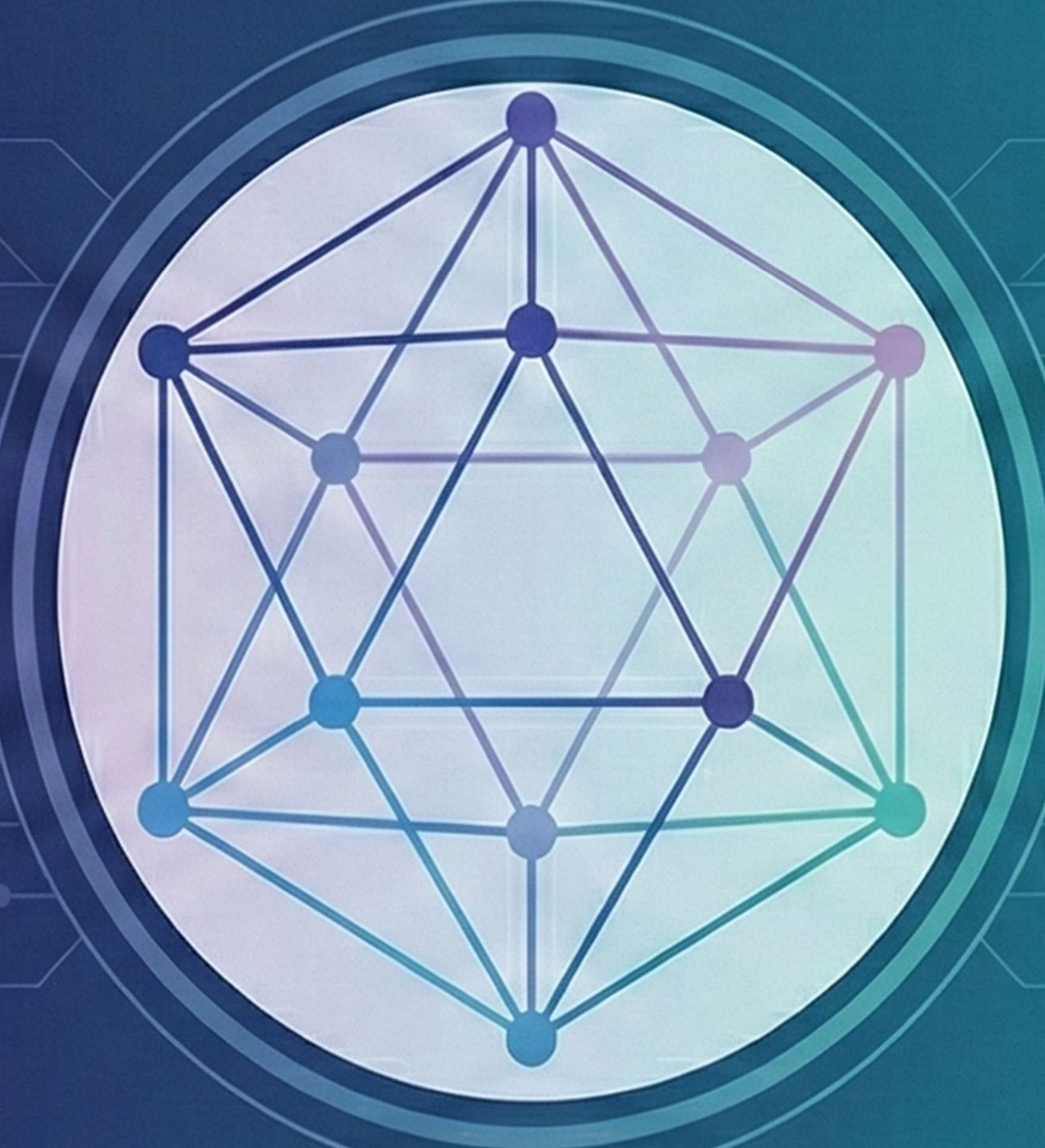
# TỔNG HỢP CÁC CÂU ĐẾM – XÁC SUẤT VD-VDC



PHỤC VỤ CÁC KỲ THI THPT, HSA, TSA, HSG

## LỜI GIỚI THIỆU

Tổ hợp và Xác suất luôn là một trong những chuyên đề thách thức nhất trong chương trình Toán phổ thông cũng như các kỳ thi quan trọng. Điểm đặc thù của chuyên đề này không nằm ở những biến đổi đại số cồng kềnh, mà đòi hỏi ở người học một tư duy logic mạch lạc.

Nhằm hỗ trợ các bạn học sinh và quý thầy cô có thêm tư liệu ôn tập chất lượng, chúng tôi đã biên soạn tuyển tập này với trọng tâm là các bài toán ở mức độ Vận dụng - Vận dụng cao. Các bài tập được tuyển chọn kỹ lưỡng, cập nhật theo xu hướng "mới và lạ" của các kỳ thi hiện nay như Tốt nghiệp THPT, Đánh giá năng lực (HSA), Đánh giá tư duy (TSA) và Học sinh giỏi các cấp THPT.

Tài liệu không chỉ dừng lại ở việc cung cấp lời giải, mà còn hướng tới việc rèn luyện tư duy bản chất, giúp các bạn tự tin xử lý các bài toán đòi hỏi sự suy luận sâu sắc. Hy vọng đây sẽ là người bạn đồng hành đắc lực giúp các bạn chinh phục những điểm số cao nhất.

Dù đã rất cố gắng nhưng thiếu sót là điều khó tránh khỏi. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ

**Đơn Giản Hóa - Luyện Thi Học Sinh Giỏi Toán 10,11,12**

**https://www.facebook.com/dongianhoa**

# *TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN ĐẾM - XÁC SUẤT KHÓ*

## A. Phần đề

**Câu 1:** Đại Học Bách Khoa Hà Nội tổ chức phỏng vấn 8 học sinh, trong đó có hai học sinh trường $A$, hai học sinh trường $B$, hai học sinh trường $C$ và hai học sinh trường $D$. Để tránh tình trạng gian lận, trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội yêu cầu sắp xếp chỗ như sau:

- Xếp 8 bạn thành 2 hàng ngang, mỗi hàng bốn bạn.
- Hai bạn cùng trường không ngồi cạnh nhau và cũng không ngồi đối diện nhau.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| D | C | B | A |

Số cách mà Đại Học Bách Khoa Hà Nội có thể sắp xếp bằng bao nhiêu?

**Câu 2:** Khi một con xúc xắc được tung hai lần, gọi lần lượt các số chấm xuất hiện là $a, b$. Khi đó, xác suất để $\left|a-3\right|+\left|b-3\right|=2$ hoặc $a=b$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

**Câu 3:** Có 6 quả bóng giống nhau, lần lượt ghi các số $1,2,3,4,5,6$. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại 3 lần, mỗi lần lấy 1 quả. Gọi $m$ là giá trị trung bình của hai số lấy ở hai lần đầu, $n$ là giá trị trung bình của ba số lấy được. Tính xác suất để $|m-n| \leq \frac{1}{2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

**Câu 4:** Trường THPT Thăng Long tổ chức cuộc thi "hoa hướng dương" với thể lệ cuộc thi như sau:

- Có tất cả $12$ đội tham gia, mỗi đội có ba thành viên.
- Mỗi thành viên trong đội thực hiện chọn ngẫu nhiên một tập con của tập $S=\left\{1,2,3,4,5,6\right\}$.
- Đội thắng sẽ là đội chọn được một "hoa hướng dương" (ta nói rằng các tập hợp $A, B, C$ tạo thành một "hoa hướng dương" nếu $A \cap B = B \cap C = C \cap A$).

Xác suất để có đúng mội đội thắng cuộc thi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

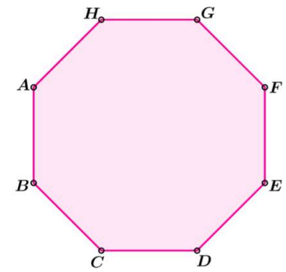
**Câu 5 [Tự Luận]:** Trong số tất cả các tập con khác rỗng của tập hợp $T=\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\right\}$, người ta chọn ra hai tập hợp $A$, $B$ sao cho $A \cap B = \varnothing$ và $A \cup B = T$. Tính xác suất để $s(B) \geq 4.s(A)$, trong đó $s(A)$ là tổng các phần tử của $A$, $s(B)$ là tổng các phần tử của $B$.

**Câu 6:** Có $15$ thẻ được đánh số từ $1$ đến $15$. Người ta bỏ tất cả các thẻ này vào $7$ chiếc hộp mất nhãn (hộp không phân biệt, được phép rỗng) sao cho:

- Mỗi hộp chứa nhiều nhất $1$ thẻ mang số nguyên tố;
- Có ít nhất hai thẻ mang số chính phương nằm cùng một hộp.

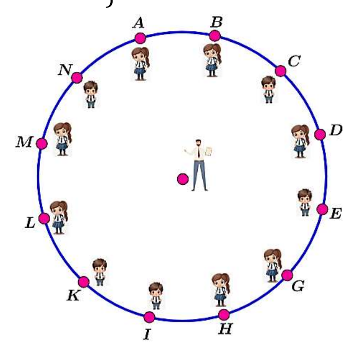
Gọi $N$ là số cách phân chia thẻ thỏa mãn đề bài, giá trị $\frac{N}{7^4}$ bằng bao nhiêu?

**Câu 7:** Cho một hình bát giác đều có tám đỉnh $A,B,C,D,E,F,G,H$. Người ta gắn ngẫu nhiên vào $8$ đỉnh này $8$ số tự nhiên $1;2;3;4;5;6;7;8$ (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có $3$ đỉnh lấy từ $8$ đỉnh của bát giác đã cho. Gọi $P$ là xác suất để thu được một tam giác vuông với ba số trên ba đỉnh của tam giác đó (theo một thứ tự nào đó) **lập thành một cấp số cộng**. Biết xác suất $P=\dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản). Hãy tính $m+3n$.

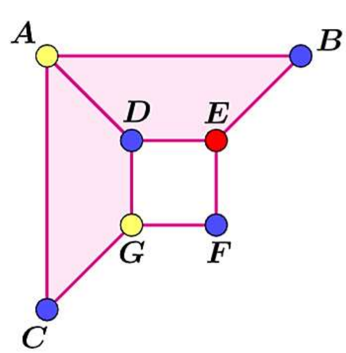



**Câu 8:** Trong lớp chuyên Toán trường Chuyên Lam Sơn có $36$ bàn học cá nhân (mỗi bàn chỉ được xếp nhiều nhất một bạn), được xếp thành $4$ hàng và $9$ cột (các hàng được đánh số từ trên xuống dưới theo thứ tự từ $1$ đến $4$, các cột được đánh số từ trái qua phải theo thứ tự từ $1$ đến $9$). Biết sĩ số học sinh của lớp là $35$. Sau học kì I, thầy chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Giả sử trước thời điểm chuyển chỗ bạn ngồi ở hàng thứ $m$, cột thứ $n$ và sau khi chuyển chỗ bạn đó sẽ ngồi ở hàng thứ $a_m$, cột thứ $a_n$ thì ta gán cho bạn đó số nguyên là $\left(a_m+a_n\right)-\left(m+n\right)$. Nếu ban đầu bàn trống ở vị trí $\left(1;1\right)$, sau khi chuyển chỗ bàn trống ở vị trí $\left(2;5\right)$ thì tổng của $35$ số nguyên được gán cho $35$ bạn là bao nhiêu?

**Câu 9:** Một nhóm $12$ người tương ứng với mã số $1;2;...;12$ đứng quanh một vòng tròn cùng tham gia trò chơi. Họ được sắp xếp một cách ngẫu nhiên trên $12$ vị trí $A,B,...,M,N$ của đường tròn, vì thế các số được xếp không theo thứ tự định trước. Người quản trò đứng ở vị trí tâm đường tròn, anh ta bốc ngẫu nhiên $2$ lần, mỗi lần $1$ thẻ và không hoàn lại từ hộp đựng các số $\left\{1;2;3;4;5\right\}$. Nếu người quản trò bốc được số chia hết cho $3$ thì tất cả những người cùng mang số chia hết cho $3$ sẽ tiến về phía tâm đường tròn để tham gia một trò chơi nhỏ và tính điểm, nếu người quản trò bốc đúng thẻ có số chia cho $3$ dư $1$ thì những người mang số chia cho $3$ dư $1$ cũng tiến lên phía trước, luật chơi tương tự nếu người quản trò bốc được số chia cho $3$ dư $2$. Xác suất để sau $2$ lần người quản trò bốc thẻ thì không có hai người kề nhau trên đường tròn được chọn bằng $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $a,b$ nguyên dương và không có ước chung lớn hơn 1), tính $a\times b$.



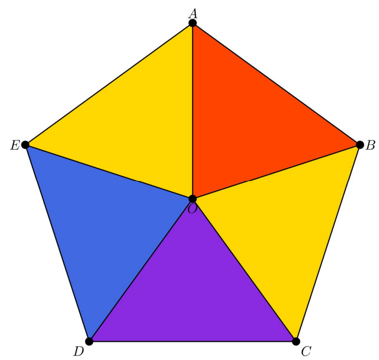

**Câu 10:** Từ một hệ thống các bóng đèn như hình vẽ, người ta sử dụng $3$ loại màu xanh, đỏ, vàng cho các bóng đèn ở mỗi vị trí $A,B,C,D,E,F,G$.



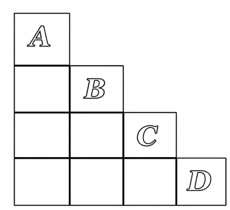

Hỏi có bao nhiêu cách bố trí các loại bóng đèn sao cho $2$ bóng đèn kề nhau (được nối với nhau đúng một đoạn dây) thì khác màu?

**Câu 11:** Có $9$ người cùng lên $3$ toa tàu mang số lần lượt $1,2,3$. Trong $9$ người này thì có $4$ bạn An, Bình, Cường, Duy. Bạn An sẽ lên cùng toa với ít nhất một trong hai bạn Bình và Cường nhưng nhất định không lên cùng toa với bạn Duy. Đối với bạn Duy , nếu không lên cùng toa với Cường thì Duy sẽ ở riêng $1$ toa. Biết rằng không có toa tàu nào chứa $5$ hành khách, hỏi có bao nhiêu cách để $9$ người lên $3$ toa tàu thỏa mãn tất cả điều kiện trên?

**Câu 12:** Tại một hội chợ vào những ngày xuân, để trang trí một tấm banner hình ngũ giác đều $ABCDE$ cạnh bằng $1$ mét, người ta cần chọn và tô màu cho $5$ tam giác cân có cùng đỉnh $O$ (tham khảo hình vẽ) từ $4$ màu xanh, đỏ, vàng, tím. Tiếp theo họ cần chọn $6$ số tự nhiên phân biệt từ tập $1;2;3;\ldots;25$ để lắp vào $6$ vị trí đỉnh (gồm $5$ đỉnh ngũ giác và tâm $O$ của ngũ giác). Yêu cầu đặt ra là hai tam giác có chung đúng một cạnh thì khác màu, đồng thời các số liên tiếp trên $5$ đỉnh ngũ giác theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với tổng của cấp số cộng này là số nằm ở tâm $O$ của ngũ giác (một đỉnh bất kì đều có thể bắt đầu của một cấp số cộng nào đó). Hỏi có bao nhiêu cách tô màu, chọn số cho banner thỏa mãn tất cả điều kiện trên?

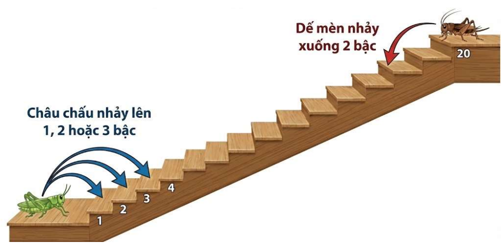



**Câu 13:** Từ tập hợp số tự nhiên $1;2;3;\ldots;25;26$, cần chọn ra $10$ số phân biệt để gán vào $10$ ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi $T$ là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô $A,B,C,D$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị $\dfrac{T}{4}$ bằng bao nhiêu?



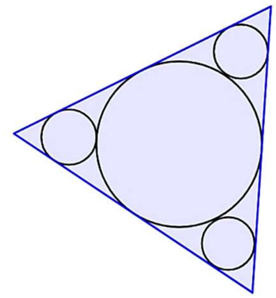

**Câu 14:** Một cầu thang rất dài được đánh số các bậc lần lượt là $0,1,2,3,\ldots$ theo thứ tự từ thấp lên cao

- Châu chấu xuất phát ở bậc 0; mỗi lượt nó nhảy lên 1 bậc, 2 bậc hoặc 3 bậc.
- Dế xuất phát ở bậc 20; mỗi lượt dế luôn nhảy xuống đúng 2 bậc.

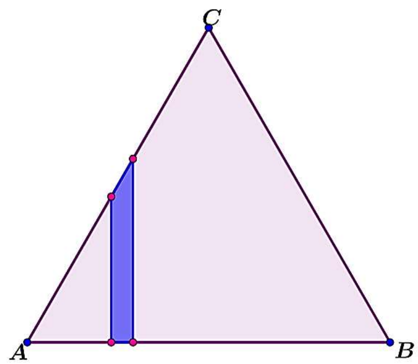



Hai con bắt đầu nhảy cùng lúc, cứ 10 giây nhảy một lượt. Biết rằng sau 10 lượt đầu tiên (khi dế nhảy hết bậc cầu thang) thì châu chấu có $N$ cách nhảy sao cho hai con gặp nhau tại một bậc cầu thang nào đó, hãy tính giá trị $\dfrac{N}{9}$.

**Câu 15:** Cho tập $X = \left\{1;\ 2;\ \ldots;\ 9\right\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt, rồi đặt 1 số đặt vào vòng tròn lớn, 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ. Gọi $P$ là xác suất để **tổng các số tự nhiên trên hai vòng nhỏ bất kỳ luôn bé hơn số tự nhiên ở vòng lớn chính giữa**, đồng thời **tổng cả ba số tự nhiên trên vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số tự nhiên ở vòng tròn lớn** (biết rằng hai cách xếp được gọi là giống nhau khi xoay tam giác quanh tâm đường tròn lớn một góc nào đó thì được các số giống nhau nằm cùng vị trí). Giá trị $250\,236P$ bằng bao nhiêu?



**Câu 16:** Cho tam giác đều $ABC$. Trên cạnh $AB$, lấy $59$ điểm phân biệt (không trùng $A$, $B$) chia $AB$ ra làm $60$ đoạn bằng nhau, đánh dấu $59$ điểm vừa được chọn. Trên cạnh $AC$, lấy $44$ điểm phân biệt (không trùng $A$, $C$) chia $AC$ chia ra làm $45$ đoạn bằng nhau. Trên cạnh $BC$, lấy $39$ điểm phân biệt (không trùng $B$, $C$) chia $BC$ ra làm $40$ đoạn bằng nhau. Chọn ngẫu nhiên $2$ điểm phân biệt trong các điểm đã lấy trên hai cạnh $AC$, $BC$ (trên cùng một cạnh hoặc trên hai cạnh khác nhau).

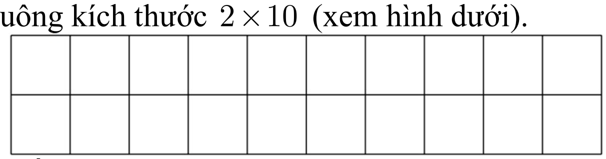



Gọi $H$, $K$ là hình chiếu vuông góc của hai điểm đó lên đường thẳng $AB$. Biết xác suất để đoạn $HK$ có hai đầu mút đều là các điểm đã được đánh dấu trên $AB$ bằng $\frac{m}{n}$ (trong đó $m$, $n$ là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản), tính giá trị $m+n$.

**Câu 17:** Có $10$ chiếc túi rỗng được xếp thành một hàng và $8$ quả bóng giống nhau. Có bao nhiêu cách phân chia $8$ quả bóng vào các túi sao cho thoả mãn tất cả các điều kiện sau:

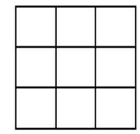
- Số bóng trong mỗi túi không vượt quá $2$.
- Số túi chứa đúng $1$ quả bóng là $4$ hoặc $6$ túi.
- Các túi nằm liền kề với túi chứa $2$ quả bóng thì không chứa quả bóng nào.

**Câu 18:** Cho một bảng ô vuông kích thước $2 \times 10$ (xem hình dưới).



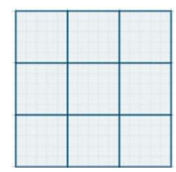
Hai ô vuông gọi là kề nhau nếu có chung một cạnh. Người ta tô màu các ô vuông bởi hai màu đen và đỏ sao cho mỗi ô được tô bởi đúng một màu. Tính số cách tô mà có đúng 3 ô được tô màu đỏ và không có hai ô cạnh nhau được tô cùng màu đỏ.

**Câu 19 [Tự Luận]:** Cho một bảng ô vuông $3 \times 3$ như hình vẽ bên. Điền ngẫu nhiên $9$ số thuộc tập hợp $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ vào $9$ ô vuông trong bảng (mỗi ô điền một số khác nhau). Tính xác suất của biến cố "mỗi hàng, mỗi cột bất kì trong bảng đều có ít nhất một số lẻ".



**Câu 20:** Cho dãy gồm $2023$ số được sắp thứ tự tăng dần như sau: $C_4^4; C_5^4; ...; C_{2025}^4; C_{2026}^4$. Lấy ngẫu nhiên ba số hạng liên tiếp từ dãy số đã cho, biết xác suất để tổng của ba số này là một số lẻ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị $a + b$.

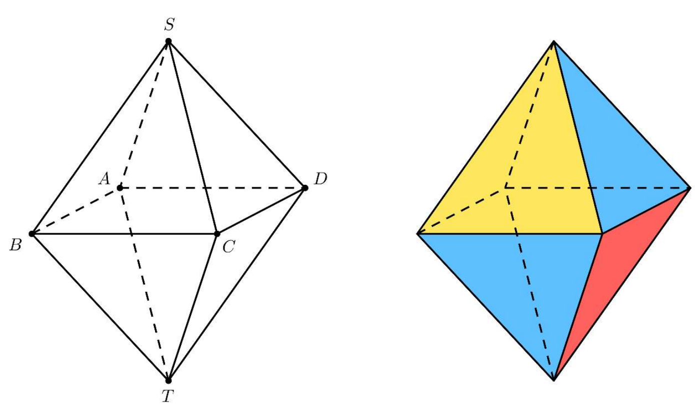
**Câu 21:** Cho tập hợp $S$ gồm 15 số tự nhiên: $S = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 16;\ 18\}$.
Chọn ngẫu nhiên 9 số phân biệt từ tập $S$ và điền vào 9 ô vuông của một bảng $3 \times 3$ như hình vẽ. Xác suất để các số trên cả hai đường chéo chính đều tạo thành cấp số nhân bằng $\dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản), tính giá trị $a^2 + b$ và làm tròn đến hàng đơn vị.



**Câu 22:** Lớp mẫu giáo có $10$ em bé, các bé đứng thành vòng tròn và cách đều nhau, đứng ở tâm vòng tròn là cô giáo. Mỗi bé cầm hai cờ, một xanh một đỏ trên mỗi tay. Cô giáo bảo "giơ lên cao một cờ", các bé giơ ngẫu nhiên một cờ. Gọi $a$ là xác suất để không có $4$ cờ nào cùng màu được giơ lên ở $4$ vị trí mà $4$ vị trí ấy là $4$ đỉnh của một hình chữ nhật. Giá trị của $\dfrac{2200}{a}$ bằng bao nhiêu?

**Câu 23 [Tự Luận]:** Cho các số nguyên từ $1$ tới $25$. Mỗi số nguyên trên được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Có bao nhiêu cách tô thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:
***i)*** Số $5$ được tô màu đỏ.
***ii)*** Nếu hai số $x, y$ khác màu và $x + y \leq 25$ thì số $x + y$ được tô màu xanh.
***iii)*** Nếu hai số $x, y$ khác màu và $xy \leq 25$ thì số $xy$ được tô màu đỏ.

**Câu 24:** Một đèn lồng đón năm mới được thiết kế theo hình bát diện đều (ta có thể hình dung hình bát diện đều là hai hình chóp tứ giác đều có tất cả cạnh bằng nhau $S.ABCD$ và $T.ABCD$ sử dụng chung một mặt đáy).




Nghệ nhân đã thiết kế sẵn $12$ tấm bìa cứng là các tam giác bằng nhau gồm $3$ màu xanh, đỏ, vàng;các tấm bìa cùng màu được đánh số từ $1$ đến $4$. Mỗi tấm bìa khi dán vào đèn lồng sẽ vừa kín một trong tám mặt bên của nó. Gọi $N$ là số cách mà nghệ nhân có thể chọn $8$ tấm bìa dán lên $8$ mặt bên của đèn lồng sao cho hai tấm bìa có chung một cạnh thì khác màu, hai tấm bìa có chung đúng một đỉnh thì khác số. Giá trị $\frac{N}{8}+16$ bằng bao nhiêu?

**Câu 25 [Tự Luận]:** Một học sinh có $5$ quả cầu màu xanh giống nhau và một số quả cầu màu đỏ giống nhau. Bạn ấy muốn xếp các quả cầu thành một dãy và nếu đặt $a$ là số quả cầu mà quả bên phải nó cùng màu với nó, $b$ là số quả cầu mà quả cầu bên phải nó khác màu với nó thì $a=b$. Gọi $m$ là số lớn nhất các quả cầu màu đỏ có thể dùng sao cho tồn tại cách xếp $m+5$ quả cầu thành một dãy thỏa mãn điều kiện nêu trên.

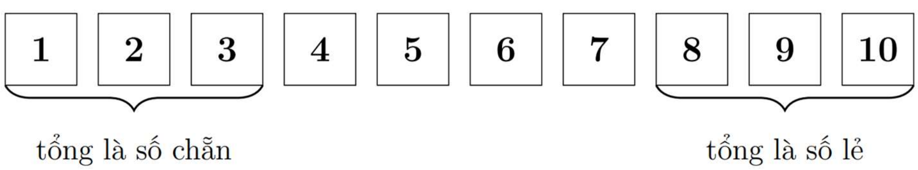
**1)** Xác định $m$

**2)** Ứng với $m$ ở trên, tìm số cách xếp các quả cầu để có $a=b$.

**Câu 26 [Tự Luận]:** Trong đợt sơ kết học kì I, thầy Hòa có 40 quyển với giống nhau muốn tặng cho 5 học sinh là thành viên trong đội tuyển Toán sao cho học sinh nào cũng được tặng với. Tính xác suất để không có học sinh nào nhận được số quyển với là một số chia hết cho 3.

**Câu 27:** Robinson Crusoe lạc trên đảo hoang đúng 28 năm. Mỗi năm, ông khắc lên thân cây một hình đa giác lồi để đánh dấu kỉ niệm. Biết rằng trong 10 năm đầu tiên, ông khắc các đa giác có ít nhất 100 cạnh; các năm còn lại ông khắc đa giác lồi tùy ý . Tổng số đo các góc của 28 đa giác này cộng lại đúng bằng $1001\pi$. Hỏi có bao nhiêu cách để Robinson thực hiện việc khắc hình thỏa mãn các điều kiện trên?

**Câu 28:** Có $10$ cái hộp khác nhau được đánh số từ $1$ đến $10$ và $10$ viên bi giống nhau (mỗi hộp không nhất thiết có bi). Số cách sắp xếp $10$ viên bi vào $10$ hộp sao cho tổng số viên bi trong các hộp số $1,2,3$ là số chẵn, còn tổng các viên bi trong các hộp $8,9,10$ là số lẻ là $T$, tính $\frac{T}{1000}$?




**Câu 29:** Một hình vuông có kích thước $m\times m$ ($m\geq 2, m\in\mathbb{N}$) được chia thành các ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật được tạo thành từ các ô vuông. Tìm giá trị nhỏ nhất của $m$ để xác suất chọn được một hình chữ nhật mà không phải là hình vuông lớn hơn $0,84$.

**Câu 30:** Một người đứng từ sàn nhà và muốn bước lên tầng hai bằng một cầu thang đi bộ có $17$ bậc. Biết rằng mỗi bước của người đó đi được $1$ bậc hoặc $2$ bậc và số bước đi luôn phải là số nguyên. Hỏi người này có tất cả bao nhiêu cách đi hết $17$ bậc của cầu thang đó?

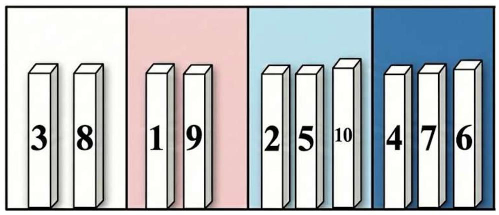
**Câu 31:** Gọi $A$ là tập tất cả các số tự nhiên có $4$ chữ số lập từ $X=\left\{0,1,2,3,4,5,6\right\}$ sao cho chữ số $6$ đúng một lần và các chữ số còn lại có mặt tối đa một lần. Biết tổng của tất cả các số tự nhiên trong tập $A$ bằng $b$. Hãy tính giá trị của $\frac{b}{1000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?

**Câu 32:** Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra ba số tự nhiên từ tập $\left[1;20\right]$ sao cho tích của chúng chia hết cho 81?

**Câu 33:** Bạn ***A*** chọn từ tập $X = \{1;2;3;4;5;7;8\}$ ra ba chữ số rồi ghép lại thành một số tự nhiên $m$ có ba chữ số theo chiều giảm dần của các chữ số, bạn ***B*** chọn từ tập $Y = \{1;2;3;4;5;6\}$ ra ba chữ số rồi ghép lại thành một số tự nhiên $n$ có ba chữ số theo chiều giảm dần của các chữ số. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách để thu được $m > n$?

**Câu 34:** Tiến hành xếp $10$ cuốn sách khác nhau vào $4$ ô hàng ngang. Hai cách được gọi là giống nhau nếu như thoả mãn đồng thời:

- Tính từ trái qua phải, số lượng sách trong mỗi ngăn là như nhau.
- Trong mỗi ngăn có số lượng sách như nhau, các cuốn sách đó phải được xếp có thứ tự giống nhau. Gọi $T$ là số cách xếp sao cho mỗi ngăn được ít nhất hai cuốn.



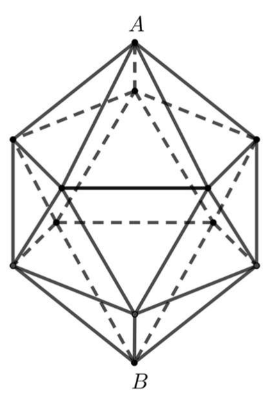

Hãy xác định giá trị $\dfrac{T}{10000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?

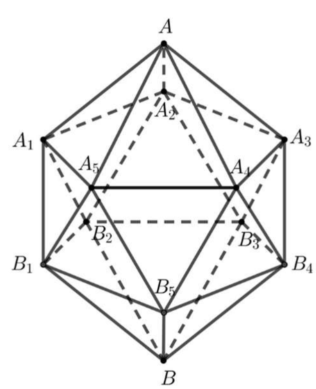
**Câu 35:** Hỏi có tất cả bao nhiêu số hạng trong khai triển $(17a+b+c)^{16}$ sao cho tổng số mũ của $a$ và $b$ lớn hơn $10$?

**Câu 36:** Cho $14$ hành khách bước ngẫu nhiên lên $3$ toa tàu khác nhau. Gọi $T$ là xác suất để sau khi các hành khách bước hết lên các toa tàu thì các toa đều có ít nhất một hành khách. Hãy xác định $10000T$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?

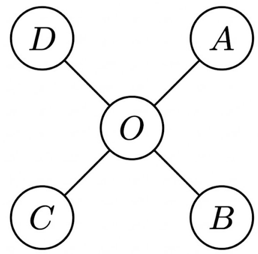
**Câu 37:** Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp $300$ viên bi giống nhau vào $3$ chiếc hộp giống nhau sao cho không có hộp nào nhiều hơn $149$ viên bi?

**Câu 38:** Một con kiến đang ở đỉnh trên cùng A của một hình 20 mặt đều (hình vẽ dưới). Mỗi bước di chuyển, nó bò dọc theo các cạnh của hình 20 mặt đều để đến đỉnh kế tiếp, mỗi đỉnh chỉ đi qua tối đa một lần. Hỏi có tất cả bao nhiêu lộ trình khác nhau khi con kiến di chuyển xuống đỉnh dưới cùng B ?



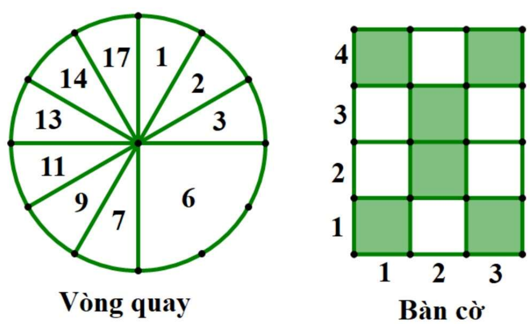
**Câu 39:** Chọn ngẫu nhiên $5$ số phân biệt từ tập $X = \{2;4;6;8;10;12;13;14;16;18;20\}$ để xếp vào $5$ ô như hình dưới. Xác suất số $13$ ở $O$ và tổng các số ở $A,O,C$ bằng tổng các số ở $B,O,D$ bằng $P$, tính $2079P$?



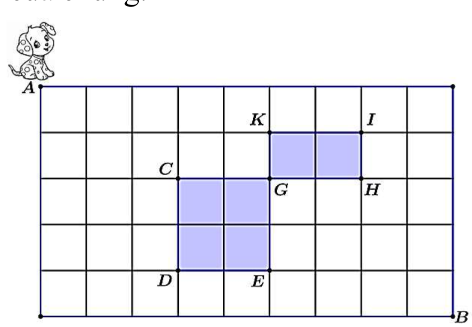

**Câu 40:** Vòng quay trong hình được quay hai lần, và các con số ngẫu nhiên dừng lại ở vị trí mũi tên được ghi lại.

- Số thứ nhất được chia cho $4$ để lấy số dư, số dư này chỉ định cột trên bàn cờ.
- Số thứ hai được chia cho $5$ để lấy số dư, số dư này chỉ định hàng trên bàn cờ.

Xác suất để cặp số nhận được chỉ định đúng vào một ô tô đậm trên bàn cờ là $\frac{a}{b}$ (với $a,b$ là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a+b$ bằng bao nhiêu?




**Câu 42:** Trên một ô lưới như hình, hình chữ nhật $AB$ gồm $9$ cột và $5$ hàng ô vuông. Một bé cún xuất phát từ điểm $A$ và chạy đến điểm $B$. Mỗi bước, bé cún chỉ được chạy sang phải hoặc xuống dưới đúng $1$ ô (đi theo các cạnh ô vuông), vì vậy bé cún luôn đi theo đường ngắn nhất. Trong hình có các vùng tô đậm là những bãi bùn. Bé cún không được chạy vào miền trong của các vùng tô đậm, nhưng được phép chạy trên đường biên của chúng.




Hỏi bé cún có bao nhiêu cách chạy từ $A$ đến $B$ ?

**Câu 43:** Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4...;100\}$. Gọi $S$ là tập hợp gồm tất cả các tập con của $A$, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của $A$ và có tổng bằng $91$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của $S$. Gọi $P\%$ là xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân. Tính $P$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 44:** Có bao nhiêu người tham gia vào cuộc đấu cờ theo thể thức vòng tròn một lượt, biết rằng cuộc đấu có tất cả 84 ván và có hai người bỏ cuộc khi mỗi người đã thi đấu đúng ba ván?

**Câu 45:** Gọi $S$ là tập hợp các số tự nhiên gồm $3$ chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên $2$ phần tử thuộc tập $S$, xác suất để chọn được $2$ số có ít nhất $2$ chữ số giống nhau là $\frac{m}{n}$ với $m, n$ là các số nguyên dương, phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m+n$.

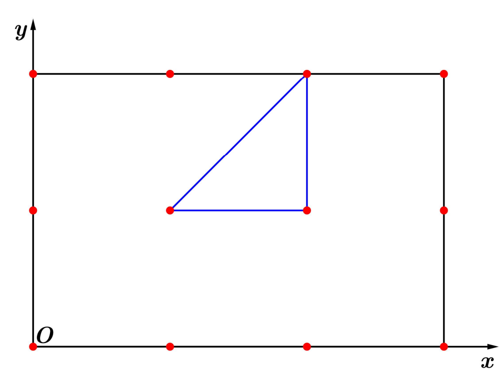
**Câu 46:** Lớp $11B$ gồm $40$ học sinh, trong đợt quyên góp hỗ trợ học sinh vùng lũ lụt, mỗi học sinh lớp $11B$ ủng hộ **nhiều nhất** $2$ **loại** trong ba loại: **sách giáo khoa (SGK), quần áo (QA)** và **tiền mặt (TM)**. Biết số học sinh tham gia thỏa mãn các điều kiện sau

1. Số học sinh **chỉ ủng hộ SGK** nhiều hơn tổng số học sinh **chỉ ủng hộ QA** và **chỉ ủng hộ TM** đúng $1$ bạn.
2. Trong nhóm **không ủng hộ SGK**, số học sinh ủng hộ **QA** gấp ba lần số học sinh ủng hộ TM.
3. Số học sinh **chỉ ủng hộ SGK** nhiều hơn **số học sinh ủng hộ SGK và một loại khác** đúng $5$ bạn.

Chọn ngẫu nhiên $2$ học sinh của lớp $11B$, biết xác suất để chọn được **một HS ủng hộ (QA & TM)** và **một HS chỉ ủng hộ SGK** bằng $\frac{m}{n}$, trong đó $m, n$ là các số nguyên dương, phân số $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $3m+n$.

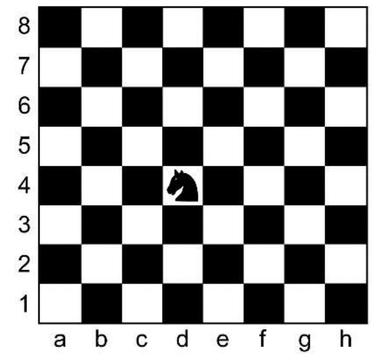
**Câu 47:** Trong một giải bóng đá dành cho học sinh, các bạn được chia vào đúng **một** trong hai đội cổ vũ: **Đội Cổ vũ Xanh** và **Đội Cổ vũ Đỏ**. Ban tổ chức nhận thấy rằng nếu chọn ngẫu nhiên 2 bạn bất kỳ trong khu vực khán đài thì xác suất để 2 bạn đó cùng cổ vũ cho **một đội** bằng đúng $\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng số bạn học sinh trên khán đài nằm trong khoảng từ $300$ đến $350$ và số bạn thuộc Đội Cổ vũ Xanh nhiều hơn số bạn thuộc Đội Cổ vũ Đỏ. Hỏi có bao nhiêu bạn thuộc Đội Cổ vũ Xanh?

**Câu 48:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho các điểm $A(3,0), B(3,2), C(0,2)$.



Gọi $S$ là tập hợp các điểm có tọa độ là các số nguyên nằm trong (kể cả trên cạnh) của hình chữ nhật $OABC$. Chọn ngẫu nhiên $3$ điểm từ tập $S$, xác suất để $3$ điểm được chọn tạo thành một tam giác vuông bằng $\frac{m}{n}$, $\left(m,n \in \mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$. Tính $m+n$.

**Câu 49:** Một con mã đang được đặt ở vị trí chính giữa tâm ô vuông $d4$ trong bàn cờ vua. Thầy Nghĩa di chuyển con mã $4$ bước để sau $4$ bước đó quân mã quay trở lại vị trí ban đầu với điều kiện $4$ bước đi không trùng nhau. Mỗi bước di chuyển Thầy Nghĩa đều đặt con mã ở các điểm chính giữa tâm ô vuông đó. *($4$ điểm đặt mã sau $4$ bước được xem là $4$ điểm ở tâm ô vuông con mã đi đến).* Xác suất đường đi của con mã có $4$ điểm đặt đó là $4$ đỉnh của một hình vuông có dạng $\frac{a}{b}$ *(là phân số tối giản, $a,b \in \mathbb{N}^*$).* Tính $a+2b$?



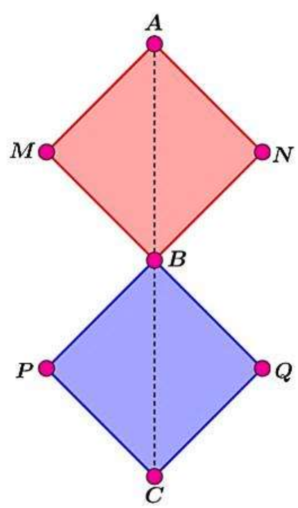

***Cách di chuyển của quân Mã:*** *Mã di chuyển theo đường chéo của hình chữ nhật $2\times3$ ô vuông. (hoặc $3\times2$ ô vuông).*

**Câu 50:** Bác Nghĩa đang giúp con trai sắp xếp 16 cuốn sách ôn thi vào một chiếc kệ 5 ngăn phân biệt. 16 cuốn sách này thuộc 8 môn học khác nhau: **Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa, Văn, Anh**. Mỗi môn học gồm đúng 2 cuốn: một cuốn sách giáo khoa và một cuốn sách bài tập. Để việc ôn tập đạt hiệu quả cao nhất theo từng khối thi, bác Nghĩa đặt ra các quy tắc khắt khe sau:

❖ Do ngăn kệ nhỏ, mỗi ngăn chỉ được chứa **tối đa 5 cuốn sách** và không được để ngăn nào trống.
❖ Hai cuốn sách của cùng một môn học **phải luôn nằm chung một ngăn** với nhau.
❖ Các môn học trong cùng một tổ hợp môn thi phải nằm ở **3 ngăn liên tiếp** để thuận tiện cho việc tra cứu. Các tổ hợp bao gồm: **(Văn, Sử, Địa), (Toán, Lý, Hóa), (Toán, Hóa, Sinh)** và **(Toán, Lý, Anh)**.
❖ Các cuốn sách trong mỗi ngăn được xếp theo hàng ngang, thứ tự từ trái sang phải.

Tổng số cách sắp xếp 16 cuốn sách này vào 5 ngăn kệ thỏa mãn điều kiện trên là $T$. Tính giá trị của $\frac{T}{512}$?

**Câu 51:** Từ các số tự nhiên $1;2;3;\ldots;15$ có bao nhiêu cách chọn ra $7$ số phân biệt gắn vào $7$ đỉnh $A,B,C,M,N,P,Q$ trong hình sao cho cứ $3$ đỉnh thẳng hàng thì có số theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?



**Câu 52 [Tự Luận]:** Có $2n$ ($n$ nguyên dương) kỳ thủ tham gia một giải thi đấu cờ vua, trong đó có hai bạn tên là Hoà và Bình. Ban tổ chức chia các kỳ thủ này thành $n$ cặp để thi đấu với nhau.

***a)*** Tính số cách chia cặp và chứng minh rằng số lượng đó luôn là một số lẻ.

***b)*** Biết rằng xác suất để hai bạn Hoà và Bình thi đấu cùng cặp là $\frac{1}{23}$. Tìm $n$.

**Câu 53:** Xếp ngẫu nhiên ba đôi giày khác nhau (gồm 6 chiếc) thành một hàng ngang. Biết rằng xác suất để xảy ra biến cố "không có chiếc giày trái nào nằm cạnh chiếc giày phải của một đôi khác" bằng $\frac{m}{n}$ tối giản. Giá trị của $m+n$ bằng?

**Câu 54:** Cho một cái hộp chứa $(n+1)$ quả bóng (với $n$ là số nguyên dương), trên đó lần lượt ghi các số nguyên từ $0$ đến $n$, mỗi số đúng một lần. Từ hộp này, ta thực hiện quá trình lấy ra một quả bóng, kiểm tra số ghi trên bóng rồi lại bỏ vào hộp, lặp lại quá trình đó $5$ lần. Gọi $a_n$ là số trường hợp mà $5$ số đã kiểm tra thỏa mãn các điều kiện sau

- Số ghi trên quả bóng lấy ra sau không nhỏ hơn số ghi trên quả bóng lấy ra trước đó.
- Số ghi trên quả bóng lấy ra lần ba lớn hơn số ghi trên quả bóng lấy ra lần thứ nhất đúng 1 đơn vị.

Giá trị của $\sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2}$ bằng?

**Câu 55:** Số cách xóa đi $26$ chữ cái từ chuỗi $30$ chữ cái

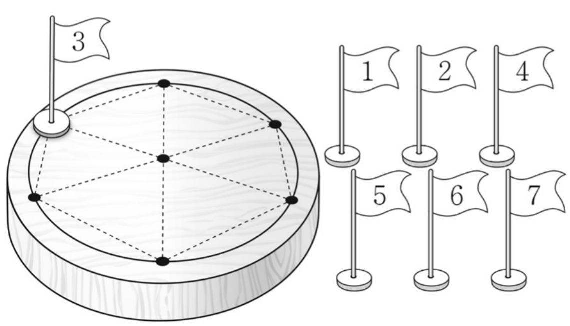
***TSATSATSATSATSATSATSATSATSATSA***

sao cho $4$ chữ cái còn lại tạo thành từ ***TSAT*** theo đúng thứ tự?

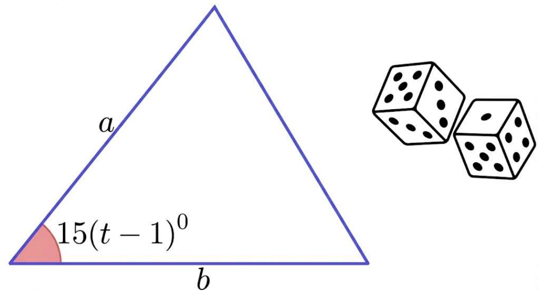
**Câu 56 [Tự Luận]:** Có 3 quả bóng xanh, 4 quả bóng đỏ, 5 quả bóng trắng. Các quả bóng cùng màu là giống hệt nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 12 quả bóng đó trên cùng một hàng ngang sao cho nhóm 3 quả bóng xanh không nằm kề nhau, nhóm 4 quả bóng đỏ không nằm kề nhau và nhóm 5 quả bóng trắng không nằm kề nhau.

**Câu 57 [Tự Luận]:** Cho $n$ đường tròn đôi một cắt nhau và không có ba đường tròn nào cùng đi qua một điểm. Hỏi với $n$ đường tròn như thế thì chia mặt phẳng thành mấy miền?

**Câu 58:** Như hình vẽ, trên một đĩa tròn có vẽ một đường tròn với bán kính bằng $1$. Trên đường tròn này có $6$ điểm chia chu vi thành $6$ phần bằng nhau, và tâm của đường tròn cũng được đánh dấu. Có $7$ lá cờ được đánh số từ $1$ đến $7$. Người ta muốn đặt $7$ lá cờ này vào $7$ điểm nói trên, mỗi điểm đặt đúng một lá. Hãy tìm số cách xếp sao cho trong số $7$ điểm đặt cờ, nếu $3$ điểm bất kỳ tạo thành một tam giác đều có cạnh bằng $1$, thì tổng của ba số ghi trên ba lá cờ tại các đỉnh của tam giác đó phải nhỏ hơn hoặc bằng $12$. (Lưu ý: Các cách xếp trùng nhau qua phép quay được tính là một).



**Câu 59:** Một tam giác ngẫu nhiên là một tam giác được tạo ra bằng cách tung ngẫu nhiên, độc lập một cặp xúc sắc cân đối, đồng chất ba lần liên tiếp. Mỗi lần tung ta đem cộng số chấm trên mặt hai con xúc sắc thu được các số $a, b, t$ lần lượt là độ dài hai cạnh và $15(t-1)^o$ là góc giữa hai cạnh đó. Gọi $S$ là tập hợp các tam giác ngẫu nhiên. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của $S$, tính xác suất để chọn được một tam giác vuông bằng bao nhiêu (làm tròn hàng phần trăm)




**Câu 60:** Ba số $a_1, a_2, a_3$ được chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) từ tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Tiếp theo đó, ba số khác $b_1, b_2, b_3$ được chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) từ tập hợp 997 số còn lại. Gọi $p$ là xác suất để sau khi xoay chiều phù hợp, một viên gạch có kích thước $a_1 \times a_2 \times a_3$ có thể đặt lọt vào bên trong một chiếc hộp có kích thước $b_1 \times b_2 \times b_3$, sao cho các cạnh của viên gạch song song với các cạnh của chiếc hộp. Biết $p$ có dạng $\frac{a}{b}$ tối giản, tính $4a + 8b$.

## B. Phần lời giải

**Câu 1:** Đại Học Bách Khoa Hà Nội tổ chức phỏng vấn 8 học sinh, trong đó có hai học sinh trường $A$, hai học sinh trường $B$, hai học sinh trường $C$ và hai học sinh trường $D$. Để tránh tình trạng gian lận, trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội yêu cầu sắp xếp chỗ như sau:

- Xếp 8 bạn thành 2 hàng ngang, mỗi hàng bốn bạn.
- Hai bạn cùng trường không ngồi cạnh nhau và cũng không ngồi đối diện nhau.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| D | C | B | A |

Số cách mà Đại Học Bách Khoa Hà Nội có thể sắp xếp bằng bao nhiêu?

Solution: ĐGH MnP

**Trả lời: 8064**

Hoán vị lệch (Derangement): Cho một tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Một hoán vị $\sigma$ của $S$, kí hiệu $D_n$, là một hoán vị lệch nếu với mọi phần tử i trong S, ta có: $\sigma(i) \neq i$ (tức là, phần tử ở vị trí thứ $i$ không phải là phần tử $i$ ban đầu). Khi đó ta có: $D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$

**TH1: 1 hàng có 4 trường khác nhau**

Hoán vị 4 bạn ở hàng 1 có $4! = 24$ cách, chọn 4 bạn ở hàng 2.

Số hoán vị lệch là: $4!\times\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$. Hoán vị từng đôi: $(2!)^4 = 16$

$\Rightarrow$ Có $24.9.16 = 3456$ cách

**TH2: Mỗi hàng có 2 cặp học sinh cùng trường**

Chọn 2 trường trong 4 trường để xếp vào hàng 1 có $C_4^2 = 6$ cách.

Sắp xếp vị trí cho các cặp có $2.2 = 4$ cách. Hoán vị từng đôi: $(2!)^4 = 16$

$\Rightarrow$ Có 6.4.16 = 384 cách

**TH3: Mỗi hàng chỉ có 1 cặp học sinh cùng trường**

Chọn 2 cặp học sinh để đưa vào hàng 1, hàng 2 có $4.3 = 12$ cách. Hoán vị từng đôi: $(2!)^4 = 16$

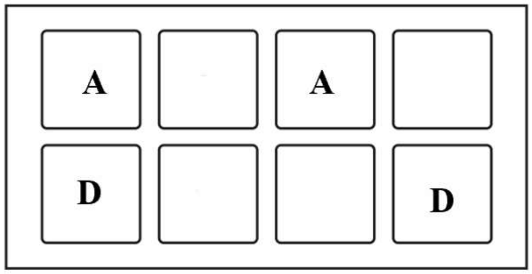
***TH3.1:*** 2 AD đối nhau

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | A | C |
| D | C | D | B |

Có 3 cách xếp AD đối nhau, mỗi cách xếp AD đối nhau có 2 cách xếp 2 bạn B và 2 bạn C

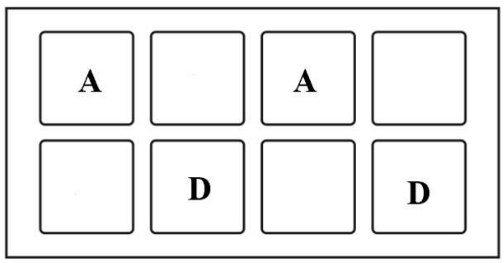
$\Rightarrow$ Có $3.2 = 6$ cách

***TH3.2:*** 1 AD đối nhau, 1 AD không đối nhau




Có 4 cách xếp 1 AD đối nhau, 1 AD không đối nhau, mỗi cách xếp AD đối nhau, 1 AD không đối nhau có 2 cách xếp B, C $\Rightarrow$ Có $4.2 = 8$ cách

***TH3.3:*** Không có cặp AD đối nhau




Có 4 cách xếp không có cặp AD đối nhau, mỗi cách xếp không có cặp AD đối nhau có 2 cách xếp B, C

$\Rightarrow$ Có $4.2 = 8$ cách

Vậy có tất cả: $3456 + 384 + 12.16.\left(8 + 6 + 8\right) = 8064$

**Câu 2:** Khi một con xúc xắc được tung hai lần, gọi lần lượt các số chấm xuất hiện là $a, b$. Khi đó, xác suất để $\left|a-3\right| + \left|b-3\right| = 2$ hoặc $a = b$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

*Solution: ĐGH MnP*

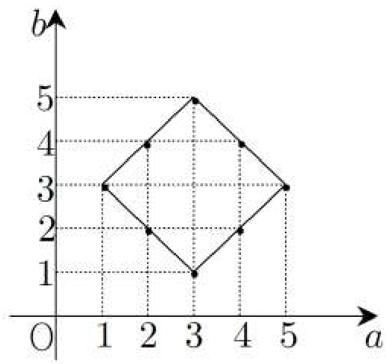
**Trả lời: 0,33**

Gọi biến cố $|a-3| + |b-3| = 2$ là $A$, biến cố $a = b$ là $B$, khi đó xác suất cần tìm là $P(A \cup B)$.

Khi tung một con xúc xắc hai lần, cặp số $(a, b)$ thu được là các cặp có thứ tự.

Các trường hợp để biến cố $A$ xảy ra là $\left(1,3\right), \left(2,2\right), \left(2,4\right), \left(3,1\right), \left(3,5\right), \left(4,2\right), \left(4,4\right), \left(5,3\right)$, nên $P(A) = \dfrac{8}{36}$

(Hình vẽ minh họa các điểm $(a, b)$ thỏa mãn $|a-3| + |b-3| = 2$)




Các trường hợp để biến cố $B$ xảy ra là $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$, nên $P(B)=\frac{6}{36}$

Các trường hợp để biến cố $A\cap B$ xảy ra là $(2,2),(4,4)$, do đó $P(A\cap B)=\frac{2}{36}$

Vì vậy, theo công thức cộng xác suất,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{8}{36}+\frac{6}{36}-\frac{2}{36}=\frac{1}{3}\approx 0,33$

**Câu 3:** Có 6 quả bóng giống nhau, lần lượt ghi các số $1,2,3,4,5,6$. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại 3 lần, mỗi lần lấy 1 quả. Gọi $m$ là giá trị trung bình của hai số lấy ở hai lần đầu, $n$ là giá trị trung bình của ba số lấy được. Tính xác suất để $|m-n|\le\frac{1}{2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

**Solution: ĐGH MnP**

**Trả lời: 0,47**

Lấy không hoàn lại 3 lần từ 6 quả bóng khác nhau, số kết quả có thể (có xét thứ tự) là $A_6^3=120$.

Gọi hai số lấy ở hai lần đầu là $a,b$, số lấy ở lần thứ ba là $c$. Khi đó $m=\frac{a+b}{2},\quad n=\frac{a+b+c}{3}$.

Điều kiện $|m-n|\le\frac{1}{2}$ tương đương

$\left|\frac{a+b+c}{3}-\frac{a+b}{2}\right|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{2c-(a+b)}{6}\right|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow|2c-(a+b)|\le 3.$

Suy ra $-3\le 2c-(a+b)\le 3\Leftrightarrow a+b-3\le 2c\le a+b+3\Leftrightarrow 2c-3\le a+b\le 2c+3.$

Đếm số cặp có thứ tự $(a,b)$ (với $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}, a\ne b$, đồng thời $a\ne c, b\ne c$) thỏa điều kiện theo từng giá trị $c$:

- Khi $c=1: 2c-3\le a+b\le 2c+3\Rightarrow a+b\le 5$. Khi đó $(a,b)=(2,3),(3,2)$, có 2 cách.

- Khi $c=2: 1<a+b\le 7$.

Các cặp $(a,b)$ thỏa là $(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,4),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(4,3)$, có 10 cách.

- Khi $c=3: 3\le a+b\le 9$, có 16 cách.

- Khi $c=4: 5 \le a+b \le 11$, có 16 cách.
- Khi $c=5: 7 \le a+b \le 13$, có 10 cách.
- Khi $c=6: 9 \le a+b \le 15$, có 2 cách.

Vậy số cách thuận lợi là $2+10+16+16+10+2=2\left(2+10+16\right)=56$ .

Do đó xác suất cần tìm là $P=\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$.

**Câu 4:** Trường THPT Thăng Long tổ chức cuộc thi "hoa hướng dương" với thể lệ cuộc thi như sau:

➤ Có tất cả $12$ đội tham gia, mỗi đội có ba thành viên.

➤ Mỗi thành viên trong đội thực hiện chọn ngẫu nhiên một tập con của tập $S=\left\{1,2,3,4,5,6\right\}$.

➤ Đội thắng sẽ là đội chọn được một "hoa hướng dương" (ta nói rằng các tập hợp $A,B,C$ tạo thành một "hoa hướng dương" nếu $A\cap B=B\cap C=C\cap A$).

Xác suất để có đúng mội đội thắng cuộc thi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 0,36**

Xét $1$ phần tử $x$ bất kỳ trong tập $S=\left\{1..6\right\}$.

Mỗi thành viên trong đội (3 người) có quyền chọn hoặc không chọn $x$.

Tổng số cách chọn: $2\times 2\times 2=8$ cách

Để các giao bằng nhau, phần tử $x$ không được phép thuộc đúng $2$ tập hợp do đó $x$ chỉ được phép:

➤ Không thuộc tập nào: $1$ cách
➤ Thuộc đúng $1$ tập: $3$ cách
➤ Thuộc cả $3$ tập: $1$ cách

$\Rightarrow$ Có $5$ cách hợp lệ trong tổng số $8$ cách.

Vì tập $S$ có $6$ phần tử độc lập, xác suất để cả đội tạo thành hoa hướng dương là: $\left(\dfrac{5}{8}\right)^6$

Xác suất để có duy nhất một đội thắng là: $C_{12}^1\cdot\left[\left(\dfrac{5}{8}\right)^6\right]^1\cdot\left[1-\left(\dfrac{5}{8}\right)^6\right]^{11}\approx 0,36$.

**Câu 5 [Tự Luận]:** Trong số tất cả các tập con khác rỗng của tập hợp $T=\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\right\}$, người ta chọn ra hai tập hợp $A$, $B$ sao cho $A\cap B=\varnothing$ và $A\cup B=T$. Tính xác suất để $s(B)\ge 4.s(A)$, trong đó $s(A)$ là tổng các phần tử của $A$, $s(B)$ là tổng các phần tử của $B$.

*Solution: DGH MnP*

Tổng số tập con của tập hợp $T$ là $2^{10}=1024$. Mỗi cặp $(A,B)$ được xác định duy nhất bởi việc chọn tập $A$ (khi đó $B=T\setminus A$). Do $A,B$ khác rỗng nên ta loại trường hợp $A=\varnothing$ và $A=T$.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=2^{10}-2=1022$

Tổng các phần tử của tập $T$ là: $S_T=55$, khi đó điều kiện $s\left(B\right)\ge 4s\left(A\right)$ trở thành:

$$55 - s(A) \geq 4s(A) \Rightarrow 55 \geq 5s(A) \Rightarrow s(A) \leq 11$$

**Bài toán trở thành:** Đếm số tập con $A \neq \varnothing$ sao cho tổng các phần tử $\leq 11$.

Gọi $k$ là số phần tử của tập $A$. Ta xét lần lượt:

**Trường hợp *k* = *1*:** Các tập con là $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{10\} \Rightarrow$ Có 10 tập hợp.

**Trường hợp *k* = *2*:** Gọi $A = \{x, y\}$ với $x < y$. Điều kiện $x + y \leq 11$.

+) $x = 1 \Rightarrow y \in \{2; \ldots; 10\}$: 9 tập.

+) $x = 2 \Rightarrow y \in \{3; \ldots; 9\}$: 7 tập.

+) $x = 3 \Rightarrow y \in \{4; \ldots; 8\}$: 5 tập.

+) $x = 4 \Rightarrow y \in \{5; 6; 7\}$: 3 tập.

+) $x = 5 \Rightarrow y \in \{6\}$: 1 tập.

$\Rightarrow$ Tổng: $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$ tập hợp.

**Trường hợp *k* = *3*:** Gọi $A = \{x, y, z\}$ với $x < y < z$. Điều kiện $x + y + z \leq 11$.

+) $x = 1, y = 2 \Rightarrow z \in \{3; \ldots; 8\}$: 6 tập.

+) $x = 1, y = 3 \Rightarrow z \in \{4; \ldots; 7\}$: 4 tập.

+) $x = 1, y = 4 \Rightarrow z \in \{5; 6\}$: 2 tập.

+) $x = 2, y = 3 \Rightarrow z \in \{4; 5; 6\}$: 3 tập.

+) $x = 2, y = 4 \Rightarrow z = 5$: 1 tập.

$\Rightarrow$ Tổng: $6 + 4 + 2 + 3 + 1 = 16$ tập hợp.

**Trường hợp *k* = *4*:** Chỉ có 2 tập thỏa mãn là $\{1; 2; 3; 4\}$ (tổng 10) và $\{1; 2; 3; 5\}$ (tổng 11)

$\Rightarrow$ Có 2 tập hợp.

Tổng số tập con thỏa mãn là: $10 + 25 + 16 + 2 = 53$. Xác suất cần tìm: $P = \dfrac{53}{1022}$

**Câu 6:** Có $15$ thẻ được đánh số từ $1$ đến $15$. Người ta bỏ tất cả các thẻ này vào $7$ chiếc hộp mất nhãn (hộp không phân biệt, được phép rỗng) sao cho:

➢ Mỗi hộp chứa nhiều nhất $1$ thẻ mang số nguyên tố;

➢ Có ít nhất hai thẻ mang số chính phương nằm cùng một hộp.

Gọi $N$ là số cách phân chia thẻ thỏa mãn đề bài, giá trị $\dfrac{N}{7^4}$ bằng bao nhiêu?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 6517**

Các thẻ từ 1 đến 15 gồm:

- Số nguyên tố: 2, 3, 5, 7, 11, 13 → 6 thẻ.
- Số chính phương: 1, 4, 9 → 3 thẻ.
- Còn lại: 6, 8, 10, 12, 14, 15 → 6 thẻ.

Có 7 hộp không phân biệt, được phép rỗng.

**Điều kiện 1:** Mỗi hộp chứa nhiều nhất 1 thẻ nguyên tố. Vì có 6 nguyên tố, ta xếp chúng vào 6 hộp khác nhau, mỗi hộp 1 thẻ. Do hộp không nhãn nhưng các nguyên tố phân biệt, cách xếp này là duy nhất: 6 hộp mỗi hộp chứa một nguyên tố, 1 hộp còn lại rỗng.

Sau khi xếp nguyên tố, các hộp trở nên phân biệt: 6 hộp được gắn với chính nguyên tố đó, hộp rỗng là duy nhất. Bây giờ xếp 9 thẻ còn lại (3 chính phương + 6 thường) vào 7 hộp này. Mỗi thẻ có 7 lựa chọn, độc lập. Vậy tổng số cách xếp thỏa mãn điều kiện 1 là $7^9$.

**Điều kiện 2:** Có ít nhất hai thẻ chính phương cùng một hộp.
Ta tính phần bù: không có hai chính phương nào cùng hộp.

Số cách chọn 3 hộp khác nhau từ 7 hộp: $C_7^3 = 35$.

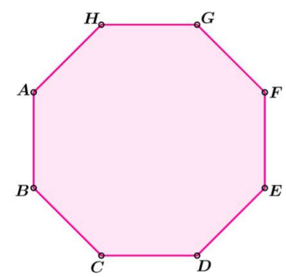
Xếp 3 thẻ chính phương phân biệt vào 3 hộp đó: $3! = 6$ cách.

6 thẻ còn lại mỗi thẻ có 7 cách chọn hộp: $7^6$ cách.

Vậy số cách không có hai chính phương cùng hộp là $35 \times 6 \times 7^6 = 210 \times 7^6$.

Số cách thỏa mãn điều kiện 1, 2 là: $N = 7^9 - 210 \times 7^6 \Rightarrow \dfrac{N}{7^4} = 6517$.

**Câu 7:** Cho một hình bát giác đều có tám đỉnh $A, B, C, D, E, F, G, H$. Người ta gắn ngẫu nhiên vào $8$ đỉnh này $8$ số tự nhiên $1;2;3;4;5;6;7;8$ (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có $3$ đỉnh lấy từ $8$ đỉnh của bát giác đã cho. Gọi $P$ là xác suất để thu được một tam giác vuông với ba số trên ba đỉnh của tam giác đó (theo một thứ tự nào đó) **lập thành một cấp số cộng**. Biết xác suất $P = \dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản). Hãy tính $m + 3n$.




*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 303**

**Xác suất chọn được tam giác vuông**

Tổng số tam giác chọn từ $8$ đỉnh là $C_8^3$.

Vì bát giác đều nội tiếp đường tròn, tam giác nội tiếp đường tròn đó vuông khi và chỉ khi có một cạnh là đường kính. Trong bát giác đều có $4$ cặp đỉnh đối diện $\longrightarrow$ Có $4$ đường kính.

Số tam giác vuông: $4.6 = 24$. Do đó $P(\Delta \perp) = \dfrac{24}{C_8^3}$.

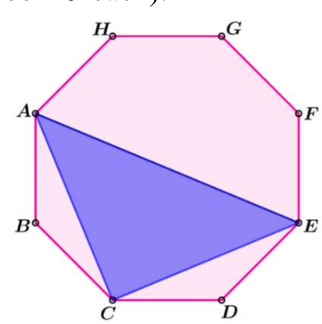
(Vì chọn 1 đường kính: $4$ cách; chọn đỉnh thứ ba (khác $2$ đầu đường kính): còn $6$ cách).

**Xác suất ba số lập thành cấp số cộng**

Ba số phân biệt lập thành CSC $\Leftrightarrow$ có dạng $(a, a+d, a+2d)$ với $d \geq 1$.

Trong $1;2;\ldots;8$, ta xét các trường hợp:

- $d = 1 : a = 1 \longrightarrow 6$ nên có $6$ bộ.
- $d = 2 : a = 1 \longrightarrow 4$ nên có $4$ bộ.
- $d = 3 : a = 1 \longrightarrow 2$ nên có $2$ bộ.



Tổng cộng có $6+4+2=12$ bộ ba số lập thành CSC. Tổng số bộ ba số chọn từ $1;\ldots;8$ là $C_8^3$.

Vậy $P(\text{CSC})=\dfrac{12}{C_8^3}$.

**Ghép hai điều kiện**

Việc "chọn được tam giác vuông" phụ thuộc vào hình học chọn đỉnh, còn "chọn được CSC" phụ thuộc vào các số gắn tại $3$ đỉnh;do gắn số là ngẫu nhiên nên hai sự kiện độc lập.

Vì thế $P=P(\Delta\perp).P(\text{CSC})=\dfrac{24}{C_8^3}.\dfrac{12}{C_8^3}=\dfrac{9}{98}=\dfrac{m}{n}$.

Do đó $m=9,n=98\Rightarrow m+3n=9+3.98=303$. Vì vậy $\boxed{m+3n=303}$.

**Câu 8:** Trong lớp chuyên Toán trường Chuyên Lam Sơn có $36$ bàn học cá nhân (mỗi bàn chỉ được xếp nhiều nhất một bạn), được xếp thành $4$ hàng và $9$ cột (các hàng được đánh số từ trên xuống dưới theo thứ tự từ $1$ đến $4$, các cột được đánh số từ trái qua phải theo thứ tự từ $1$ đến $9$). Biết sĩ số học sinh của lớp là $35$. Sau học kì I, thầy chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Giả sử trước thời điểm chuyển chỗ bạn ngồi ở hàng thứ $m$, cột thứ $n$ và sau khi chuyển chỗ bạn đó sẽ ngồi ở hàng thứ $a_m$, cột thứ $a_n$ thì ta gán cho bạn đó số nguyên là $\left(a_m+a_n\right)-\left(m+n\right)$. Nếu ban đầu bàn trống ở vị trí $\left(1;1\right)$, sau khi chuyển chỗ bàn trống ở vị trí $\left(2;5\right)$ thì tổng của $35$ số nguyên được gán cho $35$ bạn là bao nhiêu?

*Solution: ĐGH MnP*

**Trả lời: -5**

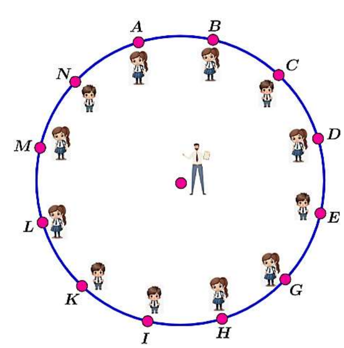
Gọi $T$ là tổng chỉ số (hàng$+$ cột) của tất cả 36 bàn học trong lớp. Vì các bàn học là cố định, nên giá trị $T$ là một hằng số không đổi, bất kể ai ngồi ở đâu.

Tổng tọa độ của 35 học sinh trước khi chuyển chỗ là: $T-(1+1)=T-2$

Tổng tọa độ của 35 học sinh sau khi chuyển chỗ là: $T-(2+5)=T-7$

Tổng của $35$ số nguyên được gán cho 35 bạn là: $S=(T-7)-(T-2)=-5$

**Câu 9:** Một nhóm $12$ người tương ứng với mã số $1;2;\ldots;12$ đứng quanh một vòng tròn cùng tham gia trò chơi. Họ được sắp xếp một cách ngẫu nhiên trên $12$ vị trí $A,B,\ldots,M,N$ của đường tròn, vì thế các số được xếp không theo thứ tự định trước. Người quản trò đứng ở vị trí tâm đường tròn, anh ta bốc ngẫu nhiên $2$ lần, mỗi lần $1$ thẻ và không hoàn lại từ hộp đựng các số $\left\{1;2;3;4;5\right\}$. Nếu người quản trò bốc được số chia hết cho $3$ thì tất cả những người cùng mang số chia hết cho $3$ sẽ tiến về phía tâm đường tròn để tham gia một trò chơi nhỏ và tính điểm, nếu người quản trò bốc đúng thẻ có số chia cho $3$ dư $1$ thì những người mang số chia cho $3$ dư $1$ cũng tiến lên phía trước, luật chơi tương tự nếu người quản trò bốc được số chia cho $3$ dư $2$. Xác suất để sau $2$ lần người quản trò bốc thẻ thì không có hai người kề nhau trên đường tròn được chọn bằng $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $a,b$ nguyên dương và không có ước chung lớn hơn 1), tính $a\times b$.



**Trả lời: 1155**

| Số dư khi chia cho 3 | Nhóm người<br>*(tương ứng với mã số)* | Hộp thẻ |
|---|---|---|
| Dư 0 | 4 người: $\{3;6;9;12\}$ | 1 thẻ: $\{3\}$ |
| Dư 1 | 4 người: $\{1;4;7;10\}$ | 2 thẻ: $\{1;4\}$ |
| Dư 2 | 4 người: $\{2;5;8;11\}$ | 2 thẻ: $\{2;5\}$. |

Một kết quả của phép thử bao gồm 2 yếu tố:

1. Cách sắp xếp 12 người cụ thể vào 12 cái ghế: Có $12!$ cách.
2. Cách quản trò bốc 2 thẻ từ 5 thẻ: Có $C_5^2 = 10$ cách.

$\Rightarrow$ Tổng số kết quả có thể xảy ra: $n(\Omega) = 12! \times 10$

Ta xét các khả năng bốc thẻ để xem có bao nhiêu cách xếp người thỏa mãn.

Dễ thấy nếu quản trò **bốc được hai thẻ khác số dư** thì có 8 người được chọn, mà trong vòng tròn chỉ có tối đa 6 người không kề nhau, do đó trường hợp này loại

Nếu **bốc được 2 thẻ cùng số dư:**

Có 2 cặp thẻ thỏa mãn ( $\{1;4\}$ hoặc $\{2;5\}$ ).

Khi bốc được nhóm này, sẽ có 4 **người được chọn**

Ta cần xếp 12 người vào vòng tròn sao cho 4 **người được chọn** không ngồi cạnh nhau.

- Chọn 4 vị trí ngồi cho người được chọn sao cho không kề nhau: $105$ cách
- Hoán vị 4 **người được chọn** vào 4 vị trí đó: $4!$ cách.
- Hoán vị 8 người còn lại vào 8 vị trí còn lại: $8!$ cách.

$\Rightarrow$ Số cách xếp thỏa mãn: $2 \times 105 \times 4! \times 8!$

Vậy xác xuất cần tìm là: $P = \dfrac{2 \times 105 \times 4! \times 8!}{10 \times 12!} = \dfrac{7}{165} \Rightarrow a \times b = 1155$

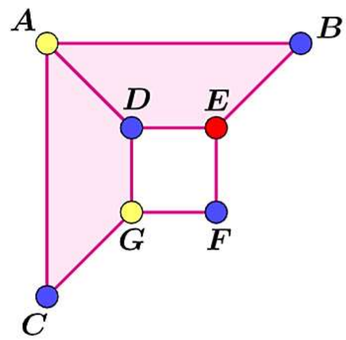
**Tính số cách chọn 4 vị trí không kề nhau trên vòng tròn 12 điểm:**

Cố định một vị trí $X$ bất kỳ trên vòng tròn.

- **TH1:** $X$ **được chọn.** Ta cần chọn tiếp 3 vị trí từ 11 vị trí còn lại sao cho không kề $X$ và không kề nhau. Tương đương chọn 3 vị trí từ 7 khoảng trống của 6 người còn lại: $C_7^3 = 35$ cách.
- **TH2:** $X$ **không được chọn.** Ta cần chọn 4 vị trí từ 11 vị trí còn lại. Tương đương chọn 4 vị trí từ 8 khoảng trống của 7 người còn lại: $C_8^4 = 70$ cách.

$\Rightarrow$ Tổng số cách chọn vị trí: $35 + 70 = 105$ cách.

**Câu 10:** Từ một hệ thống các bóng đèn như hình vẽ, người ta sử dụng $3$ loại màu xanh, đỏ, vàng cho các bóng đèn ở mỗi vị trí $A, B, C, D, E, F, G$.




Hỏi có bao nhiêu cách bố trí các loại bóng đèn sao cho $2$ bóng đèn kề nhau (được nối với nhau đúng một đoạn dây) thì khác màu?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 84**

Để giải quyết bài toán gọn gàng nhất, ta chọn điểm $D$ là trung tâm được tô màu đầu tiên

Tô màu điểm $D$ có **3 cách**, kéo theo ba điểm $A, E, G$ chỉ còn 2 màu để chọn cho mỗi điểm.

Có 2 trường hợp xảy ra khi tô màu ba điểm $A, E, G$

**Trường hợp 1: 3 điểm cùng màu**

Có **2 cách** tô sao cho 3 điểm $A, E, G$ kéo theo 3 điểm còn lại là $B, F, C$ đều nối với 2 điểm cùng màu

Khi đó ba điểm còn lại mỗi điểm có hai cách tô màu, suy ra có tất cả $2 \times (2 \times 2 \times 2) = 16$ cách tô.

**Trường hợp 2: 2 điểm cùng màu, 1 điểm khác màu**

Có $3 \times 2$ **cách** tô cho 3 điểm $A, E, G$ kéo theo 3 điểm còn lại là $B, F, C$ chỉ có 1 điểm được nối với 2 điểm cùng màu, suy ra có tất cả $3 \times 2 \times (1 \times 1 \times 2) = 12$ cách tô

Tổng số cách tô màu là: $3 \times (16 + 12) = 84$ cách.

**Câu 11:** Có $9$ người cùng lên $3$ toa tàu mang số lần lượt $1, 2, 3$. Trong $9$ người này thì có $4$ bạn An, Bình, Cường, Duy. Bạn An sẽ lên cùng toa với ít nhất một trong hai bạn Bình và Cường nhưng nhất định không lên cùng toa với bạn Duy. Đối với bạn Duy , nếu không lên cùng toa với Cường thì Duy sẽ ở riêng $1$ toa. Biết rằng không có toa tàu nào chứa $5$ hành khách, hỏi có bao nhiêu cách để $9$ người lên $3$ toa tàu thỏa mãn tất cả điều kiện trên?

*Solution: ĐGH MnP*

**Trả lời: 1302**

Ta xét hai trường hợp chính dựa vào vị trí của Duy và Cường.

**Trường hợp 1:** $D$ đi cùng $C$

Vì $A$ không đi với $D$ (đang ở cùng $C$ ), nên để thỏa mãn điều kiện, $A$ phải đi cùng $B$.

Khi này tồn tại ba nhóm: Nhóm $CD$ ở cùng 1 toa, $AB$ ở cùng 1 toa, và nhóm còn lại chưa có ai

Ta tiến hành xếp 5 người khác vào 3 nhóm này sao cho không nhóm nào có 5 người.

Tổng số cách xếp 5 người: $3^5 = 243$.

Các cách bị cấm:

- Toa có sẵn 2 người thêm đúng 3 người: $C_5^3 \cdot 2^2 = 40$.
- Toa có sẵn 0 người thêm đúng 5 người: $1$ cách.

Ba toa độc lập, không giao nhau, nên số cách bị cấm: $40 + 40 + 1 = 81$.
Số cách hợp lệ: $243 - 81 = 162$.

Xếp 3 nhóm vào 3 toa tàu: $3! = 6$ cách.

Vậy trường hợp 1 có: $6 \times 162 = 972$ cách.

**Trường hợp 2:** $D$ đi một mình

$D$ chiếm 1 mình 1 toa có **3 cách** chọn, 8 người ( $A, B, C$ +5 người khác) chia vào 2 toa còn lại.

Tổng cách xếp 8 người vào 2 toa: $2^8 = 256$ cách.

Số cách xếp sao cho có toa có 5 người: $2 \times C_8^5 = 112$.

$\Rightarrow$ Số cách xếp hợp lệ là: $256 - 112 = 144$.

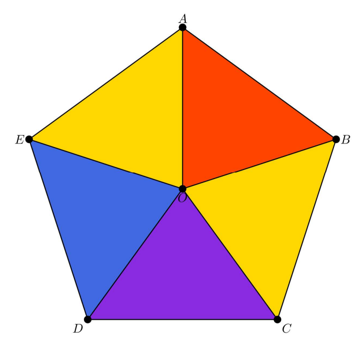
Xét trường hợp $A$ ở 1 toa còn $B, C$ ở toa còn lại

Có: $2 \times \left(2^5 - C_5^4 - C_5^3\right) = 34$

Vậy trường hợp 2 có: $3 \times (144 - 34) = 330$ cách

Tổng số cách thỏa ycbt là: $972 + 330 = 1302$.

**Câu 12:** Tại một hội chợ vào những ngày xuân, để trang trí một tấm banner hình ngũ giác đều $ABCDE$ cạnh bằng 1 mét, người ta cần chọn và tô màu cho $5$ tam giác cân có cùng đỉnh $O$ (tham khảo hình vẽ) từ $4$ màu xanh, đỏ, vàng, tím. Tiếp theo họ cần chọn $6$ số tự nhiên phân biệt từ tập $1; 2; 3; \ldots; 25$ để lắp vào $6$ vị trí đỉnh (gồm $5$ đỉnh ngũ giác và tâm $O$ của ngũ giác). Yêu cầu đặt ra là hai tam giác có chung đúng một cạnh thì khác màu, đồng thời các số liên tiếp trên $5$ đỉnh ngũ giác theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với tổng của cấp số cộng này là số nằm ở tâm $O$ của ngũ giác (một đỉnh bất kì đều có thể bắt đầu của một cấp số cộng nào đó). Hỏi có bao nhiêu cách tô màu, chọn số cho banner thỏa mãn tất cả điều kiện trên?




*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 9600**

**Ta chứng minh một bổ đề qua bài toán phụ sau:**

Cho một đa giác có $n$ đỉnh cố định ( $n \geq 3$ ). Các đỉnh được đánh số thứ tự lần lượt là $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Có $k$ màu khác nhau. Hãy tính số cách tô màu cho các đỉnh $x_i$ sao cho mỗi đỉnh được tô đúng 1 màu và hai đỉnh kề nhau (nối bằng một cạnh) phải khác màu nhau.

***Chứng minh***

Gọi $a_n$ là số cách tô màu thỏa mãn yêu cầu cho đa giác $n$ đỉnh.

Ta "cắt" cạnh nối giữa $x_n$ và $x_1$.

Lúc này đa giác trở thành một đường gấp khúc (hàng dọc) gồm các đỉnh: $x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_n$

Dễ thấy tổng số cách tô cho hàng dọc là: $P_n = k(k-1)^{n-1}$.

Nối lại phần đã cắt ta thấy trong $P_n$ cách tô hàng dọc ở trên, mối quan hệ giữa đỉnh đầu $x_1$ và đỉnh cuối $x_n$ có thể rơi vào 1 trong 2 trường hợp

**Trường hợp 1:** $x_1 \neq x_n$ có $a_n$ cách tô.

**Trường hợp 2:** $x_1 \equiv x_n$

Khi "chập" $x_1$ và $x_n$ lại, đa giác $n$ đỉnh bị thu nhỏ thành đa giác $n-1$ đỉnh ($x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$).

Do đó, có $a_{n-1}$ cách tô.

Tổng số cách tô hàng dọc bằng tổng của hai trường hợp trên: $P_n = a_n + a_{n-1}$

$\Leftrightarrow k(k-1)^{n-1} = a_n + a_{n-1}$

Ta có: $a_n + a_{n-1} = [(k-1)+1](k-1)^{n-1} \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} = (k-1)^n + (k-1)^{n-1}$

$\Leftrightarrow a_n - (k-1)^n = -\left[a_{n-1} - (k-1)^{n-1}\right]$

Đặt dãy số phụ, ta tìm được công thức tổng quát:

| |
|---|
| $a_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ đây cũng là số cách tô màu cho đa giác $n$ đỉnh ($x_1, \ldots, x_n$) với $k$ màu |

***Quay lại bài toán ban đầu***

Nhận thấy rằng, 5 tam giác cân cùng đỉnh $O$ có cấu trúc tương tự với 5 cạnh của một đa giác, do đó số cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán là (5 cạnh, 4 màu): $(4-1)^5 + (-1)^5(4-1) = 240$ cách

Tiếp đó ta xử lý điều kiện điền số

Gọi 5 số tự nhiên trên các đỉnh ngũ giác theo thứ tự là một cấp số cộng:

$$m-2d;\ m-d;\ m;\ m+d;\ m+2d \quad (m, d \in \mathbb{N}^*).$$

Theo đề bài, tổng 5 số này bằng số ở tâm $O$, nên: $O = 5m$ mà $O \leq 25 \Rightarrow m \leq 5$.

Ta có: $m - 2d \geq 1 \Rightarrow 2d \leq m-1$.

Do $2d \leq m-1$ và $d \geq 1$, ta chỉ cần xét $m$ từ 3 đến 5:

Với $m = 3$: $2d \leq 2 \Rightarrow d = 1$.

- Bộ số: $\{1;2;3;4;5\}$. Tâm $O = 15$.

Với $m = 4$: $2d \leq 3 \Rightarrow d = 1$.

- Bộ số: $\{2;3;4;5;6\}$. Tâm $O = 20$.

Với $m = 5$: $2d \leq 4 \Rightarrow d \in \{1;2\}$.

- $d = 1$: Bộ số $\{3;4;5;6;7\}$. Tâm $O = 25$.
- $d = 2$: Bộ số $\{1;3;5;7;9\}$. Tâm $O = 25$.

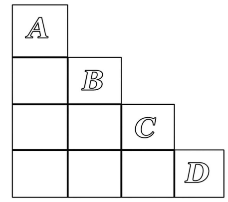
$\Rightarrow$ Có đúng 4 bộ số thỏa mãn.

Có 5 cách đặt số đầu tiên, và 2 chiều điền số suy ra có tất cả: $4 \times 2 \times 5 = 40$ cách điền số.

Vậy, số cách tô màu và chọn số cho banner thỏa mãn tất cả điều kiện trên là: $40 \times 240 = 9600$ cách

*Ngoài ra ở phần điền số bạn đọc hoàn toàn có thể tư duy theo hướng số ở tâm O phải chia hết cho 5*

**Câu 13:** Từ tập hợp số tự nhiên $1;2;3;\ldots;25;26$, cần chọn ra $10$ số phân biệt để gán vào $10$ ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi $T$ là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô $A,B,C,D$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị $\dfrac{T}{4}$ bằng bao nhiêu?




**Solution: DGH MnP**

**Trả lời: 6118**

Gọi 10 số được chọn và sắp xếp theo thứ tự tăng dần là $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$.

Khi đó các điểm $A,B,C,D$ lần lượt được điền các số $a_1,a_3,a_6,a_{10}$

Yêu cầu $A,B,C,D$ lập thành cấp số cộng nên: $a_3 = a_1 + d$, $a_6 = a_1 + 2d$, $a_{10} = a_1 + 3d$ $(d \in \mathbb{N})$

Như vậy ta cần chọn thêm các số nằm giữa các mốc này:

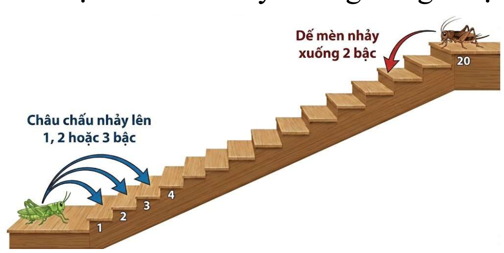
- Khoảng $(a_1,a_3)$: Chọn 1 số ($a_2$). Số cách là $C_{d-1}^1$.
- Khoảng $(a_3,a_6)$: Chọn 2 số ($a_4,a_5$). Số cách là $C_{d-1}^2$.
- Khoảng $(a_6,a_{10})$: Chọn 3 số ($a_7,a_8,a_9$). Số cách là $C_{d-1}^3$.

Điều kiện để tồn tại các số này là $d-1 \ge 3 \Rightarrow d \ge 4$. Với mỗi $d$, số cách chọn $a_1$ thỏa mãn $a_{10} \le 26 \Leftrightarrow a_1 \le 26-3d$ là $26-3d$, mặt khác $a_1 \ge 1 \Leftrightarrow 26-3d \ge 1 \Rightarrow d \le 8$.

Tổng số cách chọn $T$ là: $T = \sum\limits_4^8 (26-3d)\times\left(C_{d-1}^1 \cdot C_{d-1}^2 \cdot C_{d-1}^3\right) = 24472 \Rightarrow \dfrac{T}{4} = 6118$

**Câu 14:** Một cầu thang rất dài được đánh số các bậc lần lượt là $0,1,2,3,\ldots$ theo thứ tự từ thấp lên cao

- Châu chấu xuất phát ở bậc 0; mỗi lượt nó nhảy lên 1 bậc, 2 bậc hoặc 3 bậc.
- Dế xuất phát ở bậc 20; mỗi lượt dế luôn nhảy xuống đúng 2 bậc.




Hai con bắt đầu nhảy cùng lúc, cứ 10 giây nhảy một lượt. Biết rằng sau 10 lượt đầu tiên (khi dế nhảy hết bậc cầu thang) thì châu chấu có $N$ cách nhảy sao cho hai con gặp nhau tại một bậc cầu thang nào đó, hãy tính giá trị $\dfrac{N}{9}$.

**Solution: DGH MnP**

**Trả lời: 1647**

Gọi $k$ là số lượt nhảy để hai con gặp nhau $(1 \le k \le 10)$.

- Vị trí của Dế sau $k$ lượt: $20-2k$.
- Vị trí của Châu chấu sau $k$ lượt là $S_k$.

Để hai con gặp nhau: $S_k = 20 - 2k$.

Vì mỗi bước Châu chấu nhảy từ 1 đến 3 bậc, ta có điều kiện: $k \le S_k \le 3k \Rightarrow k \le 20 - 2k \le 3k$

Giải bất phương trình ta được: $4 \le k \le 6$.

Ta xét 3 trường hợp có thể xảy ra.

*Lưu ý: sau khi gặp nhau, Châu chấu vẫn tiếp tục nhảy cho đến hết 10 lượt, các bước sau đó tùy ý (mỗi bước có 3 lựa chọn).*

**Trường hợp 1:** Gặp ở lượt thứ 4 ($k = 4$)

Vị trí gặp: $20 - 2 \times 4 = 12$.

Số cách để Châu chấu nhảy đến bậc 12 trong 4 lượt: Chỉ có 1 cách duy nhất là bộ $\{3;3;3;3\}$.

Số cách nhảy cho 6 lượt còn lại: $3^6 \Rightarrow$ Số cách trường hợp 1: $1 \times 3^6$.

**Trường hợp 2:** Gặp ở lượt thứ 5 **(**$k = 5$**)**

Vị trí gặp: $20 - 2(5) = 10$.

Số cách để tổng 5 bước bằng 10:

$\{2;2;2;2;2\}: \dfrac{5!}{5!} = 1$ cách, $\{3;2;2;2;1\}: \dfrac{5!}{3!} = 20$ cách, $\{3;3;2;1;1\}: \dfrac{5!}{2! \times 2!} = 30$ cách.

Tổng cộng: $1 + 20 + 30 = 51$ cách.

Số cách nhảy cho 5 lượt còn lại: $3^5 \Rightarrow$ Số cách trường hợp 2: $51 \times 3^5$.

**Trường hợp 3:** Gặp ở lượt thứ 6 ($k = 6$)

Vị trí gặp: $20 - 2(6) = 8$.

Số cách để tổng 6 bước bằng 8:

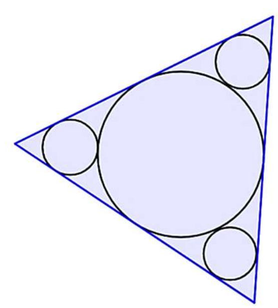
$\{3;1;1;1;1;1\}: \dfrac{6!}{5!} = 6$ cách, $\{2;2;1;1;1;1\}$ $\dfrac{6!}{2! \times 4!} = 15$ cách.

Tổng cộng: $6 + 15 = 21$ cách.

Số cách nhảy cho 4 lượt còn lại: $3^4 \Rightarrow$ Số cách trường hợp 3: $21 \times 3^4$.

Vậy, $N = 1 \times 3^6 + 51 \times 3^5 + 21 \times 3^4 \Rightarrow \dfrac{N}{9} = 1647$

**Câu 15:** Cho tập $X = \{1;\ 2;\ \ldots;\ 9\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt, rồi đặt 1 số đặt vào vòng tròn lớn, 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ. Gọi $P$ là xác suất để **tổng các số tự nhiên trên hai vòng nhỏ bất kỳ luôn bé hơn số tự nhiên ở vòng lớn chính giữa**, đồng thời **tổng cả ba số tự nhiên trên vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số tự nhiên ở vòng tròn lớn** (biết rằng hai cách xếp được gọi là giống nhau khi xoay tam giác quanh tâm đường tròn lớn một góc nào đó thì được các số giống nhau nằm cùng vị trí). Giá trị $250\,236P$ bằng bao nhiêu?



***Solution: Collected***

**Trả lời: 993**

Gọi ba số tự nhiên nhỏ theo thứ tự $a \le b \le c$, số $L$ nằm ở đường tròn chính giữa. Điều kiện $\boxed{b+c<L<a+b+c}$.

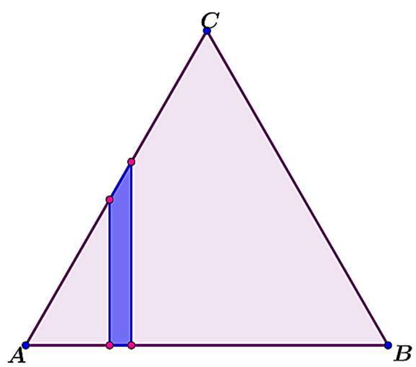
- $L=9$ : cần $b+c \le 8$ và $a+b+c \ge 10 \Rightarrow$ duy nhất $\left(a;\ b;\ c\right)=\left(2;\ 3;\ 5\right)$.
- $L=8$ : cần $b+c \le 7$ và $a+b+c \ge 9 \Rightarrow$ duy nhất $\left(a;\ b;\ c\right)=\left(2;\ 3;\ 4\right)$.
- $L \le 7$ : có $b+c \le 6 \Rightarrow a+b+c \le 1+2+4=7<L \Rightarrow$ Không có bộ $\left(a;\ b;\ c\right)$ nào thỏa mãn.

Vậy có 2 bộ hợp lệ: $\left(2;\ 3;\ 4;\ 8\right)$ và $\left(2;\ 3;\ 5;\ 9\right)$.

Số phần tử không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=9\times C_8^3$ (9 cách chọn số cho đường tròn chính giữa và $C_8^3$ cách chọn số cho 4 đường tròn nhỏ).

Xác suất cần tính là $P=\dfrac{2}{9\times C_8^3}=\dfrac{1}{252} \Rightarrow \boxed{250\,236P=993}$.

**Câu 16:** Cho tam giác đều $ABC$. Trên cạnh $AB$, lấy $59$ điểm phân biệt (không trùng $A$, $B$) chia $AB$ ra làm $60$ đoạn bằng nhau, đánh dấu $59$ điểm vừa được chọn. Trên cạnh $AC$, lấy $44$ điểm phân biệt (không trùng $A$, $C$) chia $AC$ chia ra làm $45$ đoạn bằng nhau. Trên cạnh $BC$, lấy $39$ điểm phân biệt (không trùng $B$, $C$) chia $BC$ ra làm $40$ đoạn bằng nhau. Chọn ngẫu nhiên $2$ điểm phân biệt trong các điểm đã lấy trên hai cạnh $AC$, $BC$ (trên cùng một cạnh hoặc trên hai cạnh khác nhau).




Gọi $H$, $K$ là hình chiếu vuông góc của hai điểm đó lên đường thẳng $AB$. Biết xác suất để đoạn $HK$ có hai đầu mút đều là các điểm đã được đánh dấu trên $AB$ bằng $\dfrac{m}{n}$ (trong đó $m$, $n$ là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ tối giản), tính giá trị $m+n$.

**Solution: ĐGH MnP**

**Trả lời:**

Tổng số điểm trên hai cạnh $AC$ và $BC$ là: $44+39=83$ điểm.

Chọn ngẫu nhiên 2 điểm từ 83 điểm này. Số phần tử của không gian mẫu là: $\left|\Omega\right|=C_{83}^2=3403$

Gọi $a$ là độ dài cạnh tam giác đều $ABC$.

Các điểm được đánh dấu trên $AB$ chia $AB$ làm 60 đoạn, nên vị trí các điểm này cách $A$ một khoảng: $d(A,H)=\dfrac{k}{60}a$ (với $k\in\{1,2,...,59\}$).

Để hình chiếu của một điểm lên $AB$ trùng với điểm đã đánh dấu trên $AB$, ta xét từng cạnh:

**Trên cạnh *AC*:**

Gọi $M$ là điểm thứ $i$ trên $AC$ ($1\le i\le 44$). Khoảng cách $AM=\dfrac{i}{45}a$.

Hình chiếu $H$ của $M$ lên $AB$ có $AH=AM\cdot\cos(60^{\circ})=\dfrac{i}{90}a$.

Để $H$ trùng với điểm chia trên $AB$: $\dfrac{i}{90}=\dfrac{k}{60}\Leftrightarrow 2i=3k\Rightarrow i\,\vdots\,3$

Với $1\le i\le 44$, số giá trị $i$ chia hết cho 3 là: $\left\lfloor\dfrac{44}{3}\right\rfloor=14$ điểm.

**Trên cạnh *BC*:**

Gọi $N$ là điểm thứ $j$ trên $BC$ ($1\le j\le 39$). Khoảng cách $BN=\dfrac{j}{40}a$.

Hình chiếu $K$ của $N$ lên $AB$ cách $B$ một đoạn $BK=BN\cdot\cos(60^{\circ})=\dfrac{j}{80}a$.

Khoảng cách từ $A$ đến $K$ là: $AK=AB-BK=a(1-\dfrac{j}{80})$.

Để $K$ trùng với điểm chia trên $AB$: $1-\dfrac{j}{80}=\dfrac{k}{60}\Leftrightarrow 3j+4k=240\Rightarrow 3j\,\vdots\,4\Rightarrow j\,\vdots\,4$

Với $1\le j\le 39$, số giá trị $j$ chia hết cho 4 là: $\left\lfloor\dfrac{39}{4}\right\rfloor=9$ điểm.

Số kết quả thuận lợi: $C_{14+9}^{2}=253$. Xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{253}{3403}\Rightarrow m+n=3656$

**Câu 17:** Có $10$ chiếc túi rỗng được xếp thành một hàng và $8$ quả bóng giống nhau. Có bao nhiêu cách phân chia $8$ quả bóng vào các túi sao cho thoả mãn tất cả các điều kiện sau:

- Số bóng trong mỗi túi không vượt quá $2$.
- Số túi chứa đúng $1$ quả bóng là $4$ hoặc $6$ túi.
- Các túi nằm liền kề với túi chứa $2$ quả bóng thì không chứa quả bóng nào.

*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 262**

Gọi $x,y,z$ lần lượt là số túi chứa $0,1,2$ quả bóng. Ta có hệ điều kiện: $\begin{cases}x+y+z=10\\ y+2z=8\\ y\in\{4;6\}\end{cases}$

Bài toán chia bóng vào 10 túi phân biệt tương đương với việc tìm số hoán vị của dãy số gồm $x$ số 0, $y$ số 1 và $z$ số 2. Điều kiện "các túi kề túi 2 bóng là túi rỗng" $\Leftrightarrow$ Các túi 2 bóng nằm tách biệt trong các khoảng trống tạo bởi túi rỗng. Xét 2 trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** $y=4 \Rightarrow z=2, x=4$.

- Sắp xếp 4 số 0 thành hàng ngang, tạo ra 5 khoảng trống .

_ 0 _ 0 _ 0 _ 0 _

- Chọn 2 trong 5 khoảng trống để đặt 2 số 2 có $C_5^2=10$ cách.
- Xếp 4 số 1 vào 3 khoảng trống còn lại có $C_{4+3-1}^{3-1}=15$ cách.

$\Rightarrow$ Tổng: $10\times 15=150$ cách.

**Trường hợp 2:** $y=6 \Rightarrow z=1, x=3$.

- Sắp xếp 3 số 0 thành hàng ngang, tạo ra 4 khoảng trống.
- Chọn 1 trong 4 khoảng trống để đặt 1 số 2 có $C_4^1=4$ cách.
- Xếp 6 số 1 vào 3 khoảng trống còn lại có $C_{6+3-1}^{3-1}=28$ cách.

$\Rightarrow$ Tổng: $4\times 28=112$ cách.

Tổng số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $150+112=262$ cách.

**Câu 18:** Cho một bảng ô vuông kích thước $2\times 10$ (xem hình dưới).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Hai ô vuông gọi là kề nhau nếu có chung một cạnh. Người ta tô màu các ô vuông bởi hai màu đen và đỏ sao cho mỗi ô được tô bởi đúng một màu. Tính số cách tô mà có đúng 3 ô được tô màu đỏ và không có hai ô cạnh nhau được tô cùng màu đỏ.

***Solution: ĐGH MnP***

**Trả lời: 688**

***Bổ đề:*** Số cách chọn $k$ ô từ một hàng có $n$ ô sao cho không có hai ô nào kề nhau là $C_{n-k+1}^{k}$

*Chứng minh.* Ta cần chọn $k$ ô từ $n$ ô sao cho không có 2 ô nào kề nhau.
Ta xếp $n-k$ ô không được chọn thành một hàng ngang, sau đó chọn $k$ khoảng trống từ $n-k+1$ khoảng trống để chèn $k$ ô vào là xong bài

***Quay lại bài toán ban đầu***

**Trường hợp 1:** Cả 3 ô đỏ nằm cùng trên một hàng có $2\times C_{10-3+1}^{3}=112$ cách

**Trường hợp 2:** Có 2 ô đỏ ở một hàng và 1 ô đỏ ở hàng còn lại

Chọn vị trí cho 2 ô đỏ ở một hàng có: $C_{10-2+1}^{2}=36$ cách

Ô đỏ ở hàng còn lại phải nằm khác cột với 2 ô đỏ hàng trên nên số cách chọn vị trí là: 8 cách
Suy ra, trường hợp này có $36\times 8\times 2=576$ cách

Tổng số cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $112+576=688$ cách

**Câu 19 [Tự Luận]:** Cho một bảng ô vuông $3\times 3$ như hình vẽ bên. Điền ngẫu nhiên $9$ số thuộc tập hợp $X=\left\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\right\}$ vào $9$ ô vuông trong bảng (mỗi ô điền một số khác nhau). Tính xác suất của biến cố “mỗi hàng, mỗi cột bất kì trong bảng đều có ít nhất một số lẻ”.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

**Solution: Collected**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = A_{10}^{9}$.

Gọi $A$ là biến cố theo yêu cầu bài toán thì $\overline{A}$: "tồn tại một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn".

**TH1:** $9$ số được điền có $4$ số chẵn, $5$ số lẻ: có $5$ cách chọn.
Khi đó có đúng $1$ hàng hoặc đúng $1$ cột chứa toàn số chẵn.
Chọn một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn: có $6$ cách.
Chọn ba số chẵn trong $4$ số chẵn và xếp vào hàng (hoặc cột) được chọn: có $A_4^3$ cách.
Xếp $6$ số còn lại vào $6$ ô còn lại: có $6!$ cách. Do đó **TH1** có $5.6.A_4^3.6!$ cách điền.

**TH2:** $9$ số được điền có $5$ số chẵn, $4$ số lẻ: có $5$ cách chọn.
Khi đó không quá $1$ hàng và không quá $1$ cột chứa toàn số chẵn.
Số cách xếp sao cho có $1$ hàng toàn số chẵn là $3.A_5^3.6!$.
Số cách xếp sao cho có $1$ cột toàn số chẵn là $3.A_5^3.6!$.
Số cách xếp sao cho có $1$ hàng và $1$ cột toàn số chẵn là $3.3.5!.4!$.
Tóm lại **TH2** có $5.\left(2.3.A_5^3.6!-3.3.5!.4!\right)$ cách điền.

Do đó $P(\overline{A}) = \dfrac{5.6.A_4^3.6!+5.\left(2.3.A_5^3.6!-3.3.5!.4!\right)}{A_{10}^9} = \dfrac{13}{28} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{15}{28}$.

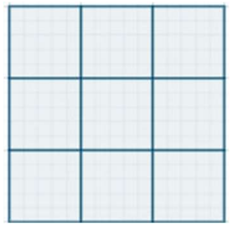
**Câu 20:** Cho dãy gồm $2023$ số được sắp thứ tự tăng dần như sau: $C_4^4; C_5^4; ...; C_{2025}^4; C_{2026}^4$. Lấy ngẫu nhiên ba số hạng liên tiếp từ dãy số đã cho, biết xác suất để tổng của ba số này là một số lẻ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị $a + b$.

**Solution: ĐGH MnP**

**Trả lời: 3032**

Tính tuần hoàn chẵn lẻ của dãy theo quy luật 8 số liên tiếp L - L - L - L - C - C - C - C.
Xét bộ 3 liên tiếp trong 1 chu kỳ, nhận thấy có 4 bộ có tổng lẻ
Từ 2023 số hạng, số bộ 3 liên tiếp là: $2023 - 2 = 2021$ bộ.
Ta có: $2021 = 252 \times 8 + 5$, suy ra có 252 chu kỳ $\times$ $4 = 1008$ bộ số.
5 bộ dư đầu tiên (xét L-L-L-L-C-C): có **3** bộ tổng lẻ (2 bộ LLL và 1 bộ LCC).
$\Rightarrow$ Có tất cả: $1008 + 3 = 1011$ bộ 3 số có tổng lẻ.
Xác suất cần tìm $P = \dfrac{1011}{2021} \Rightarrow a + b = 1011 + 2021 = 3032$.

**Câu 21:** Cho tập hợp $S$ gồm 15 số tự nhiên: $S = \left\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 16;\ 18\right\}$. Chọn ngẫu nhiên 9 số phân biệt từ tập $S$ và điền vào 9 ô vuông của một bảng $3 \times 3$ như hình vẽ. Xác suất để các số trên cả hai đường chéo chính đều tạo thành cấp số nhân bằng $\dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản), tính giá trị $a^2 + b$ và làm tròn đến hàng đơn vị.



Solution: Collected

**Trả lời: 9010**

Gọi số ở ô giữa là $b$. Mỗi đường chéo là cấp số nhân $\left(x, b, z\right) \Rightarrow xz = b^2$.

Trong $S = \left\{1;\ 2;\ \ldots;\ 13;\ 16;\ 18\right\}$ các cặp có tích $b^2$ :

- $b = 4 : \left(1;\ 16\right), \left(2;\ 8\right) \Rightarrow$ chọn được 1 cặp đôi rời nhau.
- $b = 6 : \left(2;\ 18\right), \left(3;\ 12\right), \left(4;\ 9\right) \Rightarrow$ có 3 cách chọn hai cặp rời nhau.
- $b = 12\ : \left(8;\ 18\right), \left(9;\ 16\right) \Rightarrow 1$ cách.

$\Rightarrow$ Tổng chọn hai cặp rời nhau cho hai đường chéo: $1 + 3 + 1 = 5$.

Với mỗi lựa chọn: gán hai cặp cho hai chéo và chọn thứ tự tăng/giảm: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cách; 4 ô còn lại điền tùy ý từ 10 số còn lại: $A_{10}^4 = \dfrac{10!}{6!}$ cách.

Số trường hợp thuận lợi $n\left(A\right) = 5 \cdot 8 \cdot A_{10}^4$. Không gian mẫu $n\left(\Omega\right) = A_{15}^9 = \dfrac{15!}{6!}$.

$$P = \frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)} = \frac{40 \cdot 10!/6!}{15!/6!} = \frac{1}{9009} \Rightarrow a = 1,\ b = 9009. \text{ Do đó } \boxed{a^2 + b = 9010}.$$

**Câu 22:** Lớp mẫu giáo có $10$ em bé, các bé đứng thành vòng tròn và cách đều nhau, đứng ở tâm vòng tròn là cô giáo. Mỗi bé cầm hai cờ, một xanh một đỏ trên mỗi tay. Cô giáo bảo “giơ lên cao một cờ”, các bé giơ ngẫu nhiên một cờ. Gọi $a$ là xác suất để không có $4$ cờ nào cùng màu được giơ lên ở $4$ vị trí mà $4$ vị trí ấy là $4$ đỉnh của một hình chữ nhật. Giá trị của $\dfrac{2200}{a}$ bằng bao nhiêu?

Solution: ĐGH MnP

**Trả lời: 6400**

Mỗi em bé có 2 cách chọn màu cờ (Xanh hoặc Đỏ). Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 2^{10} = 1024$

10 vị trí chia thành 5 cặp đối xứng qua tâm (5 đường kính). Một hình chữ nhật được tạo bởi 2 đường kính bất kỳ. Xét trạng thái màu ở 2 đầu mút của một đường kính:

- **Trạng thái XX:** Cả 2 Xanh (1 cách).
- **Trạng thái ĐĐ:** Cả 2 Đỏ (1 cách).
- **Trạng thái Khác:** 1 Xanh, 1 Đỏ (2 cách).

Để không có hình chữ nhật 4 đỉnh cùng màu, ta cần: Số đường kính XX $\leq 1$ và Số đường kính ĐĐ $\leq 1$

Các trường hợp thuận lợi cho 5 đường kính:

- **TH1:** 0 đường XX, 0 đường ĐĐ (5 đường Khác): $2^5 = 32$ cách.
- **TH2:** 1 đường XX, 0 đường ĐĐ (4 đường Khác): $C_5^1 \cdot 1 \cdot 2^4 = 80$ cách.
- **TH3:** 0 đường XX, 1 đường ĐĐ (4 đường Khác): $C_5^1 \cdot 1 \cdot 2^4 = 80$ cách.
- **TH4:** 1 đường XX, 1 đường ĐĐ (3 đường Khác): $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^3 = 160$ cách.

Tổng kết quả thuận lợi: $n(A) = 32 + 80 + 80 + 160 = 352$.

Xác suất cần tìm: $a = \dfrac{352}{1024} = \dfrac{11}{32}$.Giá trị cần tìm: $\dfrac{2200}{a} = 6400$.

**Câu 23 [Tự Luận]:** Cho các số nguyên từ $1$ tới $25$. Mỗi số nguyên trên được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Có bao nhiêu cách tô thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:
***i)*** Số $5$ được tô màu đỏ.
***ii)*** Nếu hai số $x, y$ khác màu và $x + y \le 25$ thì số $x + y$ được tô màu xanh.
***iii)*** Nếu hai số $x, y$ khác màu và $xy \le 25$ thì số $xy$ được tô màu đỏ.

*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 3**

Gọi $X$ là tập các số Xanh, $Đ$ là tập các số Đỏ.

Ta xét 2 trường hợp:

**Trường hợp 1:** $X = \varnothing$ (Không có số Xanh)

Tất cả 25 số đều màu Đỏ. Mọi điều kiện tự động thỏa mãn $\Rightarrow$ 1 cách.

**Trường hợp 2:** $X \ne \varnothing$ (Tồn tại số Xanh)

Lấy $x \in X$. Nếu $1 \in Đ \xrightarrow{(iii)} 1 \times x \Rightarrow x \in Đ$ (Mâu thuẫn).

$\Rightarrow$ 1 bắt buộc là màu Xanh.

Với $1 \in X, 5 \in Đ \xrightarrow{(ii)} 6 \in X \xrightarrow{(ii)} 11 \in X \ldots \Rightarrow$ Tất cả các số chia 5 dư 1 đều thuộc $X$.

Tương tự:

- Nếu $2 \in Đ$: Vì $1 \in X \Rightarrow 1 + 2 = 3 \in X$. Khi đó cặp $(3, 2)$ khác màu $\Rightarrow 3 \times 2 = 6 \in Đ$.

  (Mâu thuẫn với $6 \in X$). Vậy $2 \in X$, khi này tất cả các số chia 5 dư 2 đều thuộc $X$.
- Nếu $3 \in Đ$: Vì $1 \in X \Rightarrow 1 + 3 = 4 \in X$. Khi đó cặp $(4, 3)$ khác màu $\Rightarrow 4 \times 3 = 12 \in Đ$.

  (Mâu thuẫn, vì $12$ chia 5 dư 2, mà ta vừa chứng minh $2 \in X \Rightarrow 12 \in X$).
  Vậy $3 \in X$, khi này tất cả các số chia 5 dư 3 đều thuộc $X$
- Nếu $4 \in Đ$: Vì $1 \in X \Rightarrow 1 + 4 = 5 \in X$. (Mâu thuẫn với giả thiết $5 \in Đ$).

  Vậy $4 \in X$. khi này tất cả các số chia 5 dư 4 đều thuộc $X$

Suy ra, tất cả các số không chia hết cho 5 đều được tô màu Xanh.

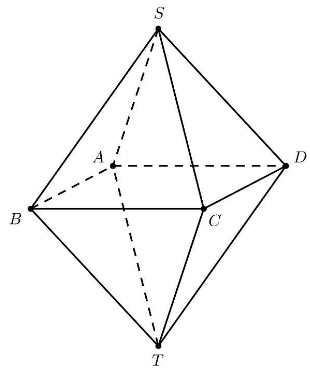
Với các số chia hết cho 5 ta có: $5 \in Đ \xrightarrow{(iii)} 5k \in Đ \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$

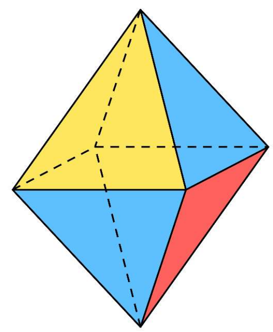
Dễ thấy, riêng số 25 có thể tùy ý chọn màu **Xanh** hoặc **Đỏ**.

$\Rightarrow$ Có 2 cách tô trong trường hợp này.

Số cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $1+2=3$ cách

**Câu 24:** Một đèn lồng đón năm mới được thiết kế theo hình bát diện đều (ta có thể hình dung hình bát diện đều là hai hình chóp tứ giác đều có tất cả cạnh bằng nhau $S.ABCD$ và $T.ABCD$ sử dụng chung một mặt đáy).

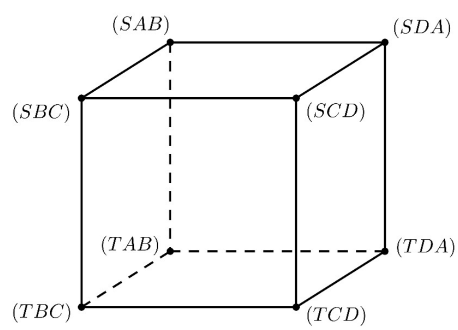


Nghệ nhân đã thiết kế sẵn $12$ tấm bìa cứng là các tam giác bằng nhau gồm $3$ màu xanh, đỏ, vàng;các tấm bìa cùng màu được đánh số từ $1$ đến $4$. Mỗi tấm bìa khi dán vào đèn lồng sẽ vừa kín một trong tám mặt bên của nó. Gọi $N$ là số cách mà nghệ nhân có thể chọn $8$ tấm bìa dán lên $8$ mặt bên của đèn lồng sao cho hai tấm bìa có chung một cạnh thì khác màu, hai tấm bìa có chung đúng một đỉnh thì khác số. Giá trị $\dfrac{N}{8}+16$ bằng bao nhiêu?

Solution: DGH MnP

**Trả lời: 7792**




Gọi $G_1$, $G_2$ là các tập hợp các mặt phẳng chung đỉnh, không chung cạnh.

Suy ra $G_1=\{(SAB);(SCD);(TAD);(TBC)\}$ và $G_2=\{(SBC);(SAD);(TAB);(TCD)\}$

Kéo theo các mặt trong mỗi tập $G_1$, $G_2$ được đánh các số khác nhau.

Các kiểu dán ba màu khác nhau cho các tấm bìa là $(4;4;0)$, $(4;3;1)$, $(4;2;2)$ và $(3;3;2)$

Để hai tấm bìa có chung một cạnh khác màu thì các màu có từ $3$ tấm trở lên phải dán vào các mặt trong cùng tập $G_1$ hoặc $G_2$

Do đó, các trường hợp có $4$ tấm cùng màu không bị vi phạm khi dán màu và đánh số, còn trường hợp $(3;3;2)$ khi dán màu thì màu có đúng $2$ tấm phải được dán ở các mặt đối diện (không chung cạnh, không chung đỉnh) và khi đánh số sẽ xuất hiện trường hợp hai tấm đó cùng số nên phải trừ các trường hợp vi phạm.

Thực hiện dán màu và đánh số theo qui tắc:

- Hoán vị kiểu dán màu.
- Chọn $1$ trong $2$ tập $G_1$, $G_2$ để dán các tấm bìa cùng màu có số lượng nhiều nhất.

▪ Chọn $k$ mặt trong $4$ mặt ở cùng tập còn lại để dán đúng $k$ tấm bìa (cùng màu) chưa dán.
▪ Đánh số và trừ các trường hợp vi phạm (chọn cặp mặt đối diện vi phạm và đánh số các mặt còn lại) khi đánh số (nếu có).

| Kiểu tô | Hoán vị | Chọn tập | Chọn $k$ mặt | Đánh số | Tổng |
|---|---|---|---|---|---|
| $(4;4;0)$ | $\frac{3!}{2!\times 1!}$ | $C_2^1$ | $C_4^4$ | $4!\times 4!$ | 3456 |
| $(4;3;1)$ | $3!$ | $C_2^1$ | $C_4^3$ | $4!\times 4!$ | 27648 |
| $(4;2;2)$ | $\frac{3!}{1!\times 2!}$ | $C_2^1$ | $C_4^2$ | $4!\times 4!$ | 20736 |
| $(3;3;2)$ | $\frac{3!}{2!\times 1!}$ | $C_2^1$ | $C_4^3$ | $4!\times 4! - C_4^1\times 3!\times 3!$ | 10368 |
| | | | | | 62208 |

Vậy, $\frac{N}{8}+16=7792$

**Câu 25 [Tự Luận]:** Một học sinh có $5$ quả cầu màu xanh giống nhau và một số quả cầu màu đỏ giống nhau. Bạn ấy muốn xếp các quả cầu thành một dãy và nếu đặt $a$ là số quả cầu mà quả bên phải nó cùng màu với nó, $b$ là số quả cầu mà quả cầu bên phải nó khác màu với nó thì $a=b$. Gọi $m$ là số lớn nhất các quả cầu màu đỏ có thể dùng sao cho tồn tại cách xếp $m+5$ quả cầu thành một dãy thỏa mãn điều kiện nêu trên.

**1)** Xác định $m$

**2)** Ứng với $m$ ở trên, tìm số cách xếp các quả cầu để có $a=b$.

***Solution: CeT***

**1)** Tổng số quả cầu là $N=m+5$, nhận thấy nếu có $N$ quả cầu, thì sẽ có $N-1$ khoảng trống ở giữa chúng và mỗi khoảng trống này chính là một cặp kề nhau. Vậy tổng số cặp là:
$a+b=m+4\ \left(1\right)$.

*Nhận xét.*

Cặp khác màu chỉ xuất hiện khi **màu sắc bị thay đổi** (từ Xanh sang Đỏ hoặc Đỏ sang Xanh)

Nếu ta gọi một nhóm các quả cầu cùng màu đứng liền nhau là một **khối**, thì cứ chuyển từ khối này sang **khối** kia, ta có 1 cặp khác màu. Do đó, Nếu có $k$ khối, thì số lần đổi màu là $k-1$.

Mặt khác $b$ là số quả cầu mà quả bên phải nó khác màu với nó nghĩa là tại vị trí đó, màu sắc đã chuyển từ Xanh sang Đỏ hoặc Đỏ sang Xanh

Do đó: $b=k-1\quad\left(2\right)$. Từ (1),(2) và điều kiện $a=b\Rightarrow m=2k-6$

$\rightarrow$ Để tìm số quả cầu đỏ $m$ lớn nhất, ta phải làm cho số khối $k$ lớn nhất có thể.

Có $5$ quả cầu xanh nên có thể tạo thành tối đa $5$ khối

Với 5 khối Xanh, ta có thể xếp tối đa 6 khối Đỏ xen kẽ như sau:

$$D-X-D-X-D-X-D-X-D-X-D$$

Vậy $k_{\max} = 11 \Leftrightarrow m_{\max} = 16$

**2)** Ta chỉ có thể xếp các khối Đỏ và Xanh xen kẽ để thỏa mãn điều kiện $a = b$ như sau:

$$D - X - D - X - D - X - D - X - D - X - D$$

Xếp $5$ quả Xanh vào $5$ nhóm (khối xanh) có duy nhất $1$ cách xếp

Số cách xếp $16$ quả cầu đỏ vào $6$ nhóm (khối đỏ) tương đương với số nghiệm nguyên dương của phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 16$ (với $x_i \geq 1$), do đó có $C_{16-1}^{6-1} = C_{15}^{5}$ cách xếp

Vậy có tất cả $1 \times C_{15}^{5} = 3003$ cách xếp

**Câu 26 [Tự Luận]:** Trong đợt sơ kết học kì I, thầy Hòa có 40 quyển với giống nhau muốn tặng cho 5 học sinh là thành viên trong đội tuyển Toán sao cho học sinh nào cũng được tặng với. Tính xác suất để không có học sinh nào nhận được số quyển với là một số chia hết cho 3.

***Solution: CeT***

Gọi $x_i$ là số vở mà bạn thứ $i$ nhận được, $x_i > 0, \forall i = 1,2,3,4,5$.

Khi đó ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$. Theo bài toán chia kẹo Euler thì $n(\Omega) = C_{39}^{4}$.

Giờ ta sẽ đếm số nghiệm $\left(x_i\right)_{i=1}^{5}$ của phương trình trên mà không có $x_i$ nào chia hết cho $3$.

Đặt $x_i = 3y_i + z_i$ với $z_i \in \left\{1,2\right\}$. Phương trình trở thành: $3\sum_{i=1}^{5} y_i + \sum_{i=1}^{5} z_i = 40$.

Do $z_i$ chỉ nhận giá trị là $1$ hoặc $2$ nên $\sum_{i=1}^{5} z_i$ chỉ nhận giá trị từ $5$ tới $10$

Và ta có $\sum_{i=1}^{5} z_i = 1 \pmod 3$ nên $\sum_{i=1}^{5} z_i \in \left\{7,10\right\}$

• Xét $\sum_{i=1}^{5} z_i = 7$ tức là trong các số $z_i$ có $2$ số bằng $2$ và $3$ số bằng $1$, tức là có $C_5^2$ cách xếp số dư.

Và ta được $\sum_{i=1}^{5} y_i = 11$. Theo bài toán chia kẹo Euler thì có $C_{15}^{4}$ bộ nghiệm $\left(y_i\right)_{i=1}^{5}$ (do $y_i \geq 0$).

Do đó kết hợp với các số dư $z_i$ ta được $C_5^2 C_{15}^4$ bộ nghiệm $\left(x_i\right)_{i=1}^{5}$ thỏa mãn.

• Xét $\sum_{i=1}^{5} z_i = 10$ tức là các số $z_i$ đều bằng, tức là có $1$ cách xếp số dư. Và ta được $\sum_{i=1}^{5} y_i = 10$.

Theo bài toán chia kẹo Euler thì có $C_{14}^{4}$ bộ nghiệm $\left(y_i\right)_{i=1}^{5}$ (do $y_i \geq 0$).

Do đó kết hợp với các số dư $z_i$ ta được $C_{14}^{4}$ bộ nghiệm $\left(x_i\right)_{i=1}^{5}$ thỏa mãn.

Vậy ta có $P = \dfrac{C_{14}^{4} + C_5^2 C_{15}^{4}}{C_{39}^{4}}$.

***Một cách tiếp cận dễ hiểu hơn đến từ DGH MnP***

Gọi số vở của $5$ học sinh lần lượt là $x_1, ..., x_5$

Số cách chia $40$ quyển vở cho $5$ học sinh sao cho ai cũng có quà là số nghiệm nguyên dương của phương trình: $x_1 + ... + x_5 = 40 \Rightarrow n(\Omega) = C_{40-1}^{5-1} = C_{39}^{4}$.

Gọi $A$ là biến cố "Không có học sinh nào nhận được số vở chia hết cho 3"

Ycbt tương đương với số vở của mỗi bạn khi chia cho $3$ thì chỉ được phép **dư 1** hoặc **dư 2**.

Để đảm bảo yêu cầu trên, ta sẽ làm $2$ bước:

▪ **Bước 1 (Chia phần lẻ):** Phát trước cho mỗi bạn $1$ quyển hoặc $2$ quyển để "xí chỗ" số dư.
▪ **Bước 2 (Chia phần chẵn):** Số vở còn lại ta buộc lại thành các **bó 3 quyển** và chia ngẫu nhiên cho $5$ bạn

Bây giờ ta tính toán: Tổng số vở là $40$ chia được $13$ bó $3$ quyển, còn dư $1$ quyển lẻ.

$\rightarrow$ Vậy tổng số vở lẻ mà $5$ bạn nhận được cộng lại cũng phải là một số chia $3$ dư $1$.

Ta gọi số vở lẻ mỗi bạn nhận là $r \in \{1, 2\}$. Tổng số vở lẻ của $5$ bạn thấp nhất là $1 \times 5 = 5$ và cao nhất là $2 \times 5 = 10$. Trong các số từ $5$ đến $10$, chỉ có hai số chia $3$ dư $1$ là số $7$ và số $10$.

**Trường hợp 1:** Tổng số vở lẻ phát ra là $7$ quyển

Để tổng số vở lẻ phát ra là $7$ thì phải có $3$ bạn nhận $1$ quyển và $2$ bạn nhận $2$ quyển.

$\rightarrow$ Số cách chia: $C_5^3 = 10$ cách

Đem $11$ bó $3$ quyển còn lại chia cho $5$ bạn

$\rightarrow$ Công thức chia kẹo: $C_{11+5-1}^{5-1} = C_{15}^{4}$ cách.

$\Rightarrow$ Tổng cách TH1: $10 \times C_{15}^{4}$.

**Trường hợp 2:** Tổng số vở lẻ phát ra là $10$ quyển

Để tổng số vở lẻ phát ra là $10$ quyển thì cả $5$ bạn đều nhận $2$ quyển

$\Rightarrow$ Tổng cách TH2: $1 \times C_{14}^{4}$.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{10 \times C_{15}^{4} + 1 \times C_{14}^{4}}{C_{39}^{4}}$

**Câu 27:** Robinson Crusoe lạc trên đảo hoang đúng 28 năm. Mỗi năm, ông khắc lên thân cây một hình đa giác lồi để đánh dấu kỉ niệm. Biết rằng trong 10 năm đầu tiên, ông khắc các đa giác có ít nhất 100 cạnh; các năm còn lại ông khắc đa giác lồi tùy ý . Tổng số đo các góc của 28 đa giác này cộng lại đúng bằng $1001\pi$ . Hỏi có bao nhiêu cách để Robinson thực hiện việc khắc hình thỏa mãn các điều kiện trên?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 4060**

Gọi $x_i$ là số cạnh của đa giác được khắc vào năm thứ $i$ (với $1 \le i \le 28$).

Tổng các góc trong của một đa giác $x_i$ cạnh là $(x_i - 2)\pi$. Do đó, ta cần đếm số nghiệm của

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{28} (x_i - 2)\pi = 1001\pi, x_i \in \mathbb{N} \\ x_i \geq 100, i = \overline{1,10}; x_i \geq 3, i = \overline{11,28}. \end{cases}$$

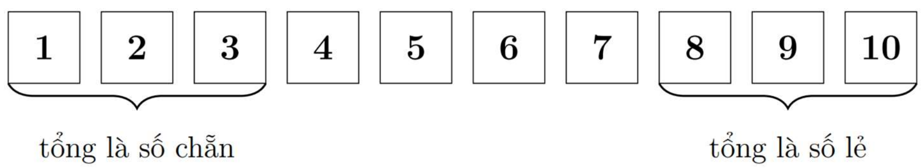
Biến đổi phương trình trên để đưa về dạng chuẩn ta được: $\sum_{i=1}^{28} (x_i - 2)\pi = 1001\pi \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{28} x_i = 1057$.

Đặt $x_i = y_i + 100, i = \overline{1,10}$ và $x_i = y_i + 3, i = \overline{11,28}$, ta có phương trình

$$\sum_{i=1}^{10} y_i + 10 \cdot 100 + \sum_{i=11}^{28} y_i + 18 \cdot 3 = 1057 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{28} y_i = 3.$$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình là $C_{3+28-1}^{28-1} = 4060$.

**Câu 28:** Có $10$ cái hộp khác nhau được đánh số từ $1$ đến $10$ và $10$ viên bi giống nhau (mỗi hộp không nhất thiết có bi). Số cách sắp xếp $10$ viên bi vào $10$ hộp sao cho tổng số viên bi trong các hộp số $1,2,3$ là số chẵn, còn tổng các viên bi trong các hộp $8,9,10$ là số lẻ là $T$, tính $\dfrac{T}{1000}$?




**Solution: Collected**

**Trả lời: 23**

Đặt $y$ là số bi có trong các hộp $1,2,3,8,9,10$ thì $y$ phải là số lẻ. Gọi $x_1, x_2, x_3, x_4$ lần lượt là số bi có trong các hộp $4,5,6,7$ thì ta có $y + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 - y$.

Theo bài toán chia kẹo Euler thì số nghiệm của phương trình trên sẽ là $C_{10-y+4-1}^{4-1} = C_{13-y}^{3}$.

Tuy nhiên ta cần đếm thêm xem có bao nhiêu cách chọn số bi cho các hộp $1,2,3,8,9,10$. Ta gọi $z_i, i = 1,2,3,4,5,6$, lần lượt là số bi được đặt vào các hộp $1,2,3,8,9,10$, như vậy

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = y, z_i \geq 0.$$

Tới đây theo bài toán chia kẹo Euler thì số bộ số thỏa mãn là $C_{y+6-1}^{6-1} = C_{y+5}^{5}$.

Chú ý rằng cần chia cho số trường hợp lặp ở các bộ $1,2,3$ và $8,9,10$. Số cách chọn là

$$T = \frac{1}{2} \times \sum_{i \in 1,3,5,7,9} \left( C_{13-y}^{3} \times C_{y+5}^{5} \right) = 23000 \Rightarrow \frac{T}{1000} = 23.$$

**Câu 29:** Một hình vuông có kích thước $m \times m$ ($m \geq 2, m \in \mathbb{N}$) được chia thành các ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật được tạo thành từ các ô vuông. Tìm giá trị nhỏ nhất của $m$ để xác suất chọn được một hình chữ nhật mà không phải là hình vuông lớn hơn $0,84$.

**Solution: CeT**

**Trả lời: 8**

Ta thấy rằng việc chọn 1 hình chữ nhật tương ứng với việc chọn 2 đoạn đứng và 2 đoạn ngang nên không gian mẫu của phép thử là: $n(\Omega)=\left(C_{m+1}^{2}\right)^{2} \quad (m\ge 2; m\in\mathbb{N})$

Việc chọn 1 hình vuông có kích cỡ $k\times k$, tương ứng với việc chọn 2 đoạn đứng cách nhau $k$ đơn vị và chọn 2 đoạn dài (ngang) cách nhau $k$ đơn vị.

Số cặp cạnh đứng và dài cách nhau $k$ đơn vị là: $m+1-k \Rightarrow$ Số hình vuông là: $\sum_{k=1}^{m}(m+1-k)^2=\sum_{i=1}^{m}i^2$

Do đó xác suất biến cố $A$: "chọn được 1 hình vuông " là:

$$P(A)=\frac{\sum_{i=1}^{m}i^2}{\left(C_{m+1}^{2}\right)^{2}}=\frac{1^2+2^2+\ldots+m^2}{\left[\frac{(m+1)m}{2}\right]^2}=\frac{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}{\frac{(m+1)^2\cdot m^2}{4}}=\frac{2(2m+1)}{3m(m+1)}$$

Do đó xác suất chọn 1 hình chữ nhật không phải là hình vuông là: $P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{2(2m+1)}{3m(m+1)}>0,84$

$$\Leftrightarrow \frac{4m+2}{3m^2+3m}<0,16 \Leftrightarrow 0,48m^2-3,52m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{22+\sqrt{634}}{6}\approx 7,8 \\ m<\frac{22-\sqrt{634}}{6}\approx -0,52 \end{array}\right.$$

Vì $\begin{cases} m\ge 2 \\ m\in\mathbb{N}\end{cases}$ nên $m$ nhỏ nhất thoả mãn yêu cầu bài toán là: $\boxed{m=8}$

**Câu 30:** Một người đứng từ sàn nhà và muốn bước lên tầng hai bằng một cầu thang đi bộ có $17$ bậc. Biết rằng mỗi bước của người đó đi được $1$ bậc hoặc $2$ bậc và số bước đi luôn phải là số nguyên. Hỏi người này có tất cả bao nhiêu cách đi hết $17$ bậc của cầu thang đó?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 2584**

Giả sử có $k$ lần bước 2 bậc. Khi đó số bậc đã đi được bởi các bước 2 bậc là: $2k$ bước

Phần còn lại phải đi bằng bước 1 bậc: $17-2k$ bước.

Tổng số bước là: $\left(17-2k\right)+k=17-k$

Bài toán trở thành: Chọn vị trí cho $k$ lần bước hai bậc trong tổng số $17-k$ lần bước

Suy ra: Số cách đi $=\mathrm{C}_{17-\mathrm{k}}^{\mathrm{k}}$. Tổng số cách đi là : $N=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_{17-k}^{k}=2584 \quad \left(2k\le 17\Rightarrow k=0,1,..,8\right)$

**Câu 31:** Gọi $A$ là tập tất cả các số tự nhiên có $4$ chữ số lập từ $X=\left\{0,1,2,3,4,5,6\right\}$ sao cho chữ số $6$ đúng một lần và các chữ số còn lại có mặt tối đa một lần. Biết tổng của tất cả các số tự nhiên trong tập $A$ bằng $b$. Hãy tính giá trị của $\dfrac{b}{1000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?

*Solution: Collected*

**Trả lời: 1773**

Một số tự nhiên lập được sẽ có dạng $\overline{abcd}\in A$

- Xét chữ số 6.

Xét chữ số $6$ đứng ở vị trí đầu tiên $\overline{6bcd}$. Các vị trí còn lại có tất cả $A_6^3$ cách, suy ra vị trí này góp vào tổng một lượng là $A_6^3.6.1000$

Xét chữ số $6$ đứng ở các vị trí $\overline{a6cd}$, $\overline{ab6d}$, $\overline{abc6}$. Các vị trí còn lại có tất cả $5.A_5^2$ cách, suy ra các vị trí này góp vào tổng một lượng là $5.A_5^2.6.111$

- Xét một chữ số bất kì $y\in X$ và khác chữ số $6$.

Khi $y$ đứng ở vị trí đầu tiên $\overline{ybcd}$. Các vị trí còn lại sẽ có số cách xếp là: Xếp một chữ số $6$ vào ba vị trí rồi xếp $5$ chữ số khác nhau vào hai vị trí còn lại có $C_3^1.A_5^2$ cách. Trường hợp này góp vào tổng một lượng là: $C_3^1.A_5^2.y.1000$

Khi $y$ đứng ở vị trí các vị trí $\overline{aycd}$, $\overline{abyd}$, $\overline{abcy}$. Các vị trí còn lại có số cách xếp là:

**Khả năng 1:** Xếp một chữ số '6' vào vị trí đầu tiên, sau đó ta chọn ra hai chữ số từ $5$ chữ số còn lại xếp vào hai vị trí còn lại có $A_5^2$ cách. Suy ra có tất cả là $A_5^2$ cách.

**Khả năng 2:** Xếp một chữ số '6' vào một trong hai vị trí (khác vị trí đầu tiên) có $C_2^1$ cách, sau đó ta chọn ra hai chữ số còn lại của $X$ (nhớ là còn lại $5$ chữ số và vẫn còn chữ số 0) để xếp vào hai vị trí còn lại (trong đó có $1$ vị trí đầu). Có số cách xếp là $4.A_4^1=16$. Suy ra có: $C_2^1.16=32$ cách.

Gộp cả hai khả năng lại thì trường hợp này có tất cả là: $A_5^2+32=52$ (cách).

Sẽ góp vào tổng một lượng là: $52.y.111$. Tổng tất cả các chữ số tự nhiên lập được là:

$$S=A_6^3.6.1000+5.A_5^2.6.111+\left(C_3^1.A_5^2.1000+52.111\right).(1+2+3+4+5)=1773180=b.$$

$$\Rightarrow \frac{b}{1000}=1773{,}18\approx 1773.$$

**Câu 32:** Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra ba số tự nhiên từ tập [1;20] sao cho tích của chúng chia hết cho 81?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 30**

Ta có: $81=3^4$.

Xét các tập:

$X_0 = \{x = y.3^0 \mid y \not\vdots\, 3 \mid 1 \le x \le 20\} = \{1;2;4;5;7;8;10;11;13;14;16;17;19;20\}$ (có 14 phần tử).

$X_1 = \{x = y.3^1 \mid y \not\vdots\, 3 \mid 1 \le x \le 20\} = \{3;6;12;15\}$ (có 4 phần tử).

$X_2 = \{x = y.3^2 \mid y \not\vdots\, 3 \mid 1 \le x \le 20\} = \{9;18\}$ (có 2 phần tử).

Gọi 3 số chọn ra lần lượt là $A = a.3^{\alpha}$, $B = b.3^{\beta}$, $C = c.3^{\gamma} \Rightarrow ABC = abc.3^{\alpha+\beta+\gamma}$.
Với $abc$ không chia hết cho 3 và các số mũ $0 \le \alpha,\beta,\gamma \le 2$.

Để $ABC$ chia hết cho $81 = 3^4$ thì ta phải có: $\alpha + \beta + \gamma \ge 4$.

Do tập $X_2$ chỉ có 2 phần tử nên ta không thể chọn 3 số đều có mũ là 2 (loại trường hợp $\alpha = \beta = \gamma = 2$ ).
Các bộ số mũ $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ thỏa mãn là: $\{2;2;0\},\{2;2;1\},\{2;1;1\}$.

Suy ra có tất cả là: $C_2^2.C_{14}^1$ (ứng với bộ 2,2,0) $+C_2^2.C_4^1$ (ứng với bộ 2,2,1) $+C_2^1.C_4^2$ (ứng với bộ 2,1,1)

$$= 14 + 4 + 12 = 30.$$

**Câu 33:** Bạn ***A*** chọn từ tập $X = \{1;2;3;4;5;7;8\}$ ra ba chữ số rồi ghép lại thành một số tự nhiên $m$ có ba chữ số theo chiều giảm dần của các chữ số, bạn ***B*** chọn từ tập $Y = \{1;2;3;4;5;6\}$ ra ba chữ số rồi ghép lại thành một số tự nhiên $n$ có ba chữ số theo chiều giảm dần của các chữ số. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách để thu được $m > n$?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 545**

**Trường hợp 1:** ***A*** chọn được chữ số 8 hoặc chữ số 7.

Khi đó $m$ sẽ có dạng $\overline{8bc}$ hoặc $\overline{7bc}$, suy ra $m \ge 721$.

Bạn ***B*** chọn tùy ý từ $Y = \{1;...;6\}$, số lớn nhất lập được là $654$.

Do đó: $m \ge 721 > 654 \ge n \Rightarrow$ Luôn có $m > n$.

- Số cách chọn của ***A***: Chọn 3 số từ $X$ sao cho có chứa 7 hoặc 8
  $= C_7^3$ (tùy ý) $-C_5^3$ (chỉ chọn từ $\{1;2;3;4;5\}$ )$= 35 - 10 = 25$ cách.
- Số cách chọn của ***B***: $C_6^3 = 20$ cách.

$\Rightarrow$ Có $25 \times 20 = 500$ cách.

**Trường hợp 2:** ***A*** không chọn 8 và không chọn 7.

Tức là ***A*** chỉ chọn 3 số từ tập $\{1;2;3;4;5\}$. Khi đó $m_{max} = 543$.

Để $m > n$, bắt buộc ***B*** không được chọn chữ số 6 (vì nếu ***B*** chọn 6 thì $n \ge 621 > m$ ).

Vậy lúc này cả ***A*** và ***B*** đều cùng chọn 3 số từ tập chung $S = \{1;2;3;4;5\}$ và cùng xếp giảm dần.

- Tổng số cặp cách chọn của ***A*** và ***B*** từ tập $S$ là: $C_5^3 \times C_5^3 = 10 \times 10 = 100$.
- Do vai trò ***A*** và ***B*** như nhau trên tập $S$ ,ta có tính đối xứng: (Số cách $m > n$ )=(Số cách $m < n$ ).
- Xét trường hợp $m = n$: Để hai số bằng nhau thì ***B*** phải chọn tập chữ số y hệt ***A***. Với mỗi bộ 3 số của ***A***, ***B*** chỉ có 1 cách chọn bộ tương ứng.

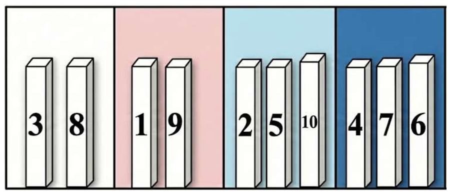
$\Rightarrow$ Số cách $m = n$ là: $C_5^3 \times 1 = 10$ cách.

Áp dụng công thức: $2 \times$(Số cách $m > n$) $+$(Số cách $m = n$)$=$Tổng$\Rightarrow 2x + 10 = 100 \Rightarrow x = 45$ cách.

Vậy có tất cả là: $500 + 45 = 545$ cách.

**Câu 34:** Tiến hành xếp $10$ cuốn sách khác nhau vào $4$ ô hàng ngang. Hai cách được gọi là giống nhau nếu như thoả mãn đồng thời:

- Tính từ trái qua phải, số lượng sách trong mỗi ngăn là như nhau.
- Trong mỗi ngăn có số lượng sách như nhau, các cuốn sách đó phải được xếp có thứ tự giống nhau. Gọi $T$ là số cách xếp sao cho mỗi ngăn được ít nhất hai cuốn.



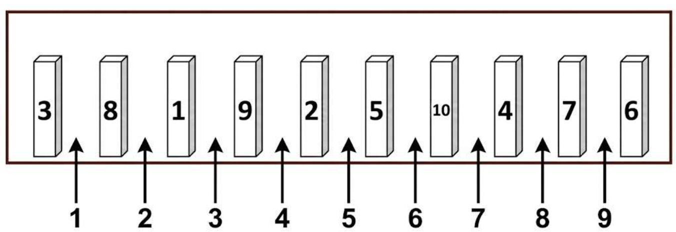

Hãy xác định giá trị $\dfrac{T}{10000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 3629**

Trước hết, ta sẽ xếp $10$ sách thành hàng ngang, sẽ có $10!$ cách.

Sẽ tạo ra các khoảng trống bên trong $10$ sách này.




Chúng ta sẽ sử dụng $3$ vách ngăn để xếp vào các vị trí từ $2$ đến $8$, đảm bảo mỗi ngăn (có tất cả cả $4$ ngăn) có ít nhất hai sách thì giữa hai vách ngăn có ít nhất hai cuốn sách tức là các vách ngăn chúng sẽ không được xếp liên tiếp nhau.

Giả sử $3$ vị trí để xếp $3$ vách ngăn là $x_1 < x_2 < x_3$.

Ta có hệ điều kiện: $\begin{cases} 2 \le x_1 \\ x_1 < x_2 - 1 \\ x_2 < x_3 - 1; x_3 \le 8 \end{cases} \Rightarrow 2 \le x_1 < x_2 - 1 < x_3 - 2 \le 8 - 2 = 6$.

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 - 2 \\ y_3 = x_3 - 2 \end{cases} \Rightarrow 2 \le y_1 < y_2 < y_3 \le 6$.

Mỗi bộ ba số nguyên $(y_1; y_2; y_3)$ tương ứng cho ta một bộ $(x_1; x_2; x_3)$ thỏa mãn.

Số bộ $(y_1;y_2;y_3)$ là số cách chọn ra $3$ số nguyên từ $5$ số nguyên trong đoạn $[2;6]$.

Suy ra có tất cả $C_5^3$ (cách) để chọn ra bộ $(x_1;x_2;x_3)$.

Suy ra số cách xếp sách là: $T = 10!.C_5^3 \Rightarrow \dfrac{T}{10000} = \dfrac{10!.C_5^3}{10000} = 3628,8 \approx 3629$.

**Câu 35:** Hỏi có tất cả bao nhiêu số hạng trong khai triển $(17a+b+c)^{16}$ sao cho tổng số mũ của $a$ và $b$ lớn hơn $10$?

***Solution: Collected***

**Trả lời: 87**

Các số hạng của khai triển có dạng: $x.a^\alpha b^\beta c^\gamma$ với $x \in \mathbb{Z}; \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}; \alpha+\beta+\gamma=16$.

Để thoả mãn thêm điều kiện của bài toán thì: $\alpha+\beta>10$.

Số bộ tự nhiên $(\alpha;\beta;\gamma)$ thoả mãn bài toán cũng chính là số các số hạng cần tìm.

Ta đưa về các số nguyên dương: $\begin{cases}\alpha'=\alpha+1\\ \beta'=\beta+1\\ \gamma'=\gamma+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha',\beta',\gamma' \in \mathbb{N}^*\\ (\alpha'-1)+(\beta'-1)+(\gamma'-1)=16\\ (\alpha'-1)+(\beta'-1)>10\end{cases}$

Hay ta đưa về điều kiện: $\begin{cases}\alpha',\beta',\gamma' \in \mathbb{N}^*\\ \alpha'+\beta'+\gamma'=19\\ \alpha'+\beta'>12\end{cases}$

Dễ thấy số bộ nguyên dương $(\alpha';\beta';\gamma')$ thoả mãn $\begin{cases}\alpha',\beta',\gamma' \in \mathbb{N}^*\\ \alpha'+\beta'+\gamma'=19\end{cases}$ là $C_{19-1}^{3-1} = C_{18}^2$.

Đếm số bộ $(\alpha';\beta';\gamma')$ thoả mãn $\begin{cases}\alpha',\beta',\gamma' \in \mathbb{N}^*\\ \alpha'+\beta' \le 12\end{cases}$ là $C_{12}^2$.

Suy ra số bộ $(\alpha';\beta';\gamma')$ thoả mãn $\begin{cases}\alpha',\beta',\gamma' \in N^*\\ \alpha'+\beta'+\gamma'=19\\ \alpha'+\beta'>12\end{cases}$ là $C_{18}^2 - C_{12}^2 = 87$, cũng là số bộ $(\alpha;\beta;\gamma)$ thoả mãn và cũng là số các số hạng cần tìm.

**Câu 36:** Cho $14$ hành khách bước ngẫu nhiên lên $3$ toa tàu khác nhau. Gọi $T$ là xác suất để sau khi các hành khách bước hết lên các toa tàu thì các toa đều có ít nhất một hành khách. Hãy xác định $10000T$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

***Solution: CeT***

**Trả lời: 9897**

Mỗi khách có 3 lựa chọn toa $\Rightarrow n(\Omega) = 3^{14}$.

Gọi $A$ là biến cố "Sau khi hành khách bước lên, các toa đều có ít nhất một hành khách"

Ta có:

- Tổng số cách xếp tùy ý: $3^{14}$.
- Trừ đi các trường hợp hành khách chỉ tập trung vào 2 toa (tức là có 1 toa trống). Có $C_3^1$ cách chọn toa trống, 14 khách xếp vào 2 toa còn lại có $2^{14}$ cách $\Rightarrow$ Trừ đi: $C_3^1 \cdot 2^{14}$.
- Khi trừ các trường hợp trên, ta đã trừ lặp các trường hợp hành khách chỉ tập trung vào 1 toa (tức là có 2 toa trống). Ta cần cộng lại phần này. Có $C_3^2$ cách chọn 2 toa trống, 14 khách xếp vào 1 toa còn lại có $1^{14}$ cách $\Rightarrow$ Cộng thêm: $C_3^2 \cdot 1^{14}$.

Suy ra $n(A) = 3^{14} - C_3^1 \cdot 2^{14} + C_3^2 \cdot 1^{14}$.

Xác suất cần tìm là: $T = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} \approx 0,9897 \to 10000T = 9897$

**Câu 37:** Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp $300$ viên bi giống nhau vào $3$ chiếc hộp giống nhau sao cho không có hộp nào nhiều hơn $149$ viên bi?

***Solution: Collected***

**Trả lời: 1875**

Để ý các viên bi là giống nhau, những chiếc hộp là giống nhau, cho nên chúng ta chỉ cần liệt kê các bộ ba số $(a;b;c)$ thoả mãn: $\begin{cases} a \ge b \ge c \ge 0 \\ a+b+c = 300 \\ a \le 149 \end{cases}$. Để ý rằng, ta sẽ chia trường hợp theo $a$ như sau:

$300 = a+b+c \le 3a \longrightarrow a \ge 100 \Rightarrow 100 \le a \le 149; b+c = 300-a; c \le b \le a$.

Ta có: $b+c = 300 - a \le b+b \Leftrightarrow b \ge \dfrac{300-a}{2} \Rightarrow \dfrac{300-a}{2} \le b \le a$.

Nếu $a$ chẵn thì suy ra: $\dfrac{300-a}{2} \le b \le a$, nếu $a$ lẻ thì suy ra: $\dfrac{300-a+1}{2} \le b \le a$.

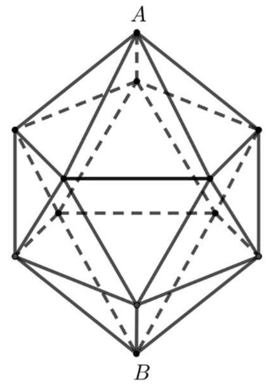
Với mỗi $a$, thì số giá trị của $b$ thoả mãn là số bộ $(a;b;c)$ thoả mãn.

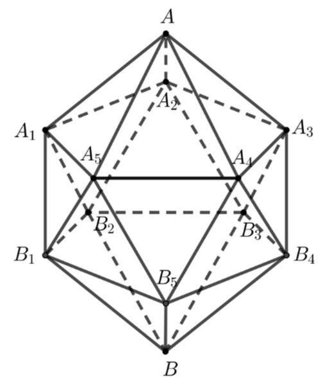
Ta tạo ra sự khác biệt chia trường hợp $a$ chẵn lẻ bằng xử lí số như sau: $\dfrac{300-a+\dfrac{1-(-1)^a}{2}}{2} \le b \le a$.

Suy ra mỗi giá trị của $a$ có số bộ thoả mãn là: $a - \dfrac{300-a+\dfrac{1-(-1)^a}{2}}{2} + 1 = \dfrac{3a-298-\dfrac{1-(-1)^a}{2}}{2}$.

Suy ra có tất cả cách xếp là: $\displaystyle\sum_{a=100}^{149} \dfrac{3a-298-\dfrac{1-(-1)^a}{2}}{2} = 1875.$

**Câu 38:** Một con kiến đang ở đỉnh trên cùng A của một hình 20 mặt đều (hình vẽ dưới). Mỗi bước di chuyển, nó bò dọc theo các cạnh của hình 20 mặt đều để đến đỉnh kế tiếp, mỗi đỉnh chỉ đi qua tối đa một lần. Hỏi có tất cả bao nhiêu lộ trình khác nhau khi con kiến di chuyển xuống đỉnh dưới cùng B ?




*Solution: CeT*

**Trả lời: 810**

Từ trên xuống dưới ta có hai mặt phẳng ngũ giác lần lượt là $\left(A_1A_2A_3A_4A_5\right)$ và $\left(B_1B_2B_3B_4B_5\right)$. Và ta quy ước kí hiệu hai mặt phẳng này lần lượt là (1) và (2). Đến đây ta có từng bước sau:

**Bước 1:** Con kiến bò từ đỉnh trên cùng $A$ đến 1 trong 5 đỉnh ở mặt (1) có 5 cách.

**Bước 2:** Con kiến rong chơi trên mặt phẳng ngũ giác thứ nhất có 9 cách gồm:

+ Ở nguyên tại $A_1$ chờ đi xuống mặt phẳng ngũ giác thứ hai.

+ Đi theo 1 trong 8 đoạn đường lần lượt là:

+ (1) $A_1 \to A_2$; (2) $A_1 \to A_5$;

+ (3) $A_1 \to A_2 \to A_3$; (4) $A_1 \to A_5 \to A_4$;

+ (5) $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4$; (6) $A_1 \to A_5 \to A_4 \to A_3$;

+ (7) $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$; (8) $A_1 \to A_5 \to A_4 \to A_3 \to A_2$;

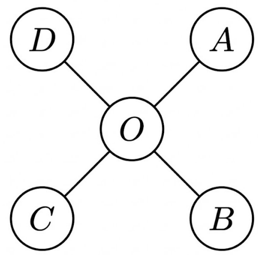
**Bước 3:** Từ một đỉnh trên mặt phẳng ngũ giác thứ nhất, con kiến bò xuống 1 trong 2 đỉnh ở mặt phẳng ngũ giác thứ hai có 2 cách.

**Bước 4:** Con kiến rong chơi trên mặt phẳng ngũ giác thứ hai có 9 cách (tương tự bước 2).

**Bước 5:** Từ một đỉnh trên mặt phẳng ngũ giác thứ hai, con kiến bò xuống đỉnh cuối cùng là đỉnh $B$ có 1 cách.

Vậy số lộ trình khác nhau của con kiến là (quy tắc nhân) $5 \times 9 \times 2 \times 9 \times 1 = 810$ cách.

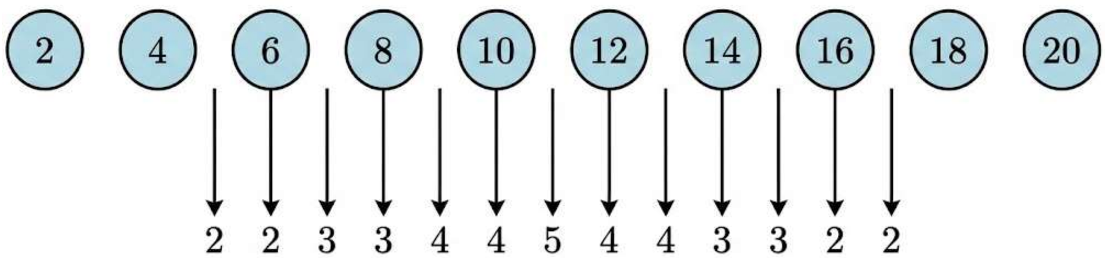
**Câu 39:** Chọn ngẫu nhiên $5$ số phân biệt từ tập $X = \left\{2;4;6;8;10;12;13;14;16;18;20\right\}$ để xếp vào $5$ ô như hình dưới. Xác suất số $13$ ở $O$ và tổng các số ở $A,O,C$ bằng tổng các số ở $B,O,D$ bằng $P$, tính $2079P$ ?




Solution: j.maaarcus

**Trả lời: 15**

Nếu loại bỏ $13$ ta sẽ thu được một tập số đẹp là các số chẵn từ $2$ đến $20$. Yêu cầu tương đương tìm các cặp có tổng bằng nhau và gán cho $4$ ô bên ngoài. Các số nằm cách đều về hai phía của cùng một số tạo nên các cặp bằng nhau (xem như $3$ phần tử liền kề của cấp số cộng) và vì có $2$ cặp nên phải chứa tối thiểu $2$ phần tử ở mỗi phía ngoài cùng:



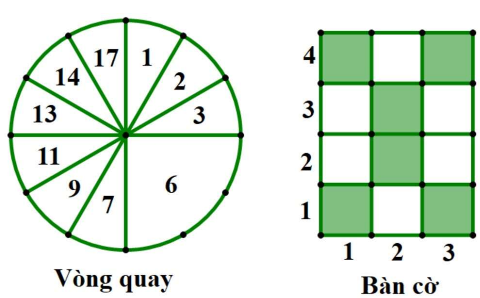

Số cặp $S$ là số cách chọn $2$ cặp có phân biệt thứ tự từ $k$ cặp: $S=(2!)^2\left(4\sum_{k=2}^{4}A_k^2+A_5^2\right)=400$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{400}{A_{11}^5}=\dfrac{5}{693}\Rightarrow 2079P=15$.

**Câu 40:** Vòng quay trong hình được quay hai lần, và các con số ngẫu nhiên dừng lại ở vị trí mũi tên được ghi lại.

- Số thứ nhất được chia cho $4$ để lấy số dư, số dư này chỉ định cột trên bàn cờ.
- Số thứ hai được chia cho $5$ để lấy số dư, số dư này chỉ định hàng trên bàn cờ.

Xác suất để cặp số nhận được chỉ định đúng vào một ô tô đậm trên bàn cờ là $\dfrac{a}{b}$ (với $a,b$ là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a+b$ bằng bao nhiêu?




Solution: CeT

**Trả lời: 109**

Ta xét bảng số dư như sau ( vì 6 chiếm 3 ô của vòng quay nên số dư của 6 tính 3 lần

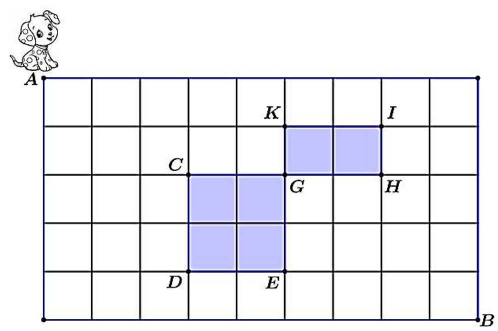
| Số dư | Chia 4 | Chia 5 |
|---|---|---|
| **Dư 1** | 4 số | 5 số |
| **Dư 2** | 5 số | 3 số |
| **Dư 3** | 3 số | 2 số |
| **Dư 4** | 0 số | 2 số |

Gọi $x$ là số dư khi chia cho 4, $y$ là số dư khi chia cho 5 ta xét xác suất xảy ra của các trường hợp sau:

$$\begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=4 \end{array}\right. \end{cases} \to P_1=\frac{4}{12}.\left(\frac{5}{12}+\frac{2}{12}\right);\ \begin{cases} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=3 \end{array}\right. \end{cases} \to P_2=\frac{5}{12}.\left(\frac{3}{12}+\frac{2}{12}\right);\ \begin{cases} x=3 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=4 \end{array}\right. \end{cases} \to P_3=\frac{3}{12}.\left(\frac{5}{12}+\frac{2}{12}\right)$$

$$\Rightarrow P=P_1+P_2+P_3=\frac{37}{72}\Rightarrow a+b=109$$

**Câu 42:** Trên một ô lưới như hình, hình chữ nhật $AB$ gồm $9$ cột và $5$ hàng ô vuông. Một bé cún xuất phát từ điểm $A$ và chạy đến điểm $B$. Mỗi bước, bé cún chỉ được chạy sang phải hoặc xuống dưới đúng $1$ ô (đi theo các cạnh ô vuông), vì vậy bé cún luôn đi theo đường ngắn nhất. Trong hình có các vùng tô đậm là những bãi bùn. Bé cún không được chạy vào miền trong của các vùng tô đậm, nhưng được phép chạy trên đường biên của chúng.




Hỏi bé cún có bao nhiêu cách chạy từ $A$ đến $B$ ?

*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 1127**

Thay vì tính đường đi lòng vòng tránh vũng bùn, ta tính Số cách đi bất kì rồi trừ Số cách đi phạm quy.

Bé cún từ di chuyển từ $A\to B$ cần $9$ bước ngang, $5$ bước dọc $\Rightarrow$ có $C_{14}^5=2002$ cách di chuyển.

**Trường hợp 1:** Đi qua bãi bùn $CDEG$

Gọi $M$ là tâm của hình vuông $CDEG$, nhận thấy bé cún chạy vào miền trong của bãi bùn $CDEG$ khi và chỉ khi đi qua điểm $M$ nên bé cún cần di chuyển từ $A$ đến $M$ rồi từ $M$ đến $B$

+) $A\to M$ : $4$ ngang, $3$ dọc $\Rightarrow$ có $C_7^3=35$ cách di chuyển.

+) $M\to B$: $5$ ngang, $2$ dọc $\Rightarrow$ có $C_7^2=21$ cách di chuyển.

Do đó, số cách di chuyển từ $A\to M\to B$ là: $35\times 21=735$ cách di chuyển

**Trường hợp 2:** Đi qua bãi bùn $GHIK$

Gọi $P,Q$ lần lượt là trung điểm của $KI, GH$.

Nhận thấy bé cún chạy vào miền trong của bãi bùn $GHIK$ khi và chỉ khi đi qua cạnh $LM$ nên bé cún cần di chuyển từ $A$ đến $P$ rồi từ $P$ đến $Q$ và từ $Q$ về $B$.

+) $A \to P$: $6$ ngang, $1$ dọc $\Rightarrow$ có $C_7^1 = 7$ cách di chuyển.

+) $P \to Q$: có 1 cách di chuyển (bắt buộc đi xuống).

+) $Q \to B$: $3$ ngang, $3$ dọc $\Rightarrow$ có $C_6^3 = 20$ cách di chuyển.

Do đó, số cách di chuyển từ $A \to P \to Q \to B$ là: $7 \times 20 \times 1 = 140$ cách di chuyển

Nhận thấy không có trường hợp nào mà bé cún đi qua cả hai bãi bùn

Vậy, số cách di chuyển thỏa mãn yêu câu bài toán là: $2002 - 735 - 140 = 1127$ cách

**Câu 43:** Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4...;100\}$. Gọi $S$ là tập hợp gồm tất cả các tập con của $A$, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của $A$ và có tổng bằng $91$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của $S$. Gọi $P\%$ là xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân. Tính $P$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 0,62**

Giả sử tập con bất kì $\{a,b,c\} \in S \Rightarrow 1 \le a,b,c \le 100$; $a,b,c$ phân biệt và $a + b + c = 91$.

Đây là bài toán chia kẹo Euler nên số bộ $a,b,c$ là: $C_{91-1}^{3-1}$

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là $3.45 = 135$ ( bộ). Vậy $n(\Omega) = \left(C_{90}^2 - 3.45\right) : 3! = 645$.

Tiếp theo, ta sẽ đếm số cấp số nhân trong $S$. Vì các số hạng của cấp số nhân là số nguyên dương nên công bội sẽ là số hữu tỷ dương, giả sử số bé nhất của cấp số nhân là $a$ và công bội là $\frac{m}{n}$, với $a,m,n \in \mathbb{Z}^+, a \le 30; m > n$, $\text{UCLN}(m,n) = 1$.

Khi đó ta có $a\left(1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}\right) = 91 \Leftrightarrow a(m^2 + mn + n^2) = 91n^2$.

Vì $\text{UCLN}(m,n) = 1$ nên $\text{UCLN}(m^2 + mn + n^2, n^2) = 1$ nên suy ra $a \,\vdots\, n^2$. Mà $a \le 30$ nên $n^2 \le 30 \Rightarrow n \le 5$.

- Với $n = 1$, ta có $a(m^2 + m + 1) = 91$. Phương trình này có các nghiệm nguyên dương $(a;m) \in \{(1;9),(7;3),(13;2)\}$, nên có các cấp số nhân $(1;9;81)$, $(7;21;63)$, $(13;26;52)$.

- Với $n = 2$, ta có $a(m^2 + 2m + 4) = 364$, không có nghiệm nguyên dương.

- Với $n = 3$, ta có $a(m^2 + 3m + 9) = 819$, không có nghiệm nguyên dương.

- Với $n = 4$, ta có $a(m^2 + 4m + 16) = 1456$, không có nghiệm nguyên dương.

- Với $n=5$, ta có $a(m^2+5m+25)=2275$. Phương trình này có nghiệm nguyên dương $(a;m)=(25;6)$, ta nhận được cấp số nhân $(25;30;36)$.

Vậy có $4$ cấp số nhân trong $S$. Gọi A là biến cố "chọn được phần tử có ba số lập thành một cấp số nhân" thì $n(A)=4$. Suy ra: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{645}\Rightarrow P\approx 0,62\%$.

**Câu 44:** Có bao nhiêu người tham gia vào cuộc đấu cờ theo thể thức vòng tròn một lượt, biết rằng cuộc đấu có tất cả 84 ván và có hai người bỏ cuộc khi mỗi người đã thi đấu đúng ba ván?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 15**

Gọi $n$ là số người tham gia cuộc đấu ($n$ là số nguyên dương, $n>2$).

Ta chia tổng số ván đấu thành 2 nhóm:

1. Các ván đấu giữa $n-2$ người chơi còn lại (những người chơi hết giải).
2. Các ván đấu có sự tham gia của 2 người bỏ cuộc.

Số người chơi trọn vẹn là $n-2$. Vì họ thi đấu vòng tròn một lượt với nhau nên số ván đấu giữa họ là tổ hợp chập 2 của $n-2$: $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$

Tiếp đó ta tính số ván của 2 người bỏ cuộc

Gọi 2 người bỏ cuộc là ***A*** và ***B***. Theo đề bài, mỗi người đã thi đấu đúng 3 ván.

**Trường hợp 1:** ***A*** và **B** chưa đấu với nhau. Tổng số ván có ***A*** hoặc ***B*** tham gia là: $3+3=6$ ván.

**Trường hợp 2:** ***A*** và ***B*** đã đấu với nhau. Tổng số ván có ***A*** hoặc ***B*** tham gia là: $5$ ván.

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l}\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}+6=84\\ \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}+5=84\end{array}\right.\Rightarrow n=15$

**Câu 45:** Gọi $S$ là tập hợp các số tự nhiên gồm $3$ chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên $2$ phần tử thuộc tập $S$, xác suất để chọn được $2$ số có ít nhất $2$ chữ số giống nhau là $\dfrac{m}{n}$ với $m,n$ là các số nguyên dương, phân số $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $m+n$.

*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 2300**

Số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau: $9\cdot 9\cdot 8=648$.

Suy ra số cách chọn 2 phần tử bất kỳ: $C_{648}^2=209628$.

Xét hai khả năng:

- **Hai số chung đúng 3 chữ số.**

Nếu cả ba chữ số đều khác $0$, có $C_9^3=84$ bộ chữ số, mỗi bộ lập được $6$ số, chọn 2 số được $C_6^2=15$ cặp. Tổng: $84\cdot 15=1260$.

Nếu có chứa chữ số $0$, có $\mathrm{C}_9^2 = 36$ bộ, mỗi bộ lập được $4$ số, chọn 2 số được $\mathrm{C}_4^2 = 6$ cặp. Tổng: $36 \cdot 6 = 216$.

Vậy cộng lại: $1260 + 216 = 1476$.

**- Hai số chung đúng 2 chữ số.**

Gọi $T$ là tập 2 chữ số chung.

- Nếu $0 \notin T$: có $\mathrm{C}_9^2 = 36$ cách chọn $T$. Với mỗi $T$, phần bù còn $8$ chữ số (gồm 0 và 7 chữ số khác 0). Chọn $\{x,y\}$ để ghép với $T$:

- Nếu $x, y \neq 0$: có $\mathrm{C}_7^2 = 21$ cách. Khi đó mỗi tập $T \cup \{x\}$ sinh $6$ số, nên tạo được $6 \times 6 = 36$ cặp. Đóng góp $21 \cdot 36 = 756$ cặp.
- Nếu một trong hai là $0$: có $7$ cách. Khi đó tập chứa $0$ sinh $4$ số, tập còn lại sinh $6$ số, nên tạo được $4 \times 6 = 24$ cặp. Đóng góp $7 \cdot 24 = 168$ cặp.

Tổng cho mỗi $T$ là $756 + 168 = 924$ cặp. Nhân $36$ tập $T$: $33264$ cặp.

- Nếu $0 \in T$: viết $T = \{0, a\}$ với $a \in \{1, \ldots, 9\}$, có $9$ cách. Khi đó chọn $\{x,y\}$ từ $8$ chữ số khác $0$, có $\mathrm{C}_8^2 = 28$ cách. Mỗi tập chứa $0$ sinh $4$ số, nên số cặp là $4 \times 4 = 16$. Vậy tổng cộng $28 \cdot 16 = 448$ cặp cho mỗi $T$. Nhân $9$ tập $T$: $4032$ cặp.

Vậy số cặp trong trường hợp này: $33264 + 4032 = 37296$.

Suy ra tổng số cặp thuận lợi là $1476 + 37296 = 38772$.

Do đó xác suất cần tìm là $\dfrac{38772}{209628} = \dfrac{359}{1941} \Rightarrow \begin{cases} m = 359 \\ n = 1941 \end{cases} \Rightarrow m + n = 2300$.

**Câu 46:** Lớp $11B$ gồm $40$ học sinh, trong đợt quyên góp hỗ trợ học sinh vùng lũ lụt, mỗi học sinh lớp $11B$ ủng hộ **nhiều nhất** $2$ **loại** trong ba loại: **sách giáo khoa (SGK), quần áo (QA)** và **tiền mặt (TM)**. Biết số học sinh tham gia thỏa mãn các điều kiện sau

4. Số học sinh ***chỉ ủng hộ* SGK** nhiều hơn tổng số học sinh ***chỉ ủng hộ* QA** và ***chỉ ủng hộ* TM** đúng $1$ bạn.
5. Trong nhóm **không ủng hộ SGK**, số học sinh ủng hộ **QA** gấp ba lần số học sinh ủng hộ TM.
6. Số học sinh ***chỉ ủng hộ* SGK** nhiều hơn **số học sinh ủng hộ SGK và một loại khác** đúng $5$ bạn.

Chọn ngẫu nhiên $2$ học sinh của lớp $11B$, biết xác suất để chọn được **một HS ủng hộ (QA & TM)** và **một HS *chỉ* ủng hộ SGK** bằng $\dfrac{m}{n}$, trong đó $m, n$ là các số nguyên dương, phân số $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $3m + n$.

***Solution: ĐGH MnP***

**Trả lời: 55**

Ký hiệu $x, y, z$ lần lượt là số học sinh chỉ ủng hộ **SGK**, **QA**, **TM**; $a, b, c$ lần lượt là số học sinh ủng hộ **SGK & QA**, **QA & TM**, **TM&SGK**.

Ta có: $\begin{cases} x = y + z + 1, \\ y + b = 3(z + b) \Rightarrow y = 3z + 2b, \\ x = a + c + 5, \\ x + y + z + a + b + c = 40. \end{cases}$

Từ $y = 3z + 2b$ suy ra $x = y + z + 1 = 4z + 2b + 1$, đồng thời $a + c = x - 5$.

Thế vào tổng: $2x + y + z + b = 45$.

Thay $x = 4z + 2b + 1$, $y = 3z + 2b$: $2(4z + 2b + 1) + (3z + 2b) + z + b = 45 \Rightarrow 12z + 7b = 43$.

Vì $b \geq 0$ nên $12z \leq 43 \Rightarrow z = 3$, suy ra $b = 1$.

Khi đó: $y = 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$; $x = 4 \times 3 + 2 \times 1 + 1 = 15$; $a + c = x - 5 = 10$.

Kiểm tra: $x + y + z + a + b + c = 15 + 11 + 3 + 10 + 1 = 40$ (đúng).

Xác suất chọn ngẫu nhiên 2 học sinh sao cho 1 HS thuộc nhóm $b$ (QA&TM) và 1 HS thuộc nhóm $x$ (chỉ SGK) là: $P = \dfrac{C_b^1 \times C_x^1}{C_{40}^2} = \dfrac{1 \times 15}{780} = \dfrac{1}{52}$. Vậy $3m + n = 3 + 52 = 55$.

**Câu 47:** Trong một giải bóng đá dành cho học sinh, các bạn được chia vào đúng **một** trong hai đội cổ vũ: **Đội Cổ vũ Xanh** và **Đội Cổ vũ Đỏ**. Ban tổ chức nhận thấy rằng nếu chọn ngẫu nhiên 2 bạn bất kỳ trong khu vực khán đài thì xác suất để 2 bạn đó cùng cổ vũ cho **một đội** bằng đúng $\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng số bạn học sinh trên khán đài nằm trong khoảng từ $300$ đến $350$ và số bạn thuộc Đội Cổ vũ Xanh nhiều hơn số bạn thuộc Đội Cổ vũ Đỏ. Hỏi có bao nhiêu bạn thuộc Đội Cổ vũ Xanh?

*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 171**

Gọi $x$ là số bạn thuộc Đội Cổ vũ Xanh, $y$ là số bạn thuộc Đội Cổ vũ Đỏ và $n = x + y$.

Ta có $300 \leq n \leq 350$, $x > y$.

Xác suất chọn ngẫu nhiên $2$ bạn **cùng đội** là $\dfrac{C_x^2 + C_y^2}{C_n^2} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $2(C_x^2 + C_y^2) = C_n^2$. Thay $C_k^2 = \dfrac{k(k-1)}{2}$, ta được $x(x-1) + y(y-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y = (x+y)^2 - (x+y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - x - y = 0$

$\Rightarrow (x-y)^2 = x + y = n$.

Vậy $n$ phải là một số chính phương. Đặt $d = x - y > 0$ thì $\begin{cases} x + y = d^2 \\ x - y = d. \end{cases}$

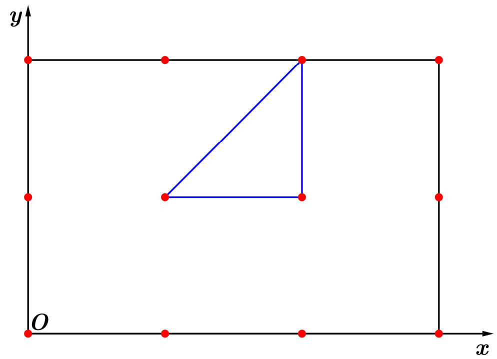
Giải hệ ta được $x = \dfrac{d^2 + d}{2}$, $y = \dfrac{d^2 - d}{2}$.

Do $300 \leq d^2 \leq 350$, trong khoảng này chỉ có một số chính phương: $324 = 18^2 \Rightarrow d = 18$.

Khi đó: $x=\dfrac{324+18}{2}=171,\quad y=\dfrac{324-18}{2}=153.$

Vậy trên khán đài có $171$ bạn thuộc Đội Cổ vũ Xanh và $153$ bạn thuộc Đội Cổ vũ Đỏ.

**Câu 48:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho các điểm $A(3,0),B(3,2),C(0,2)$.




Gọi $S$ là tập hợp các điểm có tọa độ là các số nguyên nằm trong (kể cả trên cạnh) của hình chữ nhật $OABC$. Chọn ngẫu nhiên $3$ điểm từ tập $S$, xác suất để $3$ điểm được chọn tạo thành một tam giác vuông bằng $\dfrac{m}{n}$, $\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$. Tính $m+n$.

*Solution: ĐGH MnP*

**Trả lời: 157**

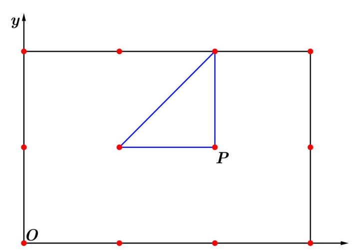
Tổng số điểm trong tập $S$ là: $4\times 3=12$ điểm.

Chọn ngẫu nhiên $3$ điểm từ $12$ điểm, số phần tử của không gian mẫu là: $\left|\Omega\right|=C_{12}^{3}$

Gọi $A$ là biến cố "3 điểm được chọn tạo thành một tam giác vuông". Ta chia làm 2 trường hợp chính:

**Trường hợp 1:** Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông // với các trục tọa độ.

Nhận thấy mọi điểm $P(x,y)$ trong $S$ đều có thể là đỉnh góc vuông.




Với mỗi đỉnh $P(x,y)$:

- Trên đường thẳng nằm ngang ( $y=\text{const}$ ) đi qua $P$, có tổng cộng 4 điểm. Trừ $P$ ra, ta có $4-1=3$ cách chọn điểm thứ hai.
- Trên đường thẳng thẳng đứng ( $x=\text{const}$ ) đi qua $P$, có tổng cộng 3 điểm. Trừ $P$ ra, ta có $3-1=2$ cách chọn điểm thứ ba.
- Có $12$ cách chọn $P$

Do đó, có tất cả $12\times 3\times 2=72\Delta$

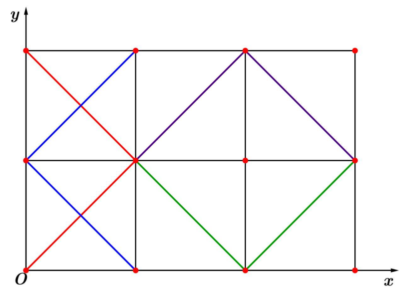
**Trường hợp 2:** Tam giác vuông xiên

Các tam giác này sẽ nội tiếp trong các hình chữ nhật nhỏ được tạo bởi lưới điểm.

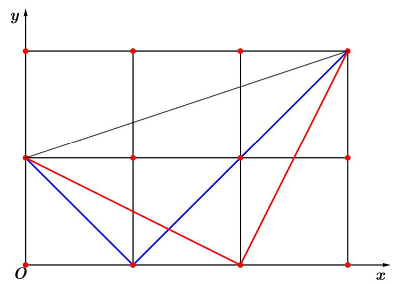
Ta xét theo kích thước các hình chữ nhật bao quanh:

***Loại 2.1***: Hình chữ nhật kích thước $2\times 1$ hoặc $1\times 2$

Có 7 hình chữ nhật loại này, mỗi hình tạo được 2 tam giác vuông, suy ra có $7\times 2=14\Delta$




**Loại 2.2:** Hình chữ nhật kích thước $3\times 2$



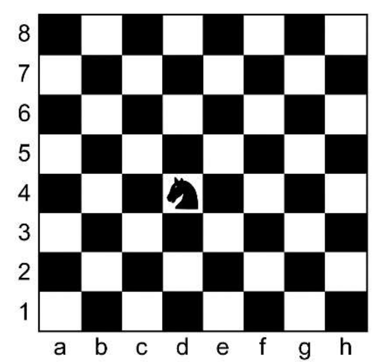

Mỗi hình chữ nhật loại này sẽ bao quanh hai dạng tam giác vuông xiên và mỗi dạng có $4$ tam giác, do đó có tất cả $8$ tam giác

Số phần tử của biến cố $A$ là: $72+14+8=94$

Xác suất cần tìm là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{47}{110}$

Giá trị cần tính: $m+n=47+110=157$

**Câu 49:** Một con mã đang được đặt ở vị trí chính giữa tâm ô vuông $d4$ trong bàn cờ vua. Thầy Nghĩa di chuyển con mã $4$ bước để sau $4$ bước đó quân mã quay trở lại vị trí ban đầu với điều kiện $4$ bước đi không trùng nhau. Mỗi bước di chuyển Thầy Nghĩa đều đặt con mã ở các điểm chính giữa tâm ô vuông đó. *($4$ điểm đặt mã sau $4$ bước được xem là $4$ điểm ở tâm ô vuông con mã đi đến).* Xác suất đường đi của con mã có $4$ điểm đặt đó là $4$ đỉnh của một hình vuông có dạng $\dfrac{a}{b}$ *(là phân số tối giản, $a,b\in\mathbb{N}^*$ ).* Tính $a+2b$ ?



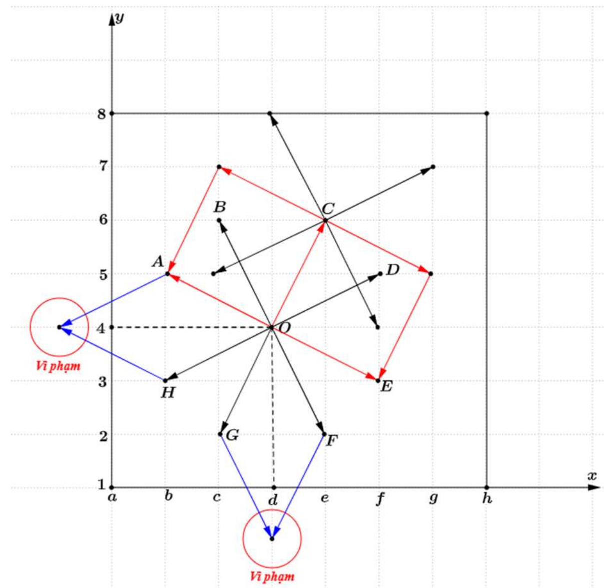

***Cách di chuyển của quân Mã:*** *Mã di chuyển theo đường chéo của hình chữ nhật $2\times 3$ ô vuông. (hoặc $3\times 2$ ô vuông).*

***Solution: Collected***

**Trả lời: 26**

Để mã di chuyển 4 bước và quay trở về vị trí ban đầu thì 4 bước đi của quân Mã tạo thành một chu trình kín $O\to P_1\to P_2\to P_3\to O$ và chu trình này phải là một hình bình hành có bước 3 ngược hướng bước 1 và bước 4 ngược hướng bước 2. Do đó, khi bước 1 đã xác định thì bước 3 và bước 4 là duy nhất ***(chỉ có 1 cách).*** Nên ở bài toán này ta chỉ cần xác định số cách chọn bước 1 và bước 2.

Từ $O\left(d4\right)$ có 8 lựa chọn vị trí là $A, B, C, D, E, F, G, H$ để di chuyển bước 1.




**Nhóm 1 (Các điểm $B, C, D, E$):** Đây là các điểm nằm sâu trong bàn cờ. Mỗi điểm này có 6 cách đi hợp lệ cho bước 2 để không vi phạm biên. Suy ra số cách đi: $4 \times 6 = 24$ cách.

**Nhóm 2 (Các điểm $A, F, G, H$):** Đây là các điểm gần biên bàn cờ. Tại các điểm này có 1 hướng đi bước 2 sẽ nhảy ra khỏi bàn cờ nên bị loại 1 cách. Mỗi điểm chỉ còn 5 cách. Suy ra số cách đi: $4 \times 5 = 20$ cách.

Suy ra tổng số phần tử của không gian mẫu là:
$n\left(\Omega\right) = 24 + 20 = 44$

Để tứ giác $OP_1P_2P_3$ là hình vuông thì hai bước đi đầu tiên ($OP_1$ và $P_1P_2$) phải có độ dài bằng nhau và vuông góc với nhau. Nên ta chỉ cần tìm các cặp vectơ bước 1 và bước 2 vuông góc.

Ta có các cặp vectơ vuông góc đôi một tạo thành hình vuông từ tâm $d4$: ($OA \perp OC$, $OC \perp OE$, $OE \perp OG$, $OG \perp OA$, $OB \perp OD$, $OD \perp OF$, $OF \perp OH$, $OH \perp OB$).

Tổng cộng có 8 cặp vuông góc. Mỗi cặp có thể đi theo 2 chiều

Suy ra số cách để mã di chuyển 4 bước tạo thành hình vuông là: $n\left(A\right) = 8 \times 2 = 16$

Ta có xác suất đường đi tạo thành hình vuông: $P = \dfrac{16}{44} = \dfrac{4}{11}$

Suy ra giá trị cần tìm: $a + 2b = 4 + 2\left(11\right) = 26$

**Câu 50:** Bác Nghĩa đang giúp con trai sắp xếp 16 cuốn sách ôn thi vào một chiếc kệ 5 ngăn phân biệt. 16 cuốn sách này thuộc 8 môn học khác nhau: **Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa, Văn, Anh**. Mỗi môn học gồm đúng 2 cuốn: một cuốn sách giáo khoa và một cuốn sách bài tập. Để việc ôn tập đạt hiệu quả cao nhất theo từng khối thi, bác Nghĩa đặt ra các quy tắc khắt khe sau:

❖ Do ngăn kệ nhỏ, mỗi ngăn chỉ được chứa **tối đa 5 cuốn sách** và không được để ngăn nào trống.
❖ Hai cuốn sách của cùng một môn học **phải luôn nằm chung một ngăn** với nhau.
❖ Các môn học trong cùng một tổ hợp môn thi phải nằm ở **3 ngăn liên tiếp** để thuận tiện cho việc tra cứu. Các tổ hợp bao gồm: **(Văn, Sử, Địa), (Toán, Lý, Hóa), (Toán, Hóa, Sinh)** và **(Toán, Lý, Anh)**.
❖ Các cuốn sách trong mỗi ngăn được xếp theo hàng ngang, thứ tự từ trái sang phải.

Tổng số cách sắp xếp 16 cuốn sách này vào 5 ngăn kệ thỏa mãn điều kiện trên là $T$. Tính giá trị của $\dfrac{T}{512}$?

*Solution: Collected*

**Trả lời: 5832**

Ta có tổng 16 cuốn sách xếp vào 5 ngăn, mỗi ngăn tối đa 5 cuốn. Do sách cùng môn luôn chung ngăn, cấu trúc phân bổ bắt buộc là 3 ngăn chứa 4 cuốn (2 môn) và 2 ngăn chứa 2 cuốn (1 môn).

Số cách hoán vị sách trong các ngăn này (với điều kiện sách cùng môn ở cùng ngăn nhưng không nhất thiết dính liền) là: $P = (4!)^3 \times (2!)^2$

Ta có các ràng buộc về vị trí môn học:

- Môn Toán (T) tham gia vào 3 tổ hợp liên tiếp $\to$ Toán cố định ở **Ngăn 3** để thỏa mãn tính liên kề của 3 tổ hợp môn
- Nhóm Xã hội (Văn, Sử, Địa) nằm ở 3 ngăn liên tiếp $\to$ Hoán vị nội bộ nhóm này là $3!$.

**Xét các trường hợp sau:**

Ta có 4 trường hợp dựa trên cách phân bổ các môn Tự nhiên trước sau đó vị trí còn trống cho nhóm Xã hội vào và phải thỏa mãn có 3 vị trí liền kề:

❖ **Trường hợp 1:** Các môn Tự nhiên trải đều trên 5 ngăn (Mỗi ngăn 1 môn)

Có 2 cấu trúc thỏa mãn: (Sinh-Hóa-Toán-Lý-Anh) và (Anh-Lý-Toán-Hóa-Sinh).

Lúc này mỗi ngăn mới chứa 2 cuốn (của Tự nhiên), nên nhóm Xã hội có thể đặt vào bất kỳ cụm 3 ngăn liên tiếp nào: $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ hoặc $(3,4,5)$.

$\Rightarrow$ Số cách chọn môn: $2 \times 3 \times 3! = 36$ cách.

❖ **Trường hợp 2:** Có một cặp môn Tự nhiên nằm chung ở Ngăn 2

Ngăn 2 lúc này chứa 4 cuốn (đầy), nên nhóm Xã hội không thể nằm ở cụm $(1,2,3)$ hay $(2,3,4)$.

Nhóm Xã hội bắt buộc lùi về $(3,4,5)$.

Có 4 cấu trúc thỏa mãn đó là:

Anh (Ngăn 1) - {Lý, Sinh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - Hóa (Ngăn 4)

Hóa (Ngăn 1) - {Lý, Sinh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - Anh (Ngăn 4)

Sinh (Ngăn 1) - {Hóa, Anh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - Lý (Ngăn 4)

Lý (Ngăn 1) - {Hóa, Anh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - Sinh (Ngăn 4)

$\Rightarrow$ Số cách chọn môn: $4 \times 1 \times 3! = 24$ cách.

❖ **Trường hợp 3:** Có một cặp môn Tự nhiên nằm chung ở Ngăn 4

Ngăn 4 lúc này chứa 4 cuốn (đầy), nhóm Xã hội bắt buộc dồn về $(1,2,3)$.

Có 4 cấu trúc thỏa mãn:

Hóa (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - {Lý, Sinh} (Ngăn 4) - Anh (Ngăn 5)

Anh (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - {Lý, Sinh} (Ngăn 4) - Hóa (Ngăn 5)

Lý (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - {Hóa, Anh} (Ngăn 4) - Sinh (Ngăn 5)

Sinh (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - {Hóa, Anh} (Ngăn 4) - Lý (Ngăn 5)

$\Rightarrow$ Số cách chọn môn: $4 \times 1 \times 3! = 24$ cách.

❖ **Trường hợp 4:** Có hai cặp môn Tự nhiên nằm ở Ngăn 1 và 2 hoặc nằm ở ngăn 4 và 5

Khi đó nhóm Xã hội bắt buộc dồn về $(3,4,5)$ hoặc ở $(1,2,3)$ nên khối xã hội Văn Sử Địa có $1 \times 3!$

Có 4 cấu trúc thỏa mãn:

{Hóa Anh} (Ngăn 1) - {Lý, Sinh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3)

{Lý, Sinh} (Ngăn 1) - {Hóa Anh} (Ngăn 2) -Toán (Ngăn 3)

Toán (Ngăn 3) - {Lý, Sinh} (Ngăn 4) - {Hóa Anh} (Ngăn 5)

Toán (Ngăn 3) - {Hóa Anh} (Ngăn 4) - {Lý, Sinh} (Ngăn 5)

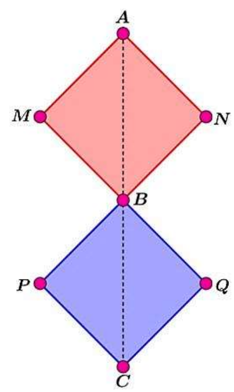
$\Rightarrow$ Số cách chọn môn: $4 \times 1 \times 3! = 24$ cách.

Suy ra tổng số cách sắp xếp môn học là: $N = 36 + 24 + 24 + 24 = 108$ cách

Ta có tổng số cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán $T = N \times P = 108 \times 55.296 = 5971968$

Suy ra: $\dfrac{T}{1024} = \dfrac{5971968}{1024} = 5832$.

**Câu 51:** Từ các số tự nhiên $1;2;3;\ldots;15$ có bao nhiêu cách chọn ra $7$ số phân biệt gắn vào $7$ đỉnh $A, B, C, M, N, P, Q$ trong hình sao cho cứ $3$ đỉnh thẳng hàng thì có số theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?




*Solution: CeT*

**Trả lời: 5040**

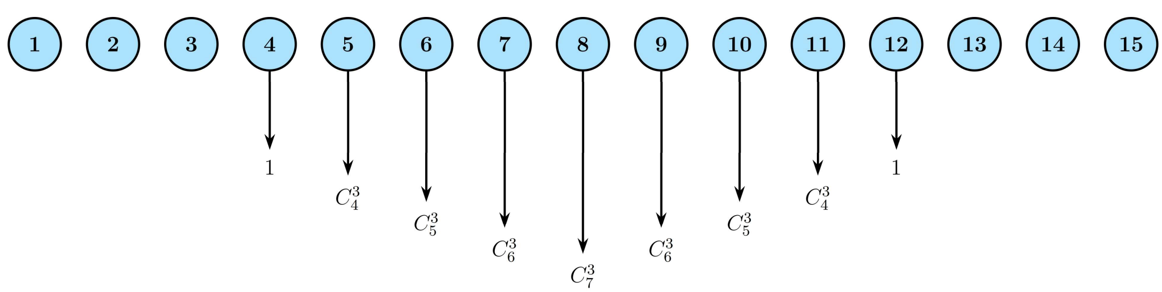
$S = \{1;2;\ldots;15\}$

Để 3 điểm thẳng hàng tạo thành cấp số cộng, tâm $B$ phải là trung bình cộng của 2 đầu mút.

Ta có hệ điều kiện: $\begin{cases} M + Q = 2B \Rightarrow M, Q \text{ cùng tính chẵn lẻ} \\ A + C = 2B \Rightarrow A, C \text{ cùng tính chẵn lẻ} \\ P + N = 2B \Rightarrow P, N \text{ cùng tính chẵn lẻ} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Bài toán quy về việc chọn vị trí cho số $B \in S$, sau đó chọn 3 cặp số rời nhau có tổng bằng $2B$.

Ta đặt trục đối xứng như ở **câu 39:**




Tương ứng với mỗi bộ 3 cặp số thỏa mãn như trên, ta có:

- $3!$ cách: Hoán vị vị trí 3 trục ($MQ, AC, PN$).
- $2^3$ cách: Hoán vị 2 đầu mút của mỗi cặp số ($\{M,Q\};\{A,C\};\{P,N\}$).

Vậy có tất cả: $2^3 \times 3! \times \left[2\left(1 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3\right) + C_7^3\right] = 5040$ cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán

**Câu 52 [Tự Luận]:** Có $2n$ ($n$ nguyên dương) kỳ thủ tham gia một giải thi đấu cờ vua, trong đó có hai bạn tên là Hoà và Bình. Ban tổ chức chia các kỳ thủ này thành $n$ cặp để thi đấu với nhau.

***a)*** Tính số cách chia cặp và chứng minh rằng số lượng đó luôn là một số lẻ.

***b)*** Biết rằng xác suất để hai bạn Hoà và Bình thi đấu cùng cặp là $\dfrac{1}{23}$. Tìm $n$.

***Solution: CeT***

***a)*** Ta thực hiện chia $n$ cặp lần lượt như sau:

- **Cặp thứ 1:** Chọn 1 người bất kỳ, số cách chọn người ghép cặp với người này là $2n-1$ (cách).
- **Cặp thứ 2:** Sau khi đã có 1 cặp, còn lại $2n-2$ người. Chọn 1 người bất kỳ trong số đó, số cách chọn người ghép cặp tiếp theo là $2n-3$ (cách).
- ...
- **Cặp thứ $n$:** Chỉ còn lại 2 người, số cách chọn là 1 (cách).

Theo quy tắc nhân, tổng số cách chia cặp là: $S = (2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1$

Vì $2n-1, 2n-3, \ldots, 1$ đều là các số lẻ, nên tích $S$ không chứa bất kỳ thừa số nguyên tố $2$ nào.

Vậy $S$ luôn là một số lẻ. (ĐPCM)

***b)*** Gọi $A$ là biến cố: "Hai bạn Hoà và Bình thi đấu cùng một cặp".

Thay vì xét toàn bộ quá trình chia cặp cho $2n$ người, ta xét phép thử chọn đối thủ cho bạn Hoà:

- Trong tổng số $2n$ kỳ thủ, trừ đi bạn Hoà, số lượng kỳ thủ còn lại để có thể ghép cặp với Hoà là: $2n-1$ người
- Vì việc chia cặp là hoàn toàn ngẫu nhiên, nên mỗi người trong số $2n-1$ kỳ thủ này đều có khả năng như nhau để trở thành đối thủ của Hoà.
- Số trường hợp thuận lợi cho biến cố $A$ là 1 (chỉ có duy nhất bạn Bình).

Suy ra xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{1}{2n-1}$

Theo giả thiết, xác suất này bằng $\dfrac{1}{23}$, ta có phương trình: $\dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{1}{23} \Rightarrow n = 12$. Vậy $n = 12$.

**Câu 53:** Xếp ngẫu nhiên ba đôi giày khác nhau (gồm 6 chiếc) thành một hàng ngang. Biết rằng xác suất để xảy ra biến cố “không có chiếc giày trái nào nằm cạnh chiếc giày phải của một đôi khác” bằng $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Giá trị của $m+n$ bằng?

***Solution: CeT***

**Trả lời: 13**

Xếp 6 chiếc giày vào 6 chỗ $\Rightarrow n(\Omega) = 6! = 720$.

Điều kiện: *"Không có chiếc giày trái nào nằm cạnh chiếc giày phải của một đôi khác"*.

Tương đương nếu một chiếc Trái (L) và một chiếc Phải (R) nằm cạnh nhau, chúng **bắt buộc** phải là một đôi. Do đó, không thể xảy ra tình huống ...L-R-L... hoặc ...R-L-R...

Ta xét các trường hợp sau:

+) LLL-RRR hoặc RRR-LLL có: $3!\times 1\times 2!\times 2=24$ cách

+) R-LLL-RR, RR-LLL-R, LL-RRR-L, L-RRR-LL có: $3!\times 1\times 1\times 4=24$ cách

+) L -RR-LL-R hoặc R-LL-RR-L có: $3!\times 2=12$ cách

Tổng số cách xếp là: $24+24+12=60$. Xác suất: $P=\frac{60}{720}=\frac{1}{12}\Rightarrow m+n=13$.

**Câu 54:** Cho một cái hộp chứa $(n+1)$ quả bóng (với $n$ là số nguyên dương), trên đó lần lượt ghi các số nguyên từ $0$ đến $n$, mỗi số đúng một lần. Từ hộp này, ta thực hiện quá trình lấy ra một quả bóng, kiểm tra số ghi trên bóng rồi lại bỏ vào hộp, lặp lại quá trình đó $5$ lần. Gọi $a_n$ là số trường hợp mà $5$ số đã kiểm tra thỏa mãn các điều kiện sau

➢ Số ghi trên quả bóng lấy ra sau không nhỏ hơn số ghi trên quả bóng lấy ra trước đó.

➢ Số ghi trên quả bóng lấy ra lần ba lớn hơn số ghi trên quả bóng lấy ra lần thứ nhất đúng 1 đơn vị.

Giá trị của $\sum_{n=1}^{18}\frac{a_n}{n+2}$ bằng?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 760**

Gọi 5 số lấy ra theo thứ tự không giảm là $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$.

Ta có điều kiện: $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5$ và $x_3=x_1+1$.

+) Vì $x_1\le x_2\le x_3$ nên $x_2$ có 2 cách chọn ($x_2=x_1$ hoặc $x_2=x_3$).

+) Chọn bộ 3 số còn lại $(x_1,x_4,x_5)$ thỏa mãn $0\le x_1<x_4\le x_5\le n \longrightarrow$ Có $C_{n+2}^3$ cách.

Suy ra: $a_n=2\cdot C_{n+2}^3 \longrightarrow S=\sum_{n=1}^{18}\frac{2\cdot C_{n+2}^3}{n+2}=760$.

**Câu 55:** Số cách xóa đi $26$ chữ cái từ chuỗi $30$ chữ cái

***TSATSATSATSATSATSATSATSATSATSA***

sao cho $4$ chữ cái còn lại tạo thành từ ***TSAT*** theo đúng thứ tự?

*Solution: CeT*

**Trả lời: 495**

Gọi số chữ cái bị xóa nằm trước các chữ cái $T,S,A,T$ lần lượt là $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$

$$\underbrace{\dots\dots\dots}_{x_1}T\underbrace{\dots\dots\dots}_{x_2}S\underbrace{\dots\dots\dots}_{x_3}A\underbrace{\dots\dots\dots}_{x_4}T\underbrace{\dots\dots\dots}_{x_5}$$

Ta có phương trình: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=26 \quad (1)$

Dễ thấy, để các ký tự giữ lại đúng là $T,S,A,T$ theo thứ tự, khoảng cách giữa các ký tự được chọn phải là bội số của 3. Cụ thể:

+) $x_1$: Phải xóa số lượng là bội của 3 để ký tự tiếp theo là $T\Rightarrow x_1\,⋮\,3$.

+) $x_2,x_3,x_4$: Do $T,S,A$ nằm liên tiếp trong chu kỳ, muốn giữ đúng thứ tự này ở các chu kỳ tiếp theo thì số lượng ký tự xóa giữa chúng phải là bội của 3 $\Rightarrow x_2, x_3, x_4 \vdots 3$.

+) $x_5$: Từ $(1)$, do $26$ chia 3 dư 2 và $x_1, \ldots, x_4$ đều chia hết cho 3 $\Rightarrow x_5$ chia 3 dư 2.

Dựa trên biện luận trên, ta đặt: $x_1 = 3k_1$; $x_2 = 3k_2$; $x_3 = 3k_3$; $x_4 = 3k_4$; $x_5 = 3k_5 + 2$

Thay vào phương trình $(1)$: $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 8$.

Số nghiệm của phương trình trên là: $C_{8+5-1}^4 = C_{12}^4 = 495$ cũng chính là số cách xóa 26 chữ cái

**Câu 56 [Tự Luận]:** Có 3 quả bóng xanh, 4 quả bóng đỏ, 5 quả bóng trắng. Các quả bóng cùng màu là giống hệt nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 12 quả bóng đó trên cùng một hàng ngang sao cho nhóm 3 quả bóng xanh không nằm kề nhau, nhóm 4 quả bóng đỏ không nằm kề nhau và nhóm 5 quả bóng trắng không nằm kề nhau.

**Solution: DGH MnP**

Phủ định của yêu cầu $A$: nhóm 3 quả bóng xanh không nằm kề nhau, nhóm 4 quả bóng đỏ không nằm kề nhau và nhóm 5 quả bóng trắng không nằm kề nhau.

Là yêu cầu $\overline{A}$: nhóm 3 quả bóng xanh nằm kề nhau hoặc nhóm 4 quả bóng đỏ nằm kề nhau hoặc nhóm 5 quả bóng trắng nằm kề nhau. Ta thấy rằng có thể dễ dàng đếm được số các cách xếp thỏa mãn các yêu cầu $\overline{A}$ bằng cách dùng nguyên lý bao hàm và loại trừ. Vì vậy ta đếm phần bù.

Gọi $S$ là tập tất cả các cách xếp 12 quả bóng đó trên cùng một hàng ngang.

Gọi $X$, $D$, $T$ lần lượt là tập các cách xếp sao cho nhóm 3 quả bóng xanh kề nhau, nhóm 4 quả bóng đỏ kề nhau, nhóm 5 quả bóng trắng kề nhau. Khi đó ta có

$$|S| = \frac{(3+4+5)!}{3!.4!.5!} = 27720; |X| = \frac{(4+5+1)!}{4!.5!} = 1260; |D| = \frac{(4+5+1)!}{4!.5!} = 504; |T| = \frac{(3+4+1)!}{3!4!} = 280;$$

$$|X \cap D| = \frac{(5+1+1)!}{5!} = 42; |X \cap T| = \frac{(4+1+1)!}{4!} = 30; |T \cap D| = \frac{(3+1+1)!}{3!} = 20;$$

$$|X \cap D \cap T| = 3! = 6.$$

Theo nguyên lý bao hàm và loại trừ, ta có

$$\begin{aligned} |X \cup D \cup T| &= |X| + |D| + |T| - |X \cap D| - |X \cap T| - |D \cap T| + |X \cap D \cap T| \\ &= 1260 + 504 + 280 - 42 - 30 - 20 + 6 = 1958. \end{aligned}$$

Từ đó, số các cách xếp sao cho nhóm 3 quả bóng xanh không nằm kề nhau, nhóm 4 quả bóng đỏ không nằm kề nhau và nhóm 5 quả bóng trắng không nằm kề nhau là

$$|S| - |X \cup D \cup T| = 27720 - 1958 = 25762.$$

**Câu 57 [Tự Luận]:** Cho $n$ đường tròn đôi một cắt nhau và không có ba đường tròn nào cùng đi qua một điểm. Hỏi với $n$ đường tròn như thế thì chia mặt phẳng thành mấy miền?

**Solution: CeT**

Gọi $S(n)$ là số miền của mặt phẳng được chia bởi $n$ đường tròn như trên.

Ta có $S(1) = 2$.

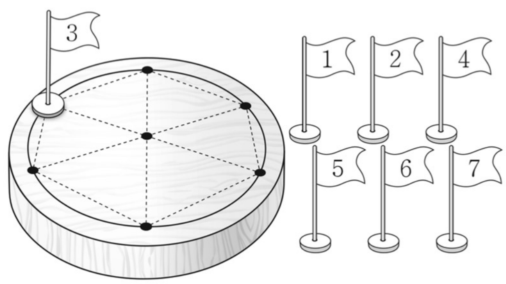
Xét đường tròn thứ $n+1$, đường tròn này cắt $n$ đường tròn cho trước tại $2n$ điểm, $2n$ điểm này chia đường tròn thứ $n+1$ thành $2n$ cung tròn, mỗi cung thuộc $1$ miền trong số $S(n)$ miền phân biệt nên mỗi cung tròn này chia mỗi miền chứa nó thành $2$ miền phân biệt nên số miền tăng thêm khi có thêm đường tròn thứ $n+1$ là $2n$. Vậy, ta có $S(n+1)=S(n)+2n$.

Từ đây ta có:

$$S(n)=S(n-1)+2(n-1)$$
$$S(n-1)=S(n-2)+2(n-2)$$
$$.....$$
$$S(2)=S(1)+2$$

Vậy, $S(n)=2.\dfrac{(n-1)n}{2}+2=n^2-n+2$.

**Câu 58:** Như hình vẽ, trên một đĩa tròn có vẽ một đường tròn với bán kính bằng $1$. Trên đường tròn này có $6$ điểm chia chu vi thành $6$ phần bằng nhau, và tâm của đường tròn cũng được đánh dấu. Có $7$ lá cờ được đánh số từ $1$ đến $7$. Người ta muốn đặt $7$ lá cờ này vào $7$ điểm nói trên, mỗi điểm đặt đúng một lá. Hãy tìm số cách xếp sao cho trong số $7$ điểm đặt cờ, nếu $3$ điểm bất kỳ tạo thành một tam giác đều có cạnh bằng $1$, thì tổng của ba số ghi trên ba lá cờ tại các đỉnh của tam giác đó phải nhỏ hơn hoặc bằng $12$. (Lưu ý: Các cách xếp trùng nhau qua phép quay được tính là một).




*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 40**

Gọi $x_0$ là số ở tâm. Tam giác đều cạnh 1 có tổng đỉnh $\le 12$ tương đương với:

$$x_i+x_{i+1}\le 12-x_0 \text{ (với mọi cặp điểm liền kề trên đường tròn)}$$

Nhận thấy nếu $x_0=3$ thì bắt buộc số 7 và số 6 đều phải nằm giữa 1 và 2 trên đường tròn (vô lí)

Như vậy, số đặt ở tâm chỉ có thể là 1 hoặc 2

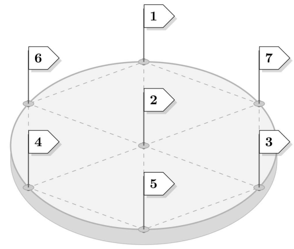
**Trường hợp 1:** Tâm là 2 ($x_0=2$)

Điều kiện: Tổng 2 số kề nhau $\le 10$. Tập còn lại: $\{1,3,4,5,6,7\}$.

Các số liền kề số 7 phải $\le 3$. Chỉ có $\{1,3\}$ thỏa mãn $\Rightarrow$ Số 7 phải nằm giữa hai số 1 và 3

Xếp 3 số $\{4,5,6\}$ chỉ có trường hợp số 6 nằm giữa 4 và 5 thỏa mãn

Do đó có tất cả: $2\times 2=4$ cách (vì các cặp $\{1,3\}$; $\{4,5\}$ đổi chỗ cho nhau).



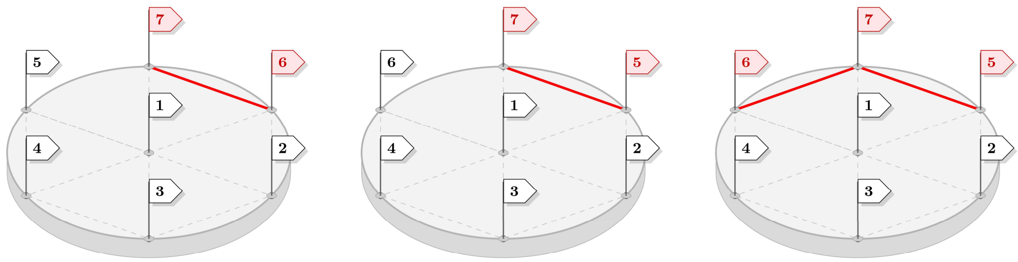

**Trường hợp 2:** Tâm là 1 ($x_0 = 1$)

Điều kiện: Tổng 2 số kề nhau $\leq 11$. Tập còn lại: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ta sử dụng nguyên lý bao hàm - loại trừ để đếm số cách xếp hợp lệ

Xếp 6 số lên đường tròn có $(6-1)! = 5!$ cách

Điều kiện vi phạm là khi có cặp có tổng $> 11$. Với tập số này, chỉ có 2 cặp vi phạm: $(7,6)$ và $(7,5)$.



7 cạnh 6 | 7 cạnh 5 | 7 cạnh 5 và 6

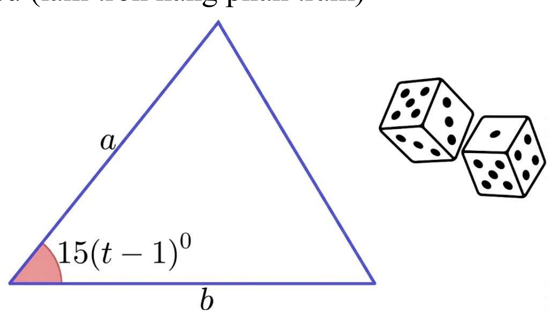
Trường hợp 7 đứng cạnh 6 có $2 \times 4!$ cách. Tương tự, trường hợp 7 đứng cạnh 5 cũng có $2 \times 4!$ cách.

Trường hợp 7 đứng cạnh cả 5 và 6 có $2 \times 3!$ cách

Số cách xếp hợp lệ: $5! - \left(2 \times 4! + 2 \times 4! - 2 \times 3!\right) = 36$ cách

Vậy, có tất cả $36 + 4 = 40$ cách xếp cờ thỏa mãn yêu cầu bài toán

**Câu 59:** Một tam giác ngẫu nhiên là một tam giác được tạo ra bằng cách tung ngẫu nhiên, độc lập một cặp xúc sắc cân đối, đồng chất ba lần liên tiếp. Mỗi lần tung ta đem cộng số chấm trên mặt hai con xúc sắc thu được các số $a, b, t$ lần lượt là độ dài hai cạnh và $15(t-1)^{\circ}$ là góc giữa hai cạnh đó. Gọi $S$ là tập hợp các tam giác ngẫu nhiên. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của $S$, tính xác suất để chọn được một tam giác vuông bằng bao nhiêu (làm tròn hàng phần trăm)

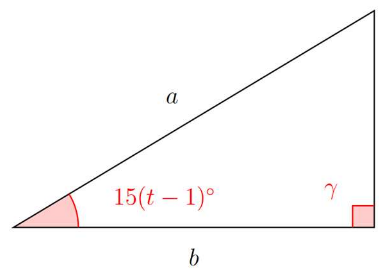



*Solution: CeT*

**Trả lời:**

**Trường hợp 1:** $15(t-1)^{\circ}=90^{\circ}$ hay $t=7$, lúc đó với mọi $a,b$ thì tam giác đều là tam giác vuông nên xác suất xảy ra trường hợp này là $\frac{1}{6}$.

**Trường hợp 2:** Góc vuông là một trong 2 góc còn lại, không mất tính tổng quát ta giả sử đó là góc $\gamma$




Khi đó $b=a\cos\left[15(t-1)^{\circ}\right]$ khi đó vì $a,b$ là 2 số nguyên nên và $15(t-1)^{\circ}$ chỉ nhận các giá trị $15^{\circ},30^{\circ},45^{\circ},60^{\circ},75^{\circ}$ từ đó dễ dàng suy ra $t=5$ và $a=2b$ . Xác suất để $t=5$ là

$P(t=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Xác suất để $a=2b$: $\begin{cases} b=2,a=4: \frac{1}{36}\times\frac{3}{36}=\frac{3}{36^2} \\ b=3,a=6: \frac{2}{36}\times\frac{5}{36}=\frac{10}{36^2} \\ b=4,a=8: \frac{3}{36}\times\frac{5}{36}=\frac{15}{36^2} \\ b=5,a=10: \frac{4}{36}\times\frac{3}{36}=\frac{12}{36^2} \\ b=6,a=12: \frac{5}{36}\times\frac{1}{36}=\frac{5}{36^2} \end{cases} \Rightarrow P(a=2b)=\frac{3+10+15+12+5}{36^2}=\frac{45}{1296}$

Do vai trò $a,b$ như nhau, xác suất để $b=2a$ cũng bằng $\frac{45}{1296}$.

Vậy xác suất cho Trường hợp 2 là: $P_2=\frac{1}{9}\times\left(\frac{45}{1296}+\frac{45}{1296}\right)=\frac{5}{648}$

Xác suất cần tìm là: $P=\frac{1}{6}+\frac{5}{648}=\frac{113}{648}\approx 0{,}17$

**Câu 60:** Ba số $a_1,a_2,a_3$ được chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) từ tập hợp $\{1,2,3,\ldots,1000\}$. Tiếp theo đó, ba số khác $b_1,b_2,b_3$ được chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) từ tập hợp 997 số còn lại. Gọi $p$ là xác suất để sau khi xoay chiều phù hợp, một viên gạch có kích thước $a_1\times a_2\times a_3$ có thể đặt lọt vào bên trong một chiếc hộp có kích thước $b_1\times b_2\times b_3$, sao cho các cạnh của viên gạch song song với các cạnh của chiếc hộp. Biết $p$ có dạng $\frac{a}{b}$ tối giản, tính $4a+8b$.

*Solution: DGH MnP*

**Trả lời: 36**

Gọi 6 số được chọn ra từ tập hợp ban đầu là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần:

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6$$

Rõ ràng:

- $x_1$ chắc chắn phải là một cạnh của chiếc **hộp** (để cạnh lớn nhất của hộp bao được cạnh lớn nhất của gạch).
- $x_6$ chắc chắn phải là một cạnh của viên **gạch** (để cạnh nhỏ nhất của gạch chui lọt cạnh nhỏ nhất của hộp).

Ta còn lại 4 số ở giữa $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Ta cần chọn thêm 2 số nữa cho Hộp

**Trường hợp 1:** Nếu $x_2$ là một cạnh của hộp.

Khi đó, $x_2$ là cạnh lớn thứ nhì của hộp . Vì $x_2$ lớn hơn tất cả các số còn lại ($x_3, x_4, x_5$), nên dù ta chọn số nào trong 3 số còn lại làm cạnh thứ 3 của hộp thì điều kiện "cạnh gạch nhỏ hơn cạnh hộp" luôn được thỏa mãn $\rightarrow$ Có 3 cách chọn số còn lại.

**Trường hợp 2:** Nếu $x_2$ không phải cạnh của hộp, nhưng $x_3$ là cạnh của hộp.

- Lúc này Hộp có $\{x_1, x_3, \ldots\}$ và Gạch có $\{x_2, x_6, \ldots\}$.
- Ta còn 2 số $\{x_4, x_5\}$. Chọn 1 số bất kỳ cho hộp thì số còn lại cho gạch.
- Do $x_3$ lớn hơn cả $x_4$ và $x_5$ nên điều kiện luôn thỏa mãn $\rightarrow$ Có 2 cách chọn số còn lại.

**Trường hợp 3:** Nếu cả $x_2$ và $x_3$ đều không phải là cạnh hộp

Hiển nhiên loại trường hợp này

Xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{3+2}{C_6^3} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 4a + 8b = 36$.

***----Hết----***

## Tài liệu tham khảo

[1] Các đề thi thử trên cả nước.

[2] Chuyên đề về bài toán chia kẹo Euler – PimaX.

[3] Tinh hoa vận dụng cao tổ hợp xác suất – Tư Duy Mở.

[4] 20 đề thi thử tốt nghiệp THPT Quốc gia năm 2026 môn Toán – Hoàng Xuân Nhàn.

[5] Các nguồn tài liệu khác trên Internet.

Bên cạnh đó xin gửi lời cảm ơn tới ***CLB DGH MnP*** đã hỗ trợ tạo nên sản phẩm này. Ngoài ra có một số bài toán và tài liệu chúng tôi tham khảo và sưu tầm trên Internet nhưng không xác minh được rõ tác giả của chúng, do vậy sẽ không trích dẫn ở đây. Mong tác giả của những bài toán và tài liệu này hết sức thông cảm.