓑ $H(1; 4; -5)$. Ⓒ $H(2; 3; -6)$. Ⓓ $H\left(\frac{7}{3}; \frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

📌 Lời giải.

Câu 55

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 1; 4)$, $B(5; -1; 3)$, $C(3; 1; 5)$ và $D(2; 2; m)$ (với m là tham số). Xác định m để bốn điểm A, B, C, D tạo thành bốn đỉnh của một tứ diện.

- Ⓐ $m \neq 6$. Ⓑ $m \neq 4$. Ⓒ $m \in \mathbb{R}$. Ⓓ $m < 0$.

📌 Lời giải.

Câu 56

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 2; 2)$. Gọi $I(a, b, c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- Ⓐ $T = \frac{13}{2}$. Ⓑ $T = 6$. Ⓒ $T = 2$. Ⓓ $T = \frac{29}{4}$.

📌 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a .

- a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. b) Tam giác SBD vuông cân tại S .
c) $(\vec{SB}, \vec{BD}) = 45^\circ$. d) $\vec{SB} \cdot \vec{BD} = -a^2$.

 Lời giải.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$. b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$. d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

 Lời giải.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; -1; -2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; -1; 1)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$

- a) $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 4)$. b) $\overrightarrow{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$.
c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. d) Toạ độ điểm D là $(0; 3; 3)$.

 Lời giải.

Câu 4

Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.

- a) Radar ở vị trí có tọa độ $(0; 0; 0)$.
b) Vị trí A có tọa độ $(300; 200; 10)$.
c) Khoảng cách từ máy bay đến radar là khoảng 360,69 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
d) Radar của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A .

 Lời giải.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$.

- Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
- Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.
- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1; 4; -4)$.
- Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

 **Lời giải.**

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$, $C(9; 2; y)$.

- Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.
- Điểm $\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; \frac{3}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1, y = 3$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $x = 13, y = -1$.
- Tích vô hướng của $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3x + 2y + 41$.

 **Lời giải.**

Câu 7

Cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Xét tính đúng sai

- $|\vec{a}| = 2$.
- $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.
- $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
- $\vec{b} \perp \vec{c}$.

 **Lời giải.**

Câu 8

Cho hai vectơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$.

- a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$.
 b) $|\vec{v}| = |\vec{u}| \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}$.
 c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$.
 d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{9}{4}$.

 Lời giải.

Câu 9

Cho tam giác ABC có $A(1; 2; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(2; 1; 0)$.

- a) Tam giác ABC vuông tại A .
 b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.
 c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.
 d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(4, 5, 7)$, $B(-3, -10, -2)$, $C(-2, -10, -1)$, $D(0, y, 0)$. Biết rằng D thuộc trục Oy và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 8. Tìm tổng các tung độ y của điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

KQ:

 Lời giải.

Câu 2

Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc 19 (km) và về phía Tây 11 (km), đồng thời cách mặt đất 0.8 (km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông 30 (km) và về

phía Nam 8 (km), đồng thời cách mặt đất 1.2 (km). Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.
KQ:

📌 Lời giải.

Câu 3

Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông 33 (km) và về phía Nam 57 (km), đồng thời cách mặt đất 4,9 (km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc 55 (km) và về phía Tây 46 (km), đồng thời cách mặt đất 4,9 (km). Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa hai chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời cách mặt đất trung bình giữa hai máy bay. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

KQ:

📌 Lời giải.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (5; -4; 2)$ và $\vec{v} = (3; 4; 4)$. Tính độ dài $|\vec{u} + 2\vec{v}|$.

KQ:

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho ba điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(x + 2; y; -2)$ thẳng hàng. Tổng $x + y + \frac{2}{3}$ bằng

KQ:

📌 Lời giải.

Câu 6

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

KQ:

 Lời giải.

Câu 7

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AB}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

KQ:

 Lời giải.

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;5)$, $B(1;3;-1)$, $C(4;-2;3)$. Số đo của góc ABC bằng bao nhiêu độ?

KQ:

 Lời giải.

Câu 9

Một người điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150 m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180 m về phía bắc và 240 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60 m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng

trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....